**О. Р. Мусин, 30.09 – 28.10.2020**

**Мини-курс:**

**«Избранные задачи комбинаторной геометрии и топологии»**

Основная цель этого курса представить несколько открытых проблем в активно развивающихся областях современной дискретной геометрии, комбинаторной топологии и их приложениях.

Занятие 1: **"Лемма Шпернера: приложения и обобщения" - 30.09.2020**

Лемма Шпернера (1929) давно уже является предметом обсуждения на математических кружках и источником для олимпиадных задач. Между тем, лемма Шпернера является комбинаторным аналогом теоремы Брауэра о неподвижной точке и ее обобщения применяются в математической экономике и кооперативной теории игр.

В докладе мы обсудим некоторые классические теоремы о неподвижных точках и их дискретные аналоги. В частности, я разберу обобщение леммы Кнастера-Куратовского-Мазуркевича (ККМ) по Ллойду Шепли для сбалансированных подмножеств. Интересным вопросом для изучения является классификация сбалансированных подмножеств для различных многогранников (например, n-мерных кубов), разработка алгоритмов их поиска для обобщенной теоремы Шепли и применения в теории игр.

Занятие 2: **"Множества с двумя расстояниями"- 7.10.2020**

Мы обсудим множества точек в пространстве или на сфере, расстояния между которыми принимают не более чем два значения. Мы разберем вопрос о том, как много точек может иметь такое множество, а также какие конфигурации образуют точки из экстремальных наборов. На плоскости такое множество может состоять из пяти точек — вершин правильного пятиугольника. В трёхмерном пространстве максимальная мощность (размер) таких множеств равна шести и оказывается, что имеется шесть различных (не изометричных) конфигураций. Недавно получен значительный прогресс по максимальной мощности сферических множеств с двумя расстояниями. Я также расскажу о теории Эйнхорна-Шёнберга, о классификации с помощью нее всех множеств с двумя расстояниями на плоскости и в пространстве, а также о ряде открытых проблем в этой области.

Занятие 3: **"Дискретный аналог теории Максвелла – Морса и ее применение для обработки изображений"- 14.10.2020**

Мы обсудим двумерный вариант теории Морса, который впервые появился в работе Дж. К. Максвелла 1870 года. Дискретный аналог этой теории применяется в обработке изображений и других прикладных областях. Интересным вопросом для изучения является построение дискретного аналога этой теории и разработка алгоритмов для построения сепаратрисс (структурных поверхностей) в трехмерном случае.

Занятие 4: **"Экстремальные конфигурации точек на сфере" - 21.10.2020**

 Одними из самых первых математических этюдов (etudes.ru) был этюд "Контактное число шаров и сферические коды ". В этом этюде разбирался вопрос Ньютона - Грегори (1694) о числе одинаковых бильярдных шаров, которые можно расположить в пространстве вокруг центрального шара того же радиуса?  Несмотря на простую формулировку, эта задача оказалась довольно трудной и строгое доказательство того, что шаров не может быть больше 12 появилось только спустя 260 лет после постановки задачи. Обобщением этой задачи является **задача Таммеса** для сферы и тора (периодические упаковки кругов).На этом занятии мы разберем методы решения этих и близким к ним задач. обсудим новые подходы и открытые проблемы.

Занятие 5: **"Гипотеза Римана, теорема Рамануджана и сверхизбыточные числа" - 28.10.2020**

Имеется довольно много эквивалентных формулировок гипотезы Римана. Среди них выделяются "элементарные" (т.е. понятные даже школьникам) формулировки, принадлежащие Г. Робину (1984) и Дж. Лагариасу (2002). Этот подход восходит к работе Рамануджана (1915) по сверхсоставным числам. В докладе будет рассказано о теореме Рамануджана для колоссально-составных чисел и ее обобщении на основе выпуклой оболочки функции делителей. Свойства сверхизбыточных чисел разительно отличаются в зависимости от того верна или нет гипотеза Римана. Мы также рассмотрим открытые вопросы по этой теме, в частности задачу о константе Рамануджана в решении которой может помочь численный эксперимент.