

6 Группы кохомологий гладкого многообразия

Определение 1. Дифференциальная k -форма ω называется *замкнутой*, если ее внешний дифференциал равен нулю, т.е. $d\omega = 0$.

Дифференциальная k -форма ω называется *точной*, если она является дифференциалом некоторой дифференциальной формы степени $k - 1$, т.е. $\omega = d\mathcal{X}$.

Обозначения. $\Omega^k(M)$ — пространство всех дифференциальных k -форм на многообразии M ;

$Z^k(M)$ — пространство замкнутых дифференциальных k -форм на многообразии M ;

$B^k(M)$ — пространство точных дифференциальных k -форм на многообразии M .

Поскольку оператор внешнего дифференцирования обладает свойством $d(d\mathcal{X}) = 0$ для любой дифференциальной формы $\mathcal{X}$, то имеет место включение $B^k(M) \subset Z^k(M)$. Поэтому можно рассмотреть фактор-пространство $Z^k(M)/B^k(M)$.

Определение 2. Фактор-пространство $H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M)$ называется *k -мерной группой кохомологий* многообразия M . Говоря о группе, мы имеем в виду группу по сложению.

Замечание. В топологии имеются различные типы групп кохомологий. Введенные выше кохомологии, использующие дифференциальные формы, называются *кохомологиями де Рама*.

Отметим, что пространства замкнутых и точных форм являются бесконечномерными. Тем не менее для фактор-пространства имеет место следующее важное утверждение, которое мы дадим без доказательства.

Теорема 0. Если многообразие M компактно, то $\dim H^k(M) < \infty$.

Число $b_k = \dim H^k(M)$ называется в этом случае *k -ым числом Бетти* многообразия M .

Хотя группы кохомологий определяются с использованием гладкой структуры на многообразии, они описывают топологические свойства многообразия. Рассмотрим простейшие примеры.

6.1 Примеры вычисления кохомологий

1. Нульмерные группы кохомологий.

Пространство замкнутых 0-форм $Z^0(M)$ состоит из функций, дифференциал которых тождественно равен нулю. Ясно, что такие функции должны быть локально постоянны, т.е. постоянны на каждой связной компоненте многообразия. Причем на каждой компоненте функция может принимать произвольное значение. Таким образом, пространство $Z^0(M)$ изоморфно пространству $\mathbb{R}^\ell$, где ℓ — число связных компонент многообразия.

Пространство точных 0-форм по определению тривиально (состоит из нуля), поскольку форм степени -1 не существует.

Итак, $H^0(M) = Z^0(M)/B^0(M) = \mathbb{R}^\ell/\{0\} \cong \mathbb{R}^\ell$. Таким образом, размерность нульмерной группы кохомологий равна числу связных компонент многообразия.

2. Одномерные группы кохомологий.

Чтобы понять, как устроены одномерные группы когомологий, необходимо выяснить необходимые и достаточные условия для того, чтобы замкнутая форма ω была дифференциалом некоторой гладкой функции f . Другими словами, мы должны выяснить условия, при которых уравнение $df = \omega$ имеет решение.

Выведем необходимые и достаточные условия точности замкнутой 1-формы ω .

Лемма 1. *1-форма точна тогда и только тогда, когда интеграл от этой формы по любой замкнутой кривой γ равен нулю:*

$$\oint_{\gamma} \omega = 0.$$

Доказательство. Если сформулированное условие выполнено, то решение уравнения $df = \omega$ легко выписывается в явном виде

$$f(Q) := \int_P^Q \omega,$$

где интегрирование ведется по произвольной кривой, соединяющей фиксированную точку P с переменной точкой Q . Это определение корректно, так как в силу условия леммы интеграл не зависит от выбора кривой, соединяющей точки P и Q . Условие $df = \omega$ легко проверяется (сделайте это самостоятельно). Наоборот, если $df = \omega$, то для любой замкнутой кривой γ имеем $\oint_{\gamma} \omega = \oint_{\gamma} df = 0$ (см. следствие формулы Стокса

в предыдущей лекции). $\square$

Определение 3 (гомотопные отображения). Пусть $f_0, f_1 : N \rightarrow M$ — два гладких отображения из многообразия N в многообразие M . Эти отображения называются *гладко гомотопными* (и обозначают $f_0 \sim f_1$), если существует гладкое семейство гладких отображений $F_t : N \rightarrow M$ ($t \in [0, 1]$) такое, что $F_0 = f_0$, $F_1 = f_1$.

Гладкое семейство отображений F_t можно эквивалентным образом интерпретировать как гладкое отображение $F : N \times [0, 1] \rightarrow M$ (здесь цилиндр $N \times [0, 1]$ рассматривается как гладкое многообразие с краем, точками которого являются пары (P, t) , где $P \in N$, $t \in [0, 1]$). При этом $F(P, t) = F_t(P)$ и, следовательно, на нижнем основании $N \times \{0\}$ цилиндра отображение F совпадает с f_0 , а на верхнем основании $N \times \{1\}$ — с отображением f_1 .

Лемма 2. *Пусть γ_0 и γ_1 — две замкнутые кривые, т.е. отображения окружности в многообразии M , ω — замкнутая 1-форма на M . Если γ_0 и γ_1 гладко гомотопны, то*

$$\oint_{\gamma_0} \omega = \oint_{\gamma_1} \omega.$$

Другими словами, интегралы от замкнутой формы по гомотопным замкнутым кривым совпадают.

Доказательство. Рассмотрим гладкую гомотопию

$$F : S^1 \times [0, 1] \rightarrow M,$$

и перенесенную форму $F^*\omega$ на цилиндре $S^1 \times [0, 1]$. Для этой формы имеем $d(F^*\omega) = F^*(d\omega) = 0$ (по задаче 6 из лекции 4). Используя формулу Стокса, получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{S^1 \times [0, 1]} d(F^*\omega) = \int_{\partial(S^1 \times [0, 1])} F^*\omega = \oint_{S^1 \times \{0\}} F^*\omega - \oint_{S^1 \times \{1\}} F^*\omega = \\ &= \oint_{S^1} \gamma_0^*\omega - \oint_{S^1} \gamma_1^*\omega = \oint_{\gamma_0} \omega - \oint_{\gamma_1} \omega. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали тот факт, что интегралы по верхнему и нижнему основаниям цилиндра нужно брать с разными знаками, что диктуется правилом ориентации края многообразия при помощи внешней нормали. Предложение доказано. $\square$

Замечание. Совершенно аналогично утверждение справедливо для гомотопных отображений не только окружности, но и произвольного многообразия. Пусть N — замкнутое многообразие размерности k , $f_0, f_1 : N \rightarrow M$ — гладко гомотопные отображения, и ω — замкнутая k -форма на многообразии M . Тогда

$$\int_N f_0^*\omega = \int_N f_1^*\omega.$$

Доказательство повторяется дословно.

Сформулируем еще одно полезное следствие. Пусть многообразие M односвязно, т.е. любая замкнутая кривая стягивается в точку (гомотопна отображению в точку).

Задача 1. Покажите, что условие односвязности многообразия M (состоящее в том, что любая замкнутая кривая стягивается в точку, т.е. гомотопна отображению в точку) эквивалентно тому, что любые две кривые с началом и концом в произвольных фиксированных точках P и Q гомотопны в классе кривых с закрепленными концами.

Задача 2. Покажите, что евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и двумерная сфера S^2 односвязны.

Следствие 1. Пусть многообразие M односвязно. Тогда для произвольной замкнутой 1-формы ω имеем

$$\oint_{\gamma} \omega = 0,$$

где γ — произвольная замкнутая кривая.

Заметим, что в этом случае для односвязного многообразия имеет смысл запись $\int_P^Q \omega$, в которой подразумевается интегрирование по произвольному пути, соединяющему точки P и Q .

Следствие 2. Пусть многообразие M односвязно, тогда группа одномерных когомологий тривиальна: $H^1(M) = 0$.

Доказательство. Утверждение эквивалентно тому, что любая замкнутая 1-форма точна, т.е. уравнение $df = \omega$ всегда имеет решение. По лемме 1 это равносильно тому, что интеграл от формы ω по любой замкнутой кривой γ равен нулю:

$$\oint_{\gamma} \omega = 0.$$

По лемме 2 интеграл от замкнутой формы по гомотопным замкнутым кривым совпадают, поэтому интеграл по γ равен интегралу по тривиальной кривой (являющейся отображением окружности в точку). Но интеграл по точке равен 0, что и требовалось. $\square$

Следствие 3 (пример 1). $H^1(\mathbb{R}^n) = 0$ при любом $n \geq 0$; $H^1(S^2) = 0$.

Доказательство. Используйте, что $\mathbb{R}^n$ и сфера односвязны (задача 2). $\square$

Обсуждение. Используя леммы 1 и 2, можно понять, как должна быть устроена одномерная группа когомологий в общем случае (не обязательно односвязном). Уравнения вида $\oint_{\gamma} \omega = 0$ для всевозможных замкнутых кривых на многообразии можно рассматривать как систему линейных уравнений, задающую подпространство $B^1(M)$ точных форм в пространстве $Z^1(M)$ замкнутых форм (согласно лемме 1). Но множество решений такой системы уравнений — это в точности ядро линейного отображения $\xi = (\xi_{\gamma_1}, \dots, \xi_{\gamma_m}) : Z^1(M) \rightarrow \mathbb{R}^m$, где $\xi_{\gamma}(\omega) := \oint_{\gamma} \omega$. Здесь $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ — «максимальный» набор «независимых замкнутых кривых». Отсюда вычисляем фактор-пространство

$$H^1(M) = Z^1(M)/B^1(M) = Z^1(M)/\ker \xi \stackrel{\text{теор. о гомоморфизме}}{\cong} \text{Im } \xi \stackrel{\text{зад. 3}}{=} \mathbb{R}^m.$$

$$\Rightarrow \dim H^1(M) = m.$$

Задача 3. Пусть $\xi_i : V \rightarrow \mathbb{R}$ — линейные функционалы на векторном пространстве V ($i = 1, \dots, m$). Докажите равносильность следующих условий:

- (а) функционалы $\xi_1, \dots, \xi_m$ линейно независимы;
- (б) отображение $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ сюръективно, т.е. является отображением «на».

Вывод. Размерность фактор-пространства $H^1(M) = Z^1(M)/B^1(M)$ равна числу независимых уравнений, т.е. фактически числу независимых замкнутых кривых. Прокомментируем, что в данном случае означает «независимость замкнутых кривых» (точнее, линейная независимость уравнений $\xi_{\gamma_i}(\omega) = 0$, т.е. линейная независимость функционалов ξ_{γ_i}).

Во-первых, нам следует рассматривать кривые с точностью до гомотопии, поскольку, как мы видели выше (в лемме 2), интегралы по гомотопным путям от замкнутой формы совпадают (гомотопные кривые зависимы). В частности, нужно рассматривать только нестягиваемые замкнутые кривые.

Во-вторых, некоторые замкнутые кривые можно представить как сумму некоторых более простых (базисных) замкнутых кривых. Здесь сумма понимается как

последовательное прохождение. Ясно, что интеграл по сумме двух путей равен сумме интегралов, и поэтому не дает независимого уравнения.

Наконец, в-третьих, возможна такая ситуация, когда некоторая замкнутая кривая является нестягиваемой, однако, если ее пройти дважды (или несколько раз), то она станет стягиваемой. Интеграл от замкнутой формы по такой кривой будет равен нулю автоматически, и поэтому такие кривые тоже можно не рассматривать.

В качестве простейшего примера мы вычислим группу когомологий окружности.

Пример 2 (когомологии окружности). Пусть φ — стандартный параметр на окружности, заданный по модулю 2π . Рассмотрим замкнутую 1-форму $\omega = g(\varphi)d\varphi$. Чтобы эта формула задавала гладкую дифференциальную форму на окружности, необходимо и достаточно, чтобы функция $g(\varphi)$ была периодической с периодом 2π . Причем любая замкнутая 1-форма может быть записана в таком виде.

Решим уравнение $df = g(\varphi)d\varphi$. Искомая функция $f(\varphi)$ должна быть гладкой функцией на окружности. Для этого необходимо и достаточно, чтобы она была 2π -периодической.

Как мы уже видели выше (в лемме 1), необходимым условием для существования решения будет равенство $\int_{S^1} \omega = \int_0^{2\pi} g(\tau)d\tau = 0$. Это же условие ($\xi(\omega) := \int_{S^1} \omega = 0$) будет и достаточным. Действительно, полагая

$$f(\varphi) = \int_0^\varphi g(\tau)d\tau,$$

мы получим гладкую корректно определенную функцию на окружности (поскольку она будет 2π -периодичной), удовлетворяющую условию $df = \omega$.

Имеем

$$H^1(S^1) = Z^1(S^1)/B^1(S^1) = Z^1(S^1)/\ker \xi \stackrel{\text{теор. о гомоморфизме}}{\cong} \text{Im } \xi = \mathbb{R}.$$

Обоснуем последнее равенство, т.е. что ξ является отображением «на»: для любого $c \in \mathbb{R}$ имеем $\int_{S^1} \frac{c}{2\pi} d\varphi = c$. Таким образом, группа когомологий окружности $H^1(S^1)$ одномерна, т.е. $H^1(S^1) \cong \mathbb{R}^1$.

Замечание. Утверждение, аналогичное лемме 1, справедливо и для замкнутых форм произвольной степени k . Замкнутая дифференциальная k -форма ω точна тогда и только тогда, когда для любого замкнутого ориентируемого k -мерного многообразия N и произвольного гладкого отображения $F : N \rightarrow M$ имеет место равенство

$$\int_N F^* \omega = 0.$$

6.2 Векторные поля и замкнутые, точные формы. Бездивергентные и потенциальные потоки жидкости. Знаменитая лемма Пуанкаре

Как появляются замкнутые и точные формы в физике и механике?

$M^n = \mathbb{R}^n$, $\omega^{(1)} = \sum_i P_i dx^i \leftrightarrow v = (P_i)$ — векторное поле.

$\omega = \langle v, \rangle$.

$\omega = dH \iff v = \text{grad} H$.

Лемма 3. 1-форма в $\mathbb{R}^n$ **точна** $\iff$ соответствующее векторное поле v потенциально, градиентно.

H — потенциал.

Лемма 4. Потенциальное векторное поле не может иметь замкнутых траекторий, отличных от констант.

Доказательство. Пусть γ — замкнутый путь (например, замкнутая траектория) на M .

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} dH = H(1) - H(0) = 0.$$

С другой стороны

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} P_i dx^i = \int_0^1 \left(\sum_i P_i \dot{x}^i \right) dt = \int_0^1 \langle v, \dot{\gamma} \rangle dt = \int_0^1 \langle v, v \rangle dt > 0.$$

□

$M^n = \mathbb{R}^n$, $\omega^{(n-1)} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} P_i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n \leftrightarrow v = (P_i)$ — векторное поле. $d\omega = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial x^i} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, $\text{div } v := \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial x^i}$ — функция (скаляр).

Лемма 5. $(n-1)$ -форма в $\mathbb{R}^n$ **замкнута** $\iff$ соответствующее векторное поле v бездивергентно (т.е. $\text{div } v \equiv 0$). □

Лемма Пуанкаре. Любая замкнутая k -форма в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ является точной. Другими словами,

$$H^k(\mathbb{R}^n) \cong \{0\}$$

для любого $k > 0$.

Доказательство для случая 1-форм. Согласно следствию 3, имеем $H^1(\mathbb{R}^n) = 0$, ЧТД □

Чтобы доказать лемму Пуанкаре для любого $k > 0$, докажем две теоремы 1 и 2 (обобщающие лемму 2 и следствие 2 на случай k -форм любого ранга $k > 0$).

Для любого гладкого отображения $f : M \rightarrow N$ между двумя многообразиями можно рассмотреть отображение

$$f^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M),$$

сопоставляющее каждой дифференциальной k -форме на многообразии N дифференциальную k -форму на многообразии M (см. определение в лекции 4).

Теорема 1. Если $f : M \rightarrow N$ — гладкое отображение, то отображение $f^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ дифференциальных форм индуцирует (т.е. корректно определяет) гомоморфизм групп когомологий (мы обозначим его снова через f^*):

$$f^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M).$$

Если $f, g : M \rightarrow N$ — гладкие, гладко гомотопные отображения, то индуцированные ими гомоморфизмы групп когомологий $f^*, g^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$ совпадают, т.е. $f^* = g^*$.

Доказательство. 1) Корректность. Как мы показали выше (задача 6 лекции 4), отображение $f^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ коммутирует с оператором внешнего дифференцирования и, следовательно, переводит точные формы в точные, а замкнутые в замкнутые. Действительно: если $\omega \in \Omega^k(N)$ замкнута, то

$$df^*\omega \stackrel{\text{зад. 6 лекц. 4}}{=} f^* \underbrace{d\omega}_0 = f^*0 = 0,$$

значит $f^*\omega$ замкнута. А если $\omega = d\varphi$ точная, то

$$f^*\omega = f^*d\varphi \stackrel{\text{зад. 6 лекц. 4}}{=} df^*\varphi = d(f^*\varphi)$$

точная.

Поэтому отображение f^* индуцирует естественный гомоморфизм групп когомологий.

2) Надо показать, что для любой замкнутой k -формы ω разность форм $f^*\omega - g^*\omega$ точна, т.е. уравнение $d\varphi = f^*\omega - g^*\omega$ всегда имеет решение. Найдем это решение в явном виде.

Рассмотрим гладкую гомотопию

$$F : M \times [0, 1] \rightarrow N$$

между f и g , и перенесенную k -форму $F^*\omega$ на цилиндре $M \times [0, 1]$. Эта форма замкнута:

$$d(F^*\omega) = F^*(d\omega) = 0$$

(по задаче 6 из лекции 4). Запишем эту форму в локальных координатах. Если $x = (x^1, \dots, x^n)$ — локальные координаты на M , то $(x, t) = (x^1, \dots, x^n, t)$ — локальные координаты на цилиндре $M \times [0, 1]$. В этих координатах любая k -форма β на $M \times [0, 1]$ однозначно представима в виде суммы

$$\beta = \omega_0 + \omega_1 \wedge dt,$$

где ω_0 — горизонтальная k -форма, ω_1 — горизонтальная $(k-1)$ -форма. Здесь k -форма на $M \times [0, 1]$ называется *горизонтальной*, если $\omega_0(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \frac{\partial}{\partial t}) = 0$ для любых касательных векторов $\xi_1, \dots, \xi_{k-1} \in T_P M$ и “вертикального” вектора $\frac{\partial}{\partial t}$.

В локальных координатах горизонтальная k -форма и ее дифференциал имеют вид

$$\omega_0 = f_{(i)}(x^1, \dots, x^n, t) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

$$\dot{\omega}_0 := \frac{\partial \omega_0}{\partial t} = \frac{\partial f_{(i)}}{\partial t}(x^1, \dots, x^n, t) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

$$d\omega_0 = \sum_i \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \frac{\partial f^{(i)}}{\partial t} dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = d_M \omega_0 + (-1)^k \dot{\omega}_0 \wedge dt,$$

где $d_M \omega_0$ — дифференциал формы по координатам (x^i) на M .

Вычислим $d\beta$ в случае $\beta = F^* \omega$:

$$0 = d\beta = d_M \omega_0 + (-1)^k \dot{\omega}_0 \wedge dt + d_M \omega_1 \wedge dt.$$

Это равенство переписывается в виде системы двух равенств — для слагаемых без dt и слагаемых с dt :

$$\begin{cases} d_M \omega_0 = 0, \\ (-1)^k \dot{\omega}_0 + d_M \omega_1 = 0. \end{cases}$$

Проинтегрируем последнее равенство по $t \in [0, 1]$:

$$\int_0^1 d_M \omega_1 dt = (-1)^{k-1} \int_0^1 \dot{\omega}_0 dt \stackrel{\text{формула Ньютона-Лейбница}}{=} (-1)^{k-1} (\omega_0|_{t=1} - \omega_0|_{t=0}) = (-1)^{k-1} (f^* \omega - g^* \omega).$$

С другой стороны,

$$\int_0^1 d_M \omega_1 dt = d_M \int_0^1 \omega_1 dt =: d_M \varphi,$$

где $\varphi := \int_0^1 \omega_1 dt$ — $(k-1)$ -форма на M , не зависящая от t . Поэтому $f^* \omega - g^* \omega = (-1)^{k-1} d\varphi$ точна.

Значит, классы когомологий $[f^* \omega], [g^* \omega] \in H^k(M)$ совпадают, т.е. $[f^* \omega] = [g^* \omega]$, что и требовалось. $\square$

Определение 5. Два многообразия M и N называются *гомотопически эквивалентными*, если существуют (гладкие) отображения

$$f : M \rightarrow N, \quad g : N \rightarrow M,$$

такие, что их композиции $f \circ g : N \rightarrow N$ и $g \circ f : M \rightarrow M$ гомотопны тождественным отображениям, т.е.

$$f \circ g \sim \text{id}_N, \quad g \circ f \sim \text{id}_M$$

(т.е. f и g — гомотопически взаимно-обратны).

Теорема 2. Если многообразия M и N гомотопически эквивалентны, то их группы когомологий изоморфны:

$$H^k(M) \cong H^k(N).$$

Доказательство. Так как многообразия гомотопически эквивалентны, то существуют отображения f и g , удовлетворяющие условиям из определения 5. Рассмотрим индуцируемые ими гомоморфизмы групп когомологий $f^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$ и $g^* : H^k(M) \rightarrow H^k(N)$. Покажем, что эти гомоморфизмы взаимно обратны. По условию композиции $f \circ g$ и $g \circ f$ гомотопны тождественным отображениям. По теореме 1 получаем $f^* g^* = (g \circ f)^* \stackrel{\text{теор. 1}}{=} (\text{id}_M)^* = \text{id}_{H^k(M)}$ и совершенно аналогично $g^* f^* = \text{id}_{H^k(N)}$, ЧТД $\square$

Доказательство леммы Пуанкаре для любого $k > 0$. Шаг 1. Докажем, что $\mathbb{R}^n$ гомотопически эквивалентно точке $\mathbb{R}^0$.

Определим отображения

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^0, & f(x) &= 0 \in \mathbb{R}^0, \\ g : \mathbb{R}^0 &\rightarrow \mathbb{R}^n, & g(0) &= 0 \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Тогда $f \circ g = \text{id} : \mathbb{R}^0 \rightarrow \mathbb{R}^0$,

$$f_0 = g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f_0(x) = g(f(x)) = g(0) = 0.$$

Определим гомотопию $F : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ формулой

$$F(x, t) = tx, \quad t \in [0, 1], \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Это — гомотопия между f_0 и $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$:

$$F(x, 0) = 0 = f_0(x), \quad F(x, 1) = x = \text{id}_{\mathbb{R}^n}(x),$$

т.е. $f_0 \sim \text{id}_{\mathbb{R}^n}$. Значит, $\mathbb{R}^n$ гомотопически эквивалентно точке $\mathbb{R}^0$.

Шаг 2. По теореме 2 имеем $H^k(\mathbb{R}^n) \cong H^k(\mathbb{R}^0)$. Но $H^k(\mathbb{R}^0) = 0$ из соображений размерности, если $k > 0$. $\square$

Вопрос: что будет при $k = 0$?

6.3 Операция $*$ на внешних формах и ее свойства

(I) Операция $*$ на формах в евклидовом пространстве и ее свойства.

$M^n = \mathbb{R}^n$, $x^1, \dots, x^n$ — декартовы координаты, $\omega = T_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$.

Определим операцию $*$: $\Lambda^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda^{n-k}(\mathbb{R}^n)$ двумя способами.

Определение 4 (первое). Определим операцию $*$ = $*_1$ на базисных k -формах формулой $*(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) := (-1)^\sigma dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{n-k}}$, где $(i_1, \dots, i_k) \rightarrow (j_1, \dots, j_{n-k})$ — дополнительный набор, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k & j_1 & \dots & j_{n-k} \end{pmatrix}$. Доопределим $*$ на все пространство $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ по линейности.

Определение 4' (второе). Пусть $G = (g_{ij})$ — риманова метрика в коорд. (x) , $g := \det(g_{ij})$. Определим операцию $*$ = $*_2$ в системе лок. координат (x) формулой $(*T)_{i_{k+1} \dots i_n} := \frac{1}{k!} \sqrt{g} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} T^{i_1 \dots i_k}$, где $\{T^{i_1 \dots i_k}\} := \{(\uparrow \dots \uparrow T)^{i_1 \dots i_k}\}$,

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} := \begin{cases} 0, & i_a = i_b, \\ (-1)^\sigma, & \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \in \Sigma_n, \end{cases}$$

$\text{vol}_n = \sqrt{g} \varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ — n -форма объема (см. лекцию 4).

Свойства операции $*$. 0) В случае евклидовой метрики $\{g_{ij} = \delta_{ij}\}$ на $\mathbb{R}^n(x^1, \dots, x^n)$ операции из определений 4 и 4' совпадают: $*_1 = *_2$;

- 1) $*$ линейна, является изоморфизмом векторных пространств;
- 2) $*^2 = (-1)^{k(n-k)} \text{id}$ (задача 4: выведите из задачи 5 к лекции 3 и первого определения);
- 3) $*$ коммутирует с действием $SO(\mathbb{R}, n)$.

Доказательство. Выведем свойство 3 из второго определения. Пусть $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное отображение, задаваемое специальной ортогональной матрицей $A \in SO(\mathbb{R}, n)$. Рассмотрим индуцированное отображение дифференциальных форм $F^* : \Omega^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^k(\mathbb{R}^n)$.

Так как F сохраняет евклидову метрику и форму объема, то $F^*G = G$ и $F^*\text{vol}_G = \text{vol}_G$, откуда

$$\begin{aligned} *(F^*\omega) &= \frac{1}{k!} \text{Свертка}(\text{vol}_G \otimes (\uparrow_G \dots \uparrow_G F^*\omega)) = \frac{1}{k!} \text{Свертка}(\text{vol}_{F^*G} \otimes (\uparrow_{F^*G} \dots \uparrow_{F^*G} F^*\omega)) \\ &= F^* \left(\frac{1}{k!} \text{Свертка}(\text{vol}_G \otimes (\uparrow_G \dots \uparrow_G \omega)) \right) = F^*(*\omega). \end{aligned}$$

Значит, операция $*$ коммутирует с действием ортогонального отображения F . $\square$

(II) Операция $*$ на формах на ориентированном римановом многообразии.

Определение 4''. Пусть M^n — ориентированное риманово многообразие, (x) — локальные координаты из ориентированного атласа, $G = (g_{ij})$ — риманова метрика, $\text{vol}_n = \sqrt{g}\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ — n -форма объема (см. лекцию 4). Определим операцию $*$: $\Lambda^k(M^n) \rightarrow \Lambda^{n-k}(M^n)$ по формуле из определения 4'.

Задача 5. Это — тензорная операция (покажите), поэтому определение 4' корректно.

(III) Примеры операции “звездочка” на плоскости и в пространстве. Градиент функции, дивергенция и ротор векторного поля на трехмерном ориентированном римановом многообразии

Задача 6. 1) $\mathbb{R}^2$, $\omega = Pdx + Qdy$; $*dx = dy$, $*dy = -dx$.

2) $\mathbb{R}^3$. Вычислите $*dx$, $*dy$, $*dz$, $*(dx \wedge dy)$, ...

Для 1-формы $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ рассмотрим векторное поле $v = (P, Q, R) = \uparrow \omega$, $w = \uparrow * d \downarrow v$. Тогда $w = \text{rot } v$ (покажите).

Задача 7. Пусть M^3 — ориентированное риманово многообразие с римановой метрикой $G = (g_{ij})$. Определим ротор, дивергенцию и градиент на M^3 по таким же формулам, как в случае евклидова пространства $M^3 = \mathbb{R}^3$, т.е. по формулам $\text{rot} = \uparrow * d \downarrow$, $\text{div} = \dots$, $\text{grad} = \dots$ (найдите формулы).

6.4 Упражнения к лекции 6

Упражнение 6.1. Покажите, что условие односвязности многообразия M (состоящее в том, что любая замкнутая кривая стягивается в точку, т.е. гомотопна отображению в точку) эквивалентно тому, что любые две кривые с началом и концом в произвольных фиксированных точках P и Q гомотопны в классе кривых с закрепленными концами.

Упражнение 6.2. Покажите, что евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и двумерная сфера S^2 односвязны.

Упражнение 6.3. Пусть $\xi_i : V \rightarrow \mathbb{R}$ — линейные функционалы на векторном пространстве V ($i = 1, \dots, m$). Докажите равносильность следующих условий:

- (а) функционалы $\xi_1, \dots, \xi_m$ линейно независимы;
- (б) отображение $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ сюръективно, т.е. является отображением «на».

Упражнение 6.4. Докажите второе свойство операции “звездочка”: $*^2 = (-1)^{k(n-k)} \text{id}$.

Определение 4''. Пусть M^n — ориентированное риманово многообразие, (x) — локальные координаты из ориентированного атласа, $G = (g_{ij})$ — риманова метрика, $\text{vol}_n = \sqrt{g} \varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ — n -форма объема (см. лекцию 4). Определим операцию $*$: $\Lambda^k(M^n) \rightarrow \Lambda^{n-k}(M^n)$ по формуле из определения 4'.

Упражнение 6.5. Это — тензорная операция (покажите), поэтому определение 4' корректно.

Упражнение 6.6. 1) $\mathbb{R}^2$, $\omega = Pdx + Qdy$; $*dx = dy$, $*dy = -dx$.

2) $\mathbb{R}^3$. Вычислите $*dx$, $*dy$, $*dz$, $*(dx \wedge dy), \dots$.

Для 1-формы $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ рассмотрим векторное поле $v = (P, Q, R) = \uparrow \omega$, $w = \uparrow * d \downarrow v$. Тогда $w = \text{rot } v$ (покажите).

Упражнение 6.7. Пусть M^3 — ориентированное риманово многообразие с римановой метрикой $G = (g_{ij})$. Определим ротор, дивергенцию и градиент на M^3 по таким же формулам, как в случае евклидова пространства $M^3 = \mathbb{R}^3$, т.е. по формулам $\text{rot} = \uparrow * d \downarrow$, $\text{div} = \dots$, $\text{grad} = \dots$ (найдите формулы).