

8 Ковариантное дифференцирование (продолжение). Симметрические римановы связности

В прошлой лекции мы дали следующее определение ковариантного дифференцирования на произвольном гладком многообразии.

Определение 1 (опр.3 из лекции 7). Пусть M — произвольное гладкое многообразие. Мы скажем, что на M задана *аффинная связность* (или операция *ковариантного дифференцирования*), если в каждой локальной системе координат $(x^1, \dots, x^n)$ задан набор гладких функций $\Gamma_{jk}^i(x)$, который при переходе в другую систему координат $(x'^1, \dots, x'^n)$ преобразуется по закону

$$\Gamma_{j'k'}^{i'} = \Gamma_{jk}^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}. \quad (2')$$

При этом сама операция ∇ задается формулой

$$(\nabla T)_{j_1 \dots j_q \alpha}^{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \right) + \sum_{s=1}^p T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{s-1} t i_{s+1} \dots i_p} \Gamma_{t\alpha}^{i_s} - \sum_{s=1}^q T_{j_1 \dots j_{s-1} t j_{s+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \Gamma_{j_s \alpha}^t. \quad (1')$$

Вообще говоря, априори не ясно, на произвольном ли многообразии можно определить аффинную связность (ковариантное дифференцирование), т.е. задать символы Кристоффеля, удовлетворяющие правилу замены. На самом деле это всегда можно сделать, причем многими способами. Один из этих способов (очень важный) будет описан в этой лекции.

Соглашение об обозначениях.

$$(\nabla T)_{j_1 \dots j_q, \alpha}^{i_1 \dots i_p} =: \nabla_\alpha T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}.$$

8.1 Свойства ковариантного дифференцирования на многообразии

Теорема 1 (о свойствах операции ∇). Пусть на гладком многообразии M задана операция ∇ ковариантного дифференцирования. Тогда

1) Ковариантная производная тензорного поля типа (p, q) является тензорным полем типа $(p, q+1)$:

$$\nabla : \left\{ \begin{array}{c} \text{тензорные поля} \\ \text{типа } (p, q) \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{тензорные поля} \\ \text{типа } (p, q+1) \end{array} \right\}.$$

2) Операция ∇ линейна (над $\mathbb{R}$).

3) Правило Лейбница (для дифференцирования произведения). Если T и P — два произвольных тензорных поля, то

$$\nabla(T \otimes P) = \sigma((\nabla T) \otimes P) + T \otimes (\nabla P)$$

для циклической перестановки $\sigma \in \Sigma_{q+t+1}$ вида $\sigma = (q+t+1, \dots, q+1)$, где T и P — тензорные поля типов (p, q) и (s, t) соответственно. В локальных координатах

$$\nabla_\alpha (T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} P_{b_1 \dots b_t}^{a_1 \dots a_s}) = (\nabla_\alpha T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}) P_{b_1 \dots b_t}^{a_1 \dots a_s} + T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} (\nabla_\alpha P_{b_1 \dots b_t}^{a_1 \dots a_s}).$$

4) Если f — гладкая функция, то $\nabla f = df$, т.е. $(\nabla f)_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$.

5) а) Если ξ — векторное поле, то

$$\boxed{(\nabla \xi)_j^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \Gamma_{kj}^i \xi^k} \quad (\iff \quad \nabla \frac{\partial}{\partial x^s} = \Gamma_{sj}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j).$$

Это очень важная формула, которую мы будем часто использовать. Ее рекомендуется запомнить.

б) Если ℓ — ковекторное поле, то

$$(\nabla \ell)_{ij} = \frac{\partial \ell_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \ell_k \quad (\iff \quad \nabla dx^s = -\Gamma_{ij}^s dx^i \otimes dx^j).$$

6) Правило дифференцирования свертки. Если T — произвольное тензорное поле, то

$$\nabla(\text{свертка } T) = \text{свертка}(\nabla T),$$

т.е. операция ∇ коммутирует со сверткой.

Выполнение свойств 1)–5) равносильно выполнению свойств 1)–5а) и 6) (т.е. 5б) $\iff$ 6)).

Замечание 1 (о свойствах 3)–5)). Если один из тензоров имеет тип $(0, 0)$, т.е. является скалярной функцией, то тензорное умножение является обычным умножением на функцию, и правило Лейбница запишется в виде

$$\nabla_\alpha (fT)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \stackrel{3), 4)}{=} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + f \nabla_\alpha T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}.$$

Доказательство. Свойства 2), 4) и 5) сразу следуют из определения операции ковариантного дифференцирования.

Свойство 1) (оно, пожалуй, самое важное) следует из правила замены символов Кристоффеля (2'), которое было специально подобрано таким образом, чтобы свойство 1) выполнялось. Согласно теореме из лекции 7, это свойство выполнено в случае евклидовой связности (т.е. операции ковариантного дифференцирования в $\mathbb{R}^n$). Доказательство в общем случае было бы точно таким же. Мы не будем здесь проводить формального доказательства в общем случае (можно проделать это самостоятельно или прочитать в книге А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко «Курс дифференциальной геометрии и топологии»).

Докажем свойство 3). Пусть T^i и S^j — векторные поля. Имеем

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha (T^i S^j) &\stackrel{(1')}{=} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (T^i S^j) + T^a S^j \Gamma_{a\alpha}^i + T^i S^a \Gamma_{a\alpha}^j = \\ &= \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^\alpha} + T^a \Gamma_{a\alpha}^i \right) S^j + T^i \left(\frac{\partial S^j}{\partial x^\alpha} + S^a \Gamma_{a\alpha}^j \right) \stackrel{(1')}{=} (\nabla_\alpha T^i) S^j + T^i (\nabla_\alpha S^j). \end{aligned}$$

Для произвольных тензорных полей T и S доказательство аналогично предыдущему после замены индексов i и j на мультииндексы (i) и (j) .

Выведем свойство 6) из остальных свойств.

Проверим свойство в простейшем случае, когда T — тензорное поле типа $(1, 1)$, т.е. линейный оператор. Нужно проверить, что

$$\nabla_\alpha \left(\sum_i T_i^i \right) = \sum_i (\nabla_\alpha T_i^i).$$

Имеем

$$\nabla_\alpha T_j^i \stackrel{(1')}{=} \frac{\partial T_j^i}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{k\alpha}^i T_j^k - \Gamma_{j\alpha}^k T_k^i.$$

Суммируя по $i = j$, получаем

$$\sum_i \left(\frac{\partial T_i^i}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{k\alpha}^i T_i^k - \Gamma_{i\alpha}^k T_k^i \right) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sum_i T_i^i \right) \stackrel{4)}{=} \nabla_\alpha \left(\sum_i T_i^i \right),$$

что и требовалось.

Выведем свойство 6) из остальных свойств в общем случае, для свертки по первому верхнему и первому нижнему индексам:

$$\begin{aligned} (\text{Свертка } \nabla_\alpha T)_{j_2 \dots j_q}^{i_2 \dots i_p} &= \nabla_\alpha T_{ij_2 \dots j_q}^{ii_2 \dots i_p} = \frac{\partial T_{ij_2 \dots j_q}^{ii_2 \dots i_p}}{\partial x^\alpha} + \underbrace{T_{ij_2 \dots j_q}^{a_1 i_2 \dots i_p} \Gamma_{a_1 \alpha}^i}_{\text{скажем}} + T_{ij_2 \dots j_q}^{i a_2 i_3 \dots i_p} \Gamma_{a_2 \alpha}^{i_2} + \dots + T_{ij_2 \dots j_q}^{i i_2 \dots i_{p-1} a_p} \Gamma_{a_p \alpha}^{i_p} \\ &\quad - \underbrace{T_{b_1 j_2 \dots j_q}^{ii_2 \dots i_p} \Gamma_{i \alpha}^{b_1}}_{\text{скажем}} - T_{ib_2 j_3 \dots j_q}^{ii_2 \dots i_p} \Gamma_{j_2 \alpha}^{b_2} - \dots - T_{ij_2 \dots j_{q-1} b_q}^{ii_2 \dots i_p} \Gamma_{j_q \alpha}^{b_q} = \end{aligned}$$

Но выделенные фигурными скобками слагаемые взаимно сокращаются, поэтому правая часть полученного равенства равна правой (а значит, и левой) части аналога формулы (1') для ковариантной производной тензора $\left\{ (\text{Свертка } T)_{j_2 \dots j_q}^{i_2 \dots i_p} \right\}$. То есть,

$$= (\nabla_\alpha (\text{Свертка } T))_{j_2 \dots j_q}^{i_2 \dots i_p}.$$

Замечание 2. В силу доказанного свойства 6) следующая запись имеет смысл вне зависимости от того, до или после дифференцирования производится суммирование:

$$\nabla_\alpha T_{ij_2 \dots j_q}^{ii_2 \dots i_p}.$$

Осталось вывести свойство 5б) из остальных свойств. Пусть ξ — векторное поле, ℓ — ковекторное поле. Тогда

$$\nabla_\alpha (\text{Свертка}(\ell \otimes \xi)) \stackrel{6)}{=} \text{Свертка}(\nabla_\alpha(\ell \otimes \xi)) \stackrel{3)}{=} \text{Свертка}((\nabla_\alpha \ell) \otimes \xi + \ell \otimes \nabla_\alpha \xi),$$

т.е.

$$\nabla(\xi^i \ell_i) = \xi^i (\nabla \ell_i) + \ell_i (\nabla \xi^i).$$

В этом равенстве первый и третий члены уже известны — из свойств 4) и 5а). Ковариантная производная ковекторного поля, стоящая во втором члене, отсюда однозначно восстанавливается. Излишне говорить, что полученная формула для ∇ на ковекторных полях будет совпадать со стандартной, см. 5б). Но проверить все-таки нужно, сделаем это:

$$\nabla_\alpha (\ell_i \xi^i) \stackrel{4)}{=} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\ell_i \xi^i) = \frac{\partial \ell_i}{\partial x^\alpha} \xi^i + \ell_i \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\alpha},$$

далее

$$\ell_i(\nabla_\alpha \xi^i) \stackrel{5a)}{=} \ell_i\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^\alpha} + \xi^s \Gamma_{s\alpha}^i\right),$$

откуда получаем

$$\xi^i(\nabla_\alpha \ell_i) = \frac{\partial \ell_i}{\partial x^\alpha} \xi^i - \ell_i \xi^s \Gamma_{s\alpha}^i \equiv \xi^i \left(\frac{\partial \ell_i}{\partial x^\alpha} - \ell_s \Gamma_{i\alpha}^s \right).$$

Ввиду произвольности векторного поля ξ , отсюда сразу получаем свойство 5б). $\square$

8.2 Аксиоматическое определение ковариантной производной

Теперь давайте обсудим вопрос о том, насколько однозначно определена операция ковариантного дифференцирования. Мы определили ее явной формулой с помощью символов Кристоффеля. Можно ли ее задать как-нибудь иначе, но так, чтобы основные ее свойства оказались выполненными? Ответ дает следующая теорема.

Теорема 2. Пусть на многообразии M задана операция $\tilde{\nabla}$, удовлетворяющая свойствам 1)–4) и 6) из теоремы 1, т.е.

1) $\tilde{\nabla}$ переводит тензорные поля типа (p, q) в тензорные поля типа $(p, q + 1)$:

$$\tilde{\nabla} : \left\{ \begin{array}{c} \text{тензорные поля} \\ \text{типа } (p, q) \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{тензорные поля} \\ \text{типа } (p, q + 1) \end{array} \right\},$$

2) $\tilde{\nabla}$ линейна,

3) $\tilde{\nabla}$ удовлетворяет правилу Лейбница дифференцирования тензорного произведения,

4) $\tilde{\nabla} f = df$ для гладких функций f на M ,

6) $\tilde{\nabla}(\text{свертка}) = \text{свертка}(\tilde{\nabla} T)$.

Тогда операция $\tilde{\nabla}$ является обычной операцией ковариантного дифференцирования в смысле определения из прошлой лекции. Другими словами, существует набор символов Кристоффеля, который при замене локальных координат преобразуется по формулам (2') и такой, что $\tilde{\nabla}$ задается стандартной формулой (1') (см. определение 1).

Замечание 3. Эта теорема в некотором смысле может рассматриваться как теорема об однозначности операции дифференцирования тензорных полей. Однозначность, однако, не следует понимать в том смысле, что такая операция ровно одна. Их очень много, но все они однотипны и различаются лишь выбором символов Кристоффеля.

Доказательство. Проведите самостоятельно. Мы лишь дадим основную идею.

1. Пусть нам дана операция $\tilde{\nabla}$. Для доказательства теоремы нам нужно откуда-то взять символы Кристоффеля. Откуда? Ответ прост.

Положим по определению

$$\tilde{\nabla} e_j = \Gamma_{j\alpha}^k e_k \otimes e^\alpha.$$

Другими словами, символы Кристоффеля мы определим как коэффициенты в разложении тензорного поля $\tilde{\nabla} e_j$ по базисным тензорным полям данной системы координат.

2. Мы видим, что на базисных векторных полях формулы для $\tilde{\nabla}$ и обычной операции ковариантного дифференцирования совпадают (проверьте!). Любое векторное

поле может быть разложено в линейную комбинацию базисных (коэффициенты — гладкие функции). Пользуясь линейностью, правилом Лейбница и свойством 4), мы можем определить эту операцию на произвольных векторных полях. Формула будет правильной — как в свойстве 5а). Подробнее:

$$\tilde{\nabla}\xi = \tilde{\nabla}\left(\sum_s \xi^s e_s\right) \stackrel{2)}{=} \sum_s \tilde{\nabla}(\xi^s e_s) \stackrel{3),4)}{=} \sum_{s,\alpha} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^\alpha} e_s \otimes e^\alpha + \sum_{s,i,\alpha} \xi^s \Gamma_{s\alpha}^i e_i \otimes e^\alpha,$$

т.е. верно свойство 5а). Заодно мы показали равносильность двух формул в свойстве 5а). Аналогично показывается равносильность двух формул из 5б).

3. Теперь можно проверить справедливость формулы (2') преобразования символов Кристоффеля при заменах координат. Эта формула доказывается в точности как формула (2) из **теоремы лекции 7** в случае $\mathbb{R}^n$ (выводится из свойств 1) и 5а)).

4. Теперь нужно посмотреть, что происходит с дифференцированием ковекторных полей. Надо доказать свойство 5б). По теореме 1 это свойство следует из свойств 1)–5а) и 6).

5. После того, как мы проверили, что на векторных и ковекторных полях операция $\tilde{\nabla}$ совпадает со стандартной, мы должны проверить этот факт на тензорных полях произвольного типа. Для этого достаточно вспомнить, что произвольное тензорное поле типа (p, q) разлагается в линейную комбинацию тензорных полей вида $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}$, и воспользоваться линейностью и правилом Лейбница. $\square$

Итак, наличие на M аффинной связности Γ и ковариантного дифференцирования ∇ равносильны. Далее мы будем понятие аффинной связности отождествлять с понятием ковариантного дифференцирования.

8.3 Ковариантная производная вдоль векторного поля

Определение 2. Ковариантной производной $\nabla_\xi T$ тензорного поля T вдоль векторного поля ξ называется тензорное поле, определяемое по следующей формуле:

$$\nabla_\xi T = \xi^i \nabla_i T.$$

Как видно из этого определения, производная тензорного поля T типа (p, q) вдоль векторного поля является тензорным полем того же типа (p, q) :

$$\nabla_\xi : \left\{ \begin{array}{c} \text{тензорные поля} \\ \text{типа } (p, q) \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{тензорные поля} \\ \text{типа } (p, q) \end{array} \right\}.$$

Определение 3. Ковариантной производной вдоль (параметризованной) кривой γ называется ковариантная производная вдоль вектора скорости этой кривой. Обозначение: $\nabla_\gamma = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}$.

Задача 1. Отметим, что производная вдоль кривой зависит от параметризации кривой. При замене параметра результат будет меняться. Выясните самостоятельно, каким образом.

Пусть $\eta = \{\eta^j\}$ — векторное поле. Распишем более подробно его ковариантную производную вдоль кривой $\gamma(t) = \{x^1(t), \dots, x^n(t)\}$:

$$(\nabla_\gamma \eta)^j = \left(\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \eta \right)^j = \frac{dx^i}{dt} \nabla_i \eta^j = \frac{dx^i}{dt} \left(\frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} + \Gamma_{ki}^j \eta^k \right) = \frac{d\eta^j}{dt} + \Gamma_{ki}^j \eta^k \frac{dx^i}{dt}.$$

Из получившейся формулы следует важный вывод. Для того, чтобы подсчитать ковариантную производную векторного поля вдоль кривой, достаточно знать это поле только на самой кривой (посмотрите на правую часть равенства). (Отметим, что для подсчета обычной ковариантной производной необходимо задавать поле в некоторой открытой окрестности).

Пример. Пусть $(x^1, \dots, x^n)$ — локальная система координат на многообразии M . Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базисные векторные поля, отвечающие этой системе координат. Напомним, как они определяются. Можно задать их тремя эквивалентными способами, отвечающими трем определениям касательного вектора:

- 1) e_i — касательный вектор к i -ой координатной линии данной системы координат;
- 2) e_i — векторное поле с координатами $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (единица на i -ом месте);
- 3) e_i — дифференциальный оператор $\partial/\partial x^i$.

Задача 2. $\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k$.

8.4 Симметричные римановы связности

Определение 4. Пусть M — риманово многообразие, т.е. на M задана риманова метрика $\{g_{ij}\}$. Симметричная связность $\{\Gamma_{jk}^i\}$ называется *римановой*, если

$$\nabla_k g_{ij} \equiv 0$$

Теорема 3. Пусть $(M, \{g_{ij}\})$ — риманово многообразие. Тогда на нем существует и притом единственная риманова связность (отвечающая метрике $\{g_{ij}\}$).

Доказательство. Найдем явно символы Кристоффеля связности ∇ , решая уравнение

$$\nabla_k g_{ij} \equiv 0.$$

Легко видеть, что на самом деле это уравнение является системой линейных уравнений относительно символов Кристоффеля. Выпишем их:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^p g_{pj} - \Gamma_{jk}^p g_{ip} = 0.$$

Вводя обозначение

$$\Gamma_{ik,j} = \Gamma_{ik}^p g_{pj}$$

и выписывая три уравнения, отвечающие фиксированному набору индексов i, j, k и получающиеся друг из друга их циклической перестановкой, получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{ik,j} + \Gamma_{jk,i} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}, \\ \Gamma_{kj,i} + \Gamma_{ij,k} &= \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}, \\ \Gamma_{ji,k} + \Gamma_{ki,j} &= \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Сложим два первых уравнения и вычтем из них третье. Используя симметричность символов Кристоффеля, получим

$$2\Gamma_{jk,i} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}.$$

Легко видеть, что $\Gamma_{jk,i}$, определенные по этой формуле, удовлетворяют выписанной системе. Поднимая индекс i , окончательно получаем однозначное решение исходной системы

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{i\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\alpha} \right)$$

(мы использовали здесь очевидное равенство $\Gamma_{jk}^i = g^{i\alpha} \Gamma_{jk,\alpha}$).

Фактически доказательство теоремы на этом закончено. Мы нашли (однозначно!) символы Кристоффеля, удовлетворяющие в каждой локальной системе координат необходимому условию $\nabla_k g_{ij} \equiv 0$.

Но в определении связности требуется, чтобы символы Кристоффеля удовлетворяли специальному закону преобразования при заменах координат. Почему символы Кристоффеля, определенные по формуле в рамке, этому закону удовлетворяют? Это можно проверить непосредственно с помощью явных вычислений (хорошее упражнение). Но мы прокомментируем этот факт иначе.

Представим себе, что нам дана связность, символы Кристоффеля которой *в одной фиксированной системе координат* (x) определяются по формуле в рамке, а во всех остальных системах координат с помощью стандартного закона преобразования для символов Кристоффеля (т.е. с помощью пересчета из фиксированной системы координат в другую). В результате мы получим (локально) некоторую связность, которая *будет римановой*. Действительно, она удовлетворяет условию $\nabla_k g_{ij} \equiv 0$ в фиксированной нами системе координат, но поскольку $\nabla_k g_{ij}$ — тензор, то это условие будет выполнено во всех системах координат одновременно (если тензор обратился в нуль в одной системе координат, то он равен нулю и во всех остальных). Таким образом, символы Кристоффеля построенной связности удовлетворяют в каждой системе координат (x') требуемым соотношениям ($\nabla_{k'} g_{i'j'} \equiv 0$) и поэтому, как уже показано, определяются по формуле в рамке. Мы показали, таким образом, что набор $\Gamma_{j'k'}^{i'}$, полученный из Γ_{jk}^i по формулам замены, обязан совпадать с набором, определенным по формулам в рамке, что и требовалось. Теорема доказана. $\square$

8.5 Геометрический смысл римановой связности (случай поверхности в трехмерном пространстве)

Рассмотрим гладкую поверхность $V^2 \subset \mathbb{R}^3$. Как мы уже знаем, индуцированная риманова метрика g_{ij} на этой поверхности — это первая квадратичная форма. В силу только что доказанной теоремы, на поверхности V^2 мы можем однозначно построить симметрическую риманову связность, отвечающую метрике g_{ij} . В чем состоит геометрический смысл ковариантного дифференцирования в смысле этой связности?

Рассмотрим на поверхности V^2 произвольную гладкую кривую $\gamma(t)$ и векторное поле $\vec{\xi}(t)$ вдоль этой кривой. Следующая теорема дает ответ на поставленный выше вопрос.

Теорема 4. *Имеет место равенство*

$$\nabla_\gamma \xi = pr \left(\frac{d\vec{\xi}}{dt} \right)$$

Замечание 4. В левой части равенства стоит ковариантная производная векторного поля $\vec{\xi}$ вдоль кривой γ в смысле симметрической римановой связности, согласованной с индуцированной метрикой на поверхности (т.е. первой квадратичной формой). Это некоторое векторное поле вдоль кривой, касающееся поверхности. Через $\frac{d\vec{\xi}}{dt}$ в правой части равенства обозначена обычная производная векторного поля $\vec{\xi}$ вдоль кривой, взятая в объемлющем трехмерном пространстве (можно при желании считать, что мы берем ковариантную производную в объемлющем пространстве; поскольку объемлющее пространство евклидово, то обычная и ковариантная производные совпадают). Это новое векторное поле уже не касается, вообще говоря, поверхности. Чтобы “сделать” его касательным, мы рассматриваем его ортогональную проекцию на касательную плоскость (оператор pr в формуле обозначает как раз такую проекцию). Таким образом, теорема утверждает следующее: чтобы подсчитать ковариантную производную векторного поля вдоль кривой на поверхности, нужно сначала взять обычную производную в объемлющем пространстве, а затем ортогонально спроектировать результат на касательную плоскость к поверхности.

Замечание 5. Эта теорема остается справедливой и для гиперповерхности V^{n-1} в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Доказательство, приводимое ниже, никак не реагирует на повышение размерности. Мы будем пользоваться тензорными обозначениями, поэтому переход к многомерному случаю производится увеличением границы изменения индексов (т.е. индексы будут меняться не от 1 до 2, а от 1 до n).

Доказательство. Мы начнем с доказательства так называемых *дериwационных формул*, которые важны сами по себе.

Пусть u^1, u^2 — локальные координаты на поверхности V^2 , $\vec{r}(u^1, u^2)$ — радиус-вектор поверхности. Напомним стандартное обозначение $\vec{r}_{u^i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}$, и введем по аналогии еще

$$\text{одно: } \vec{r}_{u^i u^j} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j}.$$

Лемма (дериwационные формулы).

$$\boxed{\vec{r}_{u^i u^j} = \Gamma_{ij}^k \vec{r}_{u^k} + b_{ij} \vec{n}}$$

где

Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля симметрической римановой связности на V ,
 b_{ij} — коэффициенты второй квадратичной формы на V (в данной локальной системе координат),
 $\vec{n}$ — вектор единичной нормали к поверхности V .

Доказательство леммы. Поскольку векторы $\vec{r}_{u^i}$ образуют базис в касательном пространстве, то добавляя к ним вектор единичной нормали $\vec{n}$, мы получаем некоторый базис в объемлющем евклидовом пространстве и можем, следовательно, однозначно разложить вектор $\vec{r}_{u^i u^j}$ по этому базису. Сделаем это и покажем, что коэффициенты разложения совпадают с теми, что указаны в дериwационных формулах. Имеем

$$\vec{r}_{u^i u^j} = A_{ij}^k \vec{r}_{u^k} + B_{ij} \vec{n}.$$

Умножим это равенство скалярно на вектор $\vec{n}$. Поскольку вектор нормали ортогонален касательным векторам $\vec{r}_{u^k}$, то мы получим

$$(\vec{r}_{u^i u^j}, \vec{n}) = B_{ij} (\vec{n}, \vec{n}) = B_{ij}.$$

Но $(\vec{r}_{u^i u^j}, \vec{n})$ — это в точности коэффициент b_{ij} второй квадратичной формы (см. определение в прошлом семестре). Итак, $B_{ij} = b_{ij}$, что и требовалось.

Умножим теперь то же самое равенство скалярно на вектор $\vec{r}_{u^l}$. Получим

$$(\vec{r}_{u^i u^j}, \vec{r}_{u^l}) = A_{ij}^k (\vec{r}_{u^k}, \vec{r}_{u^l}) = A_{ij}^k g_{kl}$$

или, поднимая индексы (домножая на матрицу, обратную к метрическому тензору),

$$A_{ij}^k = g^{kl} (\vec{r}_{u^i u^j}, \vec{r}_{u^l}).$$

Таким образом, мы должны показать, что

$$(\vec{r}_{u^i u^j}, \vec{r}_{u^l}) = \Gamma_{ij,l}.$$

Используя явную формулу для символов Кристоффеля симметрической римановой связности, мы получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij,l} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u^j} (\vec{r}_{u^i}, \vec{r}_{u^l}) + \frac{\partial}{\partial u^i} (\vec{r}_{u^j}, \vec{r}_{u^l}) - \frac{\partial}{\partial u^l} (\vec{r}_{u^i}, \vec{r}_{u^j}) \right) = \\ &= \frac{1}{2} ((\vec{r}_{u^i u^j}, \vec{r}_{u^l}) + (\vec{r}_{u^i}, \vec{r}_{u^l u^j}) + (\vec{r}_{u^j u^i}, \vec{r}_{u^l}) + \\ &\quad + (\vec{r}_{u^j}, \vec{r}_{u^l u^i}) - (\vec{r}_{u^i u^l}, \vec{r}_{u^j}) - (\vec{r}_{u^i}, \vec{r}_{u^j u^l})) = (\vec{r}_{u^i u^j}, \vec{r}_{u^l}), \end{aligned}$$

что и требовалось. Деривационные формулы доказаны. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы 4. Пусть $\vec{\xi}$ — векторное поле вдоль кривой на поверхности (касательное к поверхности). Его можно представить в виде $\vec{\xi} = \xi^i \vec{r}_{u^i}$. Продифференцируем это выражение вдоль кривой γ в объемлющем евклидовом пространстве:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\xi}}{dt} &= \frac{d\xi^i}{dt} \vec{r}_{u^i} + \xi^i \frac{d\vec{r}_{u^i}}{dt} = \frac{d\xi^i}{dt} \vec{r}_{u^i} + \xi^i \frac{\partial \vec{r}_{u^i}}{\partial u^j} \frac{du^j}{dt} = \\ &\text{используем деривационные формулы для } \frac{\partial \vec{r}_{u^i}}{\partial u^j} = \vec{r}_{u^i u^j} \\ &= \frac{d\xi^i}{dt} \vec{r}_{u^i} + \xi^i (\Gamma_{ij}^k \vec{r}_{u^k} + b_{ij} \vec{n}) \frac{du^j}{dt}. \end{aligned}$$

Спроектируем теперь полученное выражение на касательную плоскость к поверхности. Для этого достаточно отбросить члены, содержащие $\vec{n}$ (поскольку вектор $\vec{n}$ ортогонален касательной плоскости, а все остальные векторы $\vec{r}_{u^k}$, участвующие в этом выражении, лежат в касательной плоскости). Получаем

$$\text{pr} \left(\frac{d\vec{\xi}}{dt} \right) = \frac{d\xi^i}{dt} \vec{r}_{u^i} + \Gamma_{ij}^k \xi^i \frac{du^j}{dt} \vec{r}_{u^k} =$$

в первом слагаемом изменим индекс суммирования
 i на k и приведем подобные слагаемые

$$= \left(\frac{d\xi^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k \xi^i \frac{du^j}{dt} \right) \vec{r}_{u^k} = \nabla_\gamma \xi,$$

что и требовалось (здесь выражение в скобках совпадает со стандартной формулой для k -ой координаты ковариантной производной поля ξ вдоль кривой γ). Теорема доказана. $\square$

8.6 Упражнения к лекции 8

Упражнение 8.1. Отметим, что производная вдоль кривой зависит от параметризации кривой. При замене параметра результат будет меняться. Выясните самостоятельно, каким образом.

Упражнение 8.2. $\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k$.