

2 Тензорные операции

Здесь мы поговорим о тензорных операциях, которые позволяют из тензоров “изготавливать” новые тензоры. Все операции, о которых пойдет речь в этой лекции, в одинаковой степени применимы к тензорам и тензорным полям на многообразии. Напомним, что тензорное поле на многообразии M можно понимать как задание в каждом касательном пространстве $T_P M$ тензора, гладко зависящего от точки $P \in M$. Ниже, описывая тензорные операции, мы будем говорить о тензорах. Для того, чтобы применить описанные ниже операции к тензорному полю, нужно просто проделать это в каждом касательном пространстве $T_P M$ по отдельности. В результате снова получится гладкое тензорное поле на всем многообразии в целом. По-другому можно сказать так. Ниже под тензором мы будем обычно понимать набор чисел. Заменяя во всех определениях набор чисел на набор функций, мы получим определения операций на тензорных полях.

Важно отметить, что операции, описанные ниже, не зависят от того, в какой системе координат мы их производим (собственно поэтому они и являются тензорными). В очевидных случаях мы не будем этого доказывать (однако это нужно хорошо понимать).

1. Сумма тензоров одинакового типа.

Пусть $T = \{T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}\}$ и $S = \{S_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}\}$ — два тензора одинакового типа. Полагая

$$(T + S)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + S_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p},$$

получаем новый набор, определяющий тензор $R = T + S$, называемый суммой тензоров T и S .

2. Умножение на число (или на гладкую функцию в случае тензорных полей).

Пусть $T = \{T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}\}$ — тензор. Положим

$$R_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \alpha T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p},$$

где α — вещественное число (или гладкая функция в случае тензорного поля). Набор чисел R задает, очевидно, тензор того же типа, что и T .

Операции суммы и произведения на число превращают пространство тензоров типа (p, q) в векторное пространство. В случае тензорных полей мы можем умножать их не только на числа, но и на гладкие функции. В такой ситуации говорят, что множество гладких векторных полей типа (p, q) на многообразии является модулем над пространством гладких функций.

3. Перестановка индексов одного типа (т.е. либо верхних, либо нижних).

Пусть $T = \{T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}\}$ — тензор. Рассмотрим новый набор чисел (обозначаемый через $S = \sigma T$), который получается из T следующей перестановкой (переиндексацией) его элементов (элементы — те же самые, но они по-другому занумерованы индексами):

$$S_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \sigma T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} := T_{j_1 \dots j_q}^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}},$$

где σ — некоторая перестановка индексов. Простейший пример: $S^{ij} = T^{ji}$. Аналогично для нижних индексов.

Задача 2.1. Если T — тензор, то $S = {}^\sigma T$ — тоже тензор.

Задача 2.2. Показать, что перестановка индексов разного типа не является тензорной операцией. Например, если набор $T = \{T_j^i\}$ задает тензор, то набор $S = \{S_i^j = T_j^i\}$ тензором, вообще говоря, не является.

Это объясняется тем, что согласно определению “верхние и нижние индексы преобразуются по-разному”.

Доказательство. Рассмотрим тензорное поле типа $(1, 1)$, т.е. поле операторов. Пусть в координатах (x) оператор симметричен, т.е. $C_j^i = C_i^j$. Другими словами, $C = C^T$. Допустим, что перестановка индексов разного типа является тензорной операцией; тогда и в любых других координатах $C' = (C')^T$. Если J — матрица Якоби, то $C' = JCJ^{-1}$ равно $C'^T = (JCJ^{-1})^T = J^{-1T}C^TJ^T = J^{-1T}CJ^T$, т.е. $BC = CB$, где $B = J^TJ$ — симметричная положительно определенная матрица. Но симметричные матрицы B и C (где B положительно определена) не всегда коммутируют, например: $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\square$

Задача 2.3. Пусть задан тензор T типа (p, q) и задана некоторая перестановка $\sigma \in \Sigma_q$ множества из q элементов. Пусть тензор $S = {}_\sigma T$ получен из T перестановкой нижних индексов. Пусть $\tilde{T}$ и $\tilde{S} = {}_\sigma \tilde{T}$ — полилинейные функционалы, отвечающие тензорам T и S . Тогда

$${}_\sigma \tilde{T}(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_q, \ell^1, \dots, \ell^p) = \tilde{T}(\vec{\xi}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{\xi}_q, \ell^1, \dots, \ell^p).$$

Задача 2.4. Пусть σ и τ — две перестановки из Σ_q . Тогда ${}_\tau({}_\sigma T) = {}_{\tau \circ \sigma} T = {}_{\sigma \tau} T$.

В случае, когда тензор имеет индексы одинакового типа (например, все нижние) мы можем ввести понятие симметричного и кососимметричного тензора.

Определение 2.1. 1) Тензор $P = P_{j_1 \dots j_q}$ называется симметричным, если он не меняется ни при каких перестановках индексов:

$$P_{j_1 \dots j_q} = {}_\sigma P_{j_1 \dots j_q}, \quad \text{для любой перестановки } \sigma.$$

2) Тензор $P = P_{j_1 \dots j_q}$ называется кососимметричным, если

$$P_{j_1 \dots j_q} = (-1)^\sigma {}_\sigma P_{j_1 \dots j_q}, \quad \text{для любой перестановки } \sigma.$$

Другими словами, тензор меняет знак при нечетных перестановках индексов и не меняется при четных. Здесь

$$(-1)^\sigma = \begin{cases} 1 & , \text{ если } \sigma \text{ — четная перестановка} \\ -1 & , \text{ если } \sigma \text{ — нечетная перестановка.} \end{cases}$$

Задача 2.5. Это определение корректно в том смысле, что его можно проверять в произвольной системе координат.

4. Свертка. Пусть $T = \{T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}\}$ — тензор. Положим

$$S_{j_1 \dots j_l \dots j_q}^{i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_p} = \sum_{\alpha} T_{j_1 \dots j_l \dots j_q}^{i_1 \dots i_k = \alpha \dots i_p}.$$

Здесь $\hat{}$ обозначает, что индекс пропущен.

Покажем, что набор S задает тензор типа $(p-1, q-1)$. Для этого посмотрим, что происходит при заменах координат. Имеем

$$\begin{aligned} S_{j'_1 \dots j'_l \dots j'_q}^{i'_1 \dots \hat{i}'_k \dots i'_p} &= \sum_{\alpha'} T_{j'_1 \dots j'_l \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_k = \alpha' \dots i'_p} = \\ &= \sum_{\alpha'} T_{j_1 \dots j_l \dots j_q}^{i_1 \dots i_k = \alpha \dots i_p} \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{i_k}} \dots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_l}}{\partial x^{\alpha'}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} = (*) \end{aligned}$$

Проведем суммирование по индексу α' ,
используя формулу дифференцирования сложной функции

$$\sum_{\alpha'} \frac{\partial x^{j_l}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{i_k}} = \frac{\partial x^{j_l}}{\partial x^{i_k}} = \delta_{i_k}^{j_l} = \begin{cases} 1, & j_l = i_k = \alpha \\ 0, & j_l \neq i_k \end{cases}$$

и продолжим вычисления:

$$(*) = \sum_{\alpha} T_{j_1 \dots j_l \dots j_q}^{i_1 \dots i_k = \alpha \dots i_p} \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} =$$

(в предыдущей и следующей сумме отсутствуют

частные производные, отвечающие выделенной паре индексов i_k и j_l)

$$= S_{j_1 \dots j_l \dots j_q}^{i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_p} \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}}.$$

Итак, мы видим, что набор S удовлетворяют тензорному закону преобразования при переходе из одной системы координат в другую, что и требовалось.

Простейший пример свертки хорошо известен из линейной алгебры. Если $A = \{A_j^i\}$ — линейный оператор (тензор типа $(1,1)$), то его след $\text{Tr } A = \sum_i A_i^i$ не зависит от системы координат, т.е. является тензором типа $(0,0)$ (скаляром).

5. Тензорное произведение.

Пусть $T = \{T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}\}$ и $P = \{P_{\beta_1 \dots \beta_t}^{\alpha_1 \dots \alpha_s}\}$ — два произвольных тензора. Определим новый набор $C = T \otimes P$ по формуле

$$C_{j_1 \dots j_q \beta_1 \dots \beta_t}^{i_1 \dots i_p \alpha_1 \dots \alpha_s} = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \cdot P_{\beta_1 \dots \beta_t}^{\alpha_1 \dots \alpha_s}.$$

Легко проверяется, что набор C задает тензор типа $(p+s, q+t)$. Этот тензор называется тензорным произведением тензоров T и P .

Посмотрим, что означает эта операция, если представлять тензор как полилинейное отображение.

Определение 2.2. Рассмотрим тензоры T и P как полилинейные отображения

$$T : \underbrace{V \times \cdots \times V}_q \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_p \rightarrow \mathbb{R},$$

$$P : \underbrace{V \times \cdots \times V}_t \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_s \rightarrow \mathbb{R},$$

и определим новое полилинейное отображение

$$C = T \otimes P : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q+t} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p+s} \rightarrow \mathbb{R}$$

по следующему простому правилу:

$$\begin{aligned} T \otimes P(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_{q+t}, \ell^1, \dots, \ell^{p+s}) &= \\ &= T(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_q, \ell^1, \dots, \ell^p) \cdot P(\vec{\xi}_{q+1}, \dots, \vec{\xi}_{q+t}, \ell^{p+1}, \dots, \ell^{p+s}). \end{aligned}$$

Здесь $\vec{\xi}_i \in V$ — векторы, $\ell^j \in V^*$ — ковекторы.

Задача 2.6. Докажите эквивалентность двух данных определений. Для этого достаточно посмотреть, как действует полилинейное отображение на наборе из базисных векторов и ковекторов $e_{j_1}, \dots, e_{j_q}, e_{\beta_1}, \dots, e_{\beta_t}, e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_s}$ (проверьте самостоятельно).

Рассмотрим базис $e_1, \dots, e_n$ пространства V , и двойственный ему базис $e^1, \dots, e^n$ пространства V^* .

Применяя данное выше определение к базисным векторам и ковекторам, мы можем ввести тензоры вида $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}$ (порядок сомножителей важен!) как полилинейные отображения вида

$$\begin{aligned} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_q, \ell^1, \dots, \ell^p) &= \\ &= e_{i_1}(\ell^1) \cdots e_{i_p}(\ell^p) \cdot e^{j_1}(\vec{\xi}_1) \cdots e^{j_q}(\vec{\xi}_q) = \\ &= \ell_{i_1}^1 \cdots \ell_{i_p}^p \cdot \xi_1^{j_1} \cdots \xi_q^{j_q}. \end{aligned}$$

Предложение 1. Тензоры вида $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}$ образуют базис в пространстве всех тензоров типа (p, q) .

Доказательство. Пусть T — произвольный тензор типа (p, q) . Тогда

$$\begin{aligned} T(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_q, \ell^1, \dots, \ell^p) &= T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \xi_1^{j_1} \cdots \xi_q^{j_q} \ell_{i_1}^1 \cdots \ell_{i_p}^p = \\ &= T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_q, \ell^1, \dots, \ell^p). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$T = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}.$$

Любой тензор, таким образом, может быть разложен в линейную комбинацию элементарных тензоров.

Для завершения доказательства решите самостоятельно следующую задачу.

Задача 2.7. Доказать линейную независимость тензоров вида $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}$.

□

Следствие. Размерность пространства всех тензоров типа (p, q) равна n^{p+q} .

Свойства операции $\otimes$. Операция тензорного умножения $\otimes$ обладает свойствами

- $(T + U) \otimes S = T \otimes S + U \otimes S$, $S \otimes (T + U) = S \otimes T + S \otimes U$ (дистрибутивность),
- $(T \otimes U) \otimes S = T \otimes (U \otimes S)$ (ассоциативность),
- $T \otimes S \neq S \otimes T$ (необязательно коммутативно).

Задача 2.8. Докажите самостоятельно. Например, $e_1 \otimes e_2 \neq e_2 \otimes e_1$ (Проверьте!).

6. Операция поднятия и опускания индекса.

Рассмотрим тензор a_{ij} типа $(0, 2)$. Пусть $\det(a_{ij}) \neq 0$. Тогда мы можем рассмотреть набор чисел a^{kl} , являющимися элементами обратной матрицы:

$$a_{ij}a^{jl} = \delta_i^l.$$

Лемма. (a^{kl}) — тензор типа $(2, 0)$.

Задача 2.9. Докажите самостоятельно.

Пусть теперь $T = \{T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}\}$ — произвольный тензор типа (p, q) . Положим

$$P_{\alpha j_1 \dots j_q}^{i_2 \dots i_p} = \sum_{i_1} a_{\alpha i_1} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}.$$

Эта операция называется операцией опускания индекса. Она, как нетрудно заметить, является композицией тензорного произведения и свертки, поэтому $P = \downarrow T$ — тензор типа $(p - 1, q + 1)$.

Аналогичным образом определяется операция поднятия индекса:

$$C_{j_2 \dots j_q}^{\alpha i_1 \dots i_p} = \sum_{j_1} a^{\alpha j_1} T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}.$$

Здесь получающийся тензор $C = \uparrow T$ имеет тип $(p + 1, q - 1)$.

Отметим также, что можно поднимать или опускать индекс, стоящий на произвольном месте.

Предложение 2. Операции поднятия и опускания индекса являются взаимно обратными.

Доказательство. Применим к тензору T композицию операций поднятия и опускания индекса. Получим следующий тензор $\downarrow \uparrow T$:

$$a_{\beta \alpha} a^{\alpha j_1} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \delta_{\beta}^{j_1} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T_{\beta j_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \text{ — это исходный тензор.}$$

Аналогично проверяется для этих операций, взятых в обратном порядке.

□

Обычно операция применяется в случае, когда $a_{ij} = g_{ij}$ является римановой метрикой на многообразии. Напомним ее определение.

Определение 2.3. Римановой метрикой на многообразии M называется тензорное поле g_{ij} , удовлетворяющее двум условиям

- 1) $g_{ij} = g_{ji}$ (симметричность),
- 2) (g_{ij}) — положительно определенная матрица.

В случае евклидовой системы координат операции поднятия и опускания индексов тривиальны (так как $g_{ij} = \delta_{ij}$):

$$\begin{aligned} P_{\alpha j_1 \dots j_q}^{i_2 \dots i_p} &= T_{j_1 \dots j_q}^{\alpha i_2 \dots i_p}, \\ C_{j_2 \dots j_q}^{\alpha i_1 \dots i_p} &= T_{\alpha j_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}. \end{aligned}$$

Поэтому иногда в евклидовых системах координат не делают различия между нижними и верхними индексами.

Замечание. Поскольку тензоры, получающиеся друг из друга поднятием или опусканием индексов, тесно связаны между собой, то обычно их рассматривают как различные проявления “одного и того же тензора” и обозначают одной и той же буквой.

7. Симметрирование.

Рассмотрим тензор $T = \{T_{j_1 \dots j_q}\}$ типа $(0, q)$. Зададим операцию симметрирования по формуле

$$P_{j_1 \dots j_q} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma} \sigma T_{j_1 \dots j_q}.$$

Видно, что эта операция является композицией перестановок индексов, суммы и произведения на число. Поэтому симметрирование — это тензорная операция.

Предложение 3. Тензор $P = \{P_{j_1 \dots j_q}\}$ симметричен. Если исходный тензор T был симметричен, то $T = P$, т.е. операция симметрирования не меняет симметричных тензоров. Наоборот, если тензор T был кососимметричен, то после симметрирования он обратится в нуль.

Задача 2.10. Проверьте самостоятельно.

8. Альтернирование.

Рассмотрим снова тензор $T = \{T_{j_1 \dots j_q}\}$ типа $(0, q)$. Зададим операцию альтернирования по формуле

$$C_{j_1 \dots j_q} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \sigma T_{j_1 \dots j_q}.$$

Легко видеть, что альтернирование — это тензорная операция.

Предложение 4. Тензор $C = \{C_{j_1 \dots j_q}\}$ кососимметричен. Если исходный тензор T был кососимметричен, то $T = C$, т.е. операция альтернирования не меняет кососимметричных тензоров. Наоборот, если тензор T был симметричен, то после альтернирования он обратится в нуль.

Задача 2.11. Проверьте самостоятельно.

Задача 2.12. Найти размерность пространств симметрических и кососимметрических тензоров типа $(0, q)$.

Задача 2.13. Верно ли, что пространство всех тензоров типа $(0, q)$ разлагается в прямую сумму пространств симметричных и кососимметричных тензоров?

Задача 2.14. Пусть $A = \{A_i^j\}$ — линейный оператор (т.е. тензор типа $(1, 1)$). Представить $\det A$ как результат выполнения последовательности тензорных операций из пп. 1—8.

2.1 Упражнения к лекции 2

Пусть $T = \{T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}\}$ — тензор. Рассмотрим новый набор чисел (обозначаемый через $S = {}^\sigma T$), который получается из T следующей перестановкой (переиндексацией) его элементов: $S_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = {}^\sigma T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} := T_{j_1 \dots j_q}^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}}$, где σ — некоторая перестановка индексов. Аналогично для нижних индексов.

Упражнение 2.1. Если T — тензор, то $S = {}^\sigma T$ — тоже тензор.

Упражнение 2.2. Показать, что перестановка индексов разного типа не является тензорной операцией. Например, если набор $T = \{T_j^i\}$ задает тензор, то набор $S = \{S_i^j = T_j^i\}$ тензором, вообще говоря, не является.

Указание. Рассмотрим тензорное поле типа $(1, 1)$, т.е. поле операторов. Пусть в координатах (x) оператор симметричен, т.е. $C_j^i = C_i^j$. Другими словами, $C = C^T$. Допустим, что перестановка индексов разного типа является тензорной операцией; тогда и в любых других координатах $C' = (C^T)' = (C')^T$. Если J — матрица Якоби, то $C' = JCJ^{-1}$ равно $C'^T = (JCJ^{-1})^T = J^{-1T}C^T J^T = J^{-1T}CJ^T$, т.е. $BC = CB$, где $B = J^T J$ — симметричная положительно определенная матрица. Но симметричные матрицы B и C (где B положительно определена) не всегда коммутируют (приведите пример таких матриц B и C размера 2×2).

Упражнение 2.3. Пусть задан тензор T типа (p, q) и задана некоторая перестановка $\sigma \in \Sigma_q$ множества из q элементов. Пусть тензор $S = {}_\sigma T$ получен из T перестановкой нижних индексов. Пусть $\tilde{T}$ и $\tilde{S} = {}_\sigma \tilde{T}$ — полилинейные функционалы, отвечающие тензорам T и S . Тогда

$${}_\sigma \tilde{T}(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_q, \ell^1, \dots, \ell^p) = \tilde{T}(\vec{\xi}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{\xi}_{\sigma(q)}, \ell^1, \dots, \ell^p).$$

Упражнение 2.4. Пусть σ и τ — две перестановки из Σ_q . Тогда ${}_\tau({}_\sigma T) = {}_{\tau \circ \sigma} T = {}_{\sigma \tau} T$.

Упражнение 2.5. Определение 2.1 корректно в том смысле, что его можно проверять в произвольной системе координат.

Упражнение 2.6. Докажите эквивалентность двух данных определений операции тензорного произведения. Для этого достаточно посмотреть, как действует полилинейное отображение на наборе из базисных векторов и ковекторов $e_{j_1}, \dots, e_{j_q}, e_{\beta_1}, \dots, e_{\beta_t}, e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_s}$ (проверьте самостоятельно).

Упражнение 2.7. Доказать линейную независимость тензоров вида $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}$.

Упражнение 2.8. Докажите, что операция тензорного умножения дистрибутивна и ассоциативна, но не коммутативна. Например, $e_1 \otimes e_2 \neq e_2 \otimes e_1$ (Проверьте!).

Упражнение 2.9. Рассмотрим тензор a_{ij} типа $(0, 2)$. Пусть $\det(a_{ij}) \neq 0$. Тогда мы можем рассмотреть набор чисел a^{kl} , являющимися элементами обратной матрицы: $a_{ij}a^{jl} = \delta_i^l$. Докажите, что (a^{kl}) — тензор типа $(2, 0)$.

Рассмотрим тензор $T = \{T_{j_1 \dots j_q}\}$ типа $(0, q)$.

Упражнение 2.10. Зададим операцию симметрирования по формуле

$$P_{j_1 \dots j_q} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma} T_{j_1 \dots j_q}.$$

Покажите, что тензор $P = \{P_{j_1 \dots j_q}\}$ симметричен. Если исходный тензор T был симметричен, то $T = P$, т.е. операция симметрирования не меняет симметричных тензоров. Наоборот, если тензор T был кососимметричен, то $P = 0$ (при условии, что $n \geq 2$ и $q \geq 2$).

Упражнение 2.11. Зададим операцию альтернирования по формуле

$$C_{j_1 \dots j_q} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} T_{j_1 \dots j_q}.$$

Покажите, что тензор $C = \{C_{j_1 \dots j_q}\}$ кососимметричен. Если исходный тензор T был кососимметричен, то $T = C$, т.е. операция альтернирования не меняет кососимметричных тензоров. Наоборот, если тензор T был симметричен, то $C = 0$.

Упражнение 2.12. Найти размерность пространств симметрических и кососимметрических тензоров типа $(0, q)$.

Упражнение 2.13. Верно ли, что пространство всех тензоров типа $(0, q)$ разлагается в прямую сумму пространств симметричных и кососимметричных тензоров?

Упражнение 2.14. Пусть $A = \{A_i^j\}$ — линейный оператор (т.е. тензор типа $(1, 1)$). Представить $\det A$ как результат выполнения последовательности тензорных операций из пп. 1—8.