

9 Параллельный перенос

Прежде чем дать точное определение операции параллельного переноса вектора на римановом многообразии, обсудим саму идею параллельного перенесения. Предположим, что нам даны два касательных вектора на гладком многообразии, приложенные в разных точках (т.е. лежащие в разных касательных пространствах). Можно ли в каком-то смысле говорить об их равенстве? В евклидовом пространстве проблем с положительным ответом не возникает: два вектора равны, если они параллельны, направлены в одну сторону и их длины совпадают. На произвольном многообразии такое определение не работает. Там, чтобы сравнить два вектора, нужно прежде каким-то образом “совместить начала этих векторов”, т.е. сделать так, чтобы они лежали в одном и том же касательном пространстве. Например, для этого можно взять один из векторов и перенести его в касательное пространство другого.

Легко сообразить, что, вообще говоря, нельзя предложить универсальной процедуры такого перенесения. Продемонстрируем это на примере двумерной сферы. Рассмотрим произвольный касательный вектор к сфере и предположим, что у нас имеется некоторый способ (однозначный) перенесения этого вектора в любую точку сферы. Естественно мы хотим, чтобы результат параллельного переноса гладко зависел от точки, в которую мы переносим. Еще одно естественное требование заключается в том, чтобы при перенесении ненулевой вектор не обращался в нуль (и наоборот). В результате, если бы такая процедура оказалась возможной, мы получили бы на многообразии гладкое векторное поле, нигде не обращающееся в нуль. Однако, можно показать, что на сфере такого векторного поля не существует (нельзя гладко причесать ежа). Этот пример показывает, что для некоторых многообразий невозможно определить универсальную операцию параллельного переноса.

Тем не менее можно выйти из затруднения, воспользовавшись следующим соображением. Операцию параллельного перенесения вектора удобно представлять себе так. Мы берем вектор ξ_0 (приложенный в точке $P \in M$) и движемся по многообразию M в точку Q , следя за тем, чтобы переносимый касательный вектор не менялся. Тот вектор ξ_1 , который мы получим в точке Q , мы назовем *результатом параллельного перенесения* вектора ξ_0 из точки P в точку Q .

При таком подходе следует обратить внимание на два обстоятельства. Во-первых, двигаясь из P в Q , мы идем по некоторому пути (т.е. вдоль кривой). Во-вторых, мы требуем, чтобы в процессе движения переносимый вектор не менялся. Что это означает? Естественно просто потребовать, чтобы его производная вдоль кривой была равна нулю. Какая производная? Конечно, ковариантная, поскольку именно ковариантное дифференцирование, как мы уже обсуждали, является наиболее естественным на многообразии. Сформулируем теперь окончательно эту идею в виде строгого определения.

Определение. Векторное поле ξ называется *параллельным вдоль кривой* $\gamma(t)$, если его ковариантная производная вдоль γ равна нулю:

$$\nabla_{\gamma} \xi = 0.$$

Это уравнение называется *уравнением параллельного переноса*. Запишем это уравнение в координатах. Пусть x^1, \dots, x^n — локальная система координат, $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$

и $\vec{\xi}(t) = (\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))$. Тогда

$$\frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i \xi^j \frac{dx^k}{dt} = 0$$

Проанализируем это уравнение. Свойства уравнения параллельного переноса:

1) Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка в n -мерном пространстве (неизвестной является вектор-функция $\vec{\xi}(t) = (\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))$). Действительно, это уравнение может быть переписано в векторном виде

$$\frac{d\vec{\xi}}{dt} = A(t)\vec{\xi},$$

где $A(t)$ — квадратная матрица с коэффициентами $A_j^i(t) = \Gamma_{jk}^i(x(t)) \frac{dx^k}{dt}$, гладко зависящими от t .

2) Из теории дифференциальных уравнений известно, что для любого начального вектора $\vec{\xi}_0$ существует и притом единственное решение этого уравнения $\vec{\xi}(t)$ такое, что $\vec{\xi}(t_0) = \vec{\xi}_0$. При этом это решение определено при всех t , для которых уравнение имеет смысл. Другими словами, если задан начальный вектор, то существует и притом единственное параллельное векторное поле, определенное на всей кривой и включающее в себя этот начальный вектор.

Итак, чтобы параллельно перенести вектор $\vec{\xi}_0$ из точки $P = \gamma(t_0)$ в точку $Q = \gamma(t_1)$ вдоль кривой $\gamma(t)$, мы должны рассмотреть параллельное вдоль γ векторное поле $\vec{\xi}(t)$ с начальным условием $\vec{\xi}(t_0) = \vec{\xi}_0$. Тогда результатом параллельного перенесения вектора $\vec{\xi}_0$ из точки P в точку Q вдоль γ будет вектор $\vec{\xi}_1 = \vec{\xi}(t_1)$. Этот вектор всегда определен и притом однозначно.

3) Отметим также, что операция параллельного перенесения (если кривая и точки на ней фиксированы) является *линейным оператором*, т.е. сумма векторов переходит в сумму, а произведение на число в произведение на то же число). Это сразу следует из линейности соответствующего дифференциального уравнения. Оператор параллельного перенесения является при этом оператором Коши, обсуждавшимся в курсе дифференциальных уравнений.

4) Еще одним важным обстоятельством является то, что условие параллельности (и, следовательно, результат параллельного перенесения) не зависит от выбора параметризации на кривой. Действительно, если $t = t(\tau)$ — гладкая замена параметра на кривой γ , то

$$\frac{d\xi^i}{d\tau} + \Gamma_{jk}^i \xi^j \frac{dx^k}{d\tau} = \left(\frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i \xi^j \frac{dx^k}{dt} \right) \frac{dt}{d\tau} = 0.$$

Подведем некоторые итоги.

Предложение 1. Пусть P и Q — точки, соединенные гладкой кривой γ . Тогда

1) для любого касательного вектора $\vec{\xi}_0 \in T_P M$ однозначно определен касательный вектор $\vec{\xi}_1 \in T_Q M$, являющийся результатом параллельного перенесения вектора $\vec{\xi}_0$ из точки P в точку Q вдоль кривой γ ;

2) параллельный перенос из точки P в точку Q вдоль кривой γ является линейным оператором, действующим из касательного пространства $T_P M$ в касательное пространство $T_Q M$;

3) параллельный перенос не зависит от параметризации на кривой γ .

Эти свойства параллельного переноса являются общими и справедливы для любой связности ∇ . Нам на самом деле интересен главным образом случай симметрической римановой связности, в котором параллельный перенос обладает некоторыми дополнительными свойствами. Продолжим их изучение.

Параллельный перенос в симметрической римановой связности.

5) Рассмотрим *евклидово пространство* \mathbb{R}^n с евклидовой связностью. В декартовых координатах x^1, \dots, x^n символы Кристоффеля обращаются в нуль, и уравнение параллельного переноса вдоль произвольной гладкой кривой $\gamma(t)$ приобретает очень простой вид

$$\frac{d\xi^k}{dt} = 0.$$

Таким образом, поле является параллельным тогда и только тогда, когда его координаты постоянны (в декартовой системе координат). Параллельный перенос в этом случае совпадает с обычным (и, в частности, не зависит от кривой).

6) Если связность риманова, то параллельный перенос не меняется при изометриях многообразия. Действительно, при изометриях риманова метрика сохраняется. Следовательно, сохраняются и символы Кристоффеля, и уравнение параллельного переноса. Другими словами, если

$$f : M_1 \rightarrow M_2$$

— изометрия между двумя римановыми многообразиями (диффеоморфизм, сохраняющий длины кривых), и ξ — параллельное вдоль кривой $\gamma \subset M_1$ векторное поле, то его образ $df(\xi)$ является параллельным векторным полем вдоль кривой $f(\gamma) \subset M_2$.

Мы можем, например, применить это наблюдение в следующей ситуации. Пусть нам нужно параллельно перенести вектор вдоль кривой на конусе. Для этого достаточно изометрично развернуть конус на плоскость, сделать параллельный перенос на плоскости, а затем вновь свернуть из плоскости конус и посмотреть на получившийся результат.

Задача 9.1. На какой угол повернется вектор при его параллельном обнесении вокруг кругового конуса $x^2 + y^2 = z^2$ по его параллели?

7) Геометрический смысл параллельного переноса (случай поверхности в трехмерном пространстве).

Рассмотрим гладкую поверхность $V^2 \subset \mathbb{R}^3$. Как мы уже знаем, индуцированная риманова метрика (g_{ij}) на этой поверхности — это первая квадратичная форма. В силу теоремы 3 из лекции 8, на поверхности V^2 мы можем однозначно построить симметрическую риманову связность, отвечающую римановой метрике (g_{ij}) .

Рассмотрим на поверхности V^2 произвольную гладкую кривую $\gamma(t)$ и векторное поле $\vec{\xi}(t)$ вдоль этой кривой. В чем состоит геометрический смысл условия параллельности векторного поля ξ вдоль кривой γ на поверхности V ?

Теорема 1 (о геометрическом смысле параллельного переноса). *Векторное поле ξ параллельно вдоль кривой γ на поверхности V тогда и только тогда, когда вектор $\frac{d\xi}{dt}$ перпендикулярен поверхности.*

Таким образом, теорема 1 утверждает следующее: векторное поле параллельно вдоль кривой на поверхности тогда и только тогда, когда обычная производная этого поля в объемлющем пространстве перпендикулярна поверхности.

Доказательство. Эта теорема немедленно вытекает из геометрического смысла ковариантного дифференцирования на поверхности в трехмерном пространстве (теорема 4 из лекции 8). Действительно, обозначим через ∇ симметричную риманову связность на поверхности V . Тогда условие параллельности ξ вдоль кривой γ на поверхности V запишется в виде $\nabla_\gamma \xi = \text{pr} \left(\frac{d\xi}{dt} \right) = 0$, где pr — ортогональная проекция на касательное пространство к поверхности V . Это равносильно условию $\frac{d\xi}{dt} \perp T_{\gamma(t)}V$. \square

8) Пусть две поверхности V_1 и V_2 , лежащие в трехмерном пространстве, касаются друг друга вдоль кривой $\gamma \subset V_1 \cap V_2$. Тогда параллельный перенос вектора по поверхности вдоль кривой γ не зависит от поверхности. Другими словами, если векторное поле ξ параллельно вдоль γ на поверхности V_1 , то оно является параллельным вдоль γ и на поверхности V_2 и наоборот (отметим, что при сделанных предположениях поле ξ одновременно касается обеих поверхностей, поэтому имеет смысл говорить о его параллельности на обеих поверхностях). Этот факт немедленно вытекает из геометрического смысла ковариантного дифференцирования на поверхности в трехмерном пространстве. Действительно, обозначим через ∇_1 и ∇_2 связности на поверхностях V_1 и V_2 . Тогда условия параллельности ξ вдоль кривой γ на поверхностях V_1 и V_2 запишутся в виде

$$\begin{aligned} (\nabla_1)_\gamma \xi &= \text{pr}_1 \left(\frac{d\xi}{dt} \right) = 0, \\ (\nabla_2)_\gamma \xi &= \text{pr}_2 \left(\frac{d\xi}{dt} \right) = 0, \end{aligned}$$

где pr_i — ортогональная проекция на касательное пространство к поверхности V_i . Но в нашем случае касательные пространства к поверхностям V_1 и V_2 на кривой γ совпадают, поэтому совпадают и уравнения параллельного переноса.

Это наблюдение можно, например, применить для описания параллельного переноса вдоль параллели на сфере. Достаточно выбрать конус, который касается со сферой вдоль этой параллели, и сделать параллельный перенос на конусе (это мы уже умеем делать).

Задача 9.2. На какой угол повернется вектор при его параллельном обходе по параллели радиуса ρ на сфере радиуса r ?

9) Уравнения параллельного переноса на плоскости Лобачевского. Рассмотрим плоскость Лобачевского в модели на верхней полуплоскости с римановой метрикой

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Задача 9.3. Выпишите и решите уравнение параллельного переноса вдоль горизонтальной линии $y = y_0$ на плоскости Лобачевского в модели верхней полуплоскости с римановой метрикой $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. Покажите, что при движении вдоль кривой вправо

вектор равномерно вращается. В какую сторону он вращается: по часовой стрелке или против часовой стрелки?

10) Для симметрической римановой связности скалярное произведение сохраняется при параллельном переносе:

Предложение 2. *В случае симметрической римановой связности при параллельном переносе скалярное произведение сохраняется, т.е. если $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — векторные поля, параллельные вдоль кривой γ , то $(\xi(t), \eta(t)) = \text{const}$.*

Доказательство. Продифференцируем вдоль кривой скалярное произведение векторных полей ξ и η . Поскольку скалярное произведение является скалярной функцией, то обычное произведение вдоль кривой совпадает с ковариантным. Получаем

$$\frac{d}{dt}(\xi(t), \eta(t)) = \nabla_\gamma(\xi(t), \eta(t)) \stackrel{\text{лемма 1}}{=} (\nabla_\gamma \xi, \eta) + (\xi, \nabla_\gamma \eta) = 0,$$

т.е. $(\xi(t), \eta(t)) = \text{const}$, что и требовалось. \square

Отметим важное свойство римановой связности, использованное при доказательстве этого утверждения, которое будет использоваться и в дальнейшем:

Лемма 1. *Если связность риманова, то для любых трех векторных полей ξ , η , ζ справедливо равенство*

$$\nabla_\zeta(\xi, \eta) = (\nabla_\zeta \xi, \eta) + (\xi, \nabla_\zeta \eta).$$

Доказательство. Пользуемся коммутированием ковариантного дифференцирования со сверткой, правилом Лейбница ковариантного дифференцирования произведения, и условием $\nabla g \equiv 0$:

$$\begin{aligned} \nabla_\zeta(\xi, \eta) &= \nabla_\zeta(\text{Свертка}(g \otimes \xi \otimes \eta)) = \text{Свертка}(\nabla_\zeta(g \otimes \xi \otimes \eta)) \stackrel{\text{правило Лейбница для } \nabla}{=} \\ &= \text{Свертка}(\underbrace{(\nabla_\zeta g)}_0 \otimes \xi \otimes \eta) + g \otimes (\nabla_\zeta \xi) \otimes \eta + g \otimes \xi \otimes (\nabla_\zeta \eta) = 0 + (\nabla_\zeta \xi, \eta) + (\xi, \nabla_\zeta \eta). \end{aligned}$$

\square

Следствие 1. *Если связность риманова, то при параллельном переносе длина вектора сохраняется.*

Следствие 2. *Если связность риманова, то параллельный перенос (из точки P в точку Q вдоль кривой γ) является ортогональным оператором из пространства $T_P M$ в пространство $T_Q M$.*

9.1 Упражнения к лекции 9

Упражнение 9.1. На какой угол повернется вектор при его параллельном обнесении вокруг кругового конуса $x^2 + y^2 = z^2$ по его параллели?

Упражнение 9.2. На какой угол повернется вектор при его параллельном обносе по параллели радиуса ρ на сфере радиуса r ?

Упражнение 9.3. Выпишите и решите уравнение параллельного переноса вдоль горизонтальной линии $y = y_0$ на плоскости Лобачевского в модели верхней полуплоскости с римановой метрикой $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. Покажите, что при движении вдоль кривой вправо вектор равномерно вращается. В какую сторону он вращается: по часовой стрелке или против часовой стрелки?

Решение. Рассмотрим горизонтальную кривую $y = y_0$ на плоскости Лобачевского и выпишем явно уравнение параллельного переноса вдоль нее. Вычислим прежде символы Кристоффеля симметрической римановой связности. В силу конформности римановой метрики, имеем (полагаем $x^1 = x, x^2 = y$)

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{y^2}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = -\frac{1}{y}, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{y}, \\ \Gamma_{22}^2 &= -\frac{1}{y}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = 0. \end{aligned}$$

Тогда уравнения параллельности векторного поля $(\xi^1(t), \xi^2(t))$ вдоль кривой $\{x = t, y = y_0\}$ записываются в виде (мы сразу отбрасываем члены с нулевыми символами Кристоффеля)

$$\begin{cases} \frac{d\xi^1}{dt} + \Gamma_{12}^1 \xi^1 \frac{dy}{dt} + \Gamma_{21}^1 \xi^2 \frac{dx}{dt} = 0, \\ \frac{d\xi^2}{dt} + \Gamma_{11}^2 \xi^1 \frac{dx}{dt} + \Gamma_{22}^2 \xi^2 \frac{dy}{dt} = 0. \end{cases}$$

Подставим, наконец, явные выражения для символов Кристоффеля на данной кривой и явные выражения для вектора скорости кривой:

$$\begin{cases} \frac{d\xi^1}{dt} = \frac{1}{y_0} \xi^2, \\ \frac{d\xi^2}{dt} = -\frac{1}{y_0} \xi^1. \end{cases}$$

Можно переписать эти уравнения в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \frac{d\xi^1}{dt} \\ \frac{d\xi^2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{y_0} \\ -\frac{1}{y_0} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}.$$

Получилось линейное уравнение с постоянными коэффициентами (в общем случае коэффициенты матрицы системы зависят от t). В данном случае система легко явно решается, и решение имеет вид

$$\begin{aligned}\xi^1(t) &= \sin\left(\frac{1}{y_0}t + A_0\right), \\ \xi^2(t) &= \cos\left(\frac{1}{y_0}t + A_0\right).\end{aligned}$$

Это означает, что при движении вдоль кривой вправо вектор равномерно вращается по часовой стрелке. Причем, при уменьшении y_0 (т.е. при приближении прямой к абсолюту) скорость вращения увеличивается.