

УДК 514.853+517.938.5

С. С. Николаенко

Топологическая классификация гамильтоновых систем на двумерных некомпактных многообразиях

Строится полный топологический инвариант слоений конечного типа, задаваемых гладкими функциями на некомпактных ориентируемых двумерных многообразиях. В частности, приводится полная топологическая классификация некомпактных бифуркаций таких слоений. Устанавливается естественное взаимно однозначное соответствие между множеством всех таких бифуркаций и множеством ориентированных цветных графов специального вида. Как следствие получены лиувиллева и траекторная классификации гамильтоновых систем конечного типа на некомпактных двумерных многообразиях.

Библиография: 25 названий.

Ключевые слова: гамильтонова система, топологическая классификация, траекторная эквивалентность, некомпактный атом, f -граф.

§ 1. Введение

В конце 80-х – 90-х годах XX века А. Т. Фоменко и его школой была создана теория топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем, позволяющая эффективно классифицировать вполне интегрируемые по Лиувиллю невырожденные гамильтоновы системы с двумя степенями свободы с точностью до различных типов эквивалентности [1, 2, 3, 4, 5]. Прежде всего имеются в виду лиувиллева (теория Фоменко–Цишанга [5]) и траекторная эквивалентность (теория Фоменко–Болсинова [6, 7, 8]). Наиболее полный обзор основ этой теории с современной точки зрения содержится в [9].

Под гладкой *гамильтоновой системой* с n степенями свободы понимается тройка (M^{2n}, ω, H) , где M^{2n} – симплектическое многообразие с симплектической структурой ω , $H \in C^\infty(M^{2n})$ – функция Гамильтона (гамильтониан), определяющая на многообразии M^{2n} гамильтоново векторное поле $\text{sgrad } H = \omega^{-1}dH$. Напомним, что гамильтонова система (M^{2n}, ω, H) называется *вполне интегрируемой (по Лиувиллю)*, если она обладает n гладкими функционально независимыми первыми интегралами в инволюции. Иногда в литературе в определении интегрируемости по Лиувиллю требуется условие полноты гамильтоновых векторных полей, порождаемых первыми интегралами (это означает, что естественный параметр на их интегральных траекториях определён на всей числовой прямой). Однако в данной работе это условие не понадобится.

Работа выполнена за счёт гранта Российского научного фонда (проект №17-11-01303).

Каждой вполне интегрируемой гамильтоновой системе отвечает *слоение Лиувилля*, т. е. разбиение фазового многообразия на связные компоненты совместных поверхностей уровня первых интегралов (*лиувиллевы слои*). Согласно классической теореме Лиувилля, почти все лиувиллевы слои диффеоморфны факторпространству группы \mathbb{R}^n по дискретной подгруппе \mathbb{Z}^k . В частности, почти все компактные слои диффеоморфны n -мерному тору T^n . Слоение Лиувилля является важным топологическим инвариантом интегрируемой системы, позволяющим понять многие её качественные характеристики (такие как устойчивость особых траекторий, смена различных режимов движения и др.). Под задачей *лиувиллевой классификации* интегрируемых систем понимается задача их классификации с точностью до гомеоморфизмов (диффеоморфизмов) фазового многообразия, сохраняющих слоение Лиувилля. Более тонкой является задача *траекторной классификации*, т. е. классификации с точностью до гомеоморфизмов (диффеоморфизмов), переводящих интегральные траектории в интегральные траектории.

Классификационная теория, построенная А. Т. Фоменко, существенно использует компактность слоёв слоения Лиувилля. В то же время в физике и механике известно большое количество систем, в которых возникают слоения с некомпактными слоями, в частности, интегрируемые бильярды в областях, ограниченных софокусными квадратами [10, 11], натуральные системы на многообразиях Бертрана [12, 13], некоторые интегрируемые случаи в динамике твёрдого тела [14, 15] и др. Поэтому возникает задача обобщения теории Фоменко на некомпактный случай, см. [16]. Исследованию некомпактных слоений Лиувилля посвящено довольно большое число работ. В частности, в [17] приводится аналог теоремы Лиувилля для некомпактных слоений в случае полноты гамильтоновых потоков. Исследованию интегрируемых систем с неполными потоками посвящены работы [18, 19]. Аналоги теоремы Лиувилля для систем с неполными потоками содержатся в [19, 20, 21, 22].

Настоящая работа продолжает намеченное в [16] направление исследований и полностью решает задачу лиувиллевой и траекторной классификации гамильтоновых систем с некомпактными слоениями в самом простом случае: для систем с одной степенью свободы конечного типа (определение 14), причем мы не предполагаем ни невырожденность системы, ни полноту гамильтонова потока. Сначала мы строим полный топологический инвариант слоений конечного типа (определение 13), задаваемых гладкими функциями на некомпактных ориентируемых двумерных многообразиях (теорема 3.1). Затем мы приводим полную топологическую классификацию бифуркаций (атомов) таких слоений (теоремы 4.1, 4.2, 4.3), устанавливаем естественное взаимно однозначное соответствие между множеством всех таких бифуркаций и множеством ориентированных цветных графов специального вида (теоремы 5.1, 5.2), а также перечисляем все бифуркации малой сложности (теорема 5.3). Как следствие получается лиувиллева и траекторная классификация гамильтоновых систем конечного типа на некомпактных двумерных многообразиях (теоремы 3.2, 3.3).

§ 2. Основные определения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Под *некомпактной гамильтоновой системой с одной степенью свободы* будем понимать тройку (M^2, ω, H) , где M^2 – некомпактное двумерное симплектическое многообразие с симплектической структурой ω , H – гладкая функция на M^2 (функция Гамильтона, или гамильтониан). *Гамильтоново векторное поле* на M^2 задаётся формулой $v = \text{sgrad } H = \omega^{-1}dH$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Любая гамильтонова система с одной степенью свободы является вполне интегрируемой по Лиувиллю: её единственным необходимым для интегрируемости первым интегралом является сам гамильтониан H .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Из симплектичности многообразия следует его ориентированность: ориентация на нём задаётся с помощью формы объёма, определяемой симплектической структурой ω . На двумерном многообразии такая форма объёма совпадает с симплектической формой.

Для дальнейшего нам будет удобно уточнить понятие лиувиллевой и траекторной эквивалентности для систем с одной степенью свободы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Две гамильтоновы системы (M_1^2, ω_1, H_1) и (M_2^2, ω_2, H_2) будем называть непрерывно лиувиллево эквивалентными, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\xi: M_1^2 \rightarrow M_2^2$, переводящий лиувиллевы слои первой системы в лиувиллевы слои второй системы, а критические точки функции H_1 – в критические точки функции H_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Две гамильтоновы системы (M_1^2, ω_1, H_1) и (M_2^2, ω_2, H_2) будем называть непрерывно траекторно эквивалентными, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\xi: M_1^2 \rightarrow M_2^2$, переводящий интегральные траектории первой системы в интегральные траектории второй системы с сохранением естественной ориентации траекторий.

В случае систем с одной степенью свободы почти все лиувиллевы слои одномерны и являются попросту линиями уровня функции H , причём каждый слой состоит из одной или нескольких интегральных траекторий системы. В связи с этим в рассматриваемом случае задачи лиувиллевой и траекторной классификации практически не различаются: единственное отличие состоит в необходимости учитывать ориентацию траекторий при траекторной классификации. Более того, разбиение многообразия M^2 как на лиувиллевы слои, так и на интегральные траектории никак не зависит от симплектической формы ω и определяется только функцией H . Поэтому естественно отвлечься от наличия симплектической структуры и решить сначала более общую задачу топологического описания слоения, задаваемого гладкой функцией на произвольном двумерном некомпактном многообразии (см. также [23]). В частном случае, когда многообразие ориентируемо, мы получим соответствующие классификационные результаты для гамильтоновых систем.

Сформулируем поставленную задачу более подробно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Гладкие функции f_1 и f_2 , заданные соответственно на некомпактных гладких двумерных многообразиях M_1^2 и M_2^2 , назовём *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\xi: M_1^2 \rightarrow M_2^2$, отображающий линии уровня функции f_1 на линии уровня функции f_2 и критические точки функции f_1 – в критические точки функции f_2 .

Говоря о линии уровня функции f на многообразии M^2 , мы имеем в виду связную компоненту множества $\{x \in M^2: f(x) = c\}$. Таким образом, линии уровня всюду предполагаются связными.

Наша задача состоит в построении полного инварианта топологической эквивалентности, отвечающего паре (M^2, f) , где M^2 – некомпактное многообразие, f – гладкая функция на нём. Напомним, как строится этот инвариант для функции Морса на компактном многообразии в рамках теории Фоменко (см. [9]). Рассматривается пространство линий уровня функции f . Оно имеет структуру графа, рёбра которого соответствуют однопараметрическим семействам регулярных слоёв (гомеоморфных окружности), а вершины – особым слоям (содержащим критические точки функции f), отвечающим перестройке регулярных слоёв. В каждую вершину помещается буква (“атом”), кодирующая соответствующую перестройку. Под атомом понимается малая инвариантная окрестность особого слоя, рассматриваемая с точностью до послынного гомеоморфизма. Иными словами, атом – это росток слоения в окрестности особого слоя. Построенный таким образом граф с вершинами–атомами называется *молекулой*, отвечающей паре (M^2, f) . В случае ориентированного компактного многообразия M^2 молекула является полным инвариантом топологической эквивалентности.

В случае некомпактного многообразия M^2 мы имеем дело с некоторыми новыми эффектами. Рассмотрим, к примеру, открытый двумерный диск с выколотой точкой в $\mathbb{R}^2(x, y)$, задаваемый неравенствами $0 < x^2 + y^2 < 1$, и рассмотрим на нём функцию $f = x^2 - y^2$. Эта функция вообще не имеет критических точек, хотя задаваемое ею слоение нетривиально (рис. 1, слева). В компактном случае такая ситуация невозможна, так как любая гладкая функция на компактном многообразии имеет критические точки. Далее, рассмотрим пространство линий уровня функции f . Легко видеть, что оно не только не является графом, но даже не хаусдорфово. Действительно, значению $f = 0$ отвечают 4 линии уровня, которым соответствуют 4 неотделимые точки в пространстве линий уровня (рис. 1, справа).

В связи с эффектом нехаусдорфовости пространства линий уровня в общем случае, мы приходим к необходимости уточнить понятие слоя слоения, задаваемого функцией f на некомпактном многообразии M^2 . Для этого введём на пространстве линий уровня следующее отношение эквивалентности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Две линии уровня L и L' назовём *эквивалентными*, если существует такая последовательность линий уровня $L_1 = L, L_2, \dots, L_k = L'$, что любые две соседние линии уровня L_i и L_{i+1} неотделимы в пространстве линий уровня (иначе говоря, любые инвариантные окрестности линий уровня L_i и L_{i+1} имеют непустое пересечение).

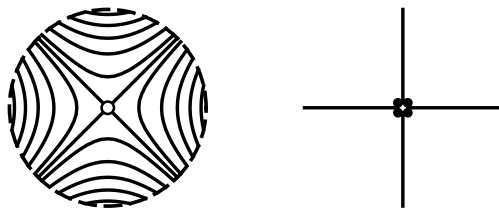


Рис. 1. Пример нетривиального слоения (слева) на некомпактном многообразии с нехаусдорфовым пространством линий уровня (справа), задаваемого функцией без критических точек

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Слоем* слоения многообразия M^2 , задаваемого функцией f , будем называть объединение всех линий уровня, принадлежащих одному классу отношения эквивалентности из определения 5.

Таким образом, по нашему определению слой может быть несвязным. Однако ясно, что на каждой его связной компоненте функция f принимает одно и то же значение.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Пространство слоёв \mathcal{C} и пространство линий уровня \mathcal{L} , по определению, являются факторпространствами многообразия M^2 по следующему отношению эквивалентности: две точки $x, y \in M^2$ эквивалентны, если они принадлежат одному слою (соответственно одной линии уровня). В то же время пространство \mathcal{C} является факторпространством пространства \mathcal{L} по отношению эквивалентности из определения 5.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Несложно видеть, что в определении 4 условие того, что гомеоморфизм $\xi: M_1^2 \rightarrow M_2^2$ переводит линии уровня в линии уровня, равносильно тому, что он является послойным, т. е. переводит слои в слои.

Далее требуется осмыслить, какие слои следует считать регулярными, а какие особыми. Так как нас интересует задача описания топологии рассматриваемого слоения, то естественно особыми слоями считать те, в окрестности которых топология слоения нетривиальна. При этом, как видно из приведённого выше примера, функция f вовсе не обязана иметь критические точки на особом слое. Это ещё одно отличие от компактного случая (на компактном многообразии слоение всегда тривиально в окрестности слоя, не содержащего критических точек функции f).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ – расширенная числовая прямая с естественной топологией. Точку $c \in \overline{\mathbb{R}}$ назовём *регулярным* (или *несобным*) значением функции f , если прообраз $f^{-1}(c)$ не содержит критических точек функции f и если найдется такая окрестность $U_\varepsilon(c) \subset \overline{\mathbb{R}}$, $\varepsilon > 0$, точки c и такой диффеоморфизм $\alpha: f^{-1}(U_\varepsilon(c)) \rightarrow f^{-1}(c) \times U_\varepsilon(c)$, что следующая диаграмма

КОММУТАТИВНА:

$$\begin{array}{ccc}
 f^{-1}(U_\varepsilon(c)) & \xrightarrow{\alpha} & f^{-1}(c) \times U_\varepsilon(c) \\
 & \searrow f & \swarrow p_2 \\
 & & U_\varepsilon(c)
 \end{array}$$

Здесь $U_\varepsilon(c) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, если $c \in \mathbb{R}$, $U_\varepsilon(+\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right)$, $U_\varepsilon(-\infty) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Через p_2 здесь и далее обозначаем проекцию на второй сомножитель.

Точку $c \in \overline{\mathbb{R}}$ назовём *бифуркационным* (или *особым*) значением функции f , если она не является регулярным значением.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Если прообраз $f^{-1}(c)$ точки c пуст, то она, согласно определению, является регулярным значением для функции f в точности тогда, когда прообраз $f^{-1}(U_\varepsilon(c))$ некоторой её окрестности $U_\varepsilon(c)$ также пуст. В частности, точка $+\infty$ (или $-\infty$) является регулярным значением для функции f в точности в том случае, когда f ограничена сверху (снизу).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Слой $C \subset f^{-1}(c)$ назовём *регулярным* (или *неособым*), если он не содержит критических точек функции f и если найдутся такая связная инвариантная окрестность $U(C) \subset f^{-1}(U_\varepsilon(c))$ и такой диффеоморфизм $\alpha: U(C) \rightarrow C \times U_\varepsilon(c)$, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc}
 U(C) & \xrightarrow{\alpha} & C \times U_\varepsilon(c) \\
 & \searrow f & \swarrow p_2 \\
 & & U_\varepsilon(c)
 \end{array}$$

Слой C назовём *бифуркационным* (или *особым*), если он не является регулярным.

В силу нашего определения, любой критический слой (то есть содержащий критические точки функции f) является бифуркационным, но не наоборот (пример был приведён выше). Ясно также, что все слои в прообразе регулярного значения регулярны, в то время как в прообразе особого значения могут содержаться как особые, так и регулярные слои.

Отметим, что регулярный слой всегда связан (это напрямую следует из его определения) и, следовательно, диффеоморфен прямой или окружности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть c – бифуркационное значение функции f , и пусть некоторая его замкнутая окрестность $\overline{U}_\varepsilon(c)$ не содержит никаких других бифуркационных значений, кроме c . Атомом назовём пару (V, f) , где $V \subset f^{-1}(\overline{U}_\varepsilon(c))$

– связная компонента прообраза $f^{-1}(\overline{U_\varepsilon(c)})$, для которой не существует послыйного диффеоморфизма $\alpha: V \rightarrow (V \cap f^{-1}(c)) \times \overline{U_\varepsilon(c)}$, то есть такого диффеоморфизма, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\alpha} & (V \cap f^{-1}(c)) \times \overline{U_\varepsilon(c)} \\ & \searrow f & \swarrow p_2 \\ & & \overline{U_\varepsilon(c)} \end{array}$$

Слой $V \cap f^{-1}(c)$ при этом будем называть бифуркационным (особым) слоем атома, а точку $c \in \mathbb{R}$ – его бифуркационным значением.

Два атома (V_1, f_1) и (V_2, f_2) будем считать одинаковыми, если существует послыйный гомеоморфизм $\alpha: V_1 \rightarrow V_2$, переводящий критические точки функции f_1 в критические точки функции f_2 .

С топологической точки зрения множество V в определении атома представляет собой двумерную поверхность с краем, каждая связная компонента которого диффеоморфна окружности S^1 или прямой \mathbb{R} . В случае, когда особый слой атома непуст, поверхность V можно понимать как малую инвариантную окрестность особого слоя.

В дальнейшем, говоря об атоме (V, f) , мы будем иметь в виду поверхность V с заданным на ней функцией f слоением. Если понятно, о какой функции f идёт речь, будем говорить просто “атом V ”.

Если из атома удалить его особый слой, то атом распадётся на некоторое число связных поверхностей W_i , задаваемых неравенствами $c < f \leq c + \varepsilon$ или $c - \varepsilon \leq f < c$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Каждая поверхность W_i послыйно диффеоморфна прямому произведению $\mathbb{R} \times (0, \varepsilon]$ или $S^1 \times (0, \varepsilon]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности будем считать, что $c = 0$. Пусть связная поверхность $W_i = \tilde{W}$ задаётся неравенствами $0 < f \leq \varepsilon$. Мы знаем, что она состоит из регулярных слоёв, каждый из которых диффеоморфен окружности S^1 или прямой \mathbb{R} , причём локально, в окрестности каждого слоя, слоение тривиально. Нам нужно показать, что эти тривиальные слоения “сшиваются” в единое глобально тривиальное слоение.

Ясно, что все слои диффеоморфны одновременно либо прямой, либо окружности. Рассмотрим случай, когда все слои диффеоморфны прямой. Положим $C_a = \{x \in \tilde{W} : f(x) = a\}$, $W_S = \{x \in \tilde{W} : f(x) \in S\}$. Покажем, что два послыйных диффеоморфизма $\psi_1: W_{(\alpha, \gamma)} \rightarrow \mathbb{R} \times (\alpha, \gamma)$ и $\psi_2: W_{(\beta, \delta)} \rightarrow \mathbb{R} \times (\beta, \delta)$, где $\alpha < \beta < \gamma < \delta$, можно “сшить” в послыйный диффеоморфизм $\psi_{12}: W_{(\alpha, \delta)} \rightarrow \mathbb{R} \times (\alpha, \delta)$. Ясно, что диффеоморфизмы ψ_1, ψ_2 имеют вид $\psi_1(x) = (f(x), t_1(x))$, $\psi_2(x) = (f(x), t_2(x))$, где t_1, t_2 – гладкие функции, осуществляющие диффеоморфизмы слоёв C_a на прямую \mathbb{R} . Будем считать, что при $a \in (\beta, \gamma)$ ограничения $t_1|_{C_a}, t_2|_{C_a}$ задают на прямой \mathbb{R} одинаковую ориентацию. Рассмотрим гладкую неубывающую функцию $\eta: (\beta, \gamma) \rightarrow [0, 1]$, такую, что $\eta|_{(\beta, \beta + \varepsilon)} \equiv 0$,

$\eta|_{(\gamma, \gamma - \varepsilon_2)} \equiv 1$ при достаточно малых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Тогда послойный диффеоморфизм $\psi_{12}: W_{\alpha, \delta} \rightarrow \mathbb{R} \times (\alpha, \delta)$ можно задать по формуле:

$$\psi_{12}(x) = \begin{cases} \psi_1(x), & \text{если } \alpha < f(x) \leq \beta, \\ (1 - \eta(f(x))) \psi_1(x) + \eta(f(x)) \psi_2(x), & \text{если } \beta < f(x) < \gamma, \\ \psi_2(x), & \text{если } \gamma \leq f(x) < \delta. \end{cases} \quad (2.1)$$

Далее, для каждого $a \in (0, \varepsilon]$ существуют окрестность $U_{\delta(a)}(a) \subset \tilde{W}$ и послойный диффеоморфизм $\tilde{\varphi}_a: W_{U_{\delta(a)}(a)} \rightarrow \mathbb{R} \times U_{\delta(a)}(a)$. Окрестности вида $U_{\delta(a)}(a)$ образуют открытое покрытие полуинтервала $(0, \varepsilon]$ и, в частности, каждого из отрезков $I_n = \left[\frac{\varepsilon}{2^n}, \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} \right]$, $n \in \mathbb{N}$. Поэтому для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдётся минимальный конечный набор $\{U_{n,i}\}_{i=1}^{i_n}$ таких окрестностей, покрывающий отрезок I_n . Следовательно, соответствующие этим окрестностям диффеоморфизмы можно “сшить” в послойный диффеоморфизм $\tilde{\varphi}_n: W_{U_n} \rightarrow \mathbb{R} \times U_n$, где $U_n = \bigcup_{i=1}^{i_n} U_{n,i} \supset I_n$. Таким образом, мы покрыли полуинтервал $(0, \varepsilon]$ счётным набором открытых в \tilde{W} множеств U_n , в прообразе каждого из которых задан послойный диффеоморфизм. Все множества U_n (за исключением полуинтервала U_1) являются интервалами. Сужая их при необходимости, можно считать, что непустое пересечение имеют только множества U_n с соседними номерами. Но тогда диффеоморфизмы $\tilde{\varphi}_n$ с помощью описанной выше конструкции легко “сшиваются” в единый диффеоморфизм $\tilde{\varphi}: \tilde{W} \rightarrow (0, \varepsilon]$.

Случай, когда поверхность \tilde{W} состоит из слоёв, диффеоморфных окружности, рассматривается аналогично. В пояснении нуждается только формула 2.1. Функции t_1, t_2 определены в этом случае по модулю 2π , поэтому их можно считать многозначными отображениями в \mathbb{R} . Выберем произвольную точку $x_0 \in W_{(\beta, \gamma)}$ и вычислим в ней значение $\psi_{12}(x_0)$ по формуле 2.1, выбирая конкретные значения $t_1(x_0), t_2(x_0)$ произвольным образом. Тем самым мы выбираем лист многозначного отображения $x \mapsto (f(x), (1 - \eta(f(x))) t_1(x) + \eta(f(x)) t_2(x))$. По непрерывности теперь можно определить ψ_{12} как однозначное отображение вдоль любого пути, начинающегося в точке x_0 . Осталось проверить корректность такого определения. Но легко видеть, что обход поверхности $W_{(\alpha, \delta)}$ вдоль любого замкнутого пути увеличивает значение выражения $(1 - \eta(f(x))) t_1(x) + \eta(f(x)) t_2(x)$ на величину, кратную 2π . Тем самым корректность построенного отображения ψ_{12} проверена.

Предложение 2.1 доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Поверхность W_i из предложения 2.1 будем называть кольцом (лентой), если она диффеоморфна $S^1 \times (0, \varepsilon]$ ($\mathbb{R} \times (0, \varepsilon]$). Кольцо (ленту) будем называть положительным (соответственно, отрицательным), если оно задаётся неравенствами $c < f \leq c + \varepsilon$ (соответственно, $c - \varepsilon \leq f < c$).

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Определение атома корректно, то есть не зависит от выбора окрестности $U_\varepsilon(c)$. Иными словами, любые две такие окрестности послойно гомеоморфны и даже диффеоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть атом V' является “сужением” атома V , то есть задаётся неравенствами $c - \varepsilon' \leq f \leq c + \varepsilon'$, где $\varepsilon' < \varepsilon$. Ясно, что атомы V и V'

имеют один и тот же особый слой C . Пусть W_i – некоторое кольцо атома V , и W'_i – соответствующее ему кольцо атома V' . В силу предложения 2.1 существуют послойные диффеоморфизмы $\varphi_i: W_i \rightarrow S^1 \times (0, \varepsilon]$, $\varphi'_i: W'_i \rightarrow S^1 \times (0, \varepsilon']$, причём в качестве φ'_i можно взять ограничение φ_i на W'_i . Пусть отображение $\zeta: S^1 \times (0, \varepsilon] \rightarrow S^1 \times (0, \varepsilon']$ задаётся формулой $(x, y) \mapsto (x, \zeta(y))$, где $\zeta: (0, \varepsilon] \rightarrow (0, \varepsilon']$ – диффеоморфизм полуинтервалов, тождественный вблизи нуля. Тогда $\tau_i = \varphi_i^{-1} \circ \zeta \circ \varphi_i$ – послойный диффеоморфизм колец W_i и W'_i , тождественный вблизи особого слоя C . Если W_i – лента, диффеоморфизм τ_i строится совершенно аналогично. Объединяя теперь диффеоморфизмы τ_i в одно отображение и продолжая его на особый слой C тождественным образом, получим послойный диффеоморфизм атомов V и V' . Следствие 2.1 доказано.

§ 3. Инварианты топологической, лиувиллевой и траекторной эквивалентности

Опишем структуру полного топологического инварианта слоения, задаваемого гладкой функцией f на некомпактном многообразии M^2 . Его построение полностью аналогично компактному случаю ([9]). Однако сейчас нам понадобится важное дополнительное предположение.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Будем считать, что число бифуркационных значений функции f конечно.

Это условие гарантирует, что каждому бифуркационному значению отвечает один или несколько атомов. Отметим, что на компактном многообразии для этого достаточно, чтобы функция f была морсовской.

Разрежем многообразие M^2 вдоль границ всех атомов. Она распадётся на связные “куски”, каждый из которых является либо атомом, либо однопараметрическим семейством регулярных слоёв (прямых или окружностей). Рассмотрим граф, вершины которого отвечают атомам, а рёбра – семействам регулярных слоёв. Для каждой вершины укажем топологический тип соответствующего атома. Кроме того, будем считать, что для каждой вершины-атома указано взаимно однозначное соответствие между инцидентными ей рёбрами и граничными окружностями и прямыми атома. При этом концам каждого ребра должны отвечать гомеоморфные компоненты границ соответствующих атомов (обе должны быть окружностями или обе прямыми).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Построенный инвариант назовём *молекулой*, отвечающей паре (M^2, f) . Две молекулы будем считать *одинаковыми*, если существует гомеоморфизм одного графа на другой, который переводит рёбра в рёбра, атомы в атомы, причём гомеоморфизму рёбер отвечает гомеоморфизм соответствующих компонент границ атомов, продолжающийся с границ атомов на сами атомы.

Из определения молекулы вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Молекула является инвариантом топологической эквивалентности пары (M^2, f) . Иначе говоря, если функции f_1 и f_2 на многообразиях M_1^2 и M_2^2 топологически эквивалентны, то молекулы, отвечающие парам (M_1^2, f_1) и (M_2^2, f_2) , одинаковы.*

Предположим теперь, что многообразие M^2 ориентируемо и на нём фиксирована некоторая ориентация. Тогда на каждом атоме, входящем в M^2 , возникает индуцированная ориентация. Уточним определение молекулы, полагая, что в случае ориентированного многообразия M^2 каждый атом является ориентированным (т.е. рассматривается с точностью до сохраняющих ориентацию послойных гомеоморфизмов). Кроме того, в определении топологической эквивалентности функций на ориентированных многообразиях потребуем, чтобы соответствующий послойный гомеоморфизм был согласован с их ориентациями.

ТЕОРЕМА 3.1. *Молекула с ориентированными атомами является полным инвариантом топологической эквивалентности пары (M^2, f) , где M^2 – ориентированное многообразие. Иными словами, функции f_1 и f_2 на ориентированных многообразиях M_1^2 и M_2^2 топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда молекулы с ориентированными атомами, отвечающие парам (M_1^2, f_1) и (M_2^2, f_2) , одинаковы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что если функции f_1 и f_2 топологически эквивалентны, то соответствующие молекулы одинаковы. Обратное, если молекулы совпадают, то это означает, что многообразия M_1^2 и M_2^2 состоят из одинаковых “кусков”, т.е. ориентированных атомов и однопараметрических семейств регулярных окружностей и прямых. Остаётся проверить, что по молекуле многообразии M^2 восстанавливается из этих “кусков” однозначно с точностью до послойного гомеоморфизма. Для этого нужно указать правила “склейки” атомов и семейств регулярных слоёв вдоль их границ. На каждом атоме уже имеется ориентация, индуцирующая ориентацию на граничных окружностях и прямых атома. Фиксируем теперь ориентацию на семействах регулярных слоёв (цилиндрах вида $S^1 \times [a, b]$ и полосках вида $\mathbb{R} \times [a, b]$) произвольным образом. Тогда и на компонентах границы всех цилиндров и полосок появится индуцированная ориентация. Молекула даёт информацию о том, какие пары граничных окружностей или прямых атомов и семейств регулярных слоёв нужно “склеить” друг с другом. отождествим соответствующие компоненты границ с изменением их ориентации. Тогда ориентации всех атомов, цилиндров и полосок будут согласованы и будут задавать единую ориентацию на многообразии M^2 . Таким образом, процесс восстановления ориентированного расслоенного многообразия M^2 завершён. Теорема 3.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Можно сформулировать аналог теоремы 3.1 и в случае неориентируемых многообразий. Для этого на каждом атоме следует произвольным образом фиксировать ориентации компонент границы (которые могут быть, вообще говоря, не согласованы).

Применим теперь теорему 3.1 к задачам лиувиллевой и траекторной классификации систем с одной степенью свободы. Рассмотрим две некомпактные гамильтоновы системы (M_1^2, ω_1, H_1) и (M_2^2, ω_2, H_2) . Их лиувиллева эквивалентность равносильна топологической эквивалентности функций H_1 и H_2 . Поэтому на языке гамильтоновых систем теорему 3.1 можно переформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 3.2. *Две гамильтоновы системы (M_1^2, ω_1, H_1) и (M_2^2, ω_2, H_2) левосторонне эквивалентны тогда и только тогда, когда молекулы с ориентированными атомами, отвечающие парам (M_1^2, H_1) и (M_2^2, H_2) , одинаковы.*

Обратимся теперь к задаче непрерывной траекторной классификации. Чтобы изготовить из молекулы полный инвариант траекторной эквивалентности, нужно снабдить её дополнительной информацией, позволяющей учитывать естественную ориентацию интегральных траекторий. Это можно сделать, по аналогии с компактным случаем, ориентируя каждое ребро молекулы в соответствии с направлением роста функции f . Такая молекула называется *направленной*. Две направленные молекулы будем считать одинаковыми, если они совпадают как молекулы и при этом соответствующий гомеоморфизм сохраняет ориентации всех рёбер. Так как ориентация траекторий однозначно восстанавливается по ориентации многообразия M^2 и ориентации трансверсалей к траекториям (задаваемой ориентацией рёбер молекулы), то мы приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3.3. *Две гамильтоновы системы (M_1^2, ω_1, H_1) и (M_2^2, ω_2, H_2) непрерывно траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда направленные молекулы с ориентированными атомами, отвечающие парам (M_1^2, H_1) и (M_2^2, H_2) , одинаковы.*

Разумеется, теоремы 3.1, 3.2, 3.3 содержательны лишь в том случае, когда у нас есть классификация атомов, которые могут входить в состав молекул. Такой классификации посвящена оставшаяся часть данной работы. Поскольку запас всех возможных атомов слишком велик, то естественно ограничиться рассмотрением “достаточно хороших” атомов, допускающих классификацию в дискретных терминах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Атом назовём *атомом конечного типа*, если:

- множество \mathcal{K} содержащихся в нём критических точек функции f конечно: $|\mathcal{K}| = a < \infty$;
- число b связных компонент множества $C \setminus \mathcal{K}$ (где C – особый слой атома) конечно.

В этом случае пару (a, b) будем называть *типом* атома.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Слоение, задаваемое на многообразии M^2 функцией f , назовём *слоением конечного типа*, если

- число бифуркационных значений функции f конечно;
- все атомы, соответствующие бифуркационным значениям, являются атомами конечного типа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Гамильтонову систему (M^2, ω, H) с одной степенью свободы назовём *системой конечного типа*, если слоение, задаваемое функцией H на многообразии M^2 , является слоением конечного типа.

Таким образом, вместе с топологической классификацией атомов конечного типа, которая будет дана ниже, теорема 3.1 решает задачу топологической

классификации слоений конечного типа, а теоремы 3.2 и 3.3 – задачи непрерывной лиувиллевой и траекторной классификаций гамильтоновых систем конечного типа с одной степенью свободы. При этом все атомы предполагаются ориентированными.

§ 4. Топологическая классификация бифуркаций

В этом и следующем разделах мы дадим решение задачи топологической классификации атомов конечного типа (т.е. классификации с точностью до послонных гомеоморфизмов, переводящих критические точки в критические точки). Отметим, прежде всего, что, как и в компактном случае, все атомы можно разделить на две группы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Атом называется минимаксным, если он содержит только положительные либо только отрицательные кольца и ленты. В противном случае атом будем называть неминимаксным.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Бифуркационное значение минимаксного атома является точной верхней или нижней гранью значений функции f на атоме, которая может, вообще говоря, не достигаться (если атом некомпактный).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Термин “седловой”, характеризующий любой неминимаксный атом в компактной теории, в общей ситуации неприменим, так как некомпактный неминимаксный атом может не только не содержать седловых особенностей, но и вообще не иметь критических точек функции f .

Описание минимаксных атомов конечного типа довольно просто. Пусть особый слой минимаксного атома непуст. Тогда все точки особого слоя – точки локального минимума или максимума функции f , причём их должно быть конечное число. Пусть Z – одна из таких критических точек. Так как Z – изолированная критическая точка, то все линии уровня функции f в окрестности точки Z замкнуты. Таким образом, атом гомеоморфен двумерному диску, расслоенному на концентрические окружности, стягивающиеся к критической точке. Это известный в компактной теории минимаксный атом A (рис. 2, слева). Однако в некомпактном случае может возникнуть ситуация, когда особый слой атома пуст. Тогда атом представляет собой одно кольцо или одну ленту, т.е. однопараметрическое семейство регулярных окружностей или прямых. Соответствующую бифуркацию можно трактовать как исчезновение регулярных окружностей или прямых без достижения функцией f критического уровня. Для таких атомов будем использовать обозначения \dot{A} и \bar{A} , соответственно для семейств окружностей и прямых (рис. 2, в центре и справа). Таким образом, доказано следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Любой минимаксный атом конечного типа топологически эквивалентен одному из атомов A , \dot{A} или \bar{A} (рис. 2).*

Для компактных неминимаксных атомов в случае морсовской функции f имеется простой и конструктивный способ их описания (см. [9; глава 2]). А

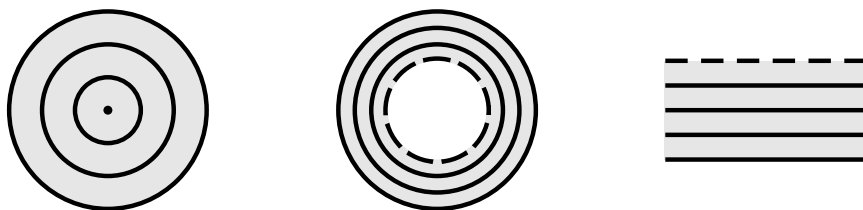


Рис. 2. Минимаксные атомы A (слева), \mathring{A} (в центре) и \bar{A} (справа)

именно, каждый компактный морсовский атом можно представить в виде склейки некоторого числа морсовских “крестов”, представляющих собой замкнутую окрестность невырожденной седловой критической точки (рис. 3). Оказывается, в некомпактном случае верно аналогичное утверждение, только элементарные поверхности, из которых склеивается атом, будут уже трёх типов (точнее, будут образовывать три бесконечные серии).

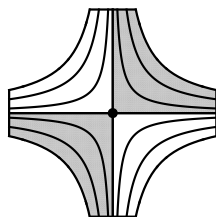


Рис. 3. Морсовский “крест” (окрестность седловой критической точки)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$.

Крестом с $2n$ концами ($n \in \mathbb{N}$) назовём поверхность с отмеченной точкой, послойно гомеоморфную поверхности $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -\varepsilon \leq \operatorname{Re}(x + iy)^n \leq \varepsilon, x^2 + y^2 \leq 1\}$, расслоенной на линии уровня функции $\operatorname{Re}(x + iy)^n$. При этом отмеченная точка соответствует критической точке $(0, 0)$ функции $\operatorname{Re}(x + iy)^n$.

Проколотым крестом с $2n$ концами ($n \in \mathbb{N}$) назовём поверхность, послойно гомеоморфную поверхности $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -\varepsilon \leq \operatorname{Re}(x + iy)^n \leq \varepsilon, 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$, расслоенной на линии уровня функции $\operatorname{Re}(x + iy)^n$.

Полукрестом с n концами ($n \in \mathbb{N}$) назовём поверхность, послойно гомеоморфную поверхности $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -\varepsilon \leq \operatorname{Re}(x + iy)^n \leq \varepsilon, x^2 + y^2 \leq 1, y > 0\}$, расслоенной на линии уровня функции $\operatorname{Re}(x + iy)^n$.

Крест, проколотый крест и полукрест будем называть *элементарными поверхностями* (рис. 4, 5), а их реализацию в комплексной плоскости – стандартной моделью. *Концами* элементарных поверхностей будем называть компоненты их границ, лежащие в стандартной модели на окружности $\{x^2 + y^2 = 1\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Морсовский крест на рисунке 3 – это крест с четырьмя концами.

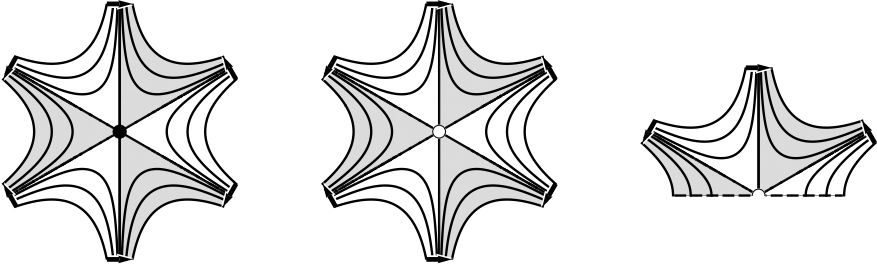


Рис. 4. Элементарные поверхности при $n = 3$: крест (слева), проколотый крест (в центре) и полукрест (справа)

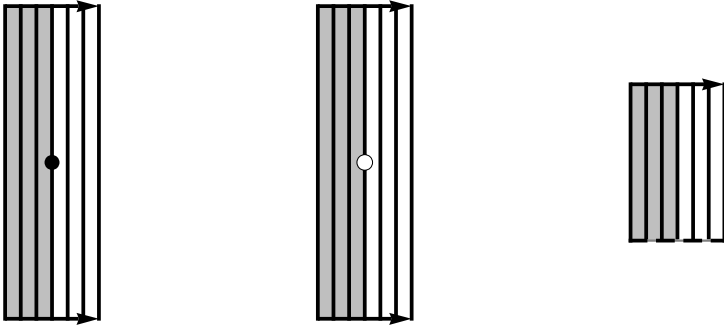


Рис. 5. Элементарные поверхности при $n = 1$: крест (слева), проколотый крест (в центре) и полукрест (справа)

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Элементарные поверхности допускают следующее описание.

Рассмотрим конечную последовательность прямоугольников $\Pi_k = ([-\varepsilon, \varepsilon] \times [0, 1]) \setminus (\{0\} \times \{1\})$, $k = 1, \dots, n$, без одной точки на границе, расслоенных на отрезки вида $\{x\} \times [0, 1]$, $x \in [-\varepsilon, \varepsilon] \setminus \{0\}$, и полуинтервал $\{0\} \times [0, 1]$. Склеим каждую пару соседних прямоугольников вдоль граничного полуинтервала $[-\varepsilon, 0) \times \{1\}$ или $(0, \varepsilon] \times \{1\}$. А именно, прямоугольники Π_{2k-1} и Π_{2k} склеиваем вдоль полуинтервала $(0, \varepsilon] \times \{1\}$, а прямоугольники Π_{2k} и Π_{2k+1} – вдоль полуинтервала $[-\varepsilon, 0) \times \{1\}$ (рис. 6). Далее возможны два варианта. В первом случае удаляем из прямоугольника Π_1 полуинтервал $[-\varepsilon, 0) \times \{1\}$, а из последнего прямоугольника Π_n – тот из полуинтервалов $[-\varepsilon, 0) \times \{1\}$ и $(0, \varepsilon] \times \{1\}$, который не склеен с прямоугольником Π_{n-1} . В результате получаем полукрест с n концами. Второй вариант возможен только при чётных n . В этом случае склеиваем прямоугольники Π_1 и Π_n вдоль полуинтервала $[-\varepsilon, 0) \times \{1\}$. В итоге получаем проколотый крест с $2n$ концами. Чтобы получить из него крест, нужно добавить в каждый прямоугольник точку $\{0\} \times \{1\}$, и затем все такие точки отождествить.

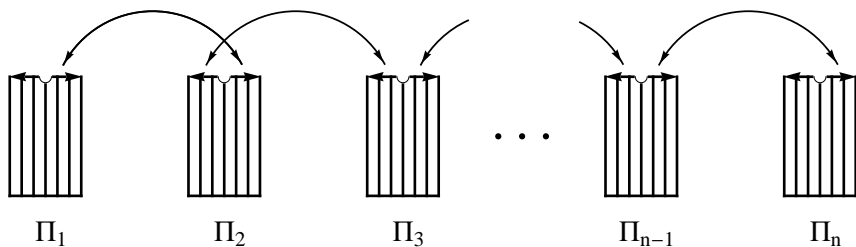


Рис. 6. Склейка элементарных поверхностей из прямоугольников

ТЕОРЕМА 4.1. *Любой неминимаксный атом (V, f) конечного типа может быть получен склейкой конечного числа элементарных поверхностей трёх типов (крестов, проколотых крестов и полукрестов). При этом склейка производится следующим образом. На каждой элементарной поверхности данного набора выбирается ориентация её концов в соответствии с направлением возрастания или убывания функции $\operatorname{Re}(x + iy)^n$ (на рис. 4, 5 эта ориентация отмечена стрелками). Далее концы всех поверхностей разбиваются на пары и в каждой паре отождествляются таким образом, чтобы направления стрелок совпадали. Причём разбиение на пары происходит так, чтобы получившаяся в результате расслоенная поверхность была связной. Эта поверхность будет послойно гомеоморфна данному атому, причём центры крестов будут соответствовать критическим точкам. При этом набор элементарных поверхностей, из которых атом строится по описанной схеме, определён однозначно.*

На рисунке 7 представлен пример склейки атома из элементарных поверхностей. Через A_n, B_n, C_n обозначены соответственно крест с $2n$ концами, проколотый крест с $2n$ концами и полукрест с n концами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности будем полагать, что бифуркационное значение данного атома V равно нулю, а сам атом задаётся неравенствами $-\varepsilon \leq f \leq \varepsilon$. Если удалить из особого слоя все критические точки, то он распадётся в объединение конечного числа связных компонент, каждая из которых гомеоморфна прямой. На каждой из этих компонент зафиксируем точку и проведём через неё некоторую гладкую кривую трансверсально слоям вплоть до границы атома. При необходимости можно уменьшить “толщину” атома ε , чтобы эти кривые попарно не пересекались. Теперь разрежем атом по всем проведённым кривым. Он распадётся на некоторое число связных поверхностей V_1, V_2, \dots, V_r . Покажем, что каждая из этих поверхностей представляет собой элементарную поверхность.

Рассмотрим произвольную поверхность V_i . Имеет место следующее утверждение.

Теорема (см. [24]). *Пусть x_0 – изолированная критическая точка гладкой функции f на двумерном многообразии, не являющаяся точкой минимума или максимума. Тогда некоторая замкнутая окрестность точки x_0 , расслоенная*

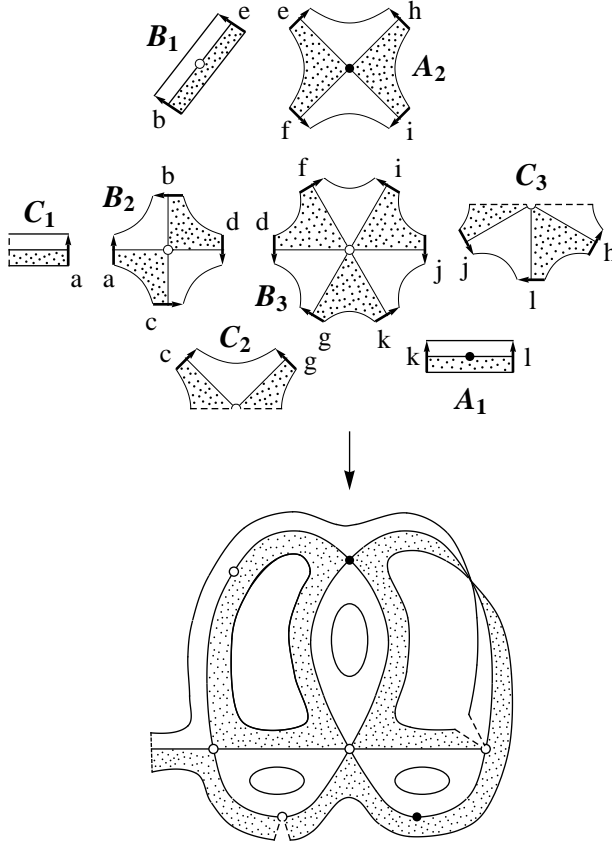


Рис. 7. Склейка атома из элементарных поверхностей

на линии уровня функции f , представляет собой крест с $2n$ концами для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Из этой теоремы следует, что если поверхность V_i содержит критическую точку функции f , то она является крестом. Поэтому далее будем предполагать, что поверхность V_i не содержит критических точек функции f .

Рассмотрим сначала случай, когда атом V ориентируем. Снабдим его некоторой гладкой римановой метрикой. Тогда соответствующая форма объёма ω будет также симплектической формой, следовательно, определено гамильтоново векторное поле $\text{sgrad } f = \omega^{-1}df$, интегральные траектории которого лежат на линиях уровня $\{f = \text{const}\}$. Также определено градиентное векторное поле $\text{grad } f$. Для удобства будем полагать, что кривые, разбивающие атом V на поверхности V_1, \dots, V_r , — это интегральные траектории поля $\text{grad } f$.

Граница поверхности V_i состоит из частей граничных окружностей и прямых атома V , а также из линий разреза $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$. Каждая кривая Γ_k содержит ровно одну точку Q_k особого слоя, которая разбивает её на две части Γ_k^+ и

Γ_k^- , содержащиеся соответственно в положительном и отрицательном кольце или ленте. Выпустим из кривой Γ_1^+ интегральные траектории $\xi_x(t)$, $x \in (0, \varepsilon]$, поля $\text{sgrad } f$ (для удобства можно считать, что на кривой Γ_1 поле $\text{sgrad } f$ направлено внутрь поверхности V_i). Возможны два случая: либо выпущенные траектории за конечное время достигают некоторой другой линии разреза Γ_2 , либо они вообще не достигают никакой другой линии разреза. В первом случае рассмотрим траекторию $\xi_\varepsilon(t)$, лежащую на линии уровня $\{f = \varepsilon\}$, $\xi_\varepsilon(0) \in \Gamma_1^+$. Пусть t_0 – минимальное значение параметра t , такое, что интегральная траектория γ_t градиентного поля $\text{grad } f$, проходящая через точку $\xi_\varepsilon(t)$, не пересекает траекторию $\xi_0(t)$ поля $\text{sgrad } f$, выпущенную из точки Q_1 . Обозначим кривую γ_{t_0} через $\tilde{\Gamma}_1$ (рис. 8).

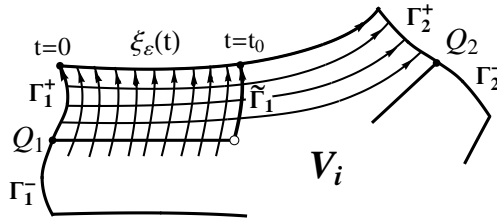


Рис. 8. Кривая $\tilde{\Gamma}_1$ на поверхности V_i

Рассмотрим теперь интегральные траектории поля $-\text{sgrad } f$, выпущенные из кривой Γ_2^- . Для них также возможны два случая: либо за конечное время они достигают некоторой линии разреза Γ_3 , либо вообще не достигают никакой другой линии разреза. В первом случае аналогичным образом определяем кривую $\tilde{\Gamma}_2$. Затем рассматриваем траектории, выходящие из кривой Γ_3^+ и т.д. Возможны два варианта.

1. На каждом шаге траектории поля $\pm \text{sgrad } f$, выпущенные из кривой Γ_k^\pm , за конечное время достигают кривой Γ_{k+1}^\pm на некоторой другой линии разреза Γ_{k+1} , а траектории, выпущенные из кривой Γ_n^- , достигают кривой Γ_1^- на первоначальной линии разреза Γ_1 (рис. 9, слева). Это возможно только в случае, когда число n линий разреза на данной поверхности V_i чётно. При этом на каждом шаге на участке кольца или ленты атома, заметаемом траекториями, соединяющими кривые Γ_k^\pm и Γ_{k+1}^\pm , определена гладкая кривая $\tilde{\Gamma}_k$.
2. На каком-то шаге процесс обрывается, то есть траектории, выпущенные из некоторой кривой Γ_j^\pm , не достигают границы поверхности V_i за конечное время. Тогда возьмём линию разреза Γ_j в качестве Γ_1 и запустим процесс в обратном направлении: рассмотрим траектории, соединяющие кривую Γ_1^\mp с кривой Γ_2^\mp , затем траектории, соединяющие кривую Γ_2^\pm с кривой Γ_3^\pm и т.д. В силу связности поверхности V_i для каждого $k < n$ траектории, выпущенные из кривой Γ_k^\pm , будут достигать некоторой очередной линии разреза Γ_{k+1} . На последнем шаге траектории,

выпущенные из кривой Γ_n^\pm , не достигнут границы поверхности V_i за конечное время (рис. 9, справа). В этом случае также для каждого $k < n$ на участке между кривыми Γ_k^\pm и Γ_{k+1}^\pm определена гладкая кривая $\tilde{\Gamma}_k$.

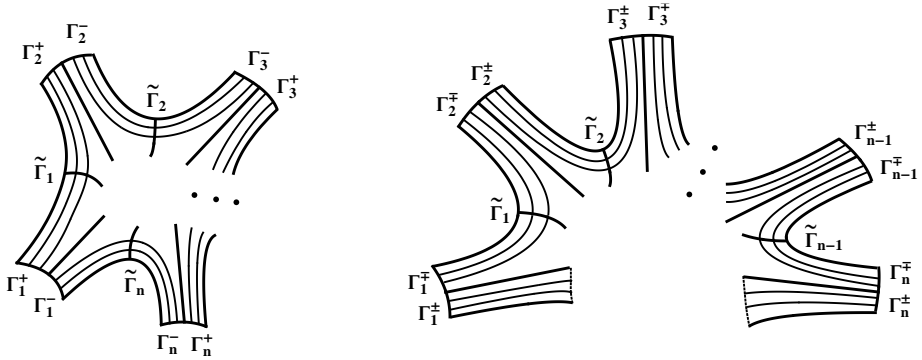


Рис. 9. Поведение интегральных траекторий поля $\text{sgrad } f$ на поверхности V_i

Разрежем теперь поверхность V_i по кривым $\tilde{\Gamma}_k$. Она распадётся на связные части $V_{i1}, V_{i2}, \dots, V_{in}$ (поверхность V_{ik} содержит кривую Γ_k). Покажем, что каждая поверхность V_{ik} (если не включать в неё кривые $\tilde{\Gamma}_{k-1}$ и $\tilde{\Gamma}_k$) послойно гомеоморфна стандартному прямоугольнику $[-\varepsilon, \varepsilon] \times [0, 1]$, расслоенному на полуинтервалы вида $\{x\} \times [0, 1]$, $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Поверхность V_{ik} состоит из отрезков траекторий $\xi_x(t)$ поля $\pm \text{sgrad } f$, выпущенных из кривой Γ_k и ограниченных кривыми $\tilde{\Gamma}_k$ и $\tilde{\Gamma}_{k-1}$, если последние определены (полагаем $\tilde{\Gamma}_0 = \tilde{\Gamma}_n$). Поэтому каждой точке $P = \xi_{x_0}(t_0) \in V_{ik}$ можно сопоставить пару чисел (x_0, y_0) , где $y_0 = \arctg t_0$. Таким образом, на поверхности V_{ik} определена гладкая система координат (x, y) , $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $y \in [0, Y(x)]$, где $Y(x) = \arctg T(x)$, $T(x) = \sup\{t: \xi_x(t) \in V_{ik}\}$. Для траекторий $\xi_x(t)$, ограниченных кривой $\tilde{\Gamma}_k$ (или $\tilde{\Gamma}_{k-1}$), $T(x)$ — это время, за которое они достигают этой кривой. Отметим также, что функция $Y(x)$, определённая на отрезке $[-\varepsilon, \varepsilon]$, полунепрерывна снизу.

Определим на отрезке $[-\varepsilon, \varepsilon]$ набор кусочно-линейных функций $y_m(x)$, $m \geq 0$. Положим $a = \inf_{x \in [-\varepsilon, \varepsilon]} Y(x)$. Легко видеть, что $a > 0$. Разобьём отрезок $[-\varepsilon, \varepsilon]$ на 2^m равных отрезков. Пусть $I_l^m = [x_{l-1}^m, x_l^m]$ — l -й отрезок этого разбиения, а \tilde{x}_l^m — его середина, $l = 1, \dots, 2^m$. Определим сначала функцию y_m в точках \tilde{x}_l^m , полагая

$$y_m(\tilde{x}_l^m) = \inf_{x \in I_l^m} Y(x) - \frac{a}{2^m}.$$

Определим теперь y_m в концах отрезков I_l^m , полагая

$$y_m(x_l^m) = \begin{cases} \min\{y_m(\tilde{x}_l^m), y_m(\tilde{x}_{l+1}^m)\}, & l = 1, \dots, 2^m - 1; \\ y_m(\tilde{x}_1^m), & l = 0; \\ y_m(\tilde{x}_{2^m}^m), & l = 2^m. \end{cases}$$

На оставшиеся интервалы продолжим функцию y_m по линейности, т.е. положим

$$y_m(x) = \begin{cases} \frac{\tilde{x}_l^m - x}{\tilde{x}_l^m - x_{l-1}^m} y_m(x_{l-1}^m) + \frac{x - x_{l-1}^m}{\tilde{x}_l^m - x_{l-1}^m} y_m(\tilde{x}_l^m), & x \in (x_{l-1}^m, \tilde{x}_l^m); \\ \frac{x_l^m - x}{x_l^m - \tilde{x}_l^m} y_m(\tilde{x}_l^m) + \frac{x - \tilde{x}_l^m}{x_l^m - \tilde{x}_l^m} y_m(x_l^m), & x \in (\tilde{x}_l^m, x_l^m). \end{cases}$$

Графики функций y_m схематически изображены на рисунке 10. Заметим, что по построению $y_0 \equiv 0$.

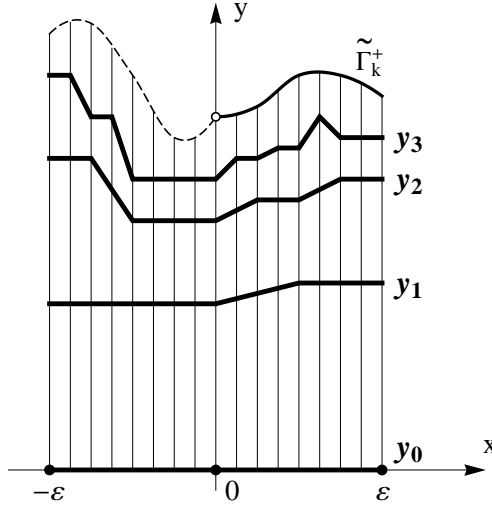


Рис. 10. Функции y_m

ЛЕММА 4.1. Построенный набор функций $\{y_m\}_{m \geq 0}$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $y_m(x_0) \leq \inf_{x \in I_l^m} Y(x) - \frac{a}{2^m}$ при $x_0 \in I_l^m$, $l = 1, \dots, 2^m$;
2. $y_m(x_0) \geq \inf_{x \in I_{l-1}^m \cup I_l^m \cup I_{l+1}^m} Y(x) - \frac{a}{2^m}$ при $x_0 \in I_l^m$, $l = 1, \dots, 2^m$ (полагаем $I_0^m = I_{2^m+1}^m = \emptyset$);
3. $y_{m+1}(x) \geq y_m(x) + \frac{a}{2^{m+1}}$, $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$;
4. для любого $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ имеем $y_m(x) \rightarrow Y(x)$ при $m \rightarrow \infty$.

Первые два пункта леммы следуют непосредственно из определения функций y_m . Неравенство из третьего пункта леммы в силу кусочной линейности функций y_m и y_{m+1} достаточно проверить в точках вида x_l^{m+1} и \tilde{x}_l^{m+1} , что несложно сделать исходя из определения функций y_m , y_{m+1} и неравенства первого пункта леммы. Наконец, последний пункт леммы следует из неравенства второго пункта и полунепрерывности снизу функций y_m .

Искомый послыйный гомеоморфизм $h: V_{ik} \rightarrow [-\varepsilon, \varepsilon] \times [0, 1]$ определим по формуле

$$h(x, y) = \left(x, \frac{y_{m+1}(x) - y}{y_{m+1}(x) - y_m(x)} \left(1 - \frac{1}{2^m} \right) + \frac{y - y_m(x)}{y_{m+1}(x) - y_m(x)} \left(1 - \frac{1}{2^{m+1}} \right) \right),$$

где $y \in [y_m(x), y_{m+1}(x)]$. Если теперь добавить к поверхности V_{ik} кривые $\tilde{\Gamma}_{k-1}$ и $\tilde{\Gamma}_k$ (в том случае, когда они определены), то гомеоморфизм h можно продолжить до гомеоморфизма $\tilde{h}: V_{ik} \cup \tilde{\Gamma}_{k-1} \cup \tilde{\Gamma}_k \rightarrow ([-\varepsilon, \varepsilon] \times [0, 1]) \setminus (\{0\} \times \{1\})$, полагая $\tilde{h}(P) = (f(P), 1)$, если $P \in \tilde{\Gamma}_{k-1} \cup \tilde{\Gamma}_k$. Поэтому склейке поверхности V_i из поверхностей V_{ik} вдоль кривых $\tilde{\Gamma}_k$ соответствует склейка прямоугольников, описанная в замечании 4.4. Отсюда следует, что поверхность V_i является некоторой элементарной поверхностью (проколотым крестом, если кривая $\tilde{\Gamma}_n$ определена, и полукрестом в противном случае). Итак, мы показали, что в случае ориентируемого атома V каждая поверхность V_i представляет собой элементарную поверхность одного из трёх типов.

Рассмотрим теперь случай неориентируемого атома V . Пусть \tilde{V} – ориентируемое многообразие с краем, двулистно накрывающее V , и пусть $\pi: \tilde{V} \rightarrow V$ – соответствующая проекция. Функция $\tilde{f} = f \circ \pi$ задаёт на многообразии \tilde{V} структуру атома. Для каждой кривой $\Gamma_j \subset V$ её прообраз $\pi^{-1}(\Gamma_j) \subset \tilde{V}$ состоит из двух кривых Γ'_j, Γ''_j , трансверсальных линиям уровня функции \tilde{f} . Разрежем атом \tilde{V} вдоль всех кривых Γ'_j, Γ''_j . Он распадётся на некоторое число поверхностей $\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \dots, \tilde{V}_r$, каждая из которых в силу доказанного является элементарной поверхностью одного из трёх типов. На атоме \tilde{V} определена инволюция $\sigma: \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$ без неподвижных точек, такая, что $\pi \circ \sigma = \pi$ и $\tilde{V}/\sigma \simeq V$. Ясно, что разбиение атома \tilde{V} на поверхности \tilde{V}_i инвариантно относительно действия этой инволюции. Поэтому каждая поверхность \tilde{V}_i либо инвариантна относительно σ , либо переводится инволюцией σ в некоторую другую поверхность \tilde{V}_i' . Так как σ не имеет неподвижных точек, то первый случай возможен только тогда, когда поверхность \tilde{V}_i является крестом или проколотым крестом с $4n$ концами, $n \in \mathbb{N}$, а $\sigma|_{\tilde{V}_i}$ – центральная симметрия. При этом поверхность \tilde{V}_i/σ является соответственно крестом или проколотым крестом с $2n$ концами. Поскольку $V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_r \simeq (\tilde{V}_1 \sqcup \tilde{V}_2 \sqcup \dots \sqcup \tilde{V}_r)/\sigma$, получаем, что каждая поверхность V_i представляет собой некоторую элементарную поверхность.

Таким образом, мы показали, что для любого атома V конечного типа кривые Γ_j разбивают его на конечный набор поверхностей V_i , каждая из которых является элементарной поверхностью одного из трёх типов. При этом каждая кривая Γ_j ориентирована в соответствии с направлением роста функции f . Чтобы восстановить атом V из поверхностей V_i , нужно склеить их вдоль кривых Γ_j с учётом имеющейся на них ориентации. Это как раз соответствует правилам склейки элементарных поверхностей, описанных в условии теоремы 4.1. Ясно, что при ином выборе кривых Γ_j топологический тип расслоенных поверхностей V_i не поменяется. Теорема 4.1 доказана.

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть имеется некоторый конечный набор элементарных поверхностей. Тогда из него можно сконструировать неминимаксный атом конечного типа по описанным в теореме 4.1 правилам в точности тогда, когда выполняются следующие условия:*

- (1) общее число концов всех поверхностей данного набора чётно;
- (2) $s_1 \leq 2 + \sum_{n \geq 3} (n-2)s_n$, где s_n – число элементарных поверхностей с n концами;
- (3) имеется хотя бы одна поверхность с более чем одним концом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 4.1, а также правил склейки атома из элементарных поверхностей, комбинаторная структура любого неминимаксного атома конечного типа описывается графом, вершинами которого являются элементарные поверхности, а рёбрами – их концы. Степени вершин этого графа равны числу концов соответствующих элементарных поверхностей. Из того, что в любом графе сумма степеней всех вершин чётна, следует условие (1). Условие (2) – это условие связности графа. Действительно, для любого связного графа выполняется соотношение $E \geq V - 1$, где E – число рёбер, V – число вершин (равенство достигается в точности тогда, когда граф является деревом). В нашем случае имеют место равенства $V = \sum_{n \geq 1} s_n$, $E = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} n s_n$, откуда следует требуемое соотношение. Наконец, если в данном наборе имеются только полукресты с одним концом, то единственная связная поверхность, которую из них можно составить, – это полоса, тривиально расслоенная на прямые, которая получается в результате склейки двух полукрестов. Таким образом, в наборе должна быть хотя бы одна поверхность с более чем одним концом.

Обратно, пусть выполнены условия (1)-(3). Пусть V_1, V_2, \dots, V_m – входящие в данный набор поверхности с более чем одним концом, $m > 0$. Для каждого $k = 1, \dots, m-1$ последовательно склеим произвольный свободный (т. е. ещё не склеенный) конец поверхности V_k с некоторым концом поверхности V_{k+1} . В силу условия (2) количество полукрестов с одним концом не превосходит числа свободных концов в полученной склейке поверхностей V_1, \dots, V_m . Поэтому каждый полукрест можно подклеить к одному из концов какой-нибудь поверхности V_k . В результате получится некоторая связная поверхность. Остаётся заметить, что количество оставшихся свободных концов чётно, поэтому их можно произвольным образом разбить на пары и в каждой паре отождествить.

Наконец, нужно проверить, что получившаяся в результате поверхность V действительно является атомом, то есть имеет структуру слоения, задаваемого некоторой гладкой функцией f . Но на каждой элементарной поверхности такая функция уже есть: это функция $\operatorname{Re}(x + iy)^n$. Ясно, что при описанных склейках концов поверхностей эти функции сшиваются в единую гладкую функцию, определённую на всей поверхности V .

Теорема 4.2 доказана.

Аналогично компактному случаю, теоремы 4.1, 4.2 позволяют реализовать алгоритм построения всех неминимаксных атомов конечного типа. Для каждого конечного набора элементарных поверхностей, удовлетворяющих условию теоремы 4.2, нужно рассмотреть все допустимые варианты склейки их концов. Каждая такая склейка задаётся некоторой перестановкой $\sigma \in S_n$, где n – общее число концов всех поверхностей данного набора. Ясно, что перестановка σ задаёт склейку атома из элементарных поверхностей в том и только в том случае,

когда выполнены два условия (тривиальный случай склейки двух полукрестов с одним концом мы не рассматриваем):

- 1) σ – инволюция без неподвижных точек;
- 2) получающаяся в результате склейки поверхность связна.

Обозначим множество таких перестановок σ через S .

Так же, как и в компактном случае, можно реализовать алгоритм распознавания, какие перестановки из множества S дают один и тот же результат, т. е. одинаковые атомы. Для этого нужно рассмотреть действие сопряжениями на множестве S подгруппы $H \subset S_n$, порождённой перестановками одинаковых элементарных поверхностей данного набора, а также их симметриями. Две перестановки $\sigma', \sigma'' \in S$ задают одинаковые атомы в точности тогда, когда они принадлежат одной и той же орбите этого действия.

Опишем ещё один способ перечисления всех некомпактных неминимаксных атомов конечного типа. Для этого введём понятие компактификации атома.

Пусть V – некомпактный неминимаксный атом конечного типа. Если он не содержит полукрестов, то превратим каждый его проколотый крест в крест, добавив в его центр одну точку. В результате получим некоторый компактный атом \tilde{V} . Рассмотрим теперь случай, когда атом V содержит полукресты. Тогда множество его лент (см. определение 10) непусто. Разобьём множество “концов” всех лент на пары таким образом, чтобы в одной паре оказались “концы” двух положительных или двух отрицательных лент, либо два “конца” одной и той же ленты (это можно сделать, так как каждая лента имеет два “конца”). Далее в каждой паре “склеим” два “конца” друг с другом. Более формально, для каждой пары “концов” нужно добавить к атому полуинтервал $(0, \varepsilon]$ или $[-\varepsilon, 0)$ и потребовать, чтобы он состоял из предельных точек для каждого из двух “концов”, а именно, точка c на интервале должна быть предельной для линий уровня $\{f = c\}$, содержащихся в двух соответствующих лентах. В итоге получим некоторый атом, не содержащий лент, а следовательно, и полукрестов. Применяя к нему описанную выше процедуру компактификации, получим компактный (не обязательно морсовский) атом \tilde{V} . Атом \tilde{V} будем называть *компактификацией* атома V . Атом \tilde{V} будем называть *минимальной компактификацией* атома V , если атом V не содержал лент, либо “концы” каждой его ленты были склеены друг с другом в атоме \tilde{V} . Ясно, что у каждого некомпактного неминимаксного атома конечного типа (a, b) (см. определение 12) существует единственная минимальная компактификация \tilde{V} , имеющая тип (a', b) , где $a < a' \leq b$.

Опишем теперь процедуру, обратную к компактификации. Компактный неминимаксный атом \tilde{V} конечного типа назовём *атомом с отмеченными точками и дугами*, если некоторые его критические точки отмечены и некоторые из отмеченных точек соединены непрерывными дугами с точками на границе атома, причём выполняются следующие условия:

- 1) пересечение любых двух таких дуг либо пусто, либо состоит из единственной отмеченной точки;
- 2) ограничение функции f на каждую дугу строго монотонно;
- 3) дополнение к объединению всех отмеченных точек и дуг связно.

Удалим из атома \tilde{V} все отмеченные точки и дуги. В результате получим некомпактный атом V . Таким образом, верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.3. *Любой некомпактный неминимаксный атом конечного типа может быть получен из компактного неминимаксного атома конечного типа с отмеченными точками и дугами путём удаления этих точек и дуг. Более того, сопоставление каждому некомпактному неминимаксному атому конечного типа его минимальной компактификации устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством некомпактных неминимаксных атомов конечного типа и множеством компактных неминимаксных атомов конечного типа с отмеченными точками и дугами, обладающих следующим свойством: каждое кольцо атома содержит не более одной отмеченной дуги.*

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. Результаты этого раздела естественным образом обобщаются на случай более тонкой классификации атомов, а именно классификации с точностью до послыоного диффеоморфизма. Однако в этом случае необходимо принять предположение о *морсовости* функции f . Дело в том, что слоения в окрестности вырожденной особой точки функции f могут быть топологически эквивалентными, но не переводиться друг в друга диффеоморфизмом. Теоремы 4.1, 4.2 в новых предположениях останутся в силе, если из списка элементарных поверхностей вычеркнуть все кресты, кроме морсовского креста с четырьмя концами (отвечающего седловой невырожденной особенностью).

§ 5. Кодирование атомов при помощи f -графов

В случае морсовской функции f на компактном гладком многообразии M^2 А. А. Ошемковым [25] было предложено удобное средство классификации атомов. Оно состоит в том, что каждый неминимаксный атом (представляющий собой двумерную поверхность) заменяется более простым объектом, а именно, графом специального вида (f -графом). Оказывается, понятие f -графа можно обобщить и на некомпактный случай, только оно станет несколько более сложным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Конечный связный граф с ориентированными рёбрами (возможно, с петлями и кратными рёбрами) назовём *f -графом*, если он удовлетворяет следующим условиям.

1. Все вершины графа имеют степень 1, 2, 3 или 4.
2. Каждое рёбро графа окрашено в один из двух цветов (для определённости синий и красный) таким образом, что для каждой вершины число инцидентных ей рёбер каждого цвета не превосходит двух, причём синих рёбер не меньше, чем красных.
3. Если какой-то вершине инцидентны два ребра одного цвета, то одно из них входит в эту вершину, а другое выходит из неё.
4. Каждой вершине степени 3 или 4 приписана метка $\varepsilon = \pm 1$.
5. Каждому циклу из красных рёбер (в том числе петлям) приписана метка $\delta \in \{0, 1\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Условие 2 в определении f -графа означает, что:

- каждой вершине степени 1 инцидентно синее ребро;
- каждой вершине степени 2 инцидентны либо два синих ребра, либо одно синее и одно красное;
- каждой вершине степени 3 инцидентны два синих ребра и одно красное;
- каждой вершине степени 4 инцидентны два синих и два красных ребра.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Из определения f -графа следует, что множество всех рёбер одного цвета (как синего, так и красного) разбивается в несвязное объединение ориентированных несамопересекающихся циклов и путей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Два f -графа назовём *эквивалентными*, если один можно получить из другого последовательностью следующих операций. Разрешается заменять ориентацию всех рёбер одного цвета вдоль какого-то цикла или пути и одновременно заменять на противоположные значения ε -меток всех вершин в этом цикле или пути. Классы эквивалентности f -графов будем называть *f -инвариантами*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. f -атомом назовём атом конечного типа, для которого фиксировано разбиение его колец и лент на положительные и отрицательные (иначе говоря, фиксировано направление роста функции f).

Таким образом, каждому атому соответствует, вообще говоря два f -атома, получающиеся друг из друга изменением направления роста функции f на противоположное. Эти два f -атома совпадают в том случае, если атом допускает симметрию, меняющую местами положительные и отрицательные кольца и ленты.

ТЕОРЕМА 5.1. *Имеется естественное взаимно однозначное соответствие между множеством \mathcal{A} всех неминимаксных f -атомов и множеством \mathcal{I} всех f -инвариантов за исключением класса эквивалентности графа с двумя вершинами и одним синим ребром.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим в явном виде отображение $\nu: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{I}$, сопоставляющее каждому f -атому некоторый f -инвариант. Пусть дан некоторый f -атом V . Фиксируем произвольным образом ориентацию на компонентах его границы, принадлежащих отрицательным кольцам и лентам (эти граничные окружности и прямые послужат ориентированными циклами и путями из синих рёбер f -графа). Теперь рассмотрим разбиение атома V на элементарные поверхности V_1, \dots, V_r . Для каждой поверхности V_i рассмотрим содержащиеся в ней части граничных окружностей и прямых отрицательных колец и лент, и для каждой из них отметим по одной точке в качестве вершины f -графа. А именно, если это часть граничной окружности или внутренняя часть граничной прямой, то выбираем на ней точку произвольным образом (например, можно взять конец соответствующей кривой $\tilde{\Gamma}_k$, см. доказательство теоремы 4.1). Если же это часть граничной прямой, не являющаяся внутренней (что возможно лишь в случае, когда V_i – полукрест), то отметим её предельную точку, лежащую в стандартной модели полукреста (см. определение 16) на вещественной оси $\{y = 0\}$. Отмеченные таким образом точки образуют вершины f -графа и задают разбиение ориентированных граничных окружностей и прямых отрицательных колец и лент атома V на синие рёбра f -графа (рис. 11, а, b; на этом

и последующих рисунках синие рёбра отмечены сплошной линией, красные – штриховой).

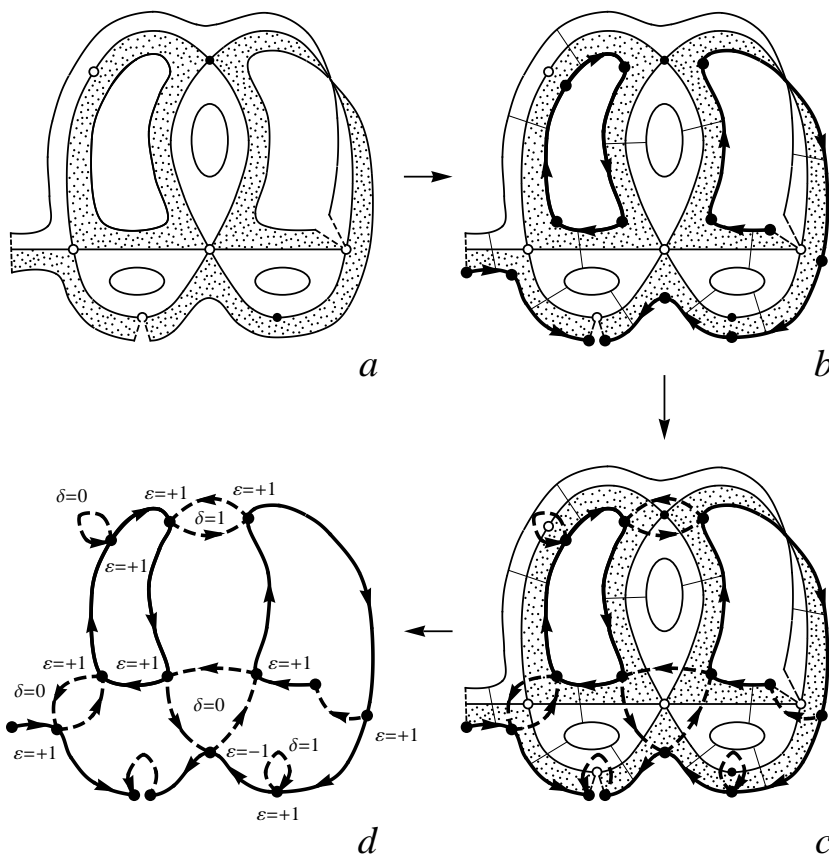


Рис. 11. Построение f -графа по f -атому

Далее для каждой поверхности V_i (кроме полукрестов, содержащих только одну вершину f -графа) построим цикл или путь из красных рёбер. Для этого нужно последовательно соединить красными рёбрами “соседние” отвечающие поверхности V_i вершины f -графа. В случае креста или проколотого креста получим цикл из красных рёбер (в частности, петлю, если крест или проколотый крест имеет два конца), а в случае полукреста – путь (рис. 11, с). Более формально процедуру построения красных рёбер можно описать так. Рассмотрим поверхность V_i в стандартной модели и рассмотрим обход около особой точки $(0, 0)$. Тогда вершины, отвечающие поверхности V_i , соединяются красными рёбрами в порядке этого обхода. При этом направление обхода задаёт согласованную ориентацию на всех красных рёбрах.

Поясним теперь, как выбирается метка ε . Для каждой вершины степени больше двух можно сравнить ориентации проходящих через неё синего и красного циклов (путей). Действительно, рассмотрим стандартную модель поверх-

ности V_i в плоскости \mathbb{R}^2 , и пусть φ – полярный угол в этой плоскости. Тогда φ можно рассматривать как параметр на одноцветных циклах и путях. Синий и красный циклы (пути), проходящие через данную вершину, ориентированы одинаково, если ориентация каждого из них одновременно либо согласована с направлением возрастания параметра φ , либо противоположна ему. Иначе скажем, что синий и красный циклы (пути) ориентированы противоположно. В первом случае для данной вершины полагаем $\varepsilon = +1$, во втором $\varepsilon = -1$ (рис. 12). Поясним, что направление обхода вокруг особой точки элементарной поверхности задаёт на ней ориентацию, а следовательно, и ориентацию её границы. Метка ε показывает, совпадает эта ориентация с ориентацией данного синего цикла (пути) или нет.

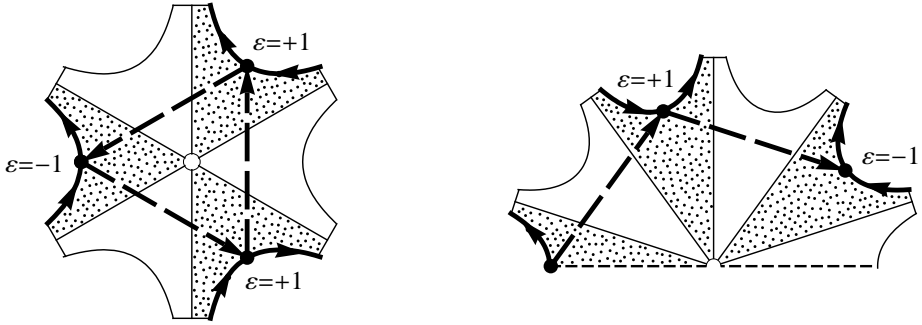


Рис. 12. Цикл и путь из красных рёбер

Наконец, рассмотрим циклы из красных рёбер. Эти циклы могут отвечать двум типам элементарных поверхностей: кресту либо проколотому кресту. В первом случае приписываем данному циклу метку $\delta = 1$, во втором $\delta = 0$. Итак, процесс построения f -графа по данному f -атому завершён (рис. 11, d).

Легко видеть, что задавая изначально ориентацию на краях отрицательных колец и лент другим способом, а также меняя направление обхода элементарных поверхностей при построении красных рёбер, мы получим эквивалентный f -граф. Таким образом, построено корректное отображение из множества всех f -атомов во множество всех f -инвариантов.

Теперь нам нужно построить обратное отображение, восстанавливающее по f -инварианту (точнее, его представителю в виде f -графа) соответствующий f -атом. Для этого, аналогично компактному случаю, укажем процедуру склейки f -атома из конечного набора прямоугольников $R_j = ([-\varepsilon, \varepsilon] \times [-1, 1]) \setminus (\{0\} \times \{-1, 1\})$ без двух точек на границе (см. рис. 13). Поясним, что на эти прямоугольники атом распадается после разрезания по всем кривым $\tilde{\Gamma}_k$ для всех элементарных поверхностей V_i , см. доказательство теоремы 4.1 (кривые $\tilde{\Gamma}_k$ играют роль некомпактного аналога сепаратрис особой точки). Каждый прямоугольник R_j составлен при этом из двух прямоугольников Π_k (см. замечание 4.4), принадлежащих соседним элементарным поверхностям.

Выберем некоторый f -граф, представляющий данный f -инвариант, и занумеруем его синие рёбра числами от 1 до n . Для склейки f -атома нам пона-

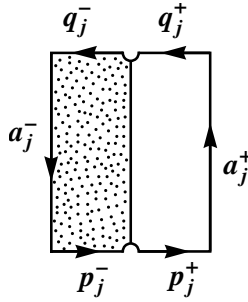


Рис. 13. Прямоугольник R_j

добится n прямоугольников R_j , $j = 1, \dots, n$: каждый прямоугольник отвечает некоторому синему ребру. Зададим на границе каждого прямоугольника ориентацию и обозначим составляющие её отрезки и полуинтервалы через $a_j^\pm, p_j^\pm, q_j^\pm$, где j – номер соответствующего синего ребра (рис. 13). Произведём склейку f -атома в несколько шагов.

Шаг 1. Если в некоторой вершине f -графа сходятся два синих ребра с номерами j и l , причём j -е ребро входит в вершину, а l -е выходит из неё, то склеим полуинтервал p_j^- с полуинтервалом q_l^- (их ориентации при этом должны быть противоположны). В результате получим набор поверхностей с краем, у которых одна компонента границы склеена из отрезков вида b_j^- (это граница отрицательного кольца или ленты f -атома), а другие имеют вид $p_j^+ a_j^+ q_j^+$.

Шаг 2. Доопределим ε -метку для вершин степени 2, инцидентных рёбрам разных цветов. А именно, положим $\varepsilon = +1$, если оба ребра одновременно входят в эту вершину или выходят из неё, и $\varepsilon = -1$, если одно ребро входящее, а другое выходящее. Рассмотрим теперь произвольное красное ребро, идущее из вершины X_1 в вершину X_2 (в случае, когда данное красное ребро – петля, вершины X_1 и X_2 совпадают). Предположим сначала, что вершины X_1, X_2 имеют степени не меньше 3, причём вершина X_1 является концом j -го синего ребра и началом l -го синего ребра, а вершина X_2 является концом m -го синего ребра и началом s -го синего ребра (рис. 14). Обозначим через ε_1 и ε_2 ε -метки в вершинах X_1 и X_2 . В зависимости от их значений мы склеиваем одну из следующих пар полуинтервалов:

- q_l^+ и p_m^+ , если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = +1$;
- q_l^+ и q_s^+ , если $\varepsilon_1 = +1$ и $\varepsilon_2 = -1$;
- p_j^+ и p_m^+ , если $\varepsilon_1 = -1$ и $\varepsilon_2 = +1$;
- p_j^+ и q_s^+ , если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$.

При этом отрезки, обозначаемые одинаковыми буквами (p или q), склеиваются всегда с согласованной ориентацией, а отрезки, обозначаемые разными буквами, – с противоположной. В случае, когда хотя бы одна из вершин X_1, X_2 имеет степень 2, правила склейки точно такие же.

После того как для всех красных рёбер произведены соответствующие склейки, удалим из получившейся поверхности все полуинтервалы p_j^\pm, q_j^\pm , оставшиеся не склеенными.

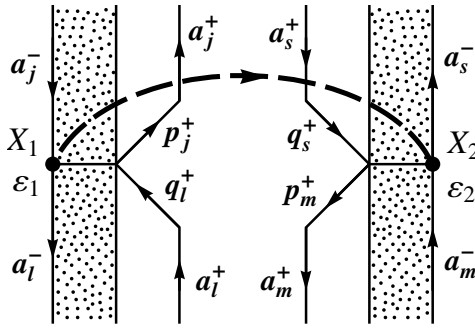


Рис. 14. Склейка, отвечающая красному ребру

Шаг 3. В соответствии с определёнными выше правилами склейки каждому циклу из красных рёбер соответствует проколотый крест. Добавим в его центр особую точку, если соответствующая δ -метка равна 1, и оставим всё, как есть, если $\delta = 0$.

Тем самым процесс восстановления f -атома по данному f -графу завершён. Несложно проверить, что для двух эквивалентных f -графов описанная процедура даёт эквивалентные f -атомы, а также что построенное соответствие между f -атомами и f -инвариантами взаимно однозначно. Теорема 5.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. f -граф, состоящий из двух вершин и одного синего ребра, соответствует окрестности регулярного слоя, гомеоморфного прямой, т.е. однопараметрическому семейству регулярных прямых.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Из конструкции, описанной в доказательстве теоремы 5.1, легко видеть, что в случае, когда атом не содержит крестов, любой отвечающий ему f -граф является его деформационным ретрактом и, следовательно, гомотопически эквивалентен ему. Для атомов, содержащих кресты, это утверждение также станет верным, если стянуть в точку все красные циклы f -графа с δ -меткой, равной 1.

Теорема 5.1 и замечание 5.4 дают эффективный инструмент для решения задачи классификации неминимаксных атомов конечного типа, а также для изучения многих их свойств, например, группы симметрий, гомотопических свойств и т. д. В частности, в терминах f -графа легко понять, является ли соответствующий атом ориентируемым. Для этого рассмотрим все циклы f -графа, содержащие рёбра разных цветов, и каждому такому циклу поставим в соответствие число ± 1 , равное произведению ε -меток всех вершин цикла, в которых происходит изменение цвета рёбер. При этом если какая-то вершина (степени 4) встречается в цикле дважды, то и её ε -метка учитывается дважды. Для вершин степени 2, инцидентных рёбрам разных цветов, доопределим ε -метку так же, как в доказательстве теоремы 5.1: положим $\varepsilon = +1$, если оба ребра одновременно входят в вершину или выходят из неё, и $\varepsilon = -1$, если одно ребро входящее, а другое выходящее. Числа ± 1 , сопоставленные разноцветным циклам f -графа, назовём *круговыми метками*. Ясно, что круговые метки

не меняются при замене f -графа на эквивалентный ему. Следовательно, набор круговых меток является корректно определённой функцией на множестве f -инвариантов.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть V – неминимаксный атом конечного типа, и G – произвольный из двух отвечающих ему f -инвариантов. Тогда атом V ориентируем тогда и только тогда, когда все круговые метки f -инварианта G равны $+1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим на каждой элементарной поверхности атома V ориентацию с помощью цикла (пути) из красных рёбер (на полукрестах, не содержащих красных рёбер, ориентацию можно задать с помощью синих рёбер и внешней нормали). Атом V будет ориентируемым, если при обходе вдоль любого цикла локальная ориентация (заданная на каждой элементарной поверхности) не поменяется. Рассмотрим произвольный цикл, вложенный в атом V . В силу замечания 5.4 существует изотопный ему цикл γ , проходящий исключительно по рёбрам f -графа. Как уже отмечалось выше, метка ε показывает, соответствует ли ориентация синих рёбер выбранной ориентации элементарной поверхности или нет. Таким образом, метка $\varepsilon = +1$ при переходе от красного ребра к синему (или наоборот) означает сохранение локальной ориентации, а метка $\varepsilon = -1$ – её изменение. Ясно, что локальная ориентация при обходе вдоль цикла γ остаётся прежней в том и только в том случае, если она поменялась чётное число раз. А это в точности равносильно тому, что соответствующая круговая метка равна 1. Теорема 5.2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.5. Легко видеть, что атом ориентируем тогда и только тогда, когда найдётся f -граф, представляющий один из двух соответствующих f -инвариантов, у которого все ε -метки (включая ε -метки вершин степени 2, инцидентных разноцветным рёбрам) равны $+1$.

В качестве ещё одного примера использования f -графов приведём классификацию атомов малой сложности. Понятие сложности атома определим по аналогии с компактным случаем.

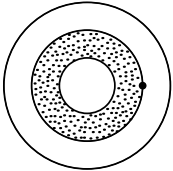
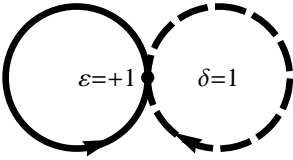
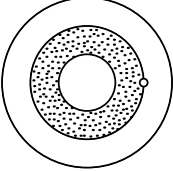
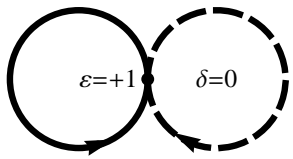
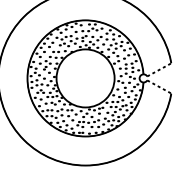
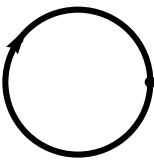
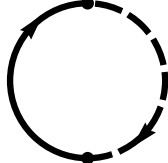
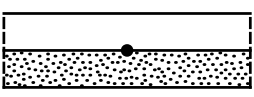
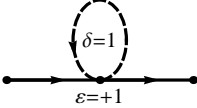
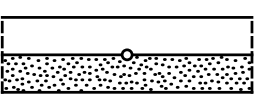
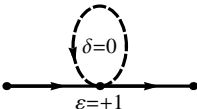
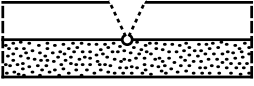

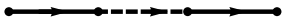
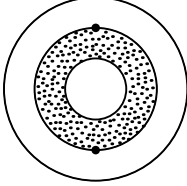
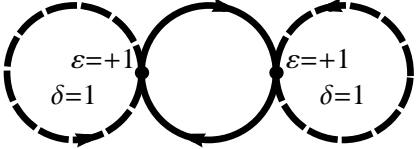
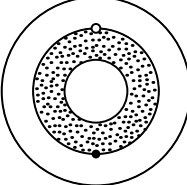
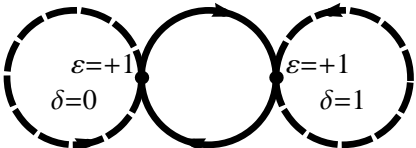
ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. Сложностью неминимаксного атома конечного типа (a, b) назовём целое или полуцелое число $b/2$. (Напомним, что b – это число связанных компонент множества $C \setminus \mathcal{K}$, где C – особый слой атома, \mathcal{K} – множество содержащихся в нём критических точек функции f .)

ЗАМЕЧАНИЕ 5.6. Сложность атома равна половине количества синих рёбер любого соответствующего f -графа.

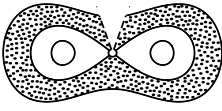
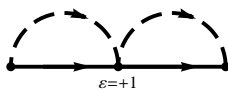
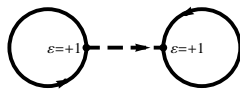
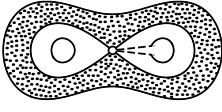
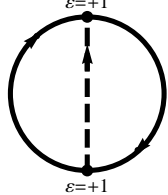
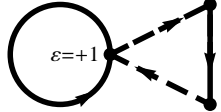
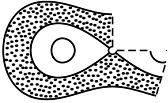
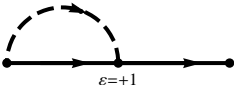
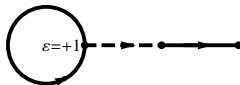
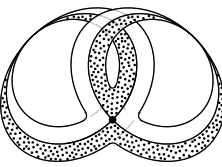
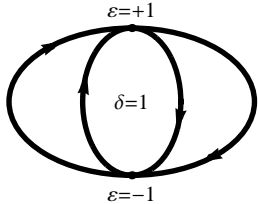
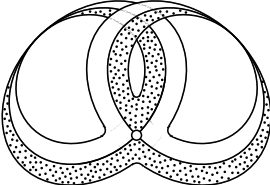
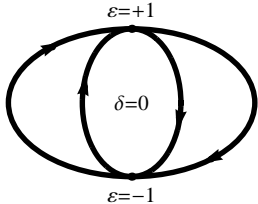
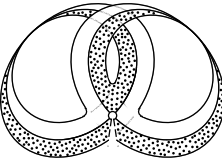
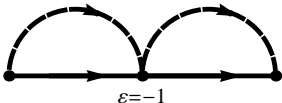
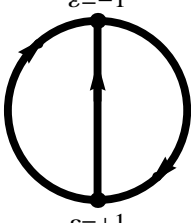
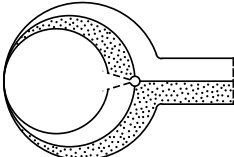
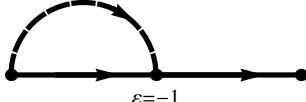
ТЕОРЕМА 5.3.

- Имеется 3 ориентируемых атома сложности $1/2$, которым отвечают 4 f -атома. Неориентируемых атомов сложности $1/2$ нет.
- Имеется 15 ориентируемых атомов сложности 1, которым отвечают 24 f -атома, и 4 неориентируемых атома сложности 1, которым отвечают 5 f -атомов.

Атомы сложности $1/2$ и 1, а также соответствующие f -графы представлены в таблицах, следующих ниже. Напротив каждого атома изображены один или два f -графа, представляющие f -инварианты соответствующих f -атомов.

№	Атом	<i>f</i> -графы	
Сложность 1/2			
Ориентируемые			
1			
2			
3			
Сложность 1			
Ориентируемые			
1			
2			
3			
4			
5			

№	Атом	<i>f</i> -графы	
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			

№	Атом	<i>f</i> -графы	
13			
14			
15			
№	Атом	<i>f</i> -графы	
Неориентруемые			
1			
2			
3			
4			

Автор благодарит А. Т. Фоменко за постановку задачи и постоянное внимание к работе, Е. А. Кудрявцеву за многочисленные ценные замечания и плодотворные обсуждения, А. А. Ошемкова за постановку вопроса, решённого в теореме 4.2.

Список литературы

- [1] А. В. Болсинов, С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, “Гладкая траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы”, *Успехи матем. наук*, **45:2** (1990), 49–77.
- [2] А. Т. Фоменко, “Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50:6** (1986), 1276–1307.
- [3] А. Т. Фоменко, “Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем”, *Докл. АН СССР*, **287:5** (1986), 1071–1075.
- [4] А. Т. Фоменко, “Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю”, *Функц. анализ и его прил.*, **22:4** (1988), 38–51.
- [5] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, “Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54:3** (1990), 546–575.
- [6] А. В. Болсинов, “Гладкая траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы”, *Матем. сб.*, **186:1** (1995), 3–28.
- [7] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, “Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации. I, II”, *Матем. сб.*, **185:4, 5** (1994), 27–80, 27–78.
- [8] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, “Траекторные инварианты интегрируемых гамильтоновых систем. Случай простых систем. Траекторная классификация систем типа Эйлера в динамике твердого тела”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **59:1** (1995), 65–102.
- [9] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, Т. 1, 2, изд. дом “Удмуртский университет”, Ижевск, 1999.
- [10] В. В. Ведюшкина, А. Т. Фоменко, “Интегрируемые топологические бильярды и эквивалентные динамические системы”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **81:4** (2017), 20–67.
- [11] В. В. Фокичева, “Классификация бильярдных движений в областях, ограниченных софокусными параболами”, *Матем. сб.*, **205:8** (2014), 139–160.
- [12] О. А. Загрядский, “Бертрановские системы и их фазовое пространство”, *Наука и образование*, 2014, № 12, 365–386.
- [13] Д. А. Федосеев, “Бифуркационные диаграммы натуральных гамильтоновых систем на многообразиях Бертрана”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех.*, 2015, № 1, 62–65.
- [14] Д. В. Новиков, “Топологические особенности интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $e(3)$ ”, *Матем. сб.*, **202:5** (2011), 127–160.
- [15] S. S. Nikolaenko, “Topological Classification of the Goryachev Integrable Systems in the Rigid Body Dynamics: Non-Compact Case”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **38:6** (2017), 1050–1060.
- [16] Д. А. Федосеев, А. Т. Фоменко, “Некомпактные особенности интегрируемых гамильтоновых систем”, *Фунд. и прикл. матем.*, **21:6** (2016), 217–243.
- [17] E. Fiorani, G. Giachetta, G. Sardanashvily, “The Liouville-Arnold-Nekhoroshev theorem for non-compact invariant manifolds”, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **36:7** (2003), 101–107.

- [18] Е. А. Кудрявцева, Т. А. Лепский, “Интегрируемые гамильтоновы системы с неполными потоками и многоугольники Ньютона”, *Соврем. Пробл. Матем. Механ.*, **VI**:3 (2011), 42–55.
- [19] Е. А. Кудрявцева, Т. А. Лепский, “Топология лагранжевых слоений интегрируемых систем с гиперэллиптическим гамильтонианом”, *Матем. сб.*, **202**:3 (2011), 69–106.
- [20] К. Р. Алёшкин, “Топология интегрируемых систем с неполными полями”, *Матем. сб.*, **205**:9 (2014), 49–64.
- [21] Е. А. Кудрявцева, “Аналог теоремы Лиувилля для интегрируемых гамильтоновых систем с неполными потоками”, *Докл. РАН*, **445**:4 (2012), 383–385.
- [22] Е. А. Кудрявцева, Т. А. Лепский, “Топология слоений и теорема Лиувилля для интегрируемых систем с неполными потоками”, *Тр. сем. по векторному и тензорному анализу*, 2011, № 27, 106–149.
- [23] В. В. Шарко, “Гладкие функции на некомпактных поверхностях”, *Збірник праць Ін-ту математики НАН України*, **3**:3 (2006), 443–473.
- [24] A. O. Prishlyak, “Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface”, *Topology and its Applications*, **119** (2002), 257–267.
- [25] А. А. Ошемков, “Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей”, *Труды МИАН*, **205** (1994), 131–140.

С. С. Николаенко (S. S. Nikolaenko)

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова,
Московский физико-технический институт
E-mail: nikostas@mail.ru

Поступила в редакцию
13.11.2019