10 Геодезические

Попробуем ответить на следующий вопрос: какие кривые на поверхности (на многообразии) являются естественными аналогами прямых в евклидовом пространстве? Прямые характеризуются тем, что их кривизна равна нулю или, что то же самое, это те кривые, по которым точка движется без ускорения. С точки зрения механики прямые — это траектории точки, движущейся свободно, когда на нее не действуют никакие внешние силы. Что такое ускорение на параметризованной кривой? Это производная вдоль кривой вектора ее скорости. В случае многообразия в качестве производной, как мы знаем, следует брать ковариантную производную. Таким образом, мы можем определить аналог прямых на многообразии так: это такие параметризованные кривые, для которых ковариантная производная вектора скорости кривой вдоль этой же самой кривой (т.е. “ковариантное ускорение”) равна нулю. Дадим формальное определение.

Определение. Гладкая параметризованная кривая $\gamma(t)$ на многообразии M с аффинной связностью ∇ называется *геодезической*, если

$$\nabla_\gamma \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = 0,$$

т.е. вектор скорости $\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$ параллелен вдоль кривой γ.

Выпишем уравнение геодезической в локальных координатах $x^1, \dots, x^n$. Пусть $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ — параметрическое задание кривой. Тогда уравнение (точнее, система из n уравнений) запишется так:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = 0}$$

Отметим сразу же, что геодезические на многообразии зависят от выбора аффинной связности (или римановой метрики, если связность риманова) на нем.

10.1 Простейшие свойства геодезических

1. Уравнения геодезической — это система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Поэтому для ответа на вопрос о существовании геодезических мы можем воспользоваться теоремой существования и единственности из курса дифференциальных уравнений. Пусть $P \in M$ — точка на многообразии и $\xi \in T_P M$ — касательный вектор в этой точке. Тогда на некотором интервале $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ существует и притом единственная геодезическая $\gamma(t)$ такая, что $\gamma(0) = P$, $\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(0) = \xi$. Таким образом, через каждую точку многообразия и в каждом направлении проходит единственная геодезическая.

2. Не всегда решение уравнения геодезических может быть определено при $t \in (-\infty, +\infty)$. Т.е. не всегда геодезическая может быть продолжена по параметру t до бесконечности. Например, если мы рассмотрим на плоскости риманову метрику $\mathrm{d}s^2 = \dfrac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}$, то геодезическая, проходящая через начало координат, не может быть продолжена до бесконечности (в смысле параметра t), поскольку она за конечное время уходит на бесконечность (в смысле плоскости).

Задача 10.1. Покажите это, используя тот факт, что выписанная риманова метрика является на самом деле римановой метрикой на сфере без северного полюса после стереографической проекции.

Многообразие M^n с аффинной связностью ∇ называется *(геодезически) полным*, если любая геодезическая на нем может быть продолжена по параметру сколь угодно долго (т.е. от минус до плюс бесконечности).

Теорема 1 (без доказательства)**.** *Любое замкнутое (т.е. компактное без края) многообразие M^n с аффинной связностью ∇ на нем является полным.*

Теорема 2 (теорема Хопфа; без доказательства)**.** *Пусть M^n — полное связное многообразие с аффинной связностью ∇. Тогда любые две точки на нем можно соединить хотя бы одной геодезической.*

Задача 10.2. Покажите, что на неполном многообразии это не всегда удается сделать. Указание: рассмотрите евклидову плоскость с выколотой точкой ($\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ неполное, теорема Хопфа не выполняется).

3. Зависимость от параметризации. Параметр на геодезической нельзя выбирать произвольно в том смысле, что после перепараметризации геодезическая может перестать удовлетворять уравнению геодезической. Посмотрим, какие замены параметра являются допустимыми. Пусть $\gamma(t)$ — геодезическая, $t = t(\tau)$ — замена параметра на ней и $\tilde{\gamma}(\tau) = \gamma(t(\tau))$. Тогда

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\tau} = \left(\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\tau^2}.$$

Для того, чтобы это выражение было равно нулю (т.е. кривая после перепараметризации осталась геодезической), необходимо и достаточно, чтобы $\dfrac{\mathrm{d}^2\tau}{\mathrm{d}t^2} = 0$. Другими словами, допустимыми заменами параметра на геодезической являются линейные замены и только они.

4. Если две геодезические касаются в некоторой точке, то геометрически (как множества) они совпадают, т.е. отличаются друг от друга лишь перепараметризацией. Это следует из теоремы единственности и предыдущего утверждения.

Для римановой связности:

5. Пусть $\gamma(t)$ — геодезическая, а связность является римановой, тогда $\left|\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right| = \mathrm{const}$. Это означает, в частности, что параметр на геодезической пропорционален натуральному. Это утверждение сразу следует из двух фактов: 1) вектор скорости геодезической является параллельным вдоль нее, 2) при параллельном переносе в случае римановой связности сохраняются длины векторов.

6. Аналогичным образом доказывается утверждение о параллельном переносе вдоль геодезической. Пусть $\gamma(t)$ — геодезическая, а $\xi(t)$ — векторное поле, параллельное вдоль γ, тогда угол между $\xi(t)$ и $\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$ постоянный (не зависит от t). Другими словами, при параллельном переносе вектора вдоль геодезической сохраняется угол между геодезической и переносимым вектором. Это утверждение дает простой способ параллельного перенесения вектора вдоль геодезической на двумерной поверхности: по отношению к геодезической вектор не поворачивается.

7. Геометрический смысл геодезических на двумерной поверхности в трехмерном пространстве. В этом случае мы можем воспользоваться геометрическим смыслом параллельного переноса на поверхности (см. лекцию 9). Пусть $V^2 \subset \mathbb{R}^3$ — поверхность, $\gamma(s)$ — кривая на ней с натуральным параметром (мы сразу взяли натуральный параметр, поскольку он автоматически должен быть пропорциональным натуральному). Уравнение геодезической может быть записано в виде

$$0 = \nabla_\gamma \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s} = \mathrm{pr}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}\right) = \mathrm{pr}\left(\frac{\mathrm{d}^2\gamma}{\mathrm{d}s^2}\right).$$

Таким образом, уравнение геодезической может быть переформулировано так: вектор $\dfrac{\mathrm{d}^2\gamma}{\mathrm{d}s^2}$ в каждой точке кривой должен быть перпендикулярен поверхности. Иногда это условие формулируют следующим образом. Кривая является геодезической, если главная нормаль к кривой совпадает с нормалью к поверхности. Здесь следует проявлять некоторую осторожность, поскольку нормаль к поверхности может быть определена двумя способами, а главная нормаль к кривой может быть вообще не определена, поэтому строгое определение таково.

Теорема 3 (геометрический смысл геодезических на двумерной поверхности в трехмерном пространстве)**.** *Гладкая кривая $\gamma(s)$ на поверхности $V^2 \subset \mathbb{R}^3$ является геодезической тогда и только тогда, когда ее вектор ускорения $\dfrac{\mathrm{d}^2\gamma}{\mathrm{d}s^2}$ перпендикулярен поверхности.*

В частности, любая прямая, лежащая на поверхности, является геодезической.

Из этого утверждения, кстати, вытекает механическая интерпретация геодезических. Пусть точка движется по поверхности по инерции при отсутствии внешних сил (на точку действует только сила связи, заставляющая точку оставаться на поверхности). Тогда точка движется по геодезической. Действительно, согласно второму закону Ньютона ускорение пропорционально силе, а сила связи перпендикулярна поверхности.

8. Из только что данного утверждения сразу вытекает следующий факт. Если две поверхности касаются вдоль кривой γ, и γ является геодезической на одной из них, то она автоматически будет геодезической и на другой.

9. Если связность риманова, то при изометриях геодезические переходят в геодезические (напомним, изометрия — это диффеоморфизм, сохраняющий длины кривых, см. лекцию 9). Это следует из того, что при изометриях риманова метрика сохраняется, а уравнения геодезических однозначно определяются римановой метрикой (через которую выражаются символы Кристоффеля, участвующие в уравнении).

10. Геодезические как кратчайшие. Нашей ближайшей целью является интерпретация геодезических на произвольном римановом многообразии как кратчайших. Это еще одно свойство, которое является общим для геодезических и прямых в евклидовом пространстве (и на плоскости Лобачевского; вспомните из прошлого семестра, что прямые на плоскости Лобачевского действительно являются кратчайшими, см. пример 1 ниже).

Пример 1. Пусть P, Q — две точки на вертикальной прямой на плоскости Лобачевского в модели верхней полуплоскости. Покажите, что отрезок вертикальной прямой между точкам и P и Q короче любой другой кривой на плоскости Лобачевского с концами в этих же точках.

Доказательство. Рассмотрим модель плоскости Лобачевского на верхней полуплоскости с римановой метрикой $\mathrm{d}s^2 = \dfrac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{y^2}$. Пусть координаты точек P и Q имеют вид $P(x_0, y_0)$ и $Q(x_0, y_1)$, где $0 < y_0 < y_1$. Пусть $\gamma_0 = \gamma_0(y) = (x_0, y)$, $y \in [y_0, y_1]$ — отрезок вертикальной прямой между точками P и Q. Его длина

$$\ell(\gamma_0) = \int\limits_{y_0}^{y_1} \gamma_0^*(\mathrm{d}s) = \int\limits_{y_0}^{y_1} \frac{\sqrt{0+1}}{y}\, \mathrm{d}y = \ln \frac{y_1}{y_0}.$$

Пусть $\gamma = \gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ — произвольная кривая с концами в точках P и Q. Имеем $x(a) = x(b) = x_0$, $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$. Оценим ее длину:

$$\ell(\gamma) = \int\limits_a^b \gamma^*(\mathrm{d}s) = \int\limits_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)}\, \mathrm{d}t \geq \int\limits_a^b \frac{\sqrt{0 + y'(t)^2}}{y(t)}\, \mathrm{d}t \geq \left| \int\limits_a^b \frac{y'(t)}{y(t)}\, \mathrm{d}t \right| = \ln \frac{y(b)}{y(a)} = \ln \frac{y_1}{y_0}.$$

Таким образом, $\ell(\gamma) \geq \ln \frac{y_1}{y_0} = \ell(\gamma_0)$, что и требовалось. $\square$

Прежде чем переходить к произвольному риманову многообразию, рассмотрим случай двумерной сферы. Легко видеть, что для любых двух точек на сфере всегда существует кратчайшая кривая, их соединяющая, и эта кривая является дугой соответствующего экватора (т.е. кусочком геодезической, см. задачу 3 и пример (3) из §10.2 ниже). Обратное утверждение не верно: не любая геодезическая, соединяющая пару точек, является кратчайшей. Действительно, две точки делят проходящий через них экватор на две дуги. Одна из них кратчайшая, а другая — нет, хотя обе они являются геодезическими.

Задача 10.3. Пусть P, Q — две точки на меридиане сферы, не являющиеся ее полюсами. Докажите, что дуга меридиана между точками P и Q короче любой другой кривой на сфере с концами в этих же точках. Указание: проведите вычисления аналогично примеру 1 выше, рассмотрев на сфере сферические координаты. Рассмотрите сначала случай, когда кривая γ не проходит через полюса сферы, а затем — общий случай.

Это наблюдение носит общий характер. Любая кратчайшая всегда является геодезической, но не любая геодезическая является кратчайшей. Однако она всегда является локально кратчайшей. То есть, если мы рассмотрим две достаточно близкие точки на произвольной геодезической, то кусочек геодезической, заключенный между ними, будет кратчайшей. К формулировке этих фактов мы сейчас переходим.

Теорема 4 (без доказательства). *Для каждой точки P на римановом многообразии M существует окрестность U и число $\varepsilon > 0$ такие, что*

- *каждые две точки из U соединяет ровно одна кривая длины меньше ε;*
- *эта кривая является геодезической, целиком лежит в этой окрестности и гладко зависит от своих концов.*

Это утверждение означает, что локально геодезические являются кратчайшими. Другими словами, если мы рассмотрим произвольную геодезическую γ и две достаточно близкие точки p и q на ней, то γ будет кратчайшей кривой, соединяющей эти точки, и притом единственной.

В частности, из этого утверждения следует, что если какая-либо кривая на гладком многообразии, соединяющая пару точек P и Q (не обязательно близко расположенных), является кратчайшей, то эта кривая обязательно является геодезической. Действительно, если кривая является кратчайшей, то для любой пары точек p и q на ней, расположенных близко друг к другу, участок кривой γ, заключенный между ними, будет также кратчайшим. (В самом деле, если бы его можно было укоротить, то мы смогли бы укоротить и всю кривую). Но, как мы показали, для близких точек кратчайшая кривая определена однозначно и является геодезической. Таким образом, участок кривой γ между точками p и q является геодезической. Ясно, что, будучи геодезической локально на любом маленьком участке, γ будет геодезической и вся целиком.

В каком случае для двух фиксированных точек на связном многообразии существует соединяющая их кратчайшая? Другими словами, когда на множестве всех кусочно-гладких кривых, соединяющих эти точки, достигается минимум функционала длины? Оказывается, имеет место следующая теорема.

Теорема 5 (без доказательства). *На полном римановом многообразии любые две точки можно соединить кратчайшей геодезической.*

Задача 10.4. Покажите, что на неполном многообразии это не всегда удается сделать. Приведите пример, в котором любые две точки можно соединить геодезической (но она необязательно будет кратчайшей). Указание: рассмотрите сферу с выколотой точкой ($S^n \setminus \{S\}$ неполное, теорема Хопфа выполняется, но не любая пара точек соединяется кратчайшей).

10.2 Примеры геодезических

(1) Геодезические в евклидовом пространстве.

Пусть $(x^1, \ldots, x^n)$ — евклидова система координат в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда в этой системе координат символы Кристоффеля обращаются в нуль, поэтому уравнения геодезических приобретают очень простой вид:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} = 0.$$

Решения этого уравнения имеют вид $x^i = a^i t + b^i$. Таким образом, геодезическими в евклидовом пространстве являются *прямые*.

(2) Геодезические на конусе и цилиндре.

Рассмотрим круговой конус и круговой цилиндр в трехмерном пространстве, задаваемые соответственно уравнениями

$$x^2 + y^2 = z^2$$

и

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Эти поверхности могут быть изометрично развернуты на плоскость. Поскольку при изометриях геодезические переходят в геодезические (по свойству 9), то геодезическими на конусе и цилиндре являются те кривые, которые в результате развертки превращаются в прямые на плоскости. В частности, геодезическими на цилиндре являются винтовые линии, вертикальные прямые и горизонтальные окружности.

Этот же результат справедлив для произвольных конусов и цилиндров в трехмерном пространстве, т.е. для поверхностей, задаваемых следующими радиус-векторами:

$$\vec{r}(u,v) = v \cdot \vec{\rho}(u)$$

и

$$\vec{r}(u,v) = \vec{\rho}(u) + v \cdot \vec{a},$$

где $\vec{\rho}(u)$ — радиус-вектор некоторой гладкой кривой в пространстве, $\vec{a}$ — фиксированный вектор.

Задача 10.5. Описать геодезические на поверхности в $\mathbb{R}^4$ с декартовыми координатами $(x,\ y,\ z,\ u)$, задаваемой двумя уравнениями

$$x^2 + y^2 = 1,$$
$$z^2 + u^2 = 1.$$

(3) Геодезические на сфере.

Воспользуемся доказанным выше следующим свойством: если две поверхности касаются по какой-либо кривой и эта кривая является геодезической на одной из поверхностей, то она является геодезической и на другой. Впишем сферу в круговой цилиндр так, чтобы они касались по экватору на сфере. На цилиндре эта окружность (экватор), как мы показали, является геодезической. Поэтому каждый экватор является геодезической на сфере. Существуют ли еще какие-нибудь геодезические на сфере кроме экваторов? Отрицательный ответ следует из того, что через каждую точку на сфере по любому направлению можно провести *единственную* геодезическую. В качестве такой геодезической всегда можно выбрать подходящий экватор. Итак, геодезическими на сфере являются экваторы и только они.

Предложение 1. *Пусть S^2 снабжена стандартной римановой метрикой. Тогда геодезическими римановой связности являются все центральные плоские сечения сферы (экваторы) и только они.*

Тот же факт можно увидеть и по-другому: вектор главной нормали к экватору, очевидно, совпадает с нормалью к поверхности, значит экватор является геодезической (см. теорему 3 о геометрическом смысле геодезической на поверхности $V^2 \subset \mathbb{R}^3$).

(4) Геодезические на плоскости Лобачевского.

Рассмотрим модель плоскости Лобачевского на верхней полуплоскости с римановой метрикой $\mathrm{d}s^2 = \dfrac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{y^2}$.

Проверим, что прямые на плоскости Лобачевского, являющиеся вертикальными лучами, выходящими из абсолюта, являются геодезическими. Действительно, эти лучи задаются уравнениями $x = \mathrm{const}$, $y = y(t)$ (мы знаем из свойства 3 геодезических, какую именно параметризацию следует выбирать на этих лучах, если они являются геодезическими, а именно: натуральную параметризацию или пропорциональную натуральной). Рассмотрим отображение F плоскости Лобачевского в себя вида $F(x,y) = (-x,y)$, т.е. отражение относительно оси абсцисс.

Задача 10.6. Пусть плоскость Лобачевского L^2 снабжена стандартной метрикой модели верхней полуплоскости. Тогда отображение $F : L^2 \to L^2$ вида $F(x,y) = (-x,y)$ является изометрией, т.е. сохраняет длины кривых. Множество $\mathrm{Fix}(F)$ неподвижных точек этой изометрии является геодезической на L^2 (по отношению к римановой связности на L^2). Выведите отсюда, что все вертикальные полупрямые в модели верхней полуплоскости являются геодезическими.

Таким образом, параметризованные кривые вида $x = \mathrm{const}$, $y = c\, e^{at}$ (вертикальные лучи) являются геодезическими.

Воспользуемся теперь тем, что при изометриях геодезические переходят в геодезические. В прошлом семестре мы описали группу движений плоскости Лобачевского. Это — дробно-линейные преобразования вида $w(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$. Ясно, что с помощью такого преобразования можно любую прямую на плоскости Лобачевского перевести в любую другую прямую. Отсюда сразу вытекает, что любая прямая на плоскости Лобачевского является геодезической (мы имеем, разумеется, в виду прямые в смысле геометрии Лобачевского, т.е. полуокружности с центром на границе полуплоскости и вертикальные лучи).

Предложение 2. *Пусть плоскость Лобачевского L^2 снабжена стандартной метрикой. Тогда геодезическими римановой связности на L^2 в модели верхней полуплоскости являются все вертикальные полупрямые и все полуокружности с диаметром на абсолюте, и только они.*

Тот факт, что никаких других геодезических кроме прямых в данном случае нет, снова следует из теоремы существования и единственности. Дело в том, что через каждую точку на плоскости Лобачевского по каждому направлению можно провести прямую.

Задача 10.7. Является ли параллель на поверхности вращения геодезической? А меридиан?

10.3 Оценка размерности группы изометрий риманова многообразия. Полные группы изометрий стандартных метрик плоскости, сферы, плоскости Лобачевского

При диффеоморфизме $F : M \to M$ дифференциал $\mathrm{d}F(P)$ изоморфно отображает касательное пространство $T_P M$ на $T_{Q=F(P)}M$. В каждом из касательных пространств $T_P M$ и $T_Q M$ определено скалярное произведение $\langle , \rangle_P$ и $\langle , \rangle_Q$ соответственно, построенное по римановой метрике. Например, $\langle \xi, \eta \rangle_P = g_{ij}(P)\xi^i \eta^j$, где $\xi, \eta \in T_P M$.

Напомним (лекции 9 и 10), что *изометрией* между двумя римановыми многообразиями называется диффеоморфизм $F : M_1 \to M_2$, сохраняющий длины кривых. В случае $M_1 = M_2 = M$ приходим к следующему определению.

Определение. Диффеоморфизм F многообразия M на себя называется *изометрией* риманова многообразия, если

$$\langle \xi, \eta \rangle_P = \langle \mathrm{d}F(\xi), \mathrm{d}F(\eta) \rangle_Q$$

для любых $\xi, \eta \in T_P M$, $Q = F(P)$.

Лемма 1. *Пусть $F : M \to M$ — изометрия риманова многообразия. Тогда F переводит геодезические в геодезические, а параллельное вдоль какой-либо кривой $\gamma(t)$ векторное поле $\xi(t)$ — в параллельное вдоль кривой $F(\gamma(t))$ векторное поле $\mathrm{d}F(\gamma(t))(\xi(t))$.*

Доказательство. Лемма сразу следует из свойства 6 параллельного переноса (см. лекцию 9) и свойства 9 геодезических (см. выше) в симметрической римановой связности. □

Теорема 1. *Пусть M^n — замкнутое (т.е. компактное без края) n-мерное гладкое связное риманово многообразие с римановой метрикой g, и $\mathrm{Iso}(M^n)$ — группа всех изометрий (M^n, g). Тогда $\dim \mathrm{Iso}(M^n) \leq n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$, т.е. каждое преобразование $F \in \mathrm{Iso}(M^n)$ задается не более, чем $\frac{n(n+1)}{2}$ непрерывными параметрами.*

Доказательство. Сначала докажем следующее предложение.

Предложение 1. *Пусть, в условиях теоремы 1, $P \in M$ и $(e_1, \dots, e_n)$ — ортонормированный базис (ОНБ) в $T_P M$. Сопоставим любой изометрии F образ $F(P) \in M$ точки P и образ ОНБ $(e_1, \dots, e_n)$, т.е. ОНБ $(\mathrm{d}F(P)(e_1), \dots, \mathrm{d}F(P)(e_n))$ в $T_{F(P)}M$. Тогда изометрия F однозначно определяется точками P, $F(P)$ и двумя наборами векторов $(e_1, \dots, e_n)$, $(\mathrm{d}F(P)(e_1), \dots, \mathrm{d}F(P)(e_n))$.*

Доказательство. Пусть даны две точки P, $F(P)$ и два набора векторов $(e_1, \dots, e_n)$, $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n) = (\mathrm{d}F(P)(e_1), \dots, \mathrm{d}F(P)(e_n))$. Покажем, что изометрия F однозначно восстанавливается по этим данным. Для любой точки $Q \in M$ укажем ее образ $F(Q) \in M$. Так как M связно, то существует непрерывный путь $\gamma : [0, 1] \to M$ такой, что $\gamma(0) = P$ и $\gamma(1) = Q$. Далее выберем положительное число $\varepsilon \ll 1$ и зададим $t_i = \frac{i}{N} \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, N$, причем N выберем так, чтобы для каждого i выполнялось $t_i - t_{i-1} < \varepsilon$. Теперь соединим $\gamma(t_i)$ и $\gamma(t_{i+1})$ кратчайшими геодезическими (это можно сделать, см. свойство 10 геодезических). Заменим γ таким образом на ломаную из кратчайших “отрезков”, которую будем тоже обозначать через γ. Обозначим $Q_i := \gamma(t_i)$, $F(Q_0) = F(P)$, $\dot{\gamma}(t_0) := c^i e_i \in T_P M$ — начальный вектор скорости геодезической $\gamma|_{[t_0, t_1]}$.

Мы хотим показать, что образ "ломаной" $\gamma = Q_1 Q_1 \dots Q_N$ при изометрии F однозначно восстанавливается по точке $F(Q_0)$ и ОНБ $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ (а также по самой "ломаной" γ). Пусть $\tilde{\gamma}(t)$ — геодезическая такая, что $\tilde{\gamma}(0) = F(P)$ и $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = c^i \mathrm{d}F(P)(e_i) = c^i \tilde{e}_i$ (геодезическая $\tilde{\gamma}(t)$ существует и единственна по свойству 1 геодезических и теореме 1 из лекции 10 о существовании и единственности геодезической).

Лемма 2. $F(Q_1) = \tilde{\gamma}(t_1)$.

Доказательство. Действительно, $F(\gamma|_{[t_0,t_1]})$ является геодезической (по лемме 1), так как F — изометрия. Далее $F(\gamma(t_0)) = \tilde{\gamma}(t_0)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0} F(\gamma(t)) = \dot{\tilde{\gamma}}(t_0)$, следовательно (по теореме о единственности геодезической с фиксированными начальными условиями) эти геодезические совпадают: $F(\gamma(t)) = \tilde{\gamma}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, а значит и $F(Q_1) = \tilde{\gamma}(t_1)$. $\square$

Пусть $e_i \in T_{Q_1}M$ — результат параллельного переноса вектора $e_i \in T_{Q_0}M$ вдоль $\gamma|_{[t_0,t_1]}$, а $\tilde{e}_i \in T_{F(Q_1)}M$ — результат параллельного переноса вектора $\tilde{e}_i = \mathrm{d}F(P)(e_i) \in T_{F(Q_0)}M$. Так как F — изометрия, то $\mathrm{d}F(Q_1)(e_i) = \tilde{e}_i$ (из сохранения уравнения параллельного переноса при изометрии по лемме 1).

Таким образом, по точке $F(Q_0)$ и ОНБ $(\mathrm{d}F(Q_0)(e_1), \dots, \mathrm{d}F(Q_0)(e_n))$ в ней мы однозначно восстановили точку $F(Q_1) = \tilde{\gamma}(t_1)$ (см. лемму 2) и ОНБ $(\mathrm{d}F(Q_1)(e_1), \dots, \mathrm{d}F(Q_1)(e_n))$ в ней.

По индукции точка $F(Q_i)$ и набор $(\mathrm{d}F(Q_i)(e_1), \dots, \mathrm{d}F(Q_i)(e_n))$ для любого i однозначно восстановятся по точке $F(Q_{i-1})$ и набору $(\mathrm{d}F(Q_{i-1})(e_1), \dots, \mathrm{d}F(Q_{i-1})(e_n))$. Следовательно, и $F(Q)$ однозначно восстанавливается по $F(Q_0)$ и набору $(\mathrm{d}F(Q_0)(e_1), \dots, \mathrm{d}F(Q_0)(e_n))$, что и требовалось. Предложение доказано. $\square$

Продолжим доказательство теоремы 1. Рассмотрим отображение

$$\psi : \mathrm{Iso}(M) \to \mathrm{OB}(M) := \{(Q, \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n) \mid Q \in M, \tilde{e}_i \in T_Q M, \{\tilde{e}_i\} \text{ — ОНБ}\},$$

которое каждой изометрии $F \in \mathrm{Iso}(M)$ сопоставляет набор $(F(P), \mathrm{d}F(P)(e_1), \dots, \mathrm{d}F(P)(e_n))$. По предложению 1 ψ является инъекцией, следовательно

$$\dim \mathrm{Iso}(M) \leq \dim \mathrm{OB}(M) =$$

$$= \{\text{число ст.св.} Q\} + \{\text{число ст.св. изометрии } \mathrm{d}F(P) : T_P M \to T_Q M\} =$$

$$= n + \dim O(n) = n + \dim so(n) = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

где через $O(n)$ обозначена группа ортогональных матриц $n \times n$, т.е. матриц A, сохраняющих скалярное произведение: $\langle A\xi, A\eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle$, а через $so(n)$ — множество кососимметрических матриц $n \times n$. Теорема 1 доказана. $\square$

Следствие. *(А) Группы* $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$, $\mathrm{Iso}(S^2)$, $\mathrm{Iso}(L^2)$ *имеют размерность* $3 = 2 + 1$.

(Б) Для каждого $M = \mathbb{R}^2, S^2, L^2$ *группа изометрий* $\mathrm{Iso}(M)$ *состоит из двух компонент связности:* $\mathrm{Iso}^+(M)$ *и* $\mathrm{Iso}^-(M) = F^- \circ \mathrm{Iso}^+(M)$, *где* $\mathrm{Iso}^+(M)$ *— множество изометрий, сохраняющих ориентацию,* $\mathrm{Iso}^-(M)$ *— множество изометрий, меняющих ориентацию, и* $F^- \in \mathrm{Iso}^-(M)$.

(В) Группа $\mathrm{Iso}^+(M)$ *изоморфна группе* G*, описанной ниже.*

Для плоскости

$$\mathrm{Iso}^+(\mathbb{R}^2) \cong G := \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & a \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{R}^2 \times S^1 \quad \text{с координатами } (a, b, \varphi), \quad F^-(x, y) = (-x, y).$$

Для сферы $\mathrm{Iso}^+(S^2) \cong G := SO(3)$ — 3-мерное многообразие (поскольку $\dim SO(n) = \frac{n(n-1)}{2}$), F^- — отражение относительно экваториальной плоскости $z = 0$.

Для плоскости Лобачевского

$$\mathrm{Iso}^+(L^2) \cong G := SL(2, \mathbb{R})/\{E, -E\} \quad \text{— 3-мерное многообразие, } F^-(z) = -\bar{z}.$$

Доказательство. (В) Пусть (M^2, g) — одно из рассматриваемых римановых многообразий $\mathbb{R}^2, S^2, L^2$. Пусть G — соответствующая группа, указанная выше. В прошлом семестре был построен гомоморфизм групп $i^+ : G \to \mathrm{Iso}^+(M^2)$ и показана его инъективность. Нам нужно показать, что он на самом деле биективен.

Пусть $\psi : \mathrm{Iso}(M^2) \to \mathrm{OB}(M)$ — отображение из доказательства теоремы 6. Рассмотрим отображение $\psi^+ = \psi|_{\mathrm{Iso}^+(M^2)} : \mathrm{Iso}^+(M^2) \to \mathrm{OB}^+(M)$, где $\mathrm{OB}^+(M) \subset \mathrm{OB}(M)$ состоит из всех положительно ориентированных ОНБ по отношению к данному ориентированному атласу на M. Легко проверяется, что композиция $\psi^+ \circ i^+$ сюръективна (проверьте!). Так как отображения ψ^+ и i^+ инъективны (по предложению 1), а их композиция — сюръективна, то i^+ биективно (по задаче 1).

(А, Б) Достаточно показать, что подмножества $\mathrm{Iso}^+(M)$ и $\mathrm{Iso}^-(M)$ гомеоморфны многообразию G (а потому линейно связны и 3-мерны).

Легко проверяется, что отображение i^+ и его обратное непрерывны (проверьте!). Поэтому $i^+ : G \to \mathrm{Iso}^+(M^2)$ является гомеоморфизмом.

Легко проверяется, что $F^- \in \mathrm{Iso}^-(M^2)$. Рассмотрим отображение $L_{F^-} : \mathrm{Iso}(M^2) \to \mathrm{Iso}(M^2)$, переводящее изометрию $F \in \mathrm{Iso}(M^2)$ в $F^- \circ F$ (умножение слева на F^- в группе $\mathrm{Iso}(M^2)$). Очевидно, что $L^2_{F^-}$ тождественно, поэтому L_{F^-} — биекция, совпадающая со своим обратным. Далее, L_{F^-} переводит $\mathrm{Iso}^+(M^2)$ в $\mathrm{Iso}^-(M^2)$ (и наоборот) и непрерывно (проверьте!). Поэтому оно является гомеоморфизмом. Значит, $\mathrm{Iso}^+(M)$ и $\mathrm{Iso}^-(M) = F^- \circ \mathrm{Iso}^+(M)$ гомеоморфны, что и требовалось. $\square$

Задача 10.8. Пусть отображения $f : A \to B$ и $g : B \to C$ инъективны, а их композиция $g \circ f : A \to C$ сюръективна. Тогда отображения f и g биективны.

10.4 Упражнения к лекции 10

Упражнение 10.1. Покажите это, используя тот факт, что выписанная риманова метрика является на самом деле римановой метрикой на сфере без северного полюса после стереографической проекции.

Упражнение 10.2. Покажите, что на неполном многообразии это не всегда удается сделать. Указание: рассмотрите евклидову плоскость с выколотой точкой ($\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ неполное, теорема Хопфа не выполняется).

Упражнение 10.3. Пусть P, Q — две точки на меридиане сферы, не являющиеся ее полюсами. Докажите, что дуга меридиана между точками P и Q короче любой другой кривой на сфере с концами в этих же точках. Указание: проведите вычисления аналогично примеру 1 выше, рассмотрев на сфере сферические координаты. Рассмотрите сначала случай, когда кривая γ не проходит через полюса сферы, а затем — общий случай.

Упражнение 10.4. Покажите, что на неполном многообразии не всегда удается любые две точки соединить кратчайшей геодезической. Приведите пример, в котором любые две точки можно соединить геодезической (но она необязательно будет кратчайшей). Указание: рассмотрите сферу с выколотой точкой ($S^n \setminus \{S\}$ неполное, теорема Хопфа выполняется, но не любая пара точек соединяется кратчайшей).

Упражнение 10.5. Описать геодезические на поверхности в $\mathbb{R}^4$ с декартовыми координатами $(x,\ y,\ z,\ u)$, задаваемой двумя уравнениями

$$x^2 + y^2 = 1,$$
$$z^2 + u^2 = 1.$$

Упражнение 10.6. Пусть плоскость Лобачевского L^2 снабжена стандартной метрикой модели верхней полуплоскости. Тогда отображение $F : L^2 \to L^2$ вида $F(x, y) = (-x, y)$ является изометрией, т.е. сохраняет длины кривых. Множество $\mathrm{Fix}(F)$ неподвижных точек этой изометрии является геодезической на L^2 (по отношению к римановой связности на L^2). Выведите отсюда, что все вертикальные полупрямые в модели верхней полуплоскости являются геодезическими.

Упражнение 10.7. Является ли параллель на поверхности вращения геодезической? А меридиан?

Упражнение 10.8. Пусть отображения $f : A \to B$ и $g : B \to C$ инъективны, а их композиция $g \circ f : A \to C$ сюръективна. Тогда отображения f и g биективны.