13 Степень отображения

13.1 Регулярные точки и регулярные значения гладких отображений. Теорема Сарда

Пусть

$$F : M \to N$$

— **гладкое** отображение произвольного **гладкого** многообразия $M = M^m$ размерности m в произвольное **гладкое** многообразие $N = N^n$ размерности n. Пусть $P \in M$ — произвольная точка. Дифференциал отображения F в точке P — это линейное отображение касательных пространств

$$\mathrm{d}F|_P : T_P M \to T_{F(P)} N.$$

Определение 1. Точка $P \in M$ называется *регулярной точкой* отображения F, если $\mathrm{d}F|_P$ является эпиморфизмом (т.е. сюръективно).

Определение 1′. Точка $Q \in N$ называется *регулярным* (правильным) *значением* отображения F, если прообраз точки Q или пуст, или состоит из регулярных точек.

Задача 13.1. Если $\dim M < \dim N$, то все точки отображения $F : M \to N$ — не регулярные.

Определение 2. Множество $B \subset \mathbb{R}^n$ имеет *нулевой объем*, или (n-мерную) *меру нуль* (пишут $\mathrm{vol}_n B = 0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое покрытие множества B не более чем счетным семейством кубов, что суммарный объем этих кубов меньше ε.

Из курса математического анализа известно, что данное определение не зависит от того, какие криволинейные координаты выбраны в окрестности множества: если в одних криволинейных координатах множество B имеет меру нуль, то и во всех других координатах это имеет место. Кроме того, известно, что не более чем **счетные объединения** множеств меры нуль снова являются множествами меры нуль. Последнее обосновывает корректность следующего определения.

Определение 2′. Подмножество $B \subset N$ гладкого n-мерного многообразия N имеет *нулевой объем*, или (n-мерную) *меру нуль* (пишут $\mathrm{vol}_n B = 0$), если для любой карты (U, φ) множество $\varphi(B \cap U)$ имеет меру нуль как подмножество $\mathbb{R}^n$.

Теорема Сарда (без доказательства)**.** *Пусть M — замкнутое (т.е. компактное без края) многообразие, $f : M \to N$ — гладкое отображение. Пусть $H \subseteq M$ — множество нерегулярных точек отображения f. Тогда множество $f(H)$ нерегулярных значений отображения f имеет нулевой объем* $\mathrm{vol}_n f(H) = 0$.

Из курса математического анализа известно, что дополнение до множества $B \subset \mathbb{R}^n$ меры нуль является всюду плотным подмножеством в $\mathbb{R}^n$. Отсюда и из теоремы Сарда мгновенно заключаем

Следствие. *Множество регулярных значений гладкого отображения $f : M \to N$, является открытым всюду плотным подмножеством в N.*

13.2 Степень гладкого отображения между двумя замкнутыми ориентированными многообразиями одинаковой размерности

Степень гладкого отображения $f : M_1 \to M_2$ между двумя замкнутыми ориентированными многообразиями одинаковой размерности.

Предложение 1. *Пусть $Q \in M_2$ — произвольное регулярное значение гладкого отображения $f : M_1 \to M_2$ гладких* **компактных** *многообразий* **одинаковой размерности** $\dim M_1 = \dim M_2 = n$ *(оно существует по теореме Сарда). Тогда прообраз $f^{-1}(Q)$ точки Q состоит из конечного числа точек.*

Доказательство. Действительно, в противном случае, в силу компактности многообразия M_1, в прообразе $f^{-1}(Q)$ можно было бы выбрать последовательность точек P_k, сходящуюся к некоторой точке $P \in M_1$. Из непрерывности отображения f вытекает, что P также является прообразом точки Q. Так как P — регулярная точка, то в некоторой ее окрестности U отображение f — **диффеоморфизм** и, значит, взаимно однозначно с образом, поэтому в U нет точек из $f^{-1}(Q)$, отличных от P. Последнее противоречит тому, что P — предельная точка для последовательности P_k. □

Определение 3. Пусть $f : M_1 \to M_2$ — гладкое отображение гладких **ориентированных замкнутых** (т.е. компактных **без края**) многообразий одинаковой размерности n. Фиксируем на M_1 и M_2 некоторые ориентированные атласы. В дальнейшем все локальные координаты будут согласованны с картами этих атласов. Пусть Q — произвольное регулярное значение отображения f, и $\{P_1, \dots, P_m\}$ — полный прообраз точки Q при отображении f (по предложению 1 он состоит из конечного числа точек). Тогда $\mathrm{d}f|_{P_k} : T_{P_k}M_1 \to T_Q M_2$ — изоморфизм.

Пусть $(x_k) = (x_k^1, \dots, x_k^n)$ — локальные координаты в окрестности точки P_k, а $(y) = (y^1, \dots, y^n)$ — локальные координаты в окрестности точки Q (как мы договорились, эти координаты согласованны с фиксированными ориентированными атласами). Возникает знак $\varepsilon_k = \pm 1$ якобиана отображения f в точке P_k:

$$\varepsilon_k := \operatorname{sgn}\det(\mathrm{d}f|_{P_k}) = \operatorname{sgn}\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x_k^j}(P_k)\right).$$

Отметим, что ε_k не зависит от выбора локальных координат (x_k) и (y), так как якобианы замен таких координат положительны.

В сделанных выше обозначениях, сумма $\sum_{k=1}^m \varepsilon_k$ называется *степенью отображения f по отношению к регулярному значению Q* и обозначается через $\deg_Q f$.

Пример 1. Степень отображения $f : S^1 \to S^1$, заданного формулой $f(z) = z^m$, равна m. Здесь окружность представлена как множество комплексных чисел, равных по модулю единице.

Доказательство. Пусть $M_1 = M_2 = S^1$ — стандартная окружность, параметризованная углом φ. Рассмотрим отображение, переводящее точку с координатой φ в точку с координатой $m\varphi$, где $m \in \mathbb{Z}$ (в комплексной координате $z = x + iy \in \mathbb{C}$ на плоскости $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ окружность параметризована отображением $z(\varphi) = e^{i\varphi}$, и $f(z) = z^m$). Выберем на $M_1 = M_2$ ориентацию, согласованную с координатой φ. Тогда якобиан этого отображения (по отношению к координате φ) постоянен и равен m. Поэтому при $m > 0$

отображение сохраняет ориентацию (так как знак якобиана $\varepsilon = \mathrm{sgn} m = +1$), а при $m < 0$ — обращает ее (так как знак якобиана $\varepsilon = \mathrm{sgn} m = -1$). С другой стороны, если $m \neq 0$, то каждая точка $Q \in S^1$ имеет $|m|$ прообразов (k-й прообраз имеет координату $\varphi_k = (\varphi + 2\pi k)/m$), поэтому $\deg_Q f = \sum_{k=1}^{|m|} \mathrm{sgn} m = m$. При $m = 0$ вся окружность отображается в точку с координатой $\varphi = 0$, поэтому прообраз точки $Q \in S^1$, отличной от точки с координатой $\varphi = 0$, пуст, и, значит, $\deg_Q f = 0$. $\square$

13.3 Гладкая гомотопия. Теорема об инвариантности степени при гомотопии и независимость от выбора точки

Напомним определение гладко гомотопных отображений (определение 3 из лекции 6).

Определение 4. Пусть $f, g : M \to N$ — гладкие отображения гладких многообразий, и $I = [a, b]$ — отрезок прямой. Непрерывное (гладкое) отображение $F : M \times I \to N$ называется *(гладкой) гомотопией* между отображениями f и g, если $F(P, a) = f(P)$ и $F(P, b) = g(P)$ для любого $P \in M$.

Определение 4′. Два гладких отображения $f, g : M \to N$ называются (гладко) *гомотопными*, если существует (гладкая) гомотопия между ними.

В дальнейшем мы часто будем обозначать гомотопию отображения f через f_t, понимая при этом семейство отображений $f_t : M \to N$, определенных через гладкую гомотопию F так:

$$f_t(x) = F(x, t).$$

Пример 2. Любое гладкое отображение $f : M \to \mathbb{R}^n$ гладкого многообразия M в $\mathbb{R}^n$ гладко гомотопно точечному отображению $\nu : M \to Q \in \mathbb{R}^n$. Действительно, гладкая гомотопия между f и ν может быть задана так: $f_t = (1 - t)f + tQ$, где $t \in [0, 1]$.

Теорема 1 (об инвариантности степени)**.** *Пусть выполнены условия из определения 3 и M_2 связно. Тогда степень отображения $f : M_1 \to M_2$ не зависит:*

(а) от выбора регулярного значения $Q \in M_2$,

(б) от выбора отображения f в классе гладко гомотопных отображений.

Доказательство. Докажем импликацию (б) $\Rightarrow$ (а). Докажем сначала следующий факт.

Предложение 2. *Пусть Q и Q' две произвольные точки связного многообразия M_2. Тогда существует такое гладкое семейство диффеоморфизмов φ_t, $t \in [0, 1]$, что φ_0 — тождественное отображение, а $\varphi_1(Q) = Q'$.*

Доказательство. Пусть $n = \dim M_2$. В силу связности многообразия M_2, точки Q и Q' можно соединить непрерывным путем, поэтому можно выбрать открытое множество $U \subset M_2$, диффеоморфное $\mathbb{R}^n$, и содержащее обе точки Q и Q'. Более того, в U можно выбрать такую систему координат (y), что $Q = (0, \ldots, 0)$, $Q' = (1, 0, \ldots, 0)$. Рассмотрим открытые подмножества U' и U'' в U, обладающие следующими свойствами:

$$[Q, Q'] \subset U' \subset U'' \subset U,$$

и замыкание U'' в U компактно. Пусть ψ — гладкая функция на U, равная 1 в U' и нулю вне U''. В окрестности U, во введенных координатах (y) рассмотрим векторное поле

$\xi = \psi\partial_{y^1}$ и пусть $\bar{\varphi}_t$ — однопараметрическая группа диффеоморфизмов, соответствующая ξ, т.е. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{\varphi}_t = \xi \circ \bar{\varphi}_t$, существование которой известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, и при $t = 0$ диффеоморфизм $\bar{\varphi}_t$ является тождественным преобразованием. Легко видеть, что $\bar{\varphi}_1(Q) = Q'$ и все $\bar{\varphi}_t$ являются тождественными отображениями вне $\overline{U''}$. Продолжим семейство диффеоморфизмов $\bar{\varphi}_t$ вне окрестности U тождественным преобразованием. Тем самым мы построим искомое семейство φ_t. $\square$

Вернемся к доказательству импликации (б) $\Rightarrow$ (а). Пусть Q' — другое регулярное значение отображения f. По предложению 2 существует однопараметрическое семейство диффеоморфизмов φ_t многообразия M_2, такое что φ_0 — тождественное отображение, а $\varphi_1(Q) = Q'$. Ясно, что Q' — регулярное значение для отображения $\varphi_1 \circ f$. Так как отображения f и $\varphi_1 \circ f$ гладко гомотопны, то, в силу п.(б) "об инвариантности степени при гомотопии" имеем:

$$\deg_{Q'} f = \deg_{Q'}(\varphi_1 \circ f).$$

Осталось заметить, что якобиан отображения $\varphi_1 \circ f$ в каждой точке $P \in (\varphi_1 \circ f)^{-1}(Q') = f^{-1}(Q)$ равен произведению положительного якобиана отображения φ_1 в точке Q и якобиана отображения f в точке P, откуда

$$\deg_{Q'}(\varphi_1 \circ f) = \deg_Q f.$$

Итак, $\deg_{Q'} f = \deg_Q f$, что и требовалось, т.е. импликация (б) $\Rightarrow$ (а) доказана.

Теперь докажем (б).

Шаг 1. Пусть $F : M_1 \times [0,1] \to M_2$ — гладкая гомотопия между f и g. По следствию из теоремы Сарда сколь угодно близко к точке Q найдется точка Q', являющаяся регулярным значением отображения F. Так как точка Q является регулярным значением для f и множество регулярных значений открыто в M_2, то и достаточно близкая к точке Q точка Q' тоже является регулярным значением для f, более того $\deg_Q f = \deg_{Q'} f$ (и аналогично для g). Итак, точка Q' является регулярным значением для f, g, F. Нужно убедиться в том, что $\deg_{Q'} f = \deg_{Q'} g$. Далее будем обозначать Q' через Q.

Шаг 2. Так как Q — регулярное значение $F : M_1 \times [0,1] \to M_2$, то в любой точке $P \in F^{-1}(Q)$ ранг $\mathrm{d}F(P) = \dim M_2 = n$, поэтому из теоремы о ранге множество

$$\gamma := F^{-1}(Q) = \{(P,t) \in M_1 \times [0,1] \mid F(P,t) = Q\}$$

является гладким подмногообразием в цилиндре $M_1 \times [0,1]$, размерности $\dim\gamma = \dim(M_1 \times [0,1]) - \dim M_2 = 1$, т.е. является регулярной кривой в цилиндре.

Шаг 3. Пусть γ_i — связная компонента кривой γ. Пусть $\gamma_i(u)$ — ее регулярная параметризация, $u \in [0,1]$.

Случай I: $\gamma_i(0) = (P,0) \in M_1 \times \{0\}$, $\gamma_i(1) = (P',1) \in M_1 \times \{1\}$ (т.е. концы кривой γ_i принадлежат разным основаниям цилиндра $M_1 \times [0,1]$).

Лемма I. *Пусть $\varepsilon = \varepsilon_i = \pm 1$ — знак якобиана f в точке P, и $\varepsilon' = \varepsilon'_i = \pm 1$ — знак якобиана g в точке P'. Тогда $\varepsilon = \varepsilon'$.*

Доказательство. Рассмотрим репер $e(0) = (e_i(0))_{i=1}^n$ в касательном пространстве $T_P M_1$ в точке P, такой, что

$$\mathrm{d}f(e_i(0)) = \frac{\partial}{\partial y^i}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{$*$}$$

где $(y^1, \dots, y^n)$ — локальные координаты ориентированного атласа на M_2. Дополним его вектором скорости $e_{n+1}(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\gamma_i(0)$.

Рассмотрим деформацию полученного репера $E(0) = \{e_1(0), \dots, e_{n+1}(0)\}$ вдоль кривой γ_i. А именно: рассмотрим репер $E(u) = (e_1(u), \dots, e_{n+1}(u))$ касательного пространства $T_{\gamma_i(u)}(M_1 \times [0,1])$ такой, что

$$\mathrm{d}F(e_i(u)) = \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad i = 1, \dots, n, \qquad e_{n+1}(u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\gamma_i(u)$$

при любом $u \in [0,1]$.

Запишем полученный репер $E(u)$ в локальных координатах $(x^1, \dots, x^n, t)$ ориентированного атласа на $M_1 \times [0,1]$. Получим

$$E(u) = (\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial t})M(u),$$

где $M(u)$ — матрица размера $(n+1) \times (n+1)$. Матрица $M(0)$ имеет в последней строке $(0, \dots, 0, a)$, так как $e_1(0), \dots, e_n(0) \in T_P M_1$ по построению. Значение $a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}t(0) \geq 0$, так как $t(0) = 0 \leq t(u) \in [0,1]$ при $u \in [0,1]$ (здесь $\gamma_i(u) = (x^1(u), \dots, x^n(u), t(u))$). Значит, матрица $M(0)$ имеет блочный вид

$$M(0) = \begin{pmatrix} m(0) & * \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Из $(*)$ получаем, что блок $m(0) = \|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(P)\|^{-1}$ — матрица, обратная к матрице Якоби отображения f в точке P. Значит, $\det M(0) = a \det m(0)$, откуда $a > 0$ и $\operatorname{sgn}\det M(0) = \operatorname{sgn}\det m(0) = \varepsilon$.

Аналогично

$$M(1) = \begin{pmatrix} m(1) & * \\ 0 & a' \end{pmatrix}, \qquad m(1) = \|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(P')\|^{-1},$$

значит $\det M(1) = a' \det m(1)$, и $a' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}t(1) > 0$ (так как $t(1) = 1 \geq t(u)$ при $u \in [0,1]$) и $\operatorname{sgn}\det M(1) = \operatorname{sgn}\det m(1) = \varepsilon'$.

Но знак $\det M(t)$ постоянен в любой локальной системе координат, и не меняется при замене локальных координат (в рассматриваемом атласе). Значит, $\varepsilon = \varepsilon'$. Лемма доказана. □

Случай II: $\gamma_i(0) = (P, 0), \gamma_i(1) = (P', 0) \in M_1 \times \{0\}$ (т.е. оба конца кривой γ_i принадлежат нижнему основанию цилиндра $M_1 \times [0,1]$).

Лемма II. *Пусть $\varepsilon = \varepsilon_i = \pm 1$ — знак якобиана f в неособой точке P, и $\varepsilon' = \varepsilon'_i = \pm 1$ — знак якобиана f в неособой точке P'. Тогда $\varepsilon + \varepsilon' = 0$.*

Доказательство. Показывается аналогично лемме I. В отличие от случая I, здесь $a' < 0$, поэтому $\operatorname{sgn}\det M(1) = -\operatorname{sgn}\det m(1) = -\varepsilon'$, откуда $\varepsilon = -\varepsilon'$. □

Случай III: $\gamma_i(0) = (P, 1), \gamma_i(1) = (P', 1) \in M_1 \times \{1\}$ (т.е. оба конца кривой γ_i принадлежат верхнему основанию цилиндра $M_1 \times [0,1]$). Аналогично лемме II верна следующая

Лемма III. *Пусть $\varepsilon = \varepsilon_i = \pm 1$ — знак якобиана g в неособой точке P, и $\varepsilon' = \varepsilon'_i = \pm 1$ — знак якобиана g в неособой точке P'. Тогда $\varepsilon + \varepsilon' = 0$.* □

Шаг 4. В силу лемм II и III, имеем

$$\deg_Q f = \sum_{i:\gamma_i \in I} \varepsilon_i + \sum_{i:\gamma_i \in II} (\varepsilon_i + \varepsilon_i') \overset{\text{лем.II}}{=} \sum_{i:\gamma_i \in I} \varepsilon_i,$$

$$\deg_Q g = \sum_{i:\gamma_i \in I} \varepsilon_i' + \sum_{i:\gamma_i \in III} (\varepsilon_i + \varepsilon_i') \overset{\text{лем.III}}{=} \sum_{i:\gamma_i \in I} \varepsilon_i'.$$

Отсюда (в силу леммы I) эти суммы совпадают:

$$\deg_Q f = \sum_{i:\gamma_i \in I} \varepsilon_i \overset{\text{лем.I}}{=} \sum_{i:\gamma_i \in I} \varepsilon_i' = \deg_Q g.$$

Теорема об инвариантности степени полностью доказана. $\square$

Таким образом, мы можем определить степень $\deg f$ отображения f как степень $\deg_Q f$ этого отображения по отношению к произвольному регулярному значению Q. В силу теоремы 1 (а) о независимости степени от точки Q, это определение корректно.

13.4 Упражнения к лекции 13

Упражнение 13.1. Если $\dim M < \dim N$, то все точки отображения $F : M \to N$ — не регулярные.