

11 Тензор кривизны Римана

11.1 Координатное определение тензора кривизны

Рассмотрим риманово многообразие $(M, \{g_{ij}\})$ с симметричной римановой связностью ∇ .

Начнем с простейшего примера. Пусть \mathbb{R}^n — евклидово пространство с римановой метрикой $\{\delta_{ij}\}$. Тогда для любого векторного поля ξ мы имеем

$$\nabla_i \nabla_j \xi = \nabla_j \nabla_i \xi.$$

Действительно, ковариантное дифференцирование совпадает с обычным частным дифференцированием и поэтому не зависит от порядка дифференцирования.

В случае произвольного риманова многообразия это условие, вообще говоря, не выполняется, что в определенном смысле свидетельствует об искривленности многообразия. Посмотрим, насколько ковариантное дифференцирование зависит от порядка. Пусть $\{T^q\}$ — векторное поле. Подсчитаем выражение

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) T^i.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \nabla_l T^i &= \frac{\partial T^i}{\partial x^l} + \Gamma_{ql}^i T^q, \\ \nabla_k \nabla_l T^i &= \nabla_k \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^l} + \Gamma_{ql}^i T^q \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^l} + \Gamma_{ql}^i T^q \right) + \left(\frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{pk}^p \Gamma_{ql}^i \right) T^q - \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^s} + \Gamma_{qs}^i T^q \right) \Gamma_{lk}^s = \\ &= \frac{\partial^2 T^i}{\partial x^k \partial x^l} + T^q \frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{ql}^i \frac{\partial T^q}{\partial x^k} + (\dots) - (\dots). \end{aligned}$$

Поменяем теперь индексы k и l местами и вычтем из полученного выражения. Некоторые члены при этом сократятся, и мы выпишем окончательный результат:

$$\begin{aligned} (\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) T^i &= \\ &= \left(\frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{qk}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{ql}^p \Gamma_{pk}^i - \Gamma_{qk}^p \Gamma_{pl}^i \right) T^q - \\ &- \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^s} + \Gamma_{qs}^i T^q \right) (\Gamma_{lk}^s - \Gamma_{kl}^s) = R_{q,kl}^i T^q - \Omega_{kl}^s \nabla_s T^i. \end{aligned}$$

Мы провели вычисления в общем случае (для произвольной связности). На самом деле мы рассматриваем *симметрическую* риманову связность, поэтому тензор кручения Ω_{kl}^s обращается в нуль и второе слагаемое отсутствует. В результате мы имеем

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) T^i = R_{q,kl}^i T^q,$$

где через $R_{q,kl}^i$ мы обозначили выражение

$$R_{q,kl}^i := \frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{qk}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{ql}^p \Gamma_{pk}^i - \Gamma_{qk}^p \Gamma_{pl}^i.$$

Предложение 2. Набор функций $R_{q,kl}^i$ образует тензорное поле типа $(1, 3)$.

Доказательство. Доказательство использует следующий общий факт из теории тензоров (здесь не важно количество индексов и т.п.), см. задачу 2 ниже.

Задача 11.1. Пусть для любого векторного поля T^q набор чисел (функций) $R_{q,kl}^i$ обладает следующим свойством: новый набор чисел (функций) вида $R_{q,kl}^i T^q$ является тензором (тензорным полем). Тогда $R_{q,kl}^i$ — тензор (тензорное поле).

В нашем случае условие из задачи 11.1 выполняется, так как ковариантное дифференцирование переводит тензорные поля в тензорные поля. \square

Определение 1. $R_{q,kl}^i$ — тензор кривизны Римана (на римановом многообразии $(M, \{g_{ij}\})$).

Отметим, что тензор кривизны Римана однозначно вычисляется через риманову метрику g_{ij} (т.е. является функцией от метрики). В частности, если метрика является локально евклидовой, то тензор кривизны обращается в нуль. (Действительно, если $g_{ij} = \delta_{ij}$, то символы Кристоффеля обращаются в нуль, далее смотрите на явную формулу для компонент тензора кривизны). Оказывается, верно и обратное утверждение.

Теорема 1. Риманова метрика g_{ij} является локально евклидовой тогда и только тогда, когда тензор кривизны $R_{q,kl}^i$ тождественно равен нулю.

Доказательство. В одну сторону это утверждение уже доказали. Обратное утверждение о локальной евклидовости метрики с нулевым тензором кривизны нетривиально. Мы оставляем его без доказательства. \square

Комментарий. Напомним, что риманова метрика называется *локально евклидовой*, если в некоторой окрестности каждой точки многообразия найдется такая система координат, в которой $g_{ij} = \delta_{ij}$. Как проверить, существует ли такая система координат? Исходная система координат, в которой изначально задана метрика, может быть выбрана очень “неудачно”, так что ее коэффициенты будут очень сложными. И придумать замену координат, приводящую метрику к евклидову виду, (или доказать невозможность такого приведения) довольно сложно. Здесь как раз нам приходит на помощь тензор кривизны. С его помощью мы сразу можем ответить на вопрос о локальной евклидовости метрики. Достаточно подсчитать его и посмотреть — ноль или нет. При этом важным является то обстоятельство, что подсчет мы можем проводить в *любой* системе координат (не обязательно евклидовой), поскольку факт обращения тензора в нуль не зависит от выбора системы координат.

11.2 Коммутатор векторных полей

Прежде чем дать инвариантное определение тензора кривизны, мы введем и обсудим важное понятие коммутатора векторных полей.

Пусть ∇ — симметричная связность.

Определение. Коммутатором векторных полей ξ и η называется векторное поле

$$[\xi, \eta] = \nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi.$$

Лемма 3. На самом деле коммутатор векторных полей не зависит от выбора симметричной связности ∇ .

Доказательство. Проведем явный подсчет.

$$[\xi, \eta]^i = \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} + \Gamma_{kj}^i \eta^k \xi^j - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} - \Gamma_{kj}^i \xi^k \eta^j =$$

$$\boxed{\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}}$$

Члены, содержащие символы Кристоффеля, сократились в силу их симметрии по нижним индексам k, j . Коммутатор векторных полей, таким образом, от связности не зависит и формулу в рамке можно считать его координатным определением. \square

Можно дать еще одно естественное определение коммутатора векторных полей, используя представление векторных полей как операторов дифференцирования. Напомним, что каждое векторное поле ξ можно понимать как оператор дифференцирования, действующий на гладкие функции по формуле $\xi(f) = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$ (что то же самое = $\nabla_\xi f$). Тогда коммутатор $[\xi, \eta]$ — это оператор дифференцирования, действующий на функции так:

$$\boxed{[\xi, \eta](f) = \xi(\eta(f)) - \eta(\xi(f))}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \xi(\eta(f)) - \eta(\xi(f)) &= \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\eta^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\xi^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = \\ &= \left(\xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f}{\partial x^j} + \xi^i \eta^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \eta^i \xi^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \\ &= \left(\xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f}{\partial x^j} = [\xi, \eta](f). \end{aligned}$$

Предложение 3 (Основные свойства коммутатора). 1) *кососимметричность*

$$[\xi, \eta] = -[\eta, \xi];$$

2) *линейность над \mathbb{R}* ;

3) *правило Лейбница*

$$\begin{aligned} [\xi, f\eta] &= f[\xi, \eta] + \xi(f)\eta, \\ [f\xi, \eta] &= f[\xi, \eta] - \eta(f)\xi; \end{aligned}$$

4) *тождество Якоби*

$$[[\xi, \eta], \zeta] + [[\eta, \zeta], \xi] + [[\zeta, \xi], \eta] = 0;$$

5) *для любой локальной системы координат (x^1, \dots, x^n) базисные векторные поля $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ и $e_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$ коммутируют, т.е.*

$$[e_i, e_j] = 0.$$

Доказательство. Первые два утверждения очевидны. Третье и четвертое легко следуют из последнего определения коммутатора как оператора дифференцирования. (*Обязательно проверить это самостоятельно*). Пятое свойство тоже очевидно, поскольку в явной формуле для коммутатора (в локальных координатах) участвуют частные производные координат векторных полей. В данном случае они обращаются в нуль, поскольку координаты базисных векторных полей постоянны (либо 0, либо 1). \square

11.3 Инвариантное определение тензора кривизны

Вернемся теперь к тензору кривизны $R = \{R_{q,kl}^i\}$. Его можно рассмотреть как полилинейное отображение, которое трем векторным полям X, Y, Z ставит в соответствие новое векторное поле $R(X, Y)Z$ со следующими координатами:

$$(R(X, Y)Z)^i = R_{q,kl}^i Z^q X^k Y^l.$$

Что это за векторное поле? Как можно определить его бескоординатным способом?

Теорема 2 (инвариантное определение тензора кривизны).

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

Доказательство. Обозначим правую часть этого равенства через $\tilde{R}(X, Y)Z$. Покажем, что \tilde{R} , рассматриваемое как отображение, сопоставляющее трем векторным полям новое векторное поле, является полилинейным над кольцом гладких функций. Другими словами, покажем, что если $X = X^k e_k$, $Y = Y^l e_l$, $Z = Z^q e_q$, то

$$\tilde{R}(X, Y)Z = X^k Y^l Z^q \tilde{R}(e_k, e_l)e_q,$$

где $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ — базисные векторные поля, отвечающие некоторой локальной системе координат (x^1, \dots, x^n) . Это утверждение будет, в частности, означать, что теорему достаточно доказать только для базисных векторных полей.

Поскольку полилинейность над \mathbb{R} имеется, то достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 1. Пусть f — произвольная гладкая функция. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{R}(fX, Y)Z &= f\tilde{R}(X, Y)Z, \\ \tilde{R}(X, fY)Z &= f\tilde{R}(X, Y)Z, \\ \tilde{R}(X, Y)fZ &= f\tilde{R}(X, Y)Z. \end{aligned}$$

Доказательство. 1)

$$\begin{aligned} \tilde{R}(fX, Y)Z &= \nabla_{fX} \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_{[fX, Y]} Z = \\ &\text{пользуемся очевидным соотношением } \nabla_{fX} = f\nabla_X \\ &\text{и правилом Лейбница для коммутатора} \\ &= f\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y (f\nabla_X Z) - \nabla_{f[X, Y] - Y(f)X} Z = \end{aligned}$$

пользуемся правилом Лейбница для ковариантного дифференцирования
и линейностью ∇_ξ по ξ

$$= f\nabla_X\nabla_Y Z - f\nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_Y(f)\nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]}Z + Y(f)\nabla_X Z =$$

пользуемся тем, что $\nabla_Y f = Y(f)$, поскольку для
функций обычная и ковариантная производные совпадают

$$= f\nabla_X\nabla_Y Z - f\nabla_Y\nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]}Z = f\tilde{R}(X, Y)Z,$$

что и требовалось.

2) Для второго члена Y доказательство аналогично.

3) Докажем последнее соотношение. Мы будем использовать те же самые соображения.

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)fZ &= \nabla_X\nabla_Y fZ - \nabla_Y\nabla_X fZ - \nabla_{[X,Y]}fZ = \\ &= \nabla_X(f\nabla_Y Z) + \nabla_X((\nabla_Y f)Z) - \\ &\quad - \nabla_Y(f\nabla_X Z) - \nabla_Y((\nabla_X f)Z) - \\ &\quad - f\nabla_{[X,Y]}Z - (\nabla_{[X,Y]}f)Z = \\ &= f\nabla_X\nabla_Y Z + (\nabla_X f)\nabla_Y Z + (\nabla_X\nabla_Y f)Z + (\nabla_Y f)\nabla_X Z - \\ &\quad - f\nabla_Y\nabla_X Z - (\nabla_Y f)\nabla_X Z - (\nabla_Y\nabla_X f)Z - (\nabla_X f)\nabla_Y Z - \\ &\quad - f\nabla_{[X,Y]}Z - (\nabla_{[X,Y]}f)Z = \\ &\quad \text{сгруппируем слагаемые} \\ &= f(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z) + ((\nabla_X f)\nabla_Y Z - (\nabla_X f)\nabla_Y Z) + \\ &\quad + ((\nabla_Y f)\nabla_X Z - (\nabla_Y f)\nabla_X Z) + (\nabla_X\nabla_Y f - \nabla_Y\nabla_X f - \nabla_{[X,Y]}f)Z = \\ &\quad \text{остается только первая скобка} \\ &= f(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z) = f\tilde{R}(X, Y)Z. \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Вернемся к доказательству теоремы. Нам остается проверить равенство

$$\tilde{R}(e_k, e_l)e_q = R_{q,kl}^i e_i = R(e_k, e_l)e_q.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{R}(e_k, e_l)e_q &= \nabla_{e_k}\nabla_{e_l}e_q - \nabla_{e_l}\nabla_{e_k}e_q - \nabla_{[e_k, e_l]}e_q = \\ &= \nabla_{e_k}(\Gamma_{ql}^i e_i) - (\text{перестановка } k \text{ и } l) = \\ &= \frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial x^k} e_i + \Gamma_{ql}^i \nabla_{e_k} e_i - (\text{перестановка } k \text{ и } l) = \\ &= \frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial x^k} e_i + \Gamma_{ql}^i \Gamma_{ik}^p e_p - (\text{перестановка } k \text{ и } l) = \end{aligned}$$

во втором слагаемом индексы суммирования p и i поменяем местами

$$\left(\frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{ql}^p \Gamma_{pk}^i - (\text{перестановка } k \text{ и } l) \right) e_i = R_{q,kl}^i e_i = R(e_k, e_l)e_q.$$

Таким образом, получаем

$$\tilde{R}(X, Y)Z = X^k Y^l Z^q \tilde{R}(e_k, e_l)e_q = X^k Y^l Z^q \tilde{R}(e_k, e_l)e_q = R(X, Y)Z,$$

что и требовалось. Теорема доказана. \square

Задача 11.2. Хорошо известно, что полилинейное (над \mathbb{R}) отображение, сопоставляющее набору из k векторов некоторый новый вектор, может рассматриваться как тензор типа $(1, k)$. Вопрос: в каком случае полилинейное (над \mathbb{R}) отображение, сопоставляющее набору из k векторных полей (а не векторов) некоторое новое векторное поле, может рассматриваться как тензорное поле? Показать, что полилинейности над \mathbb{R} для этого недостаточно. Нужно требовать, чтобы это отображение было полилинейным над кольцом гладких функций на многообразии. Например, отображение $(\xi, \eta) \rightarrow \nabla_\xi \eta$ тензором не является, поскольку $\nabla_\xi(f\eta) \neq f\nabla_\xi \eta$, если f — гладкая функция, отличная от константы (это отображение переводит тензоры в тензоры, но само тензором не является).

11.4 Упражнения к лекции 11

Упражнение 11.1. Пусть для любого векторного поля T^q набор чисел (функций) $R_{q,kl}^i$ обладает следующим свойством: новый набор чисел (функций) вида $R_{q,kl}^i T^q$ является тензором (тензорным полем). Тогда $R_{q,kl}^i$ — тензор (тензорное поле).

Упражнение 11.2. Хорошо известно, что полилинейное (над \mathbb{R}) отображение, сопоставляющее набору из k векторов некоторый новый вектор, может рассматриваться как тензор типа $(1, k)$. Вопрос: в каком случае полилинейное (над \mathbb{R}) отображение, сопоставляющее набору из k векторных полей (а не векторов) некоторое новое векторное поле, может рассматриваться как тензорное поле? Показать, что полилинейности над \mathbb{R} для этого недостаточно. Нужно требовать, чтобы это отображение было полилинейным над кольцом гладких функций на многообразии. Например, отображение $(\xi, \eta) \rightarrow \nabla_\xi \eta$ тензором не является, поскольку $\nabla_\xi(f\eta) \neq f\nabla_\xi \eta$, если f — гладкая функция, отличная от константы (это отображение переводит тензоры в тензоры, но само тензором не является).