

ВОПРОСЫ
к курсу
Дифференциальная геометрия и топология
(А. Иванов, осень 2025)

1. Координатное и инвариантное определения тензора. Их эквивалентность.
2. Линейное пространство тензоров. Его размерность и стандартный базис.
3. Алгебраические операции над тензорами. Примеры.
4. Пространство кососимметрических тензоров, его размерность и стандартный базис.
5. Внешние дифференциальные формы. Внешнее произведение, его ассоциативность, косокоммутативность.
6. Внешние дифференциальные формы. Формы и отображения.
7. Внешние дифференциальные формы. Внешнее дифференцирование, его свойства.
8. Интегрирование дифференциальных форм на ориентируемых многообразиях.
9. Интегрирование формы по подмногообразию. Теорема Стокса.
10. Формулы Грина, Гаусса–Остроградского и Стокса как следствия общей теоремы Стокса.
11. Определение групп когомологий де Рама. Когомологии прямой и окружности.
12. Когомологии де Рама. Когомологии и отображения. Когомологии диффеоморфных многообразий.
13. Гладкие гомотопии. Когомологии и гомотопии. Лемма Пуанкаре.
14. Симплектические многообразия. Размерность симплектического многообразия. Косой градиент и уравнения Гамильтона.
15. Евклидова связность. Ковариантное дифференцирование в евклидовой связности. Определение и формулы преобразования символов Кристоффеля евклидовой связности.
16. Аффинная связность. Ковариантное дифференцирование в аффинной связности. Тензор кручения. Евклидовы координаты для связности. Ковариантная производная по направлению векторного поля и вдоль кривой.
17. Алгебраические свойства операции ковариантного дифференцирования. Теорема «единственности» операции тензорного дифференцирования (восстановление ковариантного дифференцирования по его пяти свойствам).
18. Риманова связность. Ее существование и единственность. Евклидовы координаты для метрики и для римановой связности. Теорема существования аффинной связности на гладком (компактном) многообразии.
19. Параллельный перенос в аффинной связности. Свойства параллельного переноса в римановой связности. Примеры.

20. Геодезические. Теорема существования и единственности. Примеры геодезических (евклидово пространство, сфера, конус, цилиндр, плоскость Лобачевского). Параллельный перенос вдоль геодезических.
21. Нормальные координаты. Метрика, символы Кристоффеля и радиальные геодезические в нормальных координатах.
22. Первая вариация длины кривой на римановом многообразии. Стационарность геодезических.
23. Лемма Гаусса о геодезической сфере. Геодезические как локально кратчайшие кривые.
24. Тензор кривизны аффинной связности (координатное определение).
25. Коммутатор векторных полей, его свойства, теорема о координатных векторных полях.
26. Инвариантное определение тензора кривизны. Эквивалентность координатному определению.
27. Симметрии тензора кривизны римановой связности. Оценка количества его независимых компонент.
28. Свертки тензора кривизны Римана: тензор Риччи и скалярная кривизна.
29. Скалярная кривизна двумерной поверхности. Теорема Гаусса.
30. Степень отображения. Независимость степени от выбора регулярного значения и гомотопии (схема доказательства).
31. Степень отображения: определение, теорема о "еже".
32. Степень отображения: определение, основная теорема алгебры.
33. Степень отображения и интеграл. Гауссово отображение, полная кривизна и теорема Гаусса–Бонне.
34. Степень отображения. Особые точки векторных полей. Теорема об индексе векторного поля в области.
35. Степень отображения. Особые точки векторных полей. Теорема Брауэра (гладкий случай).
36. Экстремали функционалов лагранжевого типа. Уравнения Эйлера–Лагранжа. Экстремали функционала энергии.
37. Уравнения Эйлера–Лагранжа. Законы сохранения энергии и импульса. Пример: движение материальной точки в потенциальном поле.
38. Уравнения Эйлера–Лагранжа. Законы сохранения энергии и импульса. Теорема Клеро.