15 Гауссово отображение и степень. Формула Гаусса-Бонне

Введем понятие гауссова отображения гиперповерхности.

Теорема 2 (о гауссовой кривизне и гауссовом отображении)**.** *Пусть $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ — регулярная ориентированная гиперповерхность. Рассмотрим гауссово отображение $\Gamma : M^{n-1} \to S^{n-1}$, где $\Gamma(P) = \vec{n}(P)$ — единичная нормаль к M в точке $P \in M$. Пусть $\mathrm{d}\sigma^\circ$ — ориентированная форма объема на сфере S^{n-1} единичного радиуса, и $\mathrm{d}\sigma$ — ориентированная форма объема на M, K — гауссова кривизна на M. Тогда*

$$K\mathrm{d}\sigma = \Gamma^* \mathrm{d}\sigma^\circ.$$

Форма $K\mathrm{d}\sigma$ называется формой кривизны гиперповерхности M.

Доказательство. Проведем для $n = 3$. Фиксируем точку $P \in M$, рассмотрим специальные координаты x, y, z в $\mathbb{R}^3$ такие, что $T_P M = Oxy$. Имеем $M \cap U = \{(x, y, f(x, y))\}$ — график гладкой функции $z = f(x, y)$, где U — малая окрестность точки P в $\mathbb{R}^3$.

На $M \cap U$ рассмотрим локальные координаты x, y и локальную параметризацию $\vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$, тогда $\vec{r}_x = (1, 0, f_x)$, $\vec{r}_y = (0, 1, f_y)$, поэтому

$$\vec{n}(x, y) = \frac{[\vec{r}_x \times \vec{r}_y]}{|[\vec{r}_x \times \vec{r}_y]|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Поэтому в аналогичных локальных координатах u, v в окрестности точки $\Gamma(P) = \vec{n}(P)$ на $S^2 \subset \mathbb{R}^3(u, v, w)$ имеем $T_{\Gamma(P)} S^2 = Ouv$ и

$$\Gamma(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = \frac{(-f_x, -f_y)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

В точке P имеем $f_x(P) = f_y(P) = 0$. Поэтому

$$\mathrm{d}\Gamma(P) = \begin{pmatrix} -f_{xx} & -f_{xy} \\ -f_{xy} & -f_{yy} \end{pmatrix} |_P.$$

Так как в выбранных координатах на M и на S^2 метрики в точках P и $\Gamma(P)$ евклидовы, то формы объема $\mathrm{d}\sigma(P) = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ и $\mathrm{d}\sigma^\circ(f(P)) = \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$. Поэтому

$$\Gamma^* \mathrm{d}\sigma^\circ(P) = \Gamma^*(\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v) = (\det \mathrm{d}\Gamma(P)) \cdot \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = K(P)\mathrm{d}\sigma.$$

□

Теорема 3 (формула Гаусса-Бонне)**.** *Пусть $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ — регулярная замкнутая ориентируемая связная поверхность (ориентированная с помощью внешней нормали). Тогда*

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{M^2} K\mathrm{d}\sigma = 2\lambda,$$

где $\lambda = \deg \Gamma$ — целое число (и, в частности, интеграл не меняется при гладкой деформации поверхности).

Доказательство. Пусть $\Gamma : M \to S^2$ — гауссово отображение. По теореме 2 имеем $K\mathrm{d}\sigma = \Gamma^*\mathrm{d}\sigma^\circ$. Имеем

$$\int\limits_M K\mathrm{d}\sigma \overset{\text{теор.2}}{=} \int\limits_M \Gamma^*\mathrm{d}\sigma^\circ \overset{\text{теор.1}}{=} \deg\Gamma \cdot \int\limits_{S^2} \mathrm{d}\sigma^\circ = \deg\Gamma \cdot \mathrm{vol}_2 S^2 = 4\pi\deg\Gamma.$$

□

Задача 15.1. Показать, что число λ равно $1-g$, где g — число ручек поверхности M (не зависит от выбора метрики на M). Число 2λ — эйлерова характеристика поверхности M.

Указание. По формуле Гаусса-Бонне

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{M^2} K\mathrm{d}\sigma = 2\deg\Gamma$$

не меняется при гладкой деформации поверхности (так как гладкая деформация поверхности вызывает гладкую гомотопию гауссова отображения Γ). Поэтому достаточно вычислить интеграл $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{M_g^2} K\mathrm{d}\sigma$ для конкретной реализации $M_g^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Сделаем это. Вначале разберем подробно случай $g=0$, а потом общий случай.

Случай 1. Если род M равен $g=0$, то можно рассмотреть две поверхности: стандартную сферу $M_0 = S^2$ (для которой $\Gamma_0 = \mathrm{id}_{S^2}$, откуда $\deg\Gamma_0 = 1$, и $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S^2} K_0\mathrm{d}\sigma = 2$) и "продеформированную сферу" $M \subset \mathbb{R}^3$, состоящую из двух стандартных сфер, соединенных тонким цилиндром. Первая поверхность (стандартная сфера M_0) дает нам требуемое равенство $\lambda = \deg\Gamma_0 = 1 = 1-g$ (ввиду $g=0$).

Рассмотрим теперь обе поверхности M_0 и M. Обозначим через $i_0 = \mathrm{id} : S^2 \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ и $i_1 : S^2 \to \mathbb{R}^3$ вложения сферы в $\mathbb{R}^3$, задающие эти две поверхности. Ясно, что существует гладкая гомотопия $i_t : S^2 \to \mathbb{R}^3$, $t \in [0,1]$, такая, что каждое отображение i_t является вложением (т.е. инъективно и $\mathrm{d}i_t(P) : T_P S^2 \to \mathbb{R}^3$ инъективно для любой точки $P \in S^2$). Обозначим через K_t, $\mathrm{d}\sigma_t$ и Γ_t гауссову кривизну, форму объема и гауссово отображение поверхности $M_t = i_t(S^2)$. Имеем $M = M_1$, $K = K_1$, $\Gamma = \Gamma_1$, и

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{M_0^2} K_0\mathrm{d}\sigma_0 = 2\deg\Gamma_0 \overset{\text{(по теореме об инвар-ти степени)}}{=} 2\deg\Gamma = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{M^2} K\mathrm{d}\sigma.$$

Но M состоит из двух экземпляров стандартной сферы M_0 (с высверленной дыркой) и из одного цилиндра, и вклад каждой стандартной сферы M_0^2 в интеграл $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{M^2} K\mathrm{d}\sigma$ равен $2\deg\Gamma_0 = 2$. Отсюда находим вклад x одного цилиндра:

$$2 = 2 + x + 2 \qquad \Rightarrow \quad x = -2.$$

Случай 2. Если g ручек, то можно реализовать поверхность $M^2 = M_g^2 \subset \mathbb{R}^3$ в виде двух стандартных сфер, соединенных $g+1$ цилиндром (нарисуйте чертеж). Отсюда

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{M_g^2} K\mathrm{d}\sigma = 2 + (g+1)x + 2 = 2 - 2(g+1) + 2 = 2 - 2g,$$

что и требовалось. □