7 Операция ковариантного дифференцирования

Прежде, чем определить операцию ковариантного дифференцирования, мы напомним уже известную из лекции 4 операцию внешнего дифференцирования дифференциальных форм.

Пусть M — гладкое многообразие и $\omega \in \Omega^k(M)$ — дифференциальная форма на нем. Пусть в локальной системе координат эта форма задана как кососимметрическое тензорное поле $\omega = \{\omega_{i_1\ldots i_k}\}$.

Определим операцию ковариантного дифференцирования $\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$, которая каждой дифференциальной форме степени k сопоставляет дифференциальную форму степени $k+1$.

В каждой локальной системе координат эта операция определяется так (согласно опр.$1'$ из лекции 4):

$$(\mathrm{d}\omega)_{i_0 i_1\ldots i_k} := (k+1)\partial_{[i_0}\omega_{i_1\ldots i_k]}.$$

Эта операция корректно определена, т.е. не зависит от выбора конкретной системы координат (согласно теореме 1 из лекции 4). Можно ли определить аналогичную операцию

$$\nabla : \left\{\begin{matrix}\text{тензорные поля}\\ \text{типа } (p,q)\end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix}\text{тензорные поля}\\ \text{типа } (p,q+1)\end{matrix}\right\}$$

для произвольных тензорных полей типа (p,q) (не обязательно дифференциальных форм)?

Посмотрим, можно ли в качестве такой операции взять обычное частное дифференцирование. Пусть $T = \left\{T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}(x)\right\}$ — произвольное тензорное поле и $\left\{S^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q\alpha}(x) = \frac{\partial T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}}{\partial x^\alpha}(x)\right\}$ — набор соответствующих частных производных.

Утверждение 1. *Набор $S = \left\{S^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q\alpha}\right\}$ тензорного поля не образует.*

Проверка. Рассмотрим простейший частный случай, когда $T = \left\{\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\right\}$ для некоторой гладкой функции f.

Тогда $S_{i\alpha} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^i}$. Посмотрим, как связаны эти наборы в различных системах координат. Имеем

$$S_{i'\alpha'} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^{\alpha'}\partial x^{i'}} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{\alpha'}\partial x^{i'}} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^i}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} =$$
$$= \underbrace{T_i\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{\alpha'}\partial x^{i'}}}_{\text{нетензорный добавок}} + \underbrace{S_{i\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}}_{\text{тензорная часть}}.$$

Видно, что набор S преобразуется по тензорному закону только при линейных заменах координат. Следовательно, S — не тензор. □

Утверждение 2. *Пусть $T = \{T^i\}$ — векторное поле, $S = \operatorname{div} T = \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{i'}}$, где (x') — декартова система координат. Тогда функция S тензорным полем не является.*

Проверка. При замене координат $(x') \to (x)$ дивергенция меняется так:

$$\operatorname{div} T = \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial T^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} + T^i\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} = \underbrace{\frac{\partial T^i}{\partial x^i}}_{\text{тензорная часть}} + \underbrace{T^i\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}}_{\text{нетензорный добавок}}.$$

Видно, что набор S преобразуется по тензорному закону только при линейных заменах координат. Следовательно, S — не тензор. □

Тем не менее, мы можем использовать для определения операции ∇ обычную операцию ковариантного дифференцирования, слегка подправив ее таким образом, чтобы результат был тензором.

Рассмотрим сначала простейший случай, когда $M = \mathbb{R}^n$.

Определение 1. Положим по определению, что в декартовой (ортонормированной) системе координат в $\mathbb{R}^n$ операция ковариантного дифференцирования ∇ *совпадает* с обычной операцией частного дифференцирования. Во всех остальных (криволинейных) системах координат определяется из требования *тензорности.* Другими словами, чтобы подсчитать ковариантную производную тензора в криволинейной системе координат, нужно сначала сделать это в декартовой системе координат, а затем перевести результат в криволинейную систему координат, пользуясь тензорным законом преобразования.

Посмотрим, как же все-таки будет выглядеть результат в криволинейной системе координат, чтобы затем можно было проводить дифференцирование в этой системе координат непосредственно, не пользуясь декартовыми координатами.

Пусть $x^1, \dots, x^n$ — декартовы координаты, $x'^1, \dots, x'^n$ — криволинейные, $T = \left\{T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\right\}$ — тензорное поле.

Пусть далее ∇T — ковариантная производная тензорного поля T. Тогда в декартовой системе координат

$$(\nabla T)^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q \alpha} = \frac{\partial T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}}{\partial x^\alpha}.$$

А в криволинейной

$$(\nabla T)^{i'_1\dots i'_p}_{j'_1\dots j'_q \alpha'} = \text{тензорный закон} = \frac{\partial T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}\dots\frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}}\cdot\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}\dots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}}\cdot\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}.$$

Для простоты мы посмотрим, что получится в случае тензорного поля типа $(1,1)$.

$$(\nabla T)^{i'}_{j'\alpha'} \overset{\text{тенз. закон}}{=} \frac{\partial T^i_j}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} =$$

пользуемся определением ∇ в декартовой системе координат

$$= \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(T^i_j\right)\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(T^{p'}_{q'}\frac{\partial x^i}{\partial x^{p'}}\frac{\partial x^{q'}}{\partial x^j}\right)\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} =$$

$$= T^{p'}_{q'}\frac{\partial x^i}{\partial x^{p'}}\frac{\partial^2 x^{q'}}{\partial x^\alpha \partial x^j}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} + \frac{\partial T^{p'}_{q'}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{p'}}\frac{\partial x^{q'}}{\partial x^j}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} +$$

$$+T^{p'}_{q'}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{\alpha'}\partial x^{p'}}\frac{\partial x^{q'}}{\partial x^j}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}=$$

$$=T^{i'}_{q'}\frac{\partial^2 x^{q'}}{\partial x^{\alpha}\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}+\frac{\partial T^{i'}_{j'}}{\partial x^{\alpha'}}+T^{p'}_{j'}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{\alpha'}\partial x^{p'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}.$$

Вводя обозначения

$$\tilde{\Gamma}^{q'}_{j'\alpha'}=\frac{\partial^2 x^{q'}}{\partial x^{\alpha}\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}},$$

$$\Gamma^{i'}_{p'\alpha'}=\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{\alpha'}\partial x^{p'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i},$$

получаем, таким образом, следующую формулу:

$$\boxed{(\nabla T)^{i'}_{j'\alpha'} \;=\; \frac{\partial T^{i'}_{j'}}{\partial x^{\alpha'}} \;+\; T^{i'}_{q'}\tilde{\Gamma}^{q'}_{j'\alpha'} \;+\; T^{p'}_{j'}\Gamma^{i'}_{p'\alpha'}.}$$

Лемма. $\Gamma^{i'}_{p'\alpha'}=-\tilde{\Gamma}^{i'}_{p'\alpha'}$.

Доказательство. Рассмотрим тождество

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{p'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}=\delta^{i'}_{p'}$$

и продифференцируем его по $x^{\alpha'}$. Получим

$$0=\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{p'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{\alpha'}\partial x^{p'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}+\frac{\partial x^i}{\partial x^{p'}}\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{\alpha}\partial x^i}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}=$$

$$=\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{\alpha'}\partial x^{p'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}+\frac{\partial x^p}{\partial x^{p'}}\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{\alpha}\partial x^p}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}=\Gamma^{i'}_{p'\alpha'}+\tilde{\Gamma}^{i'}_{p'\alpha'}.$$

Лемма доказана. □

Таким образом, формулу для ковариантной производной мы можем переписать в таком виде:

$$\boxed{(\nabla T)^{i'}_{j'\alpha'} \;=\; \frac{\partial T^{i'}_{j'}}{\partial x^{\alpha'}} \;-\; T^{i'}_{q'}\Gamma^{q'}_{j'\alpha'} \;+\; T^{p'}_{j'}\Gamma^{i'}_{p'\alpha'}.}$$

Определение 2. Функции $\Gamma^{i'}_{p'\alpha'}$ называются *символами Кристоффеля* (в криволинейной системе координат ${x'}^1,\ldots,{x'}^n$).

Мы нашли явный вид операции ∇ для тензоров типа $(1,1)$ в произвольной криволинейной системе координат в $\mathbb{R}^n$.

Пример 7.1 ($\{T^i\}$ — векторное поле)**.** Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ векторное поле $\{T^i\}$. В криволинейной системе координат

$$(\nabla T)^{i'}_{\alpha'}\overset{\text{тенз. закон}}{=}\frac{\partial T^i}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}=\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(T^{p'}\frac{\partial x^i}{\partial x^{p'}}\right)\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}=$$

$$=\frac{\partial T^{p'}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{p'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}+T^{p'}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{\alpha'}\partial x^{p'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}=\frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{\alpha'}}+T^{p'}\Gamma^{i'}_{p'\alpha'}.$$

Пример 7.2 ($\{T_j\}$ — ковекторное поле). Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ ковекторное поле $\{T_j\}$. В криволинейной системе координат

$$(\nabla T)_{j'\alpha'} \overset{\text{тенз. закон}}{=} \frac{\partial T_j}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(T_{q'}\frac{\partial x^{q'}}{\partial x^j}\right)\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} =$$

$$= \frac{\partial T_{q'}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{q'}}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} + T_{q'}\frac{\partial^2 x^{q'}}{\partial x^\alpha \partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial T_{j'}}{\partial x^{\alpha'}} + T_{q'}\tilde{\Gamma}^{q'}_{j'\alpha'} = \frac{\partial T_{j'}}{\partial x^{\alpha'}} - T_{q'}\Gamma^{q'}_{j'\alpha'}.$$

Сформулируем теперь общее утверждение для тензоров произвольного типа.

Теорема 1 (об операции ковариантного дифференцирования в $\mathbb{R}^n$)**.** *Пусть $x'^1, \ldots, x'^n$ — криволинейные координаты в $\mathbb{R}^n$, $T = \left\{T^{i'_1\ldots i'_p}_{j'_1\ldots j'_q}\right\}$ — тензорное поле, записанное в этой системе координат. Тогда*

$$(\nabla T)^{i'_1\ldots i'_p}_{j'_1\ldots j'_q\alpha'} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}}\left(T^{i'_1\ldots i'_p}_{j'_1\ldots j'_q}\right) + \sum_{s=1}^{p} T^{i'_1\ldots i'_{s-1}t' i'_{s+1}\ldots i'_p}_{j'_1\ldots j'_q}\Gamma^{i'_s}_{t'\alpha'} - \sum_{s=1}^{q} T^{i'_1\ldots i'_p}_{j'_1\ldots j'_{s-1}t' j'_{s+1}\ldots j'_q}\Gamma^{t'}_{j'_s\alpha'}. \quad (1)$$

При этом ∇T является тензорным полем, а символы Кристоффеля $\Gamma^{i'}_{j'k'}$ и $\Gamma^{i''}_{j''k''}$, соответствующие двум криволинейным системам координат $x'^1, \ldots, x'^n$ и $x''^1, \ldots, x''^n$, связаны соотношением

$$\boxed{\Gamma^{i''}_{j''k''} = \Gamma^{i'}_{j'k'}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} + \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{j''}\partial x^{k''}}.} \quad (2)$$

Доказательство. Формула (1) уже проверена в случае $p = 1$, $q = 1$ (а также для случая векторных и ковекторных полей). Мы не будем проверять ее в общем случае, поскольку рассуждение полностью аналогично.

По построению ∇T удовлетворяет тензорному закону для перехода от декартовых координат к криволинейным, а потому является тензором согласно задаче 1.

Докажем формулу (2) для преобразования символов Кристоффеля. Пусть $\{T^i\}$ — любое векторное поле, $(x^{i'}), (x^{i''})$ — произвольные системы координат (не обязательно декартовы). Имеем

$$\nabla_{\alpha''}T^{i''} = \frac{\partial T^{i''}}{\partial x^{\alpha''}} + \Gamma^{i''}_{s''\alpha''}T^{s''} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha''}}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}}\left(T^{i'}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\right) + \Gamma^{i''}_{s''\alpha''}T^{s''}$$

$$= \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha''}}\frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha''}}T^{i'}\frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{i'}\partial x^{\alpha'}} + \Gamma^{i''}_{s''\alpha''}\frac{\partial x^{s''}}{\partial x^{s'}}T^{s'}.$$

С другой стороны

$$\nabla_{\alpha''}T^{i''} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\nabla_{\alpha'}T^{i'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\left(\frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{\alpha'}} + \Gamma^{i'}_{s'\alpha'}T^{s'}\right).$$

Приравнивая полученные выражения и сокращая подобные, получаем равенство

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha''}}T^{s'}\frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{s'}\partial x^{\alpha'}} + \Gamma^{i''}_{s''\alpha''}\frac{\partial x^{s''}}{\partial x^{s'}}T^{s'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\Gamma^{i'}_{s'\alpha'}T^{s'}$$

(здесь в первом слагаемом переобозначен индекс суммирования i' за s'). Так как полученное равенство верно для любого поля $\{T^i\}$, то совпадают коэффициенты при $T^{s'}$:

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha''}}\frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{s'}\partial x^{\alpha'}}+\Gamma^{i''}_{j''\alpha''}\frac{\partial x^{j''}}{\partial x^{s'}}=\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\Gamma^{i'}_{s'\alpha'}.$$

Домножив полученное равенство на $\frac{\partial x^{s'}}{\partial x^{s''}}$ и просуммировав по s', получим (2):

$$\frac{\partial x^{s'}}{\partial x^{s''}}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha''}}\frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{s'}\partial x^{\alpha'}}+\Gamma^{i''}_{s''\alpha''}=\frac{\partial x^{s'}}{\partial x^{s''}}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\Gamma^{i'}_{s'\alpha'}.$$

Формула (2) доказана. □

Замечание 1. 1) Символы Кристоффеля не образуют тензор.
2) В декартовой системе координат символы Кристоффеля равны нулю.

Теперь, разобрав случай евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, мы можем по аналогии ввести операцию ковариантного дифференцирования на произвольном многообразии. Отметим, что на произвольном многообразии, вообще говоря, не существует аналога декартовой системы координат. Поэтому мы сразу будем пользоваться формулами для криволинейных систем координат, уже полученными нами в евклидовом случае. Идея, которая позволит нам это сделать, может быть прокомментирована следующим образом. Представим себе, что в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ нет декартовых координат. Просто забудем про них на время. На пространстве $\mathbb{R}^n$ мы ввели ковариантное дифференцирование (см. формулу (1) в теореме 1). Эта операция переводит тензорные поля в тензорные поля. Из этого требования мы вывели закон преобразования (2) символов Кристоффеля. Легко видеть, что верно и обратное утверждение: если символы Кристоффеля преобразуются так, как указано в теореме 1, то результатом ковариантного дифференцирования тензорного поля будет тензорное поле. Поэтому мы можем дать следующее определение ковариантного дифференцирования на произвольном многообразии.

Определение 3. Пусть M — произвольное гладкое многообразие. Мы скажем, что на M задана *аффинная связность* (или операция *ковариантного дифференцирования*), если в каждой локальной системе координат $(x^1,\dots,x^n)$ задан набор гладких функций $\Gamma^i_{jk}(x)$, который при переходе в другую систему координат $(x'^1,\dots,x'^n)$ преобразуется по закону

$$\Gamma^{i'}_{j'k'}=\Gamma^i_{jk}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}. \qquad (2')$$

При этом сама операция ∇ задается формулой

$$(\nabla T)^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q\alpha}=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\right)+\sum_{s=1}^p T^{i_1\dots i_{s-1}\ t\ i_{s+1}\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\Gamma^{i_s}_{t\alpha}-\sum_{s=1}^q T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_{s-1}\ t\ j_{s+1}\dots j_q}\Gamma^t_{j_s\alpha}. \qquad (1')$$

Вообще говоря, априори не ясно, на произвольном ли многообразии можно определить аффинную связность (ковариантное дифференцирование), т.е. задать символы Кристоффеля, удовлетворяющие правилу замены. На самом деле это всегда можно сделать, причем многими способами. Один из этих способов (очень важный) будет описан в следующей лекции.

Определение 4. *Тензором кручения* аффинной связности называется тензор $\Omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$. Если тензор кручения тождественно равен нулю (т.е. символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам), то связность называется *симметричной*.

Легко проверяется, что Ω^i_{jk} действительно является тензором. Это сразу следует из формул замены для символов Кристоффеля (нетензорная часть при замене сокращается).

Задача 1 (о свойствах тензорного закона)**.** Обратимость: если при замене $(x) \to (x')$ локальных координат выполнен тензорный закон $T^{(i')}_{(j')} = \frac{\partial x^{(i')}}{\partial x^{(i)}} \frac{\partial x^{(j)}}{\partial x^{(j')}} T^{(i)}_{(j)}$, то при обратной замене $(x') \to (x)$ выполнено $T^{(i)}_{(j)} = \frac{\partial x^{(i)}}{\partial x^{(i')}} \frac{\partial x^{(j')}}{\partial x^{(j)}} T^{(i')}_{(j')}$.

Ассоциативность: если при заменах $(x') \to (x)$ и $(x) \to (x'')$ выполнен тензорный закон, то он выполнен и при замене $(x') \to (x'')$ (указание: свести к мультипликативности матриц Якоби).

7.1 Упражнения к лекции 7

Упражнение 7.1. Обратимость: если при замене $(x) \to (x')$ локальных координат выполнен тензорный закон $T^{(i')}_{(j')} = \frac{\partial x^{(i')}}{\partial x^{(i)}} \frac{\partial x^{(j)}}{\partial x^{(j')}} T^{(i)}_{(j)}$, то при обратной замене $(x') \to (x)$ выполнено $T^{(i)}_{(j)} = \frac{\partial x^{(i)}}{\partial x^{(i')}} \frac{\partial x^{(j')}}{\partial x^{(j)}} T^{(i')}_{(j')}$.

Ассоциативность: если при заменах $(x') \to (x)$ и $(x) \to (x'')$ выполнен тензорный закон, то он выполнен и при замене $(x') \to (x'')$ (указание: свести к мультипликативности матриц Якоби).