3 Кососимметричные тензоры и дифференциальные формы

Определение 1. Тензор $T_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ называется кососимметрическим, если его компоненты удовлетворяют следующим соотношениям:

$$T_{i_{\sigma(1} i_2 \ldots i_k)} = (-1)^\sigma T_{i_1 i_2 \ldots i_k}$$

для любой перестановки σ.

Если рассматривать тензор T типа $(0, k)$ как полилинейное отображение, сопоставляющее произвольному набору из k векторов число, то определение 1 можно переформулировать следующим образом.

Определение 1′. Тензор (полилинейное отображение)

$$\tilde{T} : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$$

называется кососимметрическим, если

$$\tilde{T}(\xi_{\sigma(1}, \xi_2, \ldots, \xi_{k)}) = (-1)^\sigma \tilde{T}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$$

для любой перестановки σ и любого набора векторов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$.

Напомним, что в нашем курсе в качестве векторного пространства мы всегда рассматриваем касательное пространство к гладкому многообразию.

Эквивалентность этих двух определений очевидна. Достаточно вспомнить (см. теорему 1 из лекции 1), что компоненты $T_{i_1 \ldots i_k}$ тензора T имеют вид

$$T_{i_1 \ldots i_k} = \tilde{T}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}).$$

Таким образом, применяя определение 1′ к наборам из базисных векторов, мы получаем условие из определения 1. Обратно, из определения 1 следует, что условие из определения 1′ выполнено для "базиса".

3.1 Примеры кососимметрических тензоров

1. Любой тензор типа (0, 1) является кососимметрическим по определению, поскольку никаких нетривиальных перестановок из одного элемента нет.

2. Тензор второго ранга (типа (0,2)) T_{ij} является кососимметрическим тогда и только тогда, когда его матрица кососимметрична, т.е.

$$T_{ij} = -T_{ji}$$

для любых $i, j = 1, \ldots, n$.

3. Рассмотрим "базисные" тензоры ранга 1 (ковекторы) $\mathrm{d}x^1, \ldots, \mathrm{d}x^n$.

Определение 2. Символом $\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$ мы будем обозначать полилинейную форму (т.е. полилинейный функционал), определенную на произвольном наборе из k векторов по следующей формуле:

$$\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}(\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_k) = \det \begin{pmatrix} \xi_1^{i_1} & \ldots & \xi_1^{i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_k^{i_1} & \ldots & \xi_k^{i_k} \end{pmatrix}$$

(здесь и далее мы не проводим различие между тензором T и соответствующей полилинейной формой $\tilde{T}$, и обозначаем их одним и тем же символом).

Легко видеть, что эта полилинейная форма задает кососимметрический тензор типа $(0,k)$ и, кроме того, выполнено свойство

$$\mathrm{d}x^{i_{\sigma(1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_{k)}} = (-1)^{\sigma} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k},$$

которое отражает косую симметрию операции $\wedge$.

Следствие 1. $\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = \sum\limits_{\sigma \in \Sigma_k} (-1)^{\sigma} \mathrm{d}x^{i_{\sigma(1}} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{i_{k)}}$.

Предложение 1. *Формы вида* $\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$*, где* $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$*,* $n = \dim M$*, образуют базис пространства кососимметрических тензоров типа* $(0,k)$*.*

Доказательство. Пусть $T = \{T_{i_1 \dots i_k}\}$ — произвольный кососимметрический тензор типа $(0,k)$. Покажем, что T как полилинейный функционал может быть представлен в виде линейной комбинации элементарных кососимметрических тензоров вида $\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$, причем

$$T = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} T_{i_1 \dots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}. \qquad (*)$$

Вычислим для этого значение полилинейного функционала T на произвольном наборе векторов. Имеем

$$T(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \dots, \vec{\xi}_k) = T(\xi_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, \xi_k^{i_k} e_{i_k}) =$$
$$\xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_k^{i_k} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_k^{i_k} T_{i_1 \dots i_k} =$$

(*здесь суммирование ведется по всевозможным наборам индексов, разобьем эту сумму на две*

$$\sum_{i_1 \dots i_k} = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \sum_{\sigma},$$

где вторая сумма берется по всем перестановкам из k *элементов (мы используем здесь, что компоненты с повторяющимися индексами у кососимметрического тензора* T *равны нулю), и продолжим вычисления*)

$$= \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \left(\sum_{\sigma} \xi_1^{i_{\sigma(1}} \dots \xi_k^{i_{k)}} T_{i_{\sigma(1 \dots i_k)}} \right) =$$

используем кососимметричность T *(см. определение 1)*

$$= \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} T_{i_1 \dots i_k} \left(\sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \xi_1^{i_{\sigma(1}} \dots \xi_k^{i_{k)}} \right) =$$

(*используем определение 2*)

$$= \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} T_{i_1 \dots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} (\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_k).$$

Таким образом, мы показали, что на произвольном наборе векторов левая и правая части соотношения $(*)$ совпадают, что и требуется.

Осталось доказать линейную независимость набора элементарных форм вида $\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. Это легко следует, например, из следующего наблюдения. Если мы возьмем набор базисных векторов $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$, то только один из указанных выше форм не обращается в нуль на этом наборе (а именно, форма, отвечающая тому же самому набору индексов). Если хотя бы один индекс (у формы) отличается, то на данном наборе векторов она обращается в нуль. $\square$

Следствие 2. *Любое кососимметрическое тензорное поле типа $(0, k)$ локально, т.е. в некоторой карте однозначно представляется в виде*

$$\sum_{i_1 < \dots < i_k} T_{i_1 \dots i_k}(x^1, \dots, x^n) \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}.$$

Обратно: любое выражение такого вида (в заданной карте) задает единственное кососимметрическое тензорное поле (определенное во всех точках карты).

Следствие 3. *Размерность пространства кососимметрических тензоров типа $(0, k)$ равна $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, где $n = \dim M$, $k \leq n$. Если $k > n$, то нетривиальных кососимметрических тензоров типа $(0, k)$ не существует.*

В частности, из этого утверждения получаем

Следствие 3′. *Пространство кососимметрических тензоров типа $(0, n)$ одномерно и порождено тензором $\mathrm{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n$.*

Рассмотрим произвольный тензор этого типа

$$T = T_{12\dots n} \mathrm{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n$$

и посмотрим, как меняется его компонента $T_{12\dots n}$ при заменах координат. Пусть $T'_{12\dots n}$ — компонента этого тензора в новой системе координат $({x'}^1, \dots, {x'}^n)$.

Тогда

$$T'_{12\dots n} = T_{i_1 i_2 \dots i_n} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial {x'}^1} \dots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial {x'}^n} =$$

в силу косой симметрии суммирование следует
проводить по наборам из различных индексов

$$= \sum_\sigma T_{\sigma(12\dots n)} \frac{\partial x^{\sigma(1}}{\partial {x'}^1} \dots \frac{\partial x^{n)}}{\partial {x'}^n} = T_{12\dots n} \sum_\sigma (-1)^\sigma \frac{\partial x^{\sigma(1}}{\partial {x'}^1} \dots \frac{\partial x^{n)}}{\partial {x'}^n} = T_{12\dots n} \cdot J,$$

где

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial {x'}^1} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial {x'}^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial {x'}^1} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial {x'}^n} \end{pmatrix}$$

— якобиан замены. Итак, мы получили следующую важную формулу:

$$\boxed{T'_{12\dots n} = T_{12\dots n} \cdot J.}$$

Итак, мы доказали следующее следствие.

Следствие 4. *Любой кососимметрический тензор типа* $(0, n)$ *однозначно определяется своей компонентой* $T_{12\ldots n}$ *(по отношению к заданной системе локальных координат* $(x^1, \ldots, x^n)$*), называемой* существенной компонентой*. При замене координат* $(x) \to (x')$ *существенная компонента умножается на определитель матрицы Якоби этой замены (см. формулу выше).*

Эта формула аналогична формуле замены координат под знаком кратного интеграла. Мы будем пользоваться ею ниже, когда займемся интегрированием дифференциальных форм по многообразию.

3.2 Дифференциальные формы на гладком многообразии

Дифференциальную форму на гладком многообразии будем рассматривать двояко:

1) как кососимметрическое полилинейное отображение (в каждой точке многообразия),

2) формально, как выражение вида

$$\omega = \sum T_{i_1 \ldots i_k}(x^1, \ldots, x^n) \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k},$$

где $(x^1, \ldots, x^n)$ — заданная локальная система координат в окрестности данной точки на многообразии.

По существу дифференциальную форму можно рассматривать как удобную форму представления кососимметрического тензорного поля. Если мы рассматриваем дифференциальную форму как выражение специального вида, мы должны уметь сравнивать такие выражения, относящие к разным системам координат. В частности, мы должны объяснить, в каком случае два выражения

$$\omega = \sum T_{i_1 \ldots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k},$$
$$\omega' = \sum T'_{i'_1 \ldots i'_k} \mathrm{d}x'^{i'_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x'^{i'_k}$$

мы будем считать совпадающими на пересечении соответствующих карт.

Ответ простой. Во-первых, оба этих выражения могут быть рассмотрены как тензорные поля, поэтому их совпадение означает, что они задают одно и то же тензорное поле. Другими словами, для любого набора из k касательных векторов на пересечении карт должно быть выполнено тождество $\omega(\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_k) = \omega'(\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_k)$.

Во-вторых, мы можем воспользоваться естественным законом преобразования координат в дифференциальных формах. Формы ω и ω' совпадают (на пересечении карт), если выражение ω' переходит в ω после подстановки $x'^{i'_j} = x'^{i'_j}(x^1, \ldots, x^n)$, $\mathrm{d}x'^{i'_j} = \dfrac{\partial x'^{i'_j}}{\partial x^{i_\ell}} \mathrm{d}x^{i_\ell}$, раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых.

Легко видеть, что эти два способа эквивалентны (убедитесь в этом).

Задача 1. Эти два способа эквивалентны (убедитесь в этом).

Это означает, что взаимно-однозначное соответствие между дифференциальными формами и кососимметрическими тензорами не зависит от выбора системы координат.

Таким образом, мы можем дать два эквивалентных определения дифференциальной формы на гладком многообразии.

Определение 3. Дифференциальная форма степени k на гладком многообразии M — это гладкое кососимметрическое тензорное поле типа $(0,k)$. Множество кососимметрических тензорных полей типа $(0,k)$ на многообразии M мы будем обозначать через $\Omega^k(M)$ (оно является векторным пространством). Обозначим $\Omega(M) := \bigoplus\limits_{k=0}^{\infty} \Omega^k(M)$.

Определение 3′. Мы будем говорить, что на гладком многообразии M задана *дифференциальная форма* степени k, если в каждой локальной системе координат задано выражение вида

$$\omega = \sum T_{i_1\dots i_k}(x^1,\dots,x^n)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{i_k},$$

причем на пересечении карт эти выражения совпадают: $\omega = \omega'$ (в смысле правила замены координат в дифференциальных формах, см. выше). Множество дифференциальных форм степени k на многообразии M мы будем обозначать через $\Lambda^k(M)$ (оно является векторным пространством). Обозначим $\Lambda(M) := \bigoplus\limits_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(M)$.

Согласно определению 3 и следствию 3, имеем $\Omega(M) = \bigoplus\limits_{k=0}^{n} \Omega^k(M)$.

Замечание. Из задачи 1 получаем биекцию

$$\Omega^k(M) \cong \Lambda^k(M) \tag{2}$$

при любом целом $k \geq 0$. Поэтому получаем биекцию

$$\Omega(M) \cong \Lambda(M). \tag{3}$$

Из построения этой биекции видно, что она является изоморфизмом векторных пространств, и даже изоморфизмом $C^\infty(M)$-модулей.

Задача 2. Пусть θ, φ — стандартные координаты на сфере. Являются ли гладкими дифференциальными формами на сфере выражения вида $\mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}\theta$, $\sin\theta\, d\theta$?

3.3 Операция внешнего умножения

Пусть ω_1, ω_2 — дифференциальные формы на многообразии M. Мы хотим определить их внешнее произведение $\omega_1\wedge\omega_2$.

Пусть в локальной системе координат $x^1,\dots,x^n$ мы имеем

$$\omega_1 = \sum_{(i)\in I} T_{i_1\dots i_k}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{i_k},$$
$$\omega_2 = \sum_{(j)\in J} P_{j_1\dots j_l}\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{j_l}.$$

Тогда по определению мы полагаем, что форма $\omega_1\wedge\omega_2$ имеет вид

$$\omega_1\wedge\omega_2 := \left(\sum_{(i)\in I} T_{i_1\dots i_k}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\right)\wedge\left(\sum_{(j)\in J} P_{j_1\dots j_l}\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{j_l}\right) =$$
$$= \sum_{(i)\in I}\sum_{(j)\in J} T_{i_1\dots i_k}P_{j_1\dots j_l}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\wedge\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{j_l},$$

т.е. является дифференциальной формой степени $k+l$. Мы определили операцию

$$\wedge : \Lambda^k(M) \times \Lambda^l(M) \to \Lambda^{k+l}(M).$$

Лемма 0. *Это определение корректно, т.е. не зависит от выбора локальной системы координат, в которой мы производим вычисления. Другими словами, если мы имеем две локальные системы координат* $(x^1, \dots, x^n)$ *и* $({x'}^1, \dots, {x'}^n)$ *и на пересечении* $U \cap U'$ *соответствующих карт*

$$\omega_1 = \omega_1', \\ \omega_2 = \omega_2',$$

то

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_1' \wedge \omega_2'.$$

Эту лемму мы выведем из Задачи 3, сформулированной ниже.

Поскольку мы можем интерпретировать дифференциальные формы как кососимметрические тензоры, то и операцию внешнего умножения можно переформулировать в терминах тензорных операций. Сформулируем результат в виде задачи.

Задача 3. Пусть дифференциальные формы ω_1 и ω_2 соответствуют кососимметрическим тензорным полям $T = \{T_{i_1 \dots i_k}\}$ и $P = \{P_{j_1 \dots j_l}\}$ соответственно. Тогда кососимметрическое тензорное поле, отвечающее форме $\omega_1 \wedge \omega_2$ (и обозначаемое через $T \wedge P$), имеет вид

$$\frac{(k+l)!}{k!\ l!} \operatorname{Alt}(T \otimes P) =: T \wedge P,$$

где через Alt обозначена операция альтернирования (см. п.8 из лекции 2).

Доказательство леммы 0. В задаче 3 мы определили операцию

$$\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^l(M) \to \Omega^{k+l}(M)$$

как композицию элементарных тензорных операций (см. пп. 1, 2 и 8 из лекции 2). Напомним, что тензорность операции означает, что ее применение к любому тензору дает снова тензор. Поэтому композиция тензорных операций является тензорной. Значит, операция $\wedge$ в $\Omega(M)$ является тензорной. Из задачи 3 получаем, что изоморфизм (3) сохраняет операцию $\wedge$. Отсюда и из задачи 1 следует, что операция $\wedge$ в $\Lambda(M)$ определена корректно. Лемма 0 доказана.

3.4 Свойства операции альтернирования (частичное альтернирование)

Пусть $a = \{a_{i_1 \dots i_k}\}$ — тензор. По определению операции альтернирования $\operatorname{Alt} a = \{a_{[i_1 \dots i_k]}\}$, где

$$a_{[i_1 \dots i_k]} := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} a_{i_{\sigma(1 \dots i_k)}}.$$

Пусть $A \subset \Sigma_k$ — подмножество в множестве перестановок. Определим "частичное альтернирование" формулой $b_{i_1 \dots i_k} := \frac{1}{N} \sum\limits_{\beta \in A} (-1)^{\beta} a_{i_{\beta(1 \dots i_k)}}$, где $|A| = N$ ($|\Sigma_k| = k!$).

Лемма 1. $b_{[i_1 \dots i_k]} = a_{[i_1 \dots i_k]}$.

Доказательство.

$$b_{[i_1\dots i_k]} = \frac{1}{k!}\sum_{\alpha\in\Sigma_k}(-1)^{\alpha}\left[\frac{1}{N}\sum_{\beta\in A}(-1)^{\beta}a_{i_{\alpha\beta(1\dots i_k)}}\right] = \frac{1}{k!}\frac{1}{N}\sum_{\alpha,\beta}(-1)^{\alpha\beta}a_{i_{\alpha\beta(1\dots i_k)}}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{\beta\in A}\frac{1}{k!}\sum_{\gamma=\alpha\beta\in\Sigma_k}(-1)^{\gamma}a_{i_{\gamma(1\dots i_k)}} = \frac{1}{N}\sum_{\beta\in A}a_{[i_1\dots i_k]} = a_{[i_1\dots i_k]},$$

ЧТД □

Следствие 5. *а) a кососимметричный $\iff$ $a = \operatorname{Alt} a$;*
б) $a_{[[i_1\dots i_k]]} = a_{[i_1\dots i_k]}$;
в) $a_{[[i_1\dots i_k]i_{k+1}\dots i_\ell]} = a_{[i_1\dots i_\ell]}$.

Задача 4. Пусть $\alpha,\beta \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha = \{\alpha_i\}$, $\beta = \{\beta_j\}$. Тогда $(\alpha\wedge\beta)_{ij} = 2\alpha_{[i}\beta_{j]} = \alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i$.

Задача 5. Четность перестановки $\begin{pmatrix} 1\dots k & k+1\dots k+l \\ k+1\dots k+l & 1\dots k\end{pmatrix}$ равна $(-1)^{kl}$.

3.5 Алгебраические свойства кососимметричных тензорных полей

Отметим некоторые важные свойства операции внешнего умножения.

Предложение 2. *1) Операция внешнего произведения билинейна, т.е. линейна по каждому из сомножителей.*

2) Операция внешнего произведения ассоциативна:

$$\omega_1\wedge(\omega_2\wedge\omega_3) = (\omega_1\wedge\omega_2)\wedge\omega_3.$$

3) Операция внешнего произведения антикоммутативна:

$$\omega_2\wedge\omega_1 = (-1)^{kl}\omega_1\wedge\omega_2,$$

где k, l — степени форм ω_1 и ω_2.

Доказательство. Первое утверждение очевидно. А два следующих (в силу первого) достаточно проверить на наборах базисных векторов. Проделаем это.

2) $((\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma)_{i_1\dots i_{k+l+m}} \overset{\text{зад.3}}{=} \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!}(\alpha\wedge\beta)_{[i_1\dots i_{k+l}}\gamma_{i_{k+l+1}\dots i_{k+l+m}]} \overset{\text{зад.3}}{=}$
$= \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!}\frac{(k+l)!}{k!l!}\alpha_{[[i_1\dots i_k}\beta_{i_{k+1}\dots i_{k+l}]}\gamma_{i_{k+l+1}\dots i_{k+l+m}]} \overset{\text{св-во Alt (лемма 1)}}{=}$
$= \frac{(k+l+m)!}{k!(l+m)!}\frac{(l+m)!}{l!m!}\alpha_{[i_1\dots i_k}\beta_{[i_{k+1}\dots i_{k+l}}\gamma_{i_{k+l+1}\dots i_{k+l+m}]]} \overset{\text{зад.3}}{=}$
$= \frac{(k+l+m)!}{k!(l+m)!}\alpha_{[i_1\dots i_k}(\beta\wedge\gamma)_{i_{k+1}\dots i_{k+l+m}]} \overset{\text{зад.3}}{=} \alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)_{i_1\dots i_{k+l+m}}$.

3) $(\beta\wedge\alpha)_{i_1\dots i_{k+l}} = \frac{(k+l)!}{k!l!}(\beta\otimes\alpha)_{[i_1\dots i_{k+l}]} \overset{\text{задача 5}}{=} (-1)^{kl}\frac{(k+l)!}{k!l!}(\beta\otimes\alpha)_{[i_{k+1}\dots i_{k+l}i_1\dots i_k]} = (-1)^{kl}\frac{(k+l)!}{k!l!}\beta_{[i_{k+1}\dots i_{k+l}}\alpha_{i_1\dots i_k]} = (-1)^{kl}\frac{(k+l)!}{k!l!}\alpha_{[i_1\dots i_k}\beta_{i_{k+1}\dots i_{k+l}]} = (-1)^{kl}(\alpha\wedge\beta)_{i_1\dots i_{k+l}}$. □

Замечание. Первые два алгебраических свойства операции $\wedge$ показывают, что пространство $\Omega(M)$ кососимметрических тензорных полей на M с операцией умножения $\wedge$ является *алгеброй* над кольцом $C^\infty(M)$, или $C^\infty(M)$-*алгеброй.* Алгебры, в которых выполнена антикоммутативность, называются *внешними алгебрами.* Из задачи 3 получаем, что изоморфизм (3) сохраняет операцию $\wedge$, поэтому этот изоморфизм является изоморфизмом внешних алгебр.

Следствие 6. $\alpha \in \Omega^{2k+1}(M^n) \Rightarrow \alpha \wedge \alpha = 0$.

Доказательство. $\alpha \wedge \alpha \overset{\text{антикомм.}}{=} (-1)^{(2k+1)^2} \alpha \wedge \alpha = -\alpha \wedge \alpha$. □

Задача 6. Привести пример кососимметричного тензорного поля $\alpha \in \Omega^{2k}(M^n)$ такого, что $\alpha \wedge \alpha \neq 0$. Рассмотрите следующие случаи:
а) $k = 0$, $f^2 \neq 0$;
б) $k = 1, \ldots$ $(n \geq 4)$.

Задача 7. Определим полилинейную форму $\ell^1 \wedge \ell^2 \wedge \cdots \wedge \ell^k$ для любого набора ковекторов $\ell^1, \ell^2, \ldots, \ell^k$ (необязательно базисных). Это можно сделать двумя способами. С одной стороны, мы можем определить ее как полилинейную форму, определенную на произвольном наборе из k векторов по следующей формуле:

$$\ell^1 \wedge \cdots \wedge \ell^k(\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_k) = \det \begin{pmatrix} \ell^1(\vec{\xi}_1) & \ldots & \ell^k(\vec{\xi}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell^1(\vec{\xi}_k) & \ldots & \ell^k(\vec{\xi}_k) \end{pmatrix}.$$

Тогда в случае базисных ковекторов $\ell^1 = \mathrm{d}x^{i_1}, \ldots, \ell^k = \mathrm{d}x^{i_k}$ получим полилинейную форму $\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$ из определения 2. С другой стороны, мы можем определить $\ell^1 \wedge \ell^2 \wedge \cdots \wedge \ell^k$ как кососимметрический тензор $((\ldots((\ell^1 \wedge \ell^2) \wedge \ell^3) \wedge \cdots \wedge \ell^{k-2}) \wedge \ell^{k-1}) \wedge \ell^k$, который не зависит от способа расстановки скобок в силу ассоциативности операции внешнего произведения. Докажите эквивалентность этих двух подходов.

3.6 Упражнения к лекции 3

Упражнение 3.1. Докажите, что определения 3 и $3'$ дифференциальной формы степени k эквивалентны.

Упражнение 3.2. Пусть θ, φ — стандартные координаты на сфере. Являются ли гладкими дифференциальными формами на сфере выражения вида $\mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}\theta$, $\sin\theta\ d\theta$, $\cos\theta\ d\theta$?

Упражнение 3.3. Пусть дифференциальные формы ω_1 и ω_2 соответствуют кососимметрическим тензорным полям $T = \{T_{i_1\ldots i_k}\}$ и $P = \{P_{j_1\ldots j_l}\}$ соответственно. Тогда кососимметрическое тензорное поле, отвечающее форме $\omega_1 \wedge \omega_2$ (и обозначаемое через $T \wedge P$), имеет вид

$$\frac{(k+l)!}{k!\ l!}\,\mathrm{Alt}(T \otimes P) =: T \wedge P,$$

где через Alt обозначена операция альтернирования (см. п.8 из лекции 2).

Упражнение 3.4. Пусть $\alpha, \beta \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha = \{\alpha_i\}$, $\beta = \{\beta_j\}$. Тогда $(\alpha\wedge\beta)_{ij} = 2\alpha_{[i}\beta_{j]} = \alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i$.

Упражнение 3.5. Четность перестановки $\begin{pmatrix} 1\ldots k & k+1\ldots k+l \\ k+1\ldots k+l & 1\ldots k \end{pmatrix}$ равна $(-1)^{kl}$.

Упражнение 3.6. Привести пример кососимметричного тензорного поля $\alpha \in \Omega^{2k}(M^n)$ такого, что $\alpha \wedge \alpha \neq 0$. Рассмотрите следующие случаи:
а) $k = 0$, $f^2 \neq 0$;
б) $k = 1, \ldots$ $(n \geq 4)$.

Упражнение 3.7. Определим полилинейную форму $\ell^1 \wedge \ell^2 \wedge \cdots \wedge \ell^k$ для любого набора ковекторов $\ell^1, \ell^2, \ldots, \ell^k$ (необязательно базисных). Это можно сделать двумя способами. С одной стороны, мы можем определить ее как полилинейную форму, определенную на произвольном наборе из k векторов по следующей формуле:

$$\ell^1 \wedge \cdots \wedge \ell^k(\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_k) = \det\begin{pmatrix} \ell^1(\vec{\xi}_1) & \ldots & \ell^k(\vec{\xi}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell^1(\vec{\xi}_k) & \ldots & \ell^k(\vec{\xi}_k) \end{pmatrix}.$$

Тогда в случае базисных ковекторов $\ell^1 = \mathrm{d}x^{i_1}, \ldots, \ell^k = \mathrm{d}x^{i_k}$ получим полилинейную форму $\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$ из определения 2. С другой стороны, мы можем определить $\ell^1 \wedge \ell^2 \wedge \cdots \wedge \ell^k$ как кососимметрический тензор $((\ldots((\ell^1 \wedge \ell^2) \wedge \ell^3) \wedge \cdots \wedge \ell^{k-2}) \wedge \ell^{k-1}) \wedge \ell^k$, который не зависит от способа расстановки скобок в силу ассоциативности операции внешнего произведения. Докажите эквивалентность этих двух подходов.