4 Внешняя производная (внешний дифференциал). Объем риманова многообразия. Интеграл дифференциальной формы по многообразию

4.1 Внешняя производная (внешний дифференциал)

Пусть M — гладкое многообразие и $\omega \in \Omega^k(M)$ — дифференциальная форма на нем. Пусть в локальной системе координат эта форма имеет вид

$$\omega = \sum_{(i)} T_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Определим операцию внешнего дифференцирования $\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$, которая каждой дифференциальной форме степени k сопоставляет дифференциальную форму степени $k+1$.

В каждой локальной системе координат эта операция определяется так.

Определение 1 (на языке дифференциальных форм).

$$\mathrm{d}\omega := \sum_{(i)} (\mathrm{d}T_{i_1 \dots i_k}(x)) \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = \sum_{(i)} \sum_{\alpha} \frac{\partial T_{i_1 \dots i_k}(x)}{\partial x^{\alpha}} \mathrm{d}x^{\alpha} \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}.$$

Обозначим $\frac{\partial A}{\partial x^{i_0}} = \partial_{i_0} A$.

Определение 1′ (на языке тензорных полей). Пусть $\omega = \{\omega_{i_1 \dots i_k}\}$ — кососимметрическое тензорное поле в локальной системе координат на M. Положим

$$(\mathrm{d}\omega)_{i_0 i_1 \dots i_k} := (k+1) \partial_{[i_0} \omega_{i_1 \dots i_k]}.$$

Задача 1. Два определения 1 и 1′ внешнего дифференциала эквивалентны.

Задача 2. Эквивалентным образом,

$$(\mathrm{d}\omega)_{i_0 i_1 \dots i_k} = \partial_{i_0} \omega_{i_1 \dots i_k} - \partial_{i_1} \omega_{i_0 i_2 \dots i_k} + \dots \pm \partial_{i_k} \omega_{i_0 \dots i_{k-1}} = \sum_{\alpha=0}^{k} (-1)^{\alpha} \frac{\partial \omega_{i_0 \dots \widehat{i_\alpha} \dots i_k}}{\partial x^{i_\alpha}}.$$

Покажем, что эта операция корректно определена, т.е. не зависит от выбора конкретной системы координат.

Задача 3. Если $\{a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}\}$ — тензор, то $\{\partial_{i_0} a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}\}$ — не тензор (приведите пример).

Теорема 1. *Если $\{\omega_{i_1 \dots i_k}\}$ — тензорное поле, то $\{(\mathrm{d}\omega)_{i_0 i_1 \dots i_k}\}$ — тензорное поле.*

Доказательство. При замене локальных координат $(x) \to (x')$ компоненты тензора ω преобразуются по тензорному закону: $\omega_{i'_1 \dots i'_k} = \omega_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}} \Rightarrow$

$\partial_{[i'_0} \omega_{i'_1 \dots i'_k]} = \frac{\partial}{\partial x^{[i'_0}} \left(\omega_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k]}} \right) =$

$= \partial_{i_0} \omega_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial x^{i_0}}{\partial x^{[i'_0}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k]}} + \omega_{i_1 \dots i_k} \left(\frac{\partial^2 x^{i_1}}{\partial x^{[i'_0} \partial x^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k]}} + \dots + \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{[i'_1}} \dots \frac{\partial^2 x^{i_k}}{\partial x^{i'_0} \partial x^{i'_k]}} \right) \overset{\text{лем.2, } [i'_0 i'_1 \dots i'_k] = [[i'_0 i'_1] \dots i'_k]}{=}$

$= \partial_{i_0} \omega_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial x^{[i_0}}{\partial x^{i'_0}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_k]}}{\partial x^{i'_k}} + 0 \overset{\text{лем.3}}{=}$

Лемма 2. $\xi^{j_1}_{[i_1}\dots\xi^{j_k}_{i_k]} = \xi^{[j_1}_{i_1}\dots\xi^{j_k]}_{i_k}$.

Доказательство. $\xi^{j_1}_{[i_1}\dots\xi^{j_k}_{i_k]} = \frac{1}{k!}\sum\limits_{\alpha\in\Sigma_k}(-1)^\alpha \xi^{j_1}_{i_{\alpha(1}}\dots\xi^{j_k}_{i_{k)}} \overset{\text{умнож-е чисел коммут.}}{=}$

$= \frac{1}{k!}\sum\limits_{\alpha\in\Sigma_k}(-1)^{\alpha^{-1}} \xi^{j_{\alpha^{-1}(1}}_{i_1}\dots\xi^{j_{k)}}_{i_k} = \xi^{[j_1}_{i_1}\dots\xi^{j_k]}_{i_k}$. □

Лемма 3. $a_{[i_1\dots i_k]}b^{i_1\dots i_k} = a_{i_1\dots i_k}b^{[i_1\dots i_k]}$.

Доказательство. $\sum\limits_{(i)} a_{[i_1\dots i_k]}b^{i_1\dots i_k} = \frac{1}{k!}\sum\limits_{\alpha\in\Sigma_k}(-1)^\alpha \sum\limits_{(i)} a_{i_{\alpha(1\dots i_k)}}b^{i_1\dots i_k} =$

$= \frac{1}{k!}\sum\limits_{\alpha\in\Sigma_k}(-1)^\alpha \sum\limits_{(j)} a_{j_1\dots j_k}b^{j_{\alpha^{-1}(1}\dots j_{k)}} = \sum\limits_{(j)} a_{j_1\dots j_k}b^{[j_1\dots j_k]}$. □

$\overset{\text{лем.3}}{=} \partial_{[i_0}\alpha_{i_1\dots i_k]}\frac{\partial x^{i_0}}{\partial x^{i'_0}}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\dots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}}$. Таким образом, операция d из определения $1'$ преобразует тензорное поле в тензорное поле (т.е. является тензорной). Теорема 1 доказана. □

Теорема 2 (алгебраические свойства операции d)**.** *Операция* $\mathrm{d}:\Omega^k(M^n)\to\Omega^{k+1}(M^n)$ *обладает следующими свойствами:*

а) *линейность:* $\mathrm{d}(\alpha+\beta) = \mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\beta$, $\mathrm{d}(c\alpha) = c\mathrm{d}\alpha$, *где* $c = \mathrm{const}$*;*

б) $\mathrm{d}^2\alpha = \mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha) = 0$*;*

в) *правило Лейбница:* $\mathrm{d}(\alpha\wedge\beta) = \mathrm{d}\alpha\wedge\beta + (-1)^k\alpha\wedge\mathrm{d}\beta$, *где* $\alpha\in\Omega^k(M^n)$, $\beta\in\Omega^\ell(M^n)$.

Доказательство. а) очевидно;

б) $\frac{1}{(k+1)(k+2)}(\mathrm{d}^2\alpha)_{iji_1\dots i_k} = \partial_{[i}\partial_{[j}\alpha_{i_1\dots i_k]]} \overset{\text{св-во Alt}}{=} \partial_{[[i}\partial_{j]}\alpha_{i_1\dots i_k]} \overset{\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i}{=} 0$;

в) см. задачу 4. □

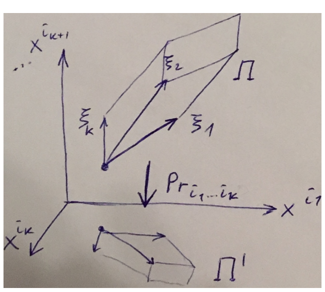
Задача 4. Докажите правило Лейбница для операции d (см. п.в) теоремы 2).

4.2 Внешняя дифференциальная форма как функционал на касательных векторах

Пусть M — гладкое многообразие, $(x^1,\dots,x^n)$ — локальные координаты, $\omega = \omega^{(k)} = \sum\limits_{i_1<\dots<i_k} T_{i_1\dots i_k}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}$ — дифференциальная форма ранга k на M.

Пусть $\xi_1,\dots,\xi_k\in T_PM$ — касательные векторы. Тогда
$\omega(\xi_1,\dots,\xi_k) = \sum\limits_{i_1<\dots<i_k} T_{i_1\dots i_k}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}(\xi_1,\dots,\xi_k) \overset{\text{опр.2 из лекц.3}}{=} \sum\limits_{i_1<\dots<i_k} T_{i_1\dots i_k}\det(\xi^{i_l}_j)$.

Пример 4.1. Пусть $\omega = \mathrm{d}x^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}$. Тогда $\omega(\xi_1,\dots,\xi_k) = \det(\xi^{i_l}_j)$ — объем параллелепипеда $\Pi' = \mathrm{Pr}_{i_1\dots i_k}(\Pi)$ в подпространстве $\mathbb{R}^k(e_{i_1},\dots,e_{i_k})\subset\mathbb{R}^n$ — проекции на это подпространство параллелепипеда $\Pi = \Pi(\xi_1,\dots,\xi_k)$, натянутого на вектора $\xi_1,\dots,\xi_k$.



4.3 Гомоморфизм алгебр внешних дифференциальных форм, индуцированный гладким отображением многообразий

Пусть $F : M^m \to N^n$ — гладкое отображение гладких многообразий, точка $P \in M$. Определим гомоморфизмы векторных пространств

$F_* = \mathrm{d}_P F : T_P M \to T_{F(P)}N$ — гомоморфизм касательных пространств,

$F^{*0} : T^*_{F(P)}N \to T^*_P M$ — сопряженный гомоморфизм,

$F^{*k} : \Lambda^k(T^*_{F(P)}N) \to \Lambda^k(T^*_P M)$ — гомоморфизм пространств внешних дифференциальных k-форм, определяемый формулой

$$(F^{*k}\omega^{(k)})(\xi_1, \dots, \xi_k) := \omega^{(k)}(F_*(\xi_1), \dots, F_*(\xi_k)),$$

где $\omega^{(k)} \in \Lambda^k(T^*_{F(P)}N)$, $\xi_1, \dots, \xi_k \in T_P M$.

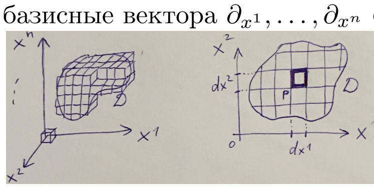
В локальных координатах $\omega^{(k)} = \omega_{i_1 \dots i_k}(y)\mathrm{d}y^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}y^{i_k}$, $F : x \mapsto y = y(x)$,

$$F^{*k}\omega^{(k)} := \omega_{i_1 \dots i_k}(y(x))\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\mathrm{d}x^{i'_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial y^{i_k}}{\partial x^{i'_k}}\mathrm{d}x^{i'_k}.$$

Задача 5. Докажите, что оператор $F^* = \bigoplus\limits_{k=0}^{\infty} F^{*k} : \Lambda(N) \to \Lambda(M)$ сохраняет операции $\wedge$ и d, т.е. является **гомоморфизмом дифференциальных алгебр**. Указание: аналогично доказательству тензорности операций $\wedge$ и d (см. лемму 0 или задачу 3 из лекции 3, теорему 1 из лекции 4).

4.4 Вычисление объема области на римановом многообразии

(I) Объем области, содержащейся в одной карте. Рассмотрим $\mathbb{R}^n(x^1, \dots, x^n)$. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — компактная область (т.е. компакт, совпадающий с замыканием своей внутренности), $\Pi_P(\mathrm{d}x^1\partial_{x^1}, \dots, \mathrm{d}x^n\partial_{x^n})$ — прямоугольный параллелепипед, натянутый на базисные вектора $\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n} \in T_P\mathbb{R}^n$, с длинами сторон $\mathrm{d}x^1, \dots, \mathrm{d}x^n$.



Частный случай: $g_{ij} = \delta_{ij}$ — стандартная евклидова метрика. Тогда полагаем

$$\mathrm{vol}_n(D) := \int\limits_D 1\mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^n.$$

Общий случай: Пусть (M^n, g) — риманово многообразие, (x) — локальные координаты на M^n, $g_{ij}(x)$ — риманова метрика в этой карте, $g(x) := \det(g_{ij}(x)) > 0$. Предполагаем, что компактная область $D \subset M$ содержится в одной карте $U(x) \subset M$. Тогда полагаем

$$\mathrm{vol}_n(D) := \int\limits_{D(x)} \sqrt{g(x)}\mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^n.$$

Определение 2. Подынтегральное выражение $\sqrt{g(x)}\mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^n$ в определении величины $\mathrm{vol}_n(D)$ называется *элементарным объемом* на римановом многообразии (M, g).

Корректность определения (независимость объема области от локальной системы координат):

Лемма 4. *Объем области, содержащейся в одной карте, не меняется при замене криволинейных координат в этой карте.*

Доказательство. При замене локальных координат $(x) \to (x')$ в данной карте имеем $g'_{i'j'} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^{j'}} g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^{i'}}$, поэтому

$$\sqrt{g'(x')} = |\det(\frac{\partial x}{\partial x'})| \sqrt{g(x)}. \qquad (*)$$

Поэтому объем области D, содержащейся в одной карте,

$$\mathrm{vol}_n(D) := \int\limits_{D(x)} \sqrt{g(x)} \mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^n \overset{\text{мат.ан.}}{=} \int\limits_{D(x')} \sqrt{g(x)} |\det(\frac{\partial x}{\partial x'})| \mathrm{d}x'^1 \dots \mathrm{d}x'^n \overset{(*)}{=}$$

$$= \int\limits_{D(x')} \sqrt{g'(x')} \mathrm{d}x'^1 \dots \mathrm{d}x'^n,$$

т.е. объем не зависит от выбора локальных координат в данной карте. □

Замечание (объем и кососимметрический тензор максимального ранга на римановом многообразии)**.** Предположим, что на M задан ориентированный атлас. Из формулы $(*)$ получаем, что при замене криволинейных координат $(x) \to (x')$ функция $\sqrt{g(x)}$ преобразуются по формуле $\sqrt{g'(x')} = \det(\frac{\partial x}{\partial x'}) \sqrt{g(x)}$. Напомним, что по такой же формуле преобразуется существенная компонента $T_{1\dots n}$ любого кососимметричного тензорного поля ранга n (см. следствие 4 из лекции 3). Значит, функция $\sqrt{g(x)}$ является существенной компонентой некоторого кососимметричного тензорного поля $\mathrm{vol}_n = \mathrm{d}\sigma$ ранга n на M, называемого *ориентированным элементарным объемом* (или *ориентированной формой объема*) риманова многообразия (M, g). В любой локальной системе координат (x) данного ориентированного атласа ориентированная форма объема $\boxed{\mathrm{vol}_n = \sqrt{g(x)} \mathrm{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n}$.

Вывод: Элементарный объем $\mathrm{vol}_n = \sqrt{g(x)} \mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^n$ на ориентированном римановом многообразии (M^n, g) можно рассматривать как кососимметричное тензорное поле максимального ранга с существенной компонентой $\sqrt{g(x)}$ (так как существенная компонента $T_{1\dots n} := \sqrt{g}$ преобразуется по верному закону — умножение на $\det(\frac{\partial x}{\partial x'})$).

Два обоснования определения объема области, содержащейся в карте:

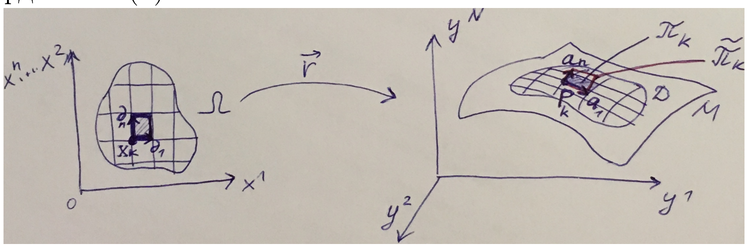
(1) $M^n \subset \mathbb{R}^N$ — регулярная поверхность, регулярная параметризация $\vec{r} = \vec{r}(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^N$, $D = \vec{r}(\Omega) \subset U(x) \subset M^n$. Фиксируем малое $\varepsilon > 0$, разобъем область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ на маленькие кубики $\Pi_{X_k}(\mathrm{d}x^1 \partial_{x^1}, \dots, \mathrm{d}x^n \partial_{x^n})$ со стороной $\mathrm{d}x^j = \varepsilon$, с вершинами $X_k \in \Omega \cap \varepsilon\mathbb{Z}^n$ в узлах решетки $\Omega \cap \varepsilon\mathbb{Z}^n$. Положим

$$\pi_k := \vec{r}(\Pi_{X_k}(\mathrm{d}x^1 \partial_{x^1}, \dots, \mathrm{d}x^n \partial_{x^n}))$$

— “искривленный параллелепипед” с вершиной $P_k = \vec{r}(X_k)$. Тогда ребра этого искривленного параллелепипеда π_k касаются ребер параллелепипеда

$$\tilde{\pi}_k := \Pi_{P_k}(\mathrm{d}x^1 a_1, \dots, \mathrm{d}x^n a_n),$$

где $a_j := \mathrm{d}\vec{r}(\partial_{x^j}) = \frac{\partial \vec{r}(X_k)}{\partial x^j}$ — канонический базис $T_{P_k}M$ по отношению к локальным координатам (x).

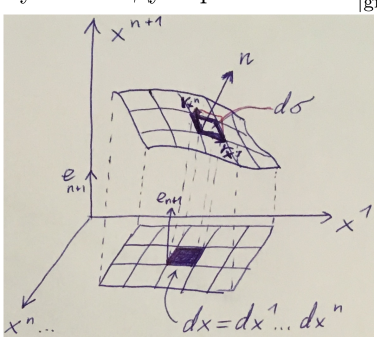


Имеем
$D = \bigcup\limits_k \pi_k$, $\mathrm{vol}_n D(x) = \sum\limits_k \mathrm{vol}_n \pi_k \approx \sum\limits_k \mathrm{vol}_n \tilde{\pi}_k$(= объем "чешуи" $\bigcup\limits_k \tilde{\pi}_k$),
$\mathrm{vol}_n \pi_k \approx \mathrm{vol}_n \tilde{\pi}_k = \mathrm{vol}_n \Pi_{P_k}(a_1, \dots, a_n)\mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^n$.

Лемма 5. $\mathrm{vol}_n \Pi(a_1, \dots, a_n) = \sqrt{g}$, *где* $g = \det(g_{ij})$, $g_{ij} = \langle a_i, a_j \rangle$ *— матрица Грама набора векторов* $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^N$.

Доказательство. Ортогонализуем набор векторов $\{a_1, \dots, a_n\}$: имеем $(a_1, \dots, a_n) = (e_1, \dots, e_n)A$ для некоторого ортонормированного набора векторов $(e_1, \dots, e_n)$. Тогда $(g_{ij}) = G = A^T E A = A^T A$; $\Rightarrow g = \det G = (\det A)^2 \overset{\text{опр. объема}}{=} (\mathrm{vol}_n \Pi(a_1, \dots, a_n))^2$, ЧТД ☐

(2) Пусть $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — гиперповерхность-график $x^{n+1} = f(x^1, \dots, x^n)$. Пусть n — единичная нормаль маленькой площадки $\mathrm{d}\sigma$ в точке, $\mathrm{vol}_n(D) \approx \sum \mathrm{d}\sigma$;
α — угол между нормалью $n = \frac{\mathrm{grad} F}{|\mathrm{grad} F|}$ и $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$, где $F = x^{n+1} - f(x)$. $\Rightarrow$



Объем площадки $\mathrm{d}\sigma$ равен

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}x}{\cos \alpha_{n+1}} = \frac{\mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^n}{\cos \alpha_{n+1}} = \qquad (**)$$

(подставим $\cos \alpha_{n+1} = \langle n, e_{n+1} \rangle = \frac{\langle (-f_{x^1}, \dots, -f_{x^n}, 1), (0, \dots, 0, 1) \rangle}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n f^2_{x^i}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n f^2_{x^i}}}$*)*

$$= \sqrt{1 + \sum_{i=1}^n f^2_{x^i}}\,\mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^n.$$

Лемма 6. $1 + \sum\limits_{i=1}^{n} f_{x^i}^2 = g$.

Доказательство. Для нахождения первой квадратичной формы поверхности M^n найдем ее параметризацию: $\vec{r}(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n, f(x^1, \dots, x^n))$, канонический базис: $\vec{r}_{x^i} = e_i + f_{x^i} e_{n+1}$, $1 \le i \le n$. $\Rightarrow$
$g_{ij} = \langle e_i + f_{x^i} e_{n+1}, e_j + f_{x^j} e_{n+1} \rangle = \delta_{ij} + f_{x^i} f_{x^j}$. То есть, $G = E + a^T a$, где обозначено $a = (a_1, \dots, a_n) := (f_{x^1}, \dots, f_{x^n})$. Поэтому $g = \det G = \det(E + a^T a) = \lambda_1 \dots \lambda_n = 1 + \sum_{i=1}^n a_i^2$ (так как вектор a^T и ортогональные ему являются собственными для оператора с матрицей $E + a^T a$ с собственными значениями $\lambda_1 = 1 + |a|^2$ и $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1$). $\square$

(II) Объем большой области. Пусть M покрыто картами $\{U_\alpha\}_{\alpha=1}^N$, $(\overset{(\alpha)}{x}) : U_\alpha \xrightarrow{\approx} D^n \subset \mathbb{R}^n$ — локальные координаты (координатный гомеоморфизм) на этой карте, $M = \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$. Более точно, $M = \bigcup\limits_{\alpha=1}^{N} U_\alpha$, α-я карта — это пара $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, где $\varphi_\alpha = (\overset{(\alpha)}{x})$.

Теорема 3 (о существовании разбиения единицы)**.** *Для любого конечного открытого покрытия $U_\alpha \approx D^n \subset \mathbb{R}^n$ $(\alpha = 1, \dots, N)$ $\exists$ набор функций $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha=1}^N$ на M^n (называемый* разбиением единицы, подчиненным данному покрытию*), такой что:*

1) $f_\alpha \in C^\infty(M)$, $f_\alpha(x) \ge 0$ на M,
2) $f_\alpha = 0$ вне U_α,
3) $\sum\limits_{\alpha=1}^{N} f_\alpha(x) = 1$ на всем M.

Доказательство. См. [Дубровин, Новиков, Фоменко, с.465–467, 469]. $\square$

Определение 3. $\boxed{\mathrm{vol}_n(D) :=}$
$= \int\limits_D \sqrt{g(x)} \mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^n = \int\limits_D (\sum\limits_{\alpha=1}^{N} f_\alpha(x)) \sqrt{g(x)} \mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^n = \sum\limits_{\alpha=1}^{N} \int\limits_D f_\alpha(x) \sqrt{g(x)} \mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^n =$
$= \sum\limits_{\alpha=1}^{N} \int\limits_{D \cap U_\alpha} f_\alpha(x) \sqrt{g(x)} \mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^n \boxed{= \sum\limits_{\alpha=1}^{N} \int\limits_{D \cap U_\alpha} \overset{(\alpha)}{f}_\alpha (x) \sqrt{\overset{(\alpha)}{g}(x)} \mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^n}$. Здесь и далее через $(\overset{(\alpha)}{x}) = (\overset{(\alpha)}{x}{}^1, \dots, \overset{(\alpha)}{x}{}^n)$ обозначены локальные координаты на карте U_α; и для любого тензорного поля T типа (p,q) на M через $\{\overset{(\alpha)}{T}{}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(x)\}$ обозначены компоненты этого тензорного поля в локальных координатах $(x) = (\overset{(\alpha)}{x})$.

Теорема 4. *Объем $\mathrm{vol}_n(D)$ не зависит от выбора разбиения единицы, и даже от выбора покрытия M картами.*

Доказательство. Пусть дано еще одно покрытие M картами $U'_{\alpha'} \subset M$, $U'_{\alpha'} \approx D^n \subset \mathbb{R}^n$ $(\alpha' = 1, \dots, N')$, и пусть $\{f'_{\alpha'}(x)\}_{\alpha'=1}^{N'}$ — разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Объем области D для покрытия картами $\{U_\alpha\}$ и разбиения единицы $\{f_\alpha\}$ равен

$$\mathrm{vol}_n(D) = \sum_{\alpha=1}^{N} \int\limits_{D \cap U_\alpha} \overset{(\alpha)}{f}_\alpha (x) \sqrt{\overset{(\alpha)}{g}(x)} \mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^n \overset{(\sum_{\alpha'} f'_{\alpha'} = 1)}{=}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\alpha'=1}^{N'} \int\limits_{D\cap U_\alpha \cap U'_{\alpha'}} \overset{(\alpha)}{f}_\alpha(x) \overset{(\alpha)}{f'}_{\alpha'}(x) \sqrt{\overset{(\alpha)}{g}(x)} \mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^n \overset{(*),\ \text{мат.ан.}}{=}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\alpha'=1}^{N'} \int\limits_{D\cap U_\alpha \cap U'_{\alpha'}} \overset{(\alpha')}{f}_\alpha(x') \overset{(\alpha')}{f'}_{\alpha'}(x') \sqrt{\overset{(\alpha')}{g}(x')} \mathrm{d}x'^1 \dots \mathrm{d}x'^n \overset{(\sum\limits_\alpha f_\alpha = 1)}{=}$$

$$= \sum_{\alpha'=1}^{N'} \int\limits_{D\cap U'_{\alpha'}} \overset{(\alpha')}{f'}_{\alpha'}(x') \sqrt{\overset{(\alpha')}{g}(x')} \mathrm{d}x'^1 \dots \mathrm{d}x'^n.$$

Полученное выражение совпадает с объемом области D для покрытия M картами $\{U'_{\alpha'}\}$ и разбиения единицы $\{f'_{\alpha'}\}$, ЧТД □

4.5 Интегрирование дифференциальной формы по гладкому многообразию

Пусть многообразие M **ориентировано**, т.е. на нем задан ориентированный атлас. Пусть $D \subset M$ — **компактная** область. Аналогично определению 3 объема $\mathrm{vol}_n(D)$, определим (с помощью разбиения единицы) **интеграл** $\int\limits_D T$ любого кососимметричного тензорного поля T максимального ранга по области D:

$$\int\limits_D T := \sum_{\alpha=1}^{N} \int\limits_{D\cap U_\alpha} \overset{(\alpha)}{f}_\alpha(x) \overset{(\alpha)}{T}_{1\dots n}(x) \mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^n,$$

где $(\overset{(\alpha)}{x}) = \varphi_\alpha$ — локальные координаты в α-й карте $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ориентированного атласа, $\{f_\alpha\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$.

Корректность определения. При замене локальных координат $(x) \to (x')$ ориентированного атласа имеем аналог формулы $(*)$:

$$T'_{1\dots n} \overset{\text{сл.4 из лекц.3}}{=} \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) T_{1\dots n} \overset{\text{ор-ть атласа}}{=} \left|\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)\right| T_{1\dots n}.$$

Поэтому верны аналоги леммы 4 и теоремы 4 о корректности определения интеграла:

Лемма 4′. *Интеграл по области, содержащейся в одной карте, не зависит от выбора локальных координат ориентированного атласа.*

Теорема 4′. *Интеграл* $\int\limits_D T$ *по компактной области* D *не зависит от выбора разбиения единицы, и даже от выбора покрытия* M *картами.*

Задача 6. Как изменится (а) интеграл $\int\limits_D T$, (б) объем $\mathrm{vol}_n(D)$ при замене ориентации многообразия M на противоположную?

Ответ: интеграл $\int\limits_D T$ изменит только знак (интеграл 2-го рода), а объем $\mathrm{vol}_n(D)$ не изменится (интеграл 1-го рода).

4.6 Упражнения к лекции 4

Упражнение 4.1. Два определения 1 и 1′ внешнего дифференциала эквивалентны.

Упражнение 4.2. Определения 1 и 1′ внешнего дифференциала эквивалентны следующему:

$$(\mathrm{d}\omega)_{i_0 i_1 \ldots i_k} = \partial_{i_0}\omega_{i_1\ldots i_k} - \partial_{i_1}\omega_{i_0 i_2 \ldots i_k} + \dots \pm \partial_{i_k}\omega_{i_0\ldots i_{k-1}} = \sum_{\alpha=0}^{k}(-1)^{\alpha}\frac{\partial\omega_{i_0\ldots\widehat{i_\alpha}\ldots i_k}}{\partial x^{i_\alpha}}.$$

Упражнение 4.3. Если $\{a^{j_1\ldots j_l}_{i_1\ldots i_k}\}$ — тензор, то $\{\partial_{i_0} a^{j_1\ldots j_l}_{i_1\ldots i_k}\}$ — не тензор (приведите пример).

Упражнение 4.4. Докажите правило Лейбница для операции d (см. п. (в) теоремы 2).

Упражнение 4.5. Докажите, что оператор $F^* = \bigoplus\limits_{k=0}^{\infty} F^{*k} : \Lambda(N) \to \Lambda(M)$ сохраняет операции $\wedge$ и d, т.е. является **гомоморфизмом дифференциальных алгебр**. Указание: аналогично доказательству тензорности операций $\wedge$ и d (см. лемму 0 или задачу 3 из лекции 3, теорему 1 из лекции 4).

Упражнение 4.6. Как изменится (а) интеграл $\int\limits_D T$, (б) объем $\mathrm{vol}_n(D)$ при замене ориентации многообразия M на противоположную?

Ответ: интеграл $\int\limits_D T$ изменит только знак (интеграл 2-го рода), а объем $\mathrm{vol}_n(D)$ не изменится (интеграл 1-го рода).