5 Формула Стокса

Для формулировки теоремы Стокса нам потребуются некоторые факты о многообразиях с краем.

5.1 Многообразия с краем

Напомним основные определения.

Определение. Пусть M — гладкое многообразие. Подмножество $X \subset M$ называется *гладким многообразием с краем*, если существует гладкая функция $f \in C^\infty(M)$ такая, что $X = \{x \in M \mid f(x) \leq 0$ и для любой точки $x \in M$ со свойством $f(x) = 0$ выполнено $\mathrm{d}_x f \neq 0$.

Замечание. Если $x_0 \in \partial M$, то ковектор $\mathrm{d}_{x_0} f \neq 0$ можно дополнить до базиса в пространстве $T^*_{x_0} M$. Рассмотрим гладкие функции $x^1 = f$, $x^2, \dots, x^n$ в окрестности точки x_0 в M такие, что ковекторы $\mathrm{d}x^1, \dots, \mathrm{d}x^n$ в точке x_0 линейно независимы. Из теоремы об обратном отображении получаем, что функции $x^1, \dots, x^n$ образуют локальные координаты в малой окрестности $\widetilde{U}$ точки x_0 в M. Тогда $U := \widetilde{U} \cap X$ — окрестность точки x_0 в X (по определению индуцированной топологии на подмножестве $X \subset M$ топологического пространства M). Таким образом, каждая точка многообразия с краем X имеет окрестность, гомеоморфную некоторому открытому подмножеству полупространства

$$\mathbb{R}^n_- = \{(x^1, \dots, x^n) \mid x^1 \leq 0\}.$$

Так же, как и в случае многообразий, такие окрестности U_α вместе с фиксированными гомеоморфизмами $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$, где V_α — открытое подмножество из $\mathbb{R}^n_-$, называются *картами*, а их совокупность — *атласом*. Единственное отличие от случая обычного многообразия заключается в том, что здесь появляются карты двух видов: обычные карты, гомеоморфные дискам, и новые карты, гомеоморфные полудискам.

Совершенно аналогичным образом вводятся локальные системы координат и функции перехода. Так как все карты на X строятся с помощью карт гладкого атласа на M, то все функции перехода на X автоматически гладкие.

Определение. Пусть X — гладкое многообразие с краем. Точка $P \in X$ называется внутренней, если в локальной системе координат $(x^1, \dots, x^n)$ мы имеем $x^1(P) < 0$. В противном случае, когда $x^1(P) = 0$, точка P называется граничной.

Предложение 1. *Свойство точки быть "внутренней" или "граничной" не зависит от выбора локальной системы координат в ее окрестности. Другими словами, данное определение корректно.*

Доказательство. Пусть $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ и $\varphi' = (x'^1, \dots, x'^n)$ — две локальные системы координат в окрестности точки P. Предположим от противного, что $x^1(P) = 0$, а $x'^1(P) < 0$. Рассмотрим функции перехода

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1(x'^1, \dots, x'^n), \\ x^2 &= x^2(x'^1, \dots, x'^n), \\ &\dots \\ x^n &= x^n(x'^1, \dots, x'^n). \end{aligned}$$

Поскольку эти функции задают локальный диффеоморфизм, то якобиан замены отличен от нуля. Но функция перехода $x^1 = x^1(x'^1, \ldots, x'^n)$ имеет в точке $\varphi'(P)$ локальный максимум, поэтому в этой точке все ее частные производные обращаются в нуль:

$$\frac{\partial x^1}{\partial x'^{i'}}(\varphi'(P)) = 0.$$

Таким образом, первая строка матрицы Якоби в точке P нулевая, что противоречит невырожденности. Предложение доказано. $\square$

Определение. Множество граничных точек называется *краем* многообразия X и обозначается через ∂X.

Формальное замечание. Обычное многообразие (без края) является частным случаем многообразия с краем (его край пуст). Напротив, многообразие с краем, вообще говоря, многообразием не является. Тем не менее в тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям, многообразия с краем также называют многообразиями. Часто, желая подчеркнуть отсутствие края и говоря о компактных многообразиях без края, их называют замкнутыми.

Предложение 2. *Пусть X — n-мерное многообразие с краем. Тогда его край ∂X (если он непуст) является гладким многообразием (без края) размерности $n-1$.*

Доказательство. Для края ∂X мы должны построить гладкий атлас. Он естественным образом строится по атласу на самом многообразии X. Действительно, пусть $P \in \partial X$ и U_α — карта, содержащая точку P. Положим $W_\alpha = U_\alpha \cap \partial X$.

Легко видеть, что тогда ограничение координатного гомеоморфизма φ_α на W_α отображает множество W_α на некоторое открытое подмножество $Y_\alpha = \varphi(W_\alpha) = \varphi(U_\alpha) \cap \{x^1 = 0\}$. Ясно, что $\varphi_\alpha|_{W_\alpha} : W_\alpha \to Y_\alpha$ — гомеоморфизм, и поэтому подмножества вида $W_\alpha = U_\alpha \cap \partial X$, снабженные координатными гомеоморфизмами $\varphi_\alpha|_{W_\alpha}$, действительно образуют атлас для края ∂X. Гладкость этого атласа следует из гладкости исходного атласа для всего многообразия X и предложения 1, которое фактически показывает, что функциями перехода между двумя картами на крае будут $n-1$ функций перехода (все кроме первой) между соответствующими картами на многообразии. $\square$

Предложение 3. *Если многообразие с краем X ориентируемо, то его край тоже ориентируем.*

Задача 1. Обратное утверждение неверно. Приведите пример. Постройте также пример многообразия, край которого неориентируем.

Доказательство. В предыдущем предложении мы по атласу $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ на многообразии X построили атлас $\{(W_\alpha, \varphi_\alpha|_{W_\alpha})\}$ на его крае. Мы покажем сейчас, что если исходный атлас был ориентирован, то атлас для края получится ориентированным автоматически. (Напомним, что атлас называется ориентированным, если якобианы всех функций перехода положительны.)

Итак, пусть $\varphi_\alpha = (x^1, \ldots, x^n)$ и $\varphi_{\alpha'} = (x'^1, \ldots, x'^n)$ — две локальные системы координат, отвечающие картам $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ и $(U_{\alpha'}, \varphi_{\alpha'})$. Тогда картам края W_α и $W_{\alpha'}$ отвечают локальные системы координат $(x^2, \ldots, x^n)$ и $(x'^2, \ldots, x'^n)$. Обозначим через J_n и J_{n-1} матрицы Якоби для многообразия и для его края, соответственно. Нам дано, что

$\det J_n > 0$. Требуется проверить, что $\det J_{n-1}$ тоже больше нуля. Рассмотрим для этого подробнее строение матрицы J_n:

$$J_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial x'^n} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} & & & \\ \vdots & & J_{n-1} & \\ \frac{\partial x^n}{\partial x'^1} & & & \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что в точках края все элементы первой строки, за исключением первого, обращаются в нуль (это следует из того, что функция x^1 как функция от переменных $x'^2, \dots, x'^n$ тождественно равна нулю на крае). Поэтому

$$\det J_n = \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} \cdot \det J_{n-1}.$$

Осталось заметить, что $\frac{\partial x^1}{\partial x'^1} > 0$, поскольку функция x^1 убывает при отходе от края (т.е. при уменьшении x'^1). Таким образом,

$$\det J_{n-1} > 0,$$

что и требовалось. $\square$

Замечание 1 (правило внешней нормали)**.** Ориентация, введенная при доказательстве предложения 3, является ориентацией, построенной по “правилу внешней нормали”. Эквивалентным образом ее можно определить так. Базис $e_1, \dots, e_{n-1}$ в касательном пространстве к краю будет называться положительно ориентированным, если базис $n, e_1, \dots, e_{n-1}$ положительно ориентирован в касательном пространстве ко всему многообразию. Здесь n — внешняя нормаль к краю.

5.2 Формула Стокса

Отметим прежде всего, что дифференциальную форму, заданную на многообразии M, можно естественным образом ограничить на произвольное подмногообразие N. Если дифференциальная форма ω рассматривается как полилинейное отображение, то ограничение на подмногообразие попросту означает, что форма действует только на касательные векторы к подмногообразию, а про остальные векторы забывает. Более формально следует рассмотреть вложение $f : N \to M$, а затем взять форму $f^*\omega$ (см. п.4 лекции 4). В частности, дифференциальную форму можно ограничить на край многообразия. Более формально:

Определение. Пусть M^n — гладкое многообразие. Пусть $W = W^k \subset M$ — **гладкое, компактное и ориентируемое** k-мерное **многообразие с краем**. Пусть на M задана дифференциальная форма $\omega = \omega^{k-1}$. Рассмотрим ограничение $\omega|_{V^{k-1}} := f^*_{V^{k-1}}\omega$, где $f_{V^{k-1}} : V^{k-1} \to M$ — отображение включения. Определим интеграл $(k-1)$-формы ω по поверхности V^{k-1} как

$$\int\limits_{V^{k-1}} \omega := \int\limits_{V^{k-1}} \omega|_{V^{k-1}}.$$

Напомним, что последний интеграл — это интеграл формы максимального ранга $k-1$ по $(k-1)$-мерному ориентированному компактному многообразию V^{k-1}, он был определен в п.2 лекции 4. Аналогично определяются ограничения форм $\omega, \mathrm{d}\omega$ на k-мерную поверхность $W^k \subset M$, и интеграл $\int\limits_{W^k} \mathrm{d}\omega$.

Замечание. Ясно, что $\omega|_{V^{k-1}} = (\omega|_{W^k})|_{V^{k-1}}$. Имеем

$$(\mathrm{d}\omega)|_{W^k} = f^*_{W^k}(\mathrm{d}\omega) \overset{\text{зад.6 лекц.4}}{=} \mathrm{d}(f^*_{W^k}\omega) = \mathrm{d}(\omega|_{W^k}),$$

поэтому скобки в выражениях $(\mathrm{d}\omega)|_{W^k}$ или $\mathrm{d}(\omega|_{W^k})$ можно опускать.

Теорема 1 (формула Стокса)**.** *Пусть W — ориентированное компактное k-мерное многообразие с краем, край ориентирован при помощи внешней нормали (см. замечание 1), ω — форма степени $k-1$ на W. Тогда*

$$\int\limits_{\partial W} \omega = \int\limits_{W} \mathrm{d}\omega.$$

Доказательство. Идея доказательства: сведем к случаю $k=1$, т.е. к формуле Ньютона–Лейбница $\int\limits_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$.

1) Пользуясь разбиением единицы, мы можем доказывать формулу для дифференциальной формы, носитель которой содержится в одной карте. Действительно, представим форму ω в виде суммы $\omega = 1 \cdot \omega = \sum\limits_\alpha \psi_\alpha \omega =: \sum\limits_\alpha \omega_\alpha$, где $\{\psi_\alpha\}$ — разбиение единицы на многообразии W, подчиненное данному покрытию картами. Поэтому формулу Стокса достаточно доказать для форм вида $\omega_\alpha := \psi_\alpha \omega$, носитель каждой из которых содержится в одной карте U_α.

2) Если носитель содержится в одной карте, то задача сразу может быть переформулирована для полупространства $\mathbb{R}^k_-$.

Действительно, если $x^1, \ldots, x^k$ — локальные координаты в карте, то

$$\int\limits_W \mathrm{d}\omega = \int\limits_{\mathbb{R}^k_-} \mathrm{d}\omega,$$

$$\int\limits_{\partial W} \omega = \int\limits_{\mathbb{R}^{k-1}} \omega,$$

где $\mathbb{R}^{k-1} = \{x^1 = 0\}$ — край полупространства $\mathbb{R}^k_-$.

Пусть в локальных координатах

$$\omega = \sum_i f_i \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i-1} \wedge \mathrm{d}x^{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k,$$

$$\mathrm{d}\omega = \sum_i (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k.$$

Поскольку носитель каждой из форм содержится в карте, то мы можем считать, что обе формы ω и $\mathrm{d}\omega$ определены глобально на полупространстве $\mathbb{R}^k_-$, причем носитель каждой функции f_i компактен. Таким образом, нам остается проверить довольно простую формулу для полупространства:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{k-1}=\{x^1=0\}} \sum_i f_i \mathrm{d}x^1\wedge\dots\wedge \mathrm{d}x^{i-1}\wedge \mathrm{d}x^{i+1}\wedge\dots\wedge \mathrm{d}x^k = \int\limits_{\mathbb{R}^k_-} \sum_i (-1)^{i-1}\frac{\partial f_i}{\partial x^i}\mathrm{d}x^1\dots \mathrm{d}x^k.$$

Проведем доказательство для каждого слагаемого в отдельности.

1) Пусть $i\neq 1$. Тогда ограничение формы $f_i \mathrm{d}x^1\wedge\dots\wedge \mathrm{d}x^{i-1}\wedge \mathrm{d}x^{i+1}\wedge\dots\wedge \mathrm{d}x^k$ на полупространство $\mathbb{R}^{k-1}=\{x^1=0\}$, очевидно, обращается в нуль, поэтому левая часть доказываемого равенства равна

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{k-1}=\{x^1=0\}} f_i \mathrm{d}x^1\wedge\dots\wedge \mathrm{d}x^{i-1}\wedge \mathrm{d}x^{i+1}\wedge\dots\wedge \mathrm{d}x^k = \int\limits_{\mathbb{R}^{k-1}=\{x^1=0\}} 0 = 0.$$

С другой стороны, переходя к повторному интегрированию и используя формулу Ньютона-Лейбница, для правой части доказываемого равенства (без знака $(-1)^{i-1}$) получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k_-} \frac{\partial f_i}{\partial x^i}\mathrm{d}x^1\dots \mathrm{d}x^k = \int\limits_{\mathbb{R}^{k-1}_-}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f_i}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\right)\mathrm{d}x^1\dots \mathrm{d}x^{i-1}\mathrm{d}x^{i+1}\dots \mathrm{d}x^k =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{k-1}_-}(f_i(x^1,\dots,x^{i-1},+\infty,x^{i+1},\dots,x^k) - f_i(x^1,\dots,x^{i-1},-\infty,x^{i+1},\dots,x^k))\mathrm{d}x^1\dots \mathrm{d}x^{i-1}\mathrm{d}x^{i+1}\dots \mathrm{d}x^k =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{k-1}_-}(0-0)\mathrm{d}x^1\dots \mathrm{d}x^{i-1}\mathrm{d}x^{i+1}\dots \mathrm{d}x^k = 0.$$

Здесь через $\mathbb{R}^{k-1}_-$ обозначено полупространство $\{x^1\le 0\}$ в $(k-1)$-мерном евклидовом пространстве, координатами в котором служат $x^1,\dots,x^{i-1},x^{i+1},\dots,x^k$. Итак, для $i\neq 1$ формула доказана.

2) Пусть теперь $i=1$. Тогда правая часть доказываемого равенства равна

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k_-} \frac{\partial f_1}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1\dots \mathrm{d}x^k = \int\limits_{\mathbb{R}^{k-1}}\left(\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\partial f_1}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1\right)\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\dots \mathrm{d}x^k =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{k-1}}(f_1(0,x^2,x^3,\dots,x^k) - f_1(-\infty,x^2,x^3,\dots,x^k))\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\dots \mathrm{d}x^k =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0,x^2,x^3,\dots,x^k)\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\dots \mathrm{d}x^k,$$

равно левой части доказываемого равенства. Теорема 1 доказана. □

Следствие. *Пусть W — ориентируемое замкнутое многообразие (т.е. компактное без края) размерности k. Тогда*

$$\int\limits_W \mathrm{d}\omega = 0$$

для любой $(k-1)$-формы ω на W.

5.3 Частные случаи формулы Стокса на плоскости и в 3-мерном пространстве (Грин, Кельвин-Стокс, Гаусс-Остроградский, Коши)

Мы начнем с некоторых полезных приложений формулы Стокса. Прежде всего отметим, что частными случаями общей формулы Стокса являются классические формулы Грина, Гаусса-Остроградского, формула Стокса для двумерной поверхности с краем в $\mathbb{R}^3$. Кроме того, даже формулу Ньютона-Лейбница можно считать ее частным случаем (в этом случае многообразием с краем является отрезок). Однако следует помнить, что при доказательстве формулы Стокса мы существенно использовали формулу Ньютона-Лейбница, и это было ключевым моментом доказательства. Поэтому последнюю не следует рассматривать как следствие общей формулы Стокса.

1) **Формула Ньютона-Лейбница**: $\int\limits_a^b f'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_a^b \mathrm{d}f \overset{\text{Стокс}}{=} f(b) - f(a)$.

Предостережение: формула Ньютона-Лейбница использовалась в доказательстве формулы Стокса, поэтому ее нельзя рассматривать как следствие формулы Стокса.

2) **Формула Грина** на плоскости:
$\mathbb{R}^2(x, y)$ с евклидовым скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$,
1-форма $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \leftrightarrow V = (P, Q)$ — векторное поле на плоскости,
$\gamma = \gamma(t)$, $0 \le t \le 1$, — простая замкнутая гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$.

$$\oint\limits_\gamma \omega = \oint\limits_\gamma (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \int\limits_0^1 \left(P(\gamma(t))\dot{x}(t) + Q(\gamma(t))\dot{y}(t)\right)\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \langle V(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle \mathrm{d}t.$$

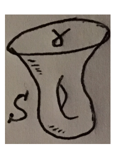
Последний интеграл называется *циркуляцией* векторного поля V вдоль замкнутой кривой γ. По теореме Стокса этот интеграл равен

$$\iint\limits_D \mathrm{d}\omega \overset{\text{опр. } \mathrm{d}\omega}{=} \iint\limits_D (Q_x - P_y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \iint\limits_D \operatorname{rot} V \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Итак, доказана

Теорема 2 (формула Грина)**.** *Циркуляция векторного поля V вдоль простой замкнутой кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ равна интегралу ротора поля V по области, ограниченной кривой γ.* □

3) **Формула Кельвина-Стокса** в $\mathbb{R}^3$:



Рассмотрим $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ с евклидовым скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$,
1-форма $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z \leftrightarrow V = (P, Q, R)$ — векторное поле в $\mathbb{R}^3$,
$S \subset \mathbb{R}^3$ — регулярная ориентированная компактная поверхность, ограниченная кривой $\gamma = \gamma(t)$, $0 \le t \le 1$. Циркуляция поля V вдоль контура γ

$$\oint\limits_\gamma \omega = \oint\limits_\gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int\limits_0^1 \langle V(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle \mathrm{d}t,$$

по теореме Стокса равна

$$\iint\limits_S \mathrm{d}\omega \overset{\text{опр. } \mathrm{d}\omega}{=} \iint\limits_S (R_y - Q_z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + (P_z - R_x)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + (Q_x - P_y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \overset{\text{см.}(**)\ \underline{\text{из лекц.4}}}{=}$$

$$= \iint\limits_S ((R_y - Q_z)\cos\alpha_x + (P_z - R_x)\cos\alpha_y + (Q_x - P_y)\cos\alpha_z)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_S \langle \operatorname{rot} V, n\rangle \mathrm{d}\sigma.$$

Последний интеграл называется *потоком* векторного поля $\operatorname{rot} V := (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$ *через поверхность* S, где $n = (\cos\alpha_x, \cos\alpha_y, \cos\alpha_z)$ — поле единичных нормалей к S. Итак, доказана

Теорема 3 (формула Кельвина-Стокса)**.** *Пусть V — произвольное векторное поле в $\mathbb{R}^3$, $S \subset \mathbb{R}^3$ — ориентированная поверхность с краем. Тогда циркуляция векторного поля V вдоль граничного контура равна потоку ротора этого поля через поверхность.* □

В частности, (а) через замкнутую поверхность поток ротора равен нулю, и (б) поток ротора через поверхность с заданной границей от поверхности не зависит.

4) **Формула Остроградского** в $\mathbb{R}^3$:
Пусть $D \subset \mathbb{R}^3$ — компактная область с гладкой границей $S = \partial D$,
2-форма $\omega = P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \leftrightarrow V = (P, Q, R)$ — векторное поле в $\mathbb{R}^3$,
$n = (\cos\alpha_x, \cos\alpha_y, \cos\alpha_z)$ — поле нормалей к S. Поток поля V через поверхность S:

$$\iint\limits_S \langle V, n\rangle \mathrm{d}\sigma \overset{\text{см.}(**)\ \underline{\text{из лекц.4}}}{=} \iint\limits_{S=\partial D} \omega \overset{\text{Стокс}}{=} \iiint\limits_D \mathrm{d}\omega \overset{\text{опр. } \mathrm{d}\omega}{=} \iiint\limits_D (P_x + Q_y + R_z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = \iiint\limits_D \operatorname{div} V \mathrm{vol}_3.$$

Итак, доказана

Теорема 4 (формула Остроградского)**.** *Пусть V — гладкое векторное поле в $\mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$ — компактная 3-мерная область с гладкой границей. Тогда поток поля V через границу области D равен полной расходимости (т.е. дивергенции) поля V по области D.* □

Поясним смысл формулы Остроградского. Пусть V — поле скоростей некоторой жидкости. Поток поля V через границу любой области $B \subset D$ равен объему жидкости, втекающей в область B за единицу времени, минус объем жидкости, вытекающей из области B за то же время.

Поэтому поток V через границу любого маленького шара $B \subset D$ равен нулю
$\iff$ поле V *не имеет стоков и источников*,
$\iff$ объем жидкости в области $B(t)$, полученной из области B перенесением вдоль поля V, не меняется со временем. Здесь $B(t) = \{\gamma(x,t) \mid x \in D\}$, где $\gamma(x,t)$ — траектория поля V, т.е. решение уравнения $\dot\gamma(x,t) = V(\gamma(x,t))$, $\gamma(x,0) = x$.

Жидкость с последним свойством (сохранение объема любой маленькой области с течением времени), а также само векторное поле V, называют *несжимаемыми*.

Из формулы Остроградского получаем важный

Вывод: Векторное поле V в $\mathbb{R}^3$ *несжимаемое* $\iff$ $\operatorname{div} V \equiv 0$.

Следствие 1. *Векторное поле V моделирует поток несжимаемой жидкости (т.е. является полем скоростей несжимаемой жидкости) $\iff$ $\operatorname{div} V \equiv 0$ (в частности, V не имеет стоков и источников).*

5) **Формула Коши** на плоскости.

Пусть $w = f(z) = a(x,y) + ib(x,y)$ — комплексно-аналитическая функция, $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Рассмотрим два векторных поля

$$V = \operatorname{grad} a(x,y) = (a_x, a_y), \quad W = \operatorname{grad} b(x,y) = (b_x, b_y).$$

Задача 2. Векторные поля V и W несжимаемы, и $W = iV$. (Выведите из формулы Грина и **условия Коши-Римана**: $\begin{cases} a_x = b_y \\ a_y = -b_x \end{cases} \iff f_{\bar z} \equiv 0$.)

Для 1-формы $\omega = f(z)\mathrm{d}z$ имеем $\mathrm{d}\omega = f_z \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z + f_{\bar z}\mathrm{d}\bar z \wedge \mathrm{d}z \overset{\text{усл. Коши-Римана}}{=} 0 + 0 = 0$.

Из формулы Стокса получаем, что верна

Теорема 5 (формула Коши)**.** *Пусть $f(z)$ — комплексно-аналитическая функция в компактной области $D \subset \mathbb{C}$ с кусочно-гладкой границей $\gamma = \partial D$. Тогда* $\oint\limits_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$. □

5.4 Упражнения к лекции 5

Упражнение 5.1. Приведите пример неориентируемого многообразия с краем, край которого ориентируем. Постройте также пример многообразия, край которого неориентируем.

Пусть $w = f(z) = a(x,y) + ib(x,y)$ — комплексно-аналитическая функция, $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Рассмотрим два векторных поля

$$V = \operatorname{grad} a(x,y) = (a_x, a_y), \quad W = \operatorname{grad} b(x,y) = (b_x, b_y).$$

Упражнение 5.2. Векторные поля V и W несжимаемы, и $W = iV$.
Указание: используйте формулу Грина и **условия Коши-Римана**: $\begin{cases} a_x = b_y \\ a_y = -b_x \end{cases} \iff f_{\bar{z}} \equiv 0.$