14 Степень отображения (продолжение)

14.1 Приложение 1. Основная теорема алгебры (о числе корней полинома)

В примере 1 из лекции 13 мы вычислили степень отображения $f : S^1 \to S^1$, $f(z) = z^m$. Приведем примеры применения степени.

Предложение 1. *Пусть* $f : S^2 = \overline{\mathbb{C}}(z) \to S^2 = \overline{\mathbb{C}}(w)$, $w = f(z)$, *где* $f|_{\mathbb{C}}$ *— многочлен степени* $n > 0$ *комплексного переменного* $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $f(\infty) = \infty$. *Тогда* f *является гладким и* $\deg f = n$.

Доказательство. Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть* $w = f(z)$ *— комплексно-аналитическая функция. Тогда якобиан отображения* f *в любой точке неотрицателен.*

Доказательство. Пусть отображение f представляется в виде $f = u(x, y) + iv(x, y)$. В силу условий Коши—Римана, матрица Якоби этого отображения в точке $z = x + iy \in \mathbb{C}$ имеет вид

$$J(z) = \begin{pmatrix} u_x(z) & u_y(z) \\ v_x(z) & v_y(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(z) & -v_x(z) \\ v_x(z) & u_x(z) \end{pmatrix}, \quad \det J(z) = (u_x(z))^2 + (v_x(z))^2 = |f'(z)|^2 \geq 0,$$

что и требовалось. $\square$

Итак, по лемме 1, если точка $z \in \mathbb{C}$ регулярна для f (т.е. $f'(z) \neq 0$), то определитель матрицы Якоби в точке z положителен.

Задача 14.1. Покажите, что отображения $f, g : S^2 \to S^2$ гладкие и гладко гомотопны, где $f(z) = a_0 z^n + P(z)$ и $g(z) = a_0 z^n$ при $z \in \mathbb{C}$, $a_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $P(z)$ — многочлен степени меньше n, $f(\infty) = g(\infty) = \infty$, и гладкая гомотопия $F(z, t)$ задается в явном виде как

$$F(z, t) = a_0 z^n + (1 - t)P(z), \quad z \in \mathbb{C}, \qquad F(\infty, t) = \infty$$

(особое внимание обратите на точку $z_0 = \infty$, для этого запишите отображения $f(z), g(z), F(z, t)$ с помощью регулярных локальных координат $w = 1/z$ в окрестности этой точки).

По задаче 14.1 отображение $f : S^2 \to S^2$ является гладким и (по задаче 1 и теореме 1 (б) об инвариантности степени) его степень равна степени отображения $g : S^2 \to S^2$. Прообраз точки 1 при отображении g состоит ровно из n точек вида $e^{2\pi k/n}$, $k = 0, \ldots, n-1$, каждая из которых регулярна. Поэтому из леммы 1 имеем $\deg f = \deg g \overset{\text{лем.1}}{=} \sum_n 1 = n$, что и требовалось. Предложение 1 доказано. $\square$

В качестве первого приложения понятия степени гладкого отображения получаем следующее утверждение.

Основная теорема алгебры. *Любой многочлен степени* ≥ 1 *над полем комплексных чисел имеет хотя бы один комплексный корень.*

Доказательство. Пусть $f(z)$ — многочлен степени $n > 0$ комплексного переменного $z = x + iy$. Согласно предложению 1, многочлен f задает гладкое отображение $f : S^2 \to S^2$ римановой сферы S^2 в себя, и $\deg f = n$. Если бы многочлен f не имел корней, то 0 был бы его регулярным значением, так как $f^{-1}(0)$ было бы пусто. Поэтому отображение $f : S^2 \to S^2$ имело бы степень 0, что противоречит предложению 1. Доказательство закончено. $\square$

14.2 Приложение 2. Гауссово отображение и степень. Формула Гаусса-Бонне

Теорема 1 (о степени и интеграле)**.** *Пусть $f : M_1^n \to M_2^n$ — гладкое отображение между гладкими замкнутыми ориентированными связными многообразиями одинаковой размерности. Пусть Ω — внешняя дифференциальная форма максимального ранга $n = \dim M_1 = \dim M_2$ на M_2. Тогда*

$$\int_{M_1} f^*\Omega = \deg f \cdot \int_{M_2} \Omega.$$

Доказательство. Шаг 1. Пусть $H \subseteq M_1$ — множество нерегулярных точек f. Фиксируем малые числа $\varepsilon^\circ > \varepsilon > 0$. Пусть $V^\circ \supset H$ — малая окрестность, в которой $|\det \mathrm{d}f(x)| < \varepsilon^\circ$, $x \in V^\circ$.

Пусть $U^\circ \supset f(V^\circ) \supset f(H)$ — столь малая окрестность, что

$$\mathrm{vol}(U^\circ) \leq 2\varepsilon^\circ \mathrm{vol}(M_1)$$

(она существует, так как $\mathrm{vol}(f(V^\circ)) \leq \varepsilon^\circ \mathrm{vol}(V^\circ) \leq \varepsilon^\circ \mathrm{vol}(M_1)$). Пусть $U \supset f(H)$ — еще меньшая окрестность такая, что

$$\mathrm{vol}(U) \leq 2\varepsilon \mathrm{vol}(M_1).$$

Для каждой точки $x \in M_1 \setminus H$ выберем (ввиду регулярности точки x) столь малую окрестность V_x°, в которой $f|_{V_x^\circ} : V_x^\circ \to f(V_x^\circ)$ — диффеоморфизм (она существует в силу теоремы об обратном отображении, так как $\det \mathrm{d}f(x) \neq 0$).

Для каждой точки $y \in M_2$ определим множество

$$f^{-1}(y) =: \{x_1(y), \ldots, x_{s(y)}(y)\}, \qquad \text{если} \qquad y \notin f(H), \tag{4}$$

$$(M_1 \setminus V^\circ) \cap f^{-1}(y) =: \{x_1(y), \ldots, x_{s(y)}(y)\}, \qquad \text{если} \qquad y \in f(H). \tag{5}$$

Это множество замкнуто в M_1 (а потому компактно) и не содержит предельных точек (а потому конечно). Пусть далее $s(y) > 0$. Выберем для точки y координатную окрестность $U_y^\circ \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{s(y)} f(V_{x_i(y)}^\circ)$ гомеоморфную $\mathbb{R}^n$ и такую, что

$$f^{-1}(U_y^\circ) \subseteq V^\circ \cup \bigcup_{i=1}^{s(y)} V_{x_i(y)}^\circ \tag{6}$$

(нетрудно показать, что такая окрестность существует). Без ограничения общности считаем, что $U_y^\circ \subseteq M_2 \setminus f(H)$, если $y \notin f(H)$. Положим

$$U_y := U_y^\circ, \qquad \text{если} \qquad y \notin f(H),$$

$$U_y := U_y^\circ \cap U, \qquad \text{если} \qquad y \in f(H). \tag{7}$$

Пусть U_y' — еще меньшая окрестность точки y такая, что $\overline{U_y'} \subset U_y$. Положим $V_{x_i(y)} := V_{x_i(y)}^\circ \cap f^{-1}(U_y)$ и $V_{x_i(y)}' := V_{x_i(y)}^\circ \cap f^{-1}(U_y')$ для $i = 1, \ldots, s(y)$.

Получаем открытые покрытия

$$f^{-1}(f(H)) \subseteq V^\circ \cup \left(\bigcup_{y \in f(H)} \bigcup_{i=1}^{s(y)} V_{x_i(y)}^\circ \right), \quad M_1 = V^\circ \cup \left(\bigcup_{y \in M_2} \bigcup_{i=1}^{s(y)} V_{x_i(y)}' \right).$$

Выберем их конечные подпокрытия

$$f^{-1}(f(H)) \subseteq V^\circ \cup \left(\bigcup_{k=1}^{N^\circ} \bigcup_{i=1}^{s(y_k)} V_{x_i(y_k)}^\circ \right), \quad M_1 = V^\circ \cup \left(\bigcup_{k=1}^{N} \bigcup_{i=1}^{s(y_k)} V_{x_i(y_k)}' \right), \tag{8}$$

которые существуют ввиду компактности множеств $f^{-1}(f(H))$ и M_1 (здесь $N^\circ \le N' \le N$, $y_k \in f(H)$ — нерегулярное значение при $1 \le k \le N'$, $y_k \notin f(H)$ — регулярное значение при $N'+1 \le k \le N$). Без ограничения общности мы можем считать, что

$$\forall k \in \{N^\circ + 1, \ldots, N'\} \ \exists \ell \in \{1, \ldots, N^\circ\} \quad \text{т.ч.} \quad U_{y_k}' \subset U_{y_\ell}^\circ \qquad (\Rightarrow \ s(y_k) \le s(y_\ell)). \tag{9}$$

Пусть $\{f_k\}_{k=0}^{N+1}$ — разбиение единицы на M_2, подчиненное конечному открытому покрытию

$$M_2 = U' \cup \left(\bigcup_{k=1}^{N} U_{y_k} \right) \cup U_\varnothing,$$

где $U' := U^\circ \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{N} \overline{U_{y_k}'}$, $U_\varnothing := M_2 \setminus f(M_1)$. Имеем

$$\Omega = \Omega \cdot 1 = \Omega \sum_{k=0}^{N+1} f_k = \sum_{k=0}^{N+1} (f_k \Omega) =: \sum_{k=0}^{N+1} \Omega_k,$$

где $\operatorname{supp}(\Omega_k) \subset U_{y_k}$ при $1 \le k \le N$, $\operatorname{supp}(\Omega_0) \subset U'$, $\operatorname{supp}(\Omega_{N+1}) \subset U_\varnothing$. Достаточно доказать требуемое равенство для $\sum\limits_{k=0}^{N} \Omega_k$ и для Ω_{N+1}.

Шаг 2. Докажем требуемое равенство для Ω_{N+1}. Имеем $\operatorname{supp}(\Omega_{N+1}) \subset U_\varnothing$. В случае $U_\varnothing = \varnothing$ имеем $\Omega_{N+1} = 0$ и требуемое равенство очевидно. Пусть $U_\varnothing \ne \varnothing$. Фиксируем точку $y_0 \in U_\varnothing$. Так как $f^{-1}(y_0) \subseteq f^{-1}(U_\varnothing) = \varnothing$, то y_0 — регулярное значение f и $\deg_{y_0} f = 0$ по определению степени отображения.

Получаем, что левая и правая части требуемого равенства равны нулю:

$$\int_{M_1} f^* \Omega_{N+1} = \int_{f^{-1}(\operatorname{supp}(\Omega_{N+1})) = \varnothing} f^* \Omega_{N+1} = 0, \qquad \deg f \cdot \int_{M_2} \Omega_{N+1} = \underbrace{\deg_{y_0} f}_{0} \cdot \int_{M_2} \Omega_{N+1} = 0.$$

Шаг 3. Докажем требуемое равенство для $\sum\limits_{k=0}^{N} \Omega_k$. Фиксируем $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$.

Случай 1: $1 \le k \le N$. Имеем $\mathrm{supp}(\Omega_k) \subset U_{y_k}$. Вычислим левую и правую части (Л.Ч.$_k$, Пр.Ч.$_k$) требуемого равенства:

$$\text{Л.Ч.}_k = \int\limits_{M_1} f^*\Omega_k = \int\limits_{f^{-1}(U_{y_k})} f^*\Omega_k \overset{(6)}{=} \int\limits_{V^\circ \setminus \cup V_{x_i(y_k)}} f^*\Omega_k + \sum_{i=1}^{s(y_k)} \int\limits_{V_{x_i(y_k)}} f^*\Omega_k, \tag{10}$$

$$\text{Пр.Ч.}_k = \deg f \cdot \int\limits_{M_2} \Omega_k = \deg f \cdot \int\limits_{U_{y_k}} \Omega_k. \tag{11}$$

Вычислим i-е слагаемое в сумме в (10). Пусть $x = (x^1, \dots, x^n)$ — координаты в $V_{x_i(y_k)} \approx \mathbb{R}^n$ из положительно ориентированного атласа на M_1, а $y = (y^1, \dots, y^n)$ — координаты в $U_{y_k} \approx \mathbb{R}^n$ из положительно ориентированного атласа на M_2. Пусть $y = y(x)$ — координатное представление отображения $f|_{V_{x_i(y_k)}}$ в этих координатах. Рассмотрим координатные представления наших n-форм:

$$\Omega_k|_{U_{y_k}} =: \omega_k(y) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n, \qquad (f^*\Omega_k)|_{V_{x_i(y_k)}} = \det \left\| \frac{\partial y^\ell}{\partial x^m}(x) \right\| \omega_k(y(x)) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Так как $f|_{V_{x_i(y_k)}} : V_{x_i(y_k)} \to U_{y_k}$ — диффеоморфизм координатных окрестностей, то по определению интеграла n-формы и по формуле замены переменных под знаком интеграла

$$\int\limits_{V_{x_i(y_k)}} f^*\Omega_k = \int\limits_{V_{x_i(y_k)}} \det \left\| \frac{\partial y^\ell}{\partial x^m}(x) \right\| \omega_k(y(x)) dx^1 \dots dx^n =$$

$$= \int\limits_{V_{x_i(y_k)}} \varepsilon_i \left| \det \left\| \frac{\partial y^\ell}{\partial x^m}(x) \right\| \right| \omega_k(y(x)) dx^1 \dots dx^n = \varepsilon_i \int\limits_{U_{y_k}} \omega_k(y) dy^1 \dots dy^n = \varepsilon_i \int\limits_{U_{y_k}} \Omega_k,$$

где $\varepsilon_i := \mathrm{sgn} \det \left\| \frac{\partial y^\ell}{\partial x^m}(x_i(y_k)) \right\| = \mathrm{sgn} \det \mathrm{d}f(x_i(y_k))$. Получаем

$$\text{Л.Ч.}_k - \text{Пр.Ч.}_k = \int\limits_{V^\circ \setminus \cup V_{x_i(y_k)}} f^*\Omega_k + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{s(y_k)} \varepsilon_i - \deg f \right)}_{\substack{=0, \\ \text{если } k > N'}} \int\limits_{\underbrace{U_{y_k}}_{\substack{\subseteq U, \\ \text{если } k \le N'}}} \Omega_k. \tag{12}$$

Здесь мы отметили, что если $k > N'$ (т.е. $y_k \notin f(H)$ — регулярное значение), то выражение в скобках равно нулю ввиду (4) и определения степени отображения; если $k \le N'$ (т.е. $y_k \in f(H)$ — нерегулярное значение), то $U_{y_k} \subseteq U$ по построению в (7).

Случай 2: $k = 0$. Имеем $\mathrm{supp}(\Omega_0) \subset U' \subseteq U^\circ$ и $f^{-1}(U') \subseteq M_1 \setminus \cup V'_{x_i(y_\ell)} \subseteq V^\circ$ ввиду равенства в (8). В частности, при $k = 0$ верны аналоги формул (10) и (11) (для $s(y_0) := 0$), а потому и следующий аналог формулы (12):

$$\text{Л.Ч.}_0 - \text{Пр.Ч.}_0 = \int\limits_{V^\circ} f^*\Omega_0 - \deg f \int\limits_{U^\circ} \Omega_0. \tag{13}$$

Складывая выражения (12) по всем $k = 1, \dots, N$ и его аналог (13) при $k = 0$, получаем разность левой и правой частей (Л.Ч., Пр.Ч.) требуемого равенства:

$$\text{Л.Ч.} - \text{Пр.Ч.} = \sum_{k=0}^{N} (\text{Л.Ч.}_k - \text{Пр.Ч.}_k) = \int\limits_{V^\circ} f^*\Omega_0 + \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{V^\circ \setminus \cup V_{x_i(y_k)}} f^*\Omega_k -$$

$$- \deg f \int\limits_{U^\circ} \Omega_0 + \sum_{k=1}^{N'} \left(\sum_{i=1}^{s(y_k)} \varepsilon_i - \deg f \right) \int\limits_{U_{y_k} \subseteq U} \Omega_k,$$

откуда

$$|\text{Л.Ч.} - \text{Пр.Ч.}| \le \int\limits_{V^\circ} |f^*\Omega| + |\deg f| \int\limits_{U^\circ} |\Omega| + \left(\max\{s(y_k)\}_{k=1}^{N'} + |\deg f| \right) \int\limits_{U} |\Omega| \le$$

$$\le \left(\varepsilon^\circ + 2\varepsilon^\circ |\deg f| + 2\varepsilon \left(\max\{s(y_\ell)\}_{\ell=1}^{N^\circ} + |\deg f| \right) \right) \mathrm{vol}(M_1) \|\Omega\|.$$

Поясним последнее неравенство. Во-первых, по построению окрестностей V°, U° и U

$$\int\limits_{V^\circ} |f^*\Omega| \le \sup_{x \in V^\circ} |\det \mathrm{d}f(x)| \cdot \mathrm{vol}(V^\circ) \|\Omega\| \le \varepsilon^\circ \mathrm{vol}(M_1) \|\Omega\|,$$

$$\int\limits_{U^\circ} |\Omega| \le \mathrm{vol}(U^\circ) \|\Omega\| \le 2\varepsilon^\circ \ \mathrm{vol}(M_1) \|\Omega\|, \qquad \int\limits_{U} |\Omega| \le \mathrm{vol}(U) \|\Omega\| \le 2\varepsilon \ \mathrm{vol}(M_1) \|\Omega\|,$$

где $\|\Omega\| := \max\limits_{y \in M_2} \omega(y)$, $\Omega = \omega \mathrm{d}\sigma$, $\mathrm{d}\sigma$ — ориентированная форма объема на M_2, отвечающая какой-либо фиксированной римановой метрике на M_2, $\omega \in C^\infty(M_2)$. Во-вторых, так как $N^\circ \le N'$, то выполнено, вообще говоря, включение $\{s(y_k)\}_{k=1}^{N'} \supseteq \{s(y_\ell)\}_{\ell=1}^{N^\circ}$, но в действительности $s(y_k) \le \max\{s(y_\ell)\}_{\ell=1}^{N^\circ}$ ввиду (9).

Осталось заметить, что набор чисел $\{s(y_\ell)\}_{\ell=1}^{N^\circ}$ не зависит от ε по построению в (5) и (8). Поэтому, устремляя ε к нулю (при фиксированном ε°), получаем

$$|\text{Л.Ч.} - \text{Пр.Ч.}| \le \varepsilon^\circ (1 + 2|\deg f|) \mathrm{vol}(M_1) \|\Omega\|.$$

Так как последнее неравенство верно при любом $\varepsilon^\circ > 0$, получаем требуемое равенство левой и правой частей.

Теорема полностью доказана. $\square$

14.3 Упражнения к лекции 14

Упражнение 14.1. Покажите, что отображения $f, g : S^2 \to S^2$ гладкие и гладко гомотопны, где $f(z) = a_0 z^n + P(z)$ и $g(z) = a_0 z^n$ при $z \in \mathbb{C}$, $a_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $P(z)$ — многочлен степени меньше n, $f(\infty) = g(\infty) = \infty$, и гладкая гомотопия $F(z,t)$ задается в явном виде как

$$F(z,t) = a_0 z^n + (1-t)P(z), \quad z \in \mathbb{C}, \qquad F(\infty, t) = \infty$$

(особое внимание обратите на точку $z_0 = \infty$, для этого запишите отображения $f(z), g(z), F(z,t)$ с помощью регулярных локальных координат $w = 1/z$ в окрестности этой точки).