12 Алгебраические свойства тензора кривизны. Тензор Риччи и скалярная кривизна

12.1 Алгебраические свойства и симметрии тензора кривизны Римана

Вместе с тензором кривизны $R = \left\{R^i_{q,kl}\right\}$ мы рассмотрим тензор кривизны с опущенным индексом $R_{iq,kl} = g_{i\alpha} R^\alpha_{q,kl}$.

Напомним, что мы предполагаем, что связность ∇, по которой был построен тензор кривизны R, является симметричной римановой связностью. Мы проанализируем сейчас симметрии тензора кривизны. Каждое утверждение в следующей теореме мы сформулируем двумя эквивалентными способами — координатно и инвариантно.

Теорема 3 (о симметриях тензора кривизны)**.** *1) Кососимметричность по индексам* k, l*:*
$R^i_{q,kl} = -R^i_{q,lk}$,
$R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$.

2) Тождество Якоби:
$R^i_{q,kl} +$ *(циклическая перестановка по* q, k, l*)* $= 0$*;*
$R(X,Y)Z +$ *(циклическая перестановка по* X, Y, Z*)* $= 0$.

3) Кососимметричность по индексам i, q*:*
$R_{iq,kl} = -R_{qi,kl}$*;*
$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle R(X,Y)W, Z\rangle$.

4) Парная симметричность:
$R_{iq,kl} = R_{kl,iq}$*;*
$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle$.

Доказательство. Мы дадим инвариантные (бескоординатные) доказательства этих свойств.

1) Первое свойство очевидно:

$$\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]} = -\left(\nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y - \nabla_{[Y,X]}\right).$$

2) Тождество Якоби проверяется непосредственным вычислением:

$$\begin{aligned}
&\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z + \\
&+\nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]} X + \\
&+\nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]} Y = \\
&= \nabla_X(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) - \nabla_{[Y,Z]} X + (\text{циклическая перестановка}) = \\
&= \nabla_X [Y,Z] - \nabla_{[Y,Z]} X + (\text{циклическая перестановка}) = \\
&= [X,[Y,Z]] + (\text{циклическая перестановка}).
\end{aligned}$$

Полученное выражение равно нулю в силу тождества Якоби для коммутатора (см. выше свойства коммутатора). Однако, можно на него даже не ссылаться. Можно сразу при доказательстве предполагать, что рассматриваемые поля X, Y, Z коммутируют.

Действительно, в силу тензорности достаточно проверять это тождество на базисных векторных полях $e_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, которые, как уже отмечалось, коммутируют.

3) Рассмотрим дифференциальный оператор $\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$.

Применяя этот оператор к векторному полю Z, мы получим значение тензора кривизны $R(X,Y)Z$. А что получится, если мы этот оператор применим к гладкой функции? В случае гладкой функции ковариантная производная вдоль векторного поля совпадает с обычной производной, поэтому

$$(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})f = X(Y(f)) - Y(X(f)) - [X,Y](f) = 0$$

(см. одно из определений коммутатора в терминах дифференциальных операторов). Используя естественные обозначения, это соотношение можно переписать так: $R(X,Y)f = 0$. Пользуясь этим наблюдением, продифференцируем с помощью оператора $R(X,Y)$ гладкую функцию $\langle Z,W\rangle$ и приравняем результат к нулю:

$$\begin{gathered}
\nabla_X\nabla_Y\langle Z,W\rangle - \nabla_Y\nabla_X\langle Z,W\rangle - \nabla_{[X,Y]}\langle Z,W\rangle = \\
= \nabla_X\langle\nabla_Y Z,W\rangle + \nabla_X\langle Z,\nabla_Y W\rangle - \\
-\nabla_Y\langle\nabla_X Z,W\rangle - \nabla_Y\langle Z,\nabla_X W\rangle - \\
-\langle\nabla_{[X,Y]}Z,W\rangle - \langle Z,\nabla_{[X,Y]}W\rangle = \\
\langle\nabla_X\nabla_Y Z,W\rangle + \langle\nabla_Y Z,\nabla_X W\rangle + \langle\nabla_X Z,\nabla_Y W\rangle + \langle Z,\nabla_X\nabla_Y W\rangle - \\
-\langle\nabla_Y\nabla_X Z,W\rangle - \langle\nabla_X Z,\nabla_Y W\rangle - \langle\nabla_Y Z,\nabla_X W\rangle - \langle Z,\nabla_Y\nabla_X W\rangle - \\
-\langle\nabla_{[X,Y]}Z,W\rangle - \langle Z,\nabla_{[X,Y]}W\rangle = \\
\langle\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z,W\rangle + \langle Z,\nabla_X\nabla_Y W - \nabla_Y\nabla_X W - \nabla_{[X,Y]}W\rangle = \\
= \langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle R(X,Y)W,Z\rangle = 0
\end{gathered}$$

(доказанное соотношение можно было бы записать короче: $R(X,Y)\langle Z,W\rangle = \langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle Z,R(X,Y)W\rangle$; это аналог правила Лейбница для оператора $R(X,Y)$).

4) Докажем, наконец, последнее соотношение. Оно следует на самом деле из трех предыдущих. Чтобы это увидеть, нужно взять специальную линейную кобинацию нескольких тождеств Якоби. Рассмотрим сначала выражение $\langle R(Y,Z)X,W\rangle$. Затем возьмем четыре выражения, получающиеся из него циклическими перестановками всех четырех аргументов и, наконец, для каждого из полученных выражений выпишем тождество Якоби (по первым трем аргументам) и сложим полученные четыре тождества. Имеем

$$\begin{gathered}
\langle R(Y,Z)X,W\rangle + \langle R(Z,X)Y,W\rangle + \langle R(X,Y)Z,W\rangle = 0, \\
\langle R(W,Y)Z,X\rangle + \langle R(Y,Z)W,X\rangle + \langle R(Z,W)Y,X\rangle = 0, \\
\langle R(X,W)Y,Z\rangle + \langle R(W,Y)X,Z\rangle + \langle R(Y,X)W,Z\rangle = 0, \\
\langle R(Z,X)W,Y\rangle + \langle R(X,W)Z,Y\rangle + \langle R(W,Z)X,Y\rangle = 0.
\end{gathered}$$

Суммируя эти выражения и используя уже доказанные свойства косой симметрии 1) и 3), легко убедиться, что все члены сокращаются, кроме стоящих на последнем месте. Они попарно совпадают, и мы в итоге получаем

$$\begin{gathered}
\langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle R(Z,W)Y,X\rangle + \langle R(Y,X)W,Z\rangle + \langle R(W,Z)X,Y\rangle = \\
= 2\langle R(X,Y)Z,W\rangle - 2\langle R(Z,W)X,Y\rangle = 0,
\end{gathered}$$

что и требовалось. Теорема доказана. □

Можно проверить все утверждения теоремы и с помощью явных формул для компонент тензора кривизны. Для тензора R с одним верхним индексом такая формула уже была получена (в определении 1 из лекции 11). Приведем также явную формулу для тензора кривизны с нижними индексами. Причем, пользуясь тем, что символы Кристоффеля могут быть выражены через риманову метрику, мы постараемся выразить компоненты тензора кривизны через риманову метрику непосредственно.

Предложение 1.

$$\boxed{R_{iq,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{li}}{\partial x^k \partial x^q} + \frac{\partial^2 g_{qk}}{\partial x^l \partial x^i} - \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x^l \partial x^q} - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^k \partial x^i}\right) + g_{\alpha\beta}\left(\Gamma^\alpha_{qk}\Gamma^\beta_{il} - \Gamma^\alpha_{ql}\Gamma^\beta_{ik}\right)}$$

Доказательство. Компоненты тензора кривизны могут быть вычислены по формуле

$$R_{iq,kl} = \langle R(e_k, e_l)e_q, e_i\rangle = \langle \nabla_{e_k}\nabla_{e_l}e_q, e_i\rangle - \langle \nabla_{e_l}\nabla_{e_k}e_q, e_i\rangle.$$

Вычислим отдельно первый член этого выражения (второй получается из него перестановкой индексов k и l). Имеем

$$\begin{aligned} &\langle \nabla_{e_k}\nabla_{e_l}e_q, e_i\rangle = \\ &= \nabla_{e_k}\langle \nabla_{e_l}e_q, e_i\rangle - \langle \nabla_{e_l}e_q, \nabla_{e_k}e_i\rangle = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma_{ql,i} - g_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{ql}\Gamma^\beta_{ik} = \end{aligned}$$

$$\text{\textit{применяем формулу }} \Gamma_{ql,i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{iq}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^q} - \frac{\partial g_{ql}}{\partial x^i}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{iq}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{li}}{\partial x^k \partial x^q} - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^k \partial x^i}\right) - g_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{ql}\Gamma^\beta_{ik}.$$

Теперь меняем индексы k и l местами и вычитаем из полученного выражения (т.е. фактически делаем альтернирование). Окончательно получаем

$$R_{iq,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{li}}{\partial x^k \partial x^q} + \frac{\partial^2 g_{qk}}{\partial x^l \partial x^i} - \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x^l \partial x^q} - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^k \partial x^i}\right) + g_{\alpha\beta}\left(\Gamma^\alpha_{qk}\Gamma^\beta_{il} - \Gamma^\alpha_{ql}\Gamma^\beta_{ik}\right),$$

что и требовалось. □

Легко видеть, что из этой явной формулы сразу следуют свойства (1)—(4) из доказанной выше теоремы 2 о симметриях тензора кривизны.

12.2 Тензор Риччи и скалярная кривизна

Определение 1. *Тензором Риччи* называется свертка тензора кривизны вида

$$R_{ql} = R^i_{q,il}.$$

Это координатное определение равносильно следующему инвариантному: *тензором Риччи* называется билинейная форма $R(Z, Y) = \mathrm{Tr}\{X \mapsto R(X, Y)Z\}$.

Определение 2. *Скалярной кривизной* многообразия называется функция (тензор типа $(0,0)$), являющаяся полной сверткой тензора Риччи

$$R = g^{ql}R_{ql}.$$

Можно определить скалярную кривизну непосредственно через тензор кривизны:

$$R = g^{ik}g^{ql}R_{iq,kl}.$$

12.3 Геометрический смысл скалярной кривизны в случае двумерной поверхности в трехмерном пространстве. Теорема Гаусса

В случае двумерного многообразия тензор кривизны $R_{iq,kl}$ имеет только одну существенную компоненту $R_{12,12}$. Все остальные либо выражаются через нее, либо равны нулю. Точнее

$$R_{12,12} = R_{21,21} = -R_{12,21} = -R_{21,12},$$

а все остальные компоненты равны нулю. Это обстоятельство позволяет выписать простую окончательную формулу для скалярной кривизны (эту формулу, кстати, можно использовать и для вычисления компонент тензора кривизны):

$$\begin{aligned} R &= g^{ik}g^{ql}R_{iq,kl} = \\ &= R_{12,12}g^{11}g^{22} + R_{21,21}g^{22}g^{11} + R_{12,21}g^{12}g^{21} + R_{21,12}g^{21}g^{12} = \\ &= 2R_{12,12}(g^{11}g^{22} - g^{12}g^{21}) = \frac{2R_{12,12}}{\det G}, \end{aligned}$$

где G — матрица римановой метрики. Итак, мы доказали следующее утверждение.

Предложение 2. *В случае двумерного многообразия имеет место формула*

$$R = \frac{2R_{12,12}}{\det G}. \qquad \square$$

Теперь мы докажем еще одно утверждение, дающее геометрическую интерпретацию скалярной кривизны в случае двумерных поверхностей в трехмерном пространстве.

Теорема Гаусса. *Пусть $V^2 \subset \mathbb{R}^3$ — двумерная поверхность в трехмерном евклидовом пространстве. Тогда имеет место формула*

$$R = 2K,$$

где R — скалярная кривизна, а K — гауссова кривизна поверхности. И, следовательно, гауссова кривизна полностью определяется первой квадратичной формой (т.е. римановой метрикой) этой поверхности. В частности, гауссова кривизна не меняется при изометриях.

Доказательство. Напомним, что гауссова кривизна поверхности определяется по формуле

$$K = \frac{\det Q}{\det G},$$

где G — первая квадратичная форма, Q — вторая квадратичная форма поверхности.

Для доказательства утверждения выберем специальную (удобную для вычислений) локальную систему координат на поверхности. Заметим, что формула, которую нам требуется доказать, не зависит от выбора системы координат. Поэтому вычисления можно проводить в той же системе координат, которую мы сами считаем подходящей.

Шаг 1. Без ограничения общности (сделав, если требуется, переход к новой системе декартовых координат в пространстве) мы можем считать, что в окрестности рассматриваемой точки $P \in V^2$ поверхность задана в виде графика $V = \{z = f(x, y)\}$, причем касательная плоскость в фиксированной точке P совпадает с плоскостью Oxy. Это означает, что

$$f_x = f_y = 0 \quad \text{в точке } P. \tag{1}$$

В качестве локальных координат в точке P мы возьмем координаты (x, y), как это и делается обычно в случае графика. При использовании тензорных обозначений мы полагаем $x^1 = x$, $x^2 = y$.

Вычислим значения метрического тензора и символов Кристоффеля в этой системе координат в *данной фиксированной точке* P. Параметризуем поверхность в виде $\vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Тогда канонический базис $\vec{r}_x = (1, 0, f_x)$, $\vec{r}_y = (0, 1, f_y)$, первая квадратичная форма $g_{ij} = \langle \vec{r}_{x^i}, \vec{r}_{x^j} \rangle$ равна

$$g_{ij} = \delta_{ij} + f_{x^i} f_{x^j}. \tag{2}$$

Отсюда

$$g_{ij} = \delta_{ij} \quad \text{в точке } P. \tag{3}$$

Кроме того, легко видеть, что

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0 \quad \text{в точке } P.$$

Поэтому

$$\Gamma^k_{ij} = 0 \quad \text{в точке } P. \tag{4}$$

Отметим, что равенство нулю символов Кристоффеля имеет место только в самой точке P, а не в ее окрестности.

Шаг 2. Теперь мы можем применить полученные выше формулы для компонент тензора кривизны и скалярной кривизны. Получаем из (4) и предложения 1

$$\begin{aligned} R_{12,12}(P) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{21}}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{\partial^2 g_{21}}{\partial x^2 \partial x^1} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1 \partial x^1}\right) \overset{(2),\,(1)}{=} \\ &= \frac{1}{2}(2(f_{x^1x^1} f_{x^2x^2} + f^2_{x^1x^2}) - 4 f_{x^1x^2} f_{x^1x^2}) = \\ &= f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2. \end{aligned}$$

Далее по предложению 2 лекции 12

$$R = \frac{2R_{12,12}}{\det G}.$$

Поэтому в точке P ввиду (3) имеем

$$R(P) = 2(f_{xx} f_{yy} - f^2_{xy}).$$

Шаг 3. Вспомним, наконец, формулу для гауссовой кривизны. В случае, когда поверхность задана в виде графика, она имеет вид

$$K = \frac{\det Q}{\det G} = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}. \tag{5}$$

Действительно: из (2) имеем $\det G = (1+f_x^2)(1+f_y^2)-(f_x f_y)^2 = 1+f_x^2+f_y^2$. Далее $\vec{r}_{x^i x^j} = (0,0,f_{x^i x^j})$, вектор единичной нормали к поверхности $\vec{n} = \frac{[\vec{r}_x,\vec{r}_y]}{|[\vec{r}_x,\vec{r}_y]|} = \frac{(-f_x,-f_y,1)}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$, поэтому вторая квадратичная форма $q_{ij} = \langle \vec{r}_{x^i x^j}, \vec{n}\rangle = \frac{f_{x^i x^j}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$, откуда $\det Q = \frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{1+f_x^2+f_y^2}$.

Тогда в точке P имеем, ввиду (1) и (5),

$$K(P) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2.$$

Шаг 4. Таким образом, из шагов 2 и 3 имеем $R(P) = 2K(P)$. В силу произвольности точки P теорема доказана. □

Комментарий. Для средней кривизны H теорема неверна (например, $\mathbb{R}^2$ и цилиндр локально изометричны, но средняя кривизна у них разная). На этом основании гауссова кривизна является внутренним инвариантом поверхности, а средняя — внешним (может меняться при изгибаниях — изометриях).

Из теоремы Гаусса и теоремы 1 лекции 11 получаем

Следствие. *Если на поверхности $V^2 \subset \mathbb{R}^3$ гауссова кривизна K отлична от нуля, то на этой поверхности нельзя ввести локально евклидовы координаты. Наоборот, если $K \equiv 0$, то в окрестности каждой точки такие координаты существуют, и индуцированная риманова метрика является локально евклидовой.*