Дифференциально-геометрические и топологические методы

Лектор Кудрявцева Е.А.

Осенний семестр 2025 года, группы 331–332

1 Понятие тензора и тензорного поля на многообразии

Рассмотрим конечномерное линейное пространство V. Мы уже хорошо знакомы с некоторыми объектами, непосредственно связанными с линейными пространствами: векторы, линейные функционалы, линейные операторы, билинейные формы и т.д. Обратим внимание на нечто общее, что объединяет эти понятия. С одной стороны все они могут быть определены инвариантно с помощью стандартных формальных определений (например, линейный оператор — это линейное отображение из пространства V в себя). Термин "инвариантно" означает здесь независимость от выбора системы координат. Однако для того, чтобы реально работать с этими объектами, мы часто используем их координатную запись (записываем, например, линейные операторы и билинейные формы с помощью матриц). Чтобы это сделать, мы сначала всегда должны выбрать базис в пространстве V. При этом при замене базиса координатная форма записи рассматриваемых объектов меняется по определенному закону, зависящему от их типа.

Напомним вкратце эти формулы.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис в пространстве V. Рассмотрим в этом пространстве

1) вектор ξ,

2) линейный функционал l (мы обычно будем называть его ковектором),

3) линейный оператор $\mathcal{A}$,

4) билинейную форму $\mathcal{B}$.

Напомним, что "координатами" этих объектов в фиксированном базисе называются соответственно

1) набор коэффициентов (ξ^i) разложения вектора ξ по базису: $\xi = \sum \xi^i e_i$,

2) набор (l_i) значений линейного функционала l на базисных векторах: $l_i = l(e_i)$,

3) набор чисел (a_i^j) (образующих матрицу A линейного оператора $\mathcal{A}$), где a_i^j — j–ая координата образа i–го базисного вектора под действием оператора $\mathcal{A} : \mathcal{A}(e_i) = \sum a_i^j e_j$. (здесь верхний индекс нумерует строки, а нижний — столбцы матрицы линейного оператора),

4) набор чисел b_{ij} (образующих матрицу квадратичной формы $\mathcal{B}$), где b_{ij} — значение билинейной формы на паре базисных векторов с номерами i и $j : b_{ij} = \mathcal{B}(e_i, e_j)$.

Пусть $e'_1, \dots, e'_n$ — другой базис и $C = (c_i^j)$ — матрица перехода. Напомним, что по столбцам матрицы C стоят координаты векторов нового базиса в старом базисе так, что верно формальное равенство

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C.$$

Пусть $(\xi^{i'})$, $(l_{i'})$ — координаты вектора ξ и ковектора l в новом базисе, A' и B' — матрицы линейного оператора $\mathcal{A}$ и квадратичной формы $\mathcal{B}$ в новом базисе.

Задача 1.1. Тогда (убедитесь в этом самостоятельно) имеют место следующие формулы:

1. Закон преобразования координат вектора:

$$\begin{pmatrix} \xi^{1'} \\ \vdots \\ \xi^{n'} \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} \xi^{1} \\ \vdots \\ \xi^{n} \end{pmatrix}.$$

2. Закон преобразования координат ковектора:

$$\begin{pmatrix} l_{1'} \\ \vdots \\ l_{n'} \end{pmatrix} = C^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} l_{1} \\ \vdots \\ l_{n} \end{pmatrix}.$$

3. Закон преобразования матрицы линейного оператора:

$$A' = C^{-1}AC.$$

4. Закон преобразования матрицы билинейной формы:

$$B' = C^{\mathrm{T}}BC.$$

Таким образом, мы видим, что все эти объекты могут задаваться наборами чисел, которые при замене координат преобразуются по некоторому специальному правилу.

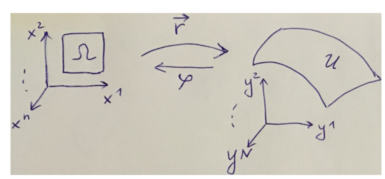
Мы положим это наблюдение в основу определения тензорного поля на многообразии.

Сделаем еще одно предварительное замечание. В случае многообразия в качестве линейного пространства будет выступать касательное пространство к многообразию.

Напомним:
1) Под *регулярной параметризованной n-мерной поверхностью* в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$ с координатами $(y) = (y^i)_{i=1}^N$ можно понимать образ $U := \vec{r}(\Omega) \subset \mathbb{R}^N$ регулярного вложения $\vec{r} : \Omega \to \mathbb{R}^N$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество (т.е. область) евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с координатами $(x) = (x^j)_{j=1}^n$. При этом само отображение $\vec{r} : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $(x) \mapsto (y)$, называется *регулярной параметризацией* поверхности, а обратное ему отображение $\varphi = \vec{r}^{-1} : U \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$ — *криволинейной системой координат* (или *регулярными локальными координатами*) на данной поверхности $U \subset \mathbb{R}^N$.
2) Если на регулярной поверхности $U \subset \mathbb{R}^N$ введены две регулярные параметризации $\vec{r} : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $(x) \mapsto (y)$, и $\vec{r}' : \Omega' \to \mathbb{R}^N$, $(x') \mapsto (y)$, $\vec{r}(\Omega) = U = \vec{r}'(\Omega')$, то отображение $(\vec{r}')^{-1} \circ \vec{r} : \Omega \to \Omega'$, $(x) \mapsto (x')$, называется *регулярной заменой криволинейных координат* на поверхности $U \subset \mathbb{R}^N$. Другими словами, *замена координат* $\Omega \to \Omega'$, $(x) \mapsto (x')$, определяется таким образом,

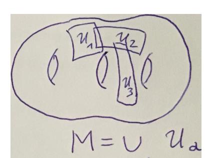
чтобы следующая диаграмма была коммутативна:

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[rr, "(\vec{r}')^{-1}\circ\vec{r}"] \arrow[dr, "\vec{r}"'] & & \Omega' \arrow[dl, "\vec{r}'"] \\ & U. & \end{tikzcd}$$



Известно, что регулярная замена $\Omega' \to \Omega$, $(x') \to (x)$ является гладким отображением (класса C^∞), причем его матрица Якоби $C(x) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^{i'}}(x')\right)_{i,i'=1}^n$ *невырождена* в любой точке $x \in \Omega$.

Подмножество $M \subset \mathbb{R}^N$ называется *гладким n-мерным подмногообразием* в $\mathbb{R}^N$, если любая его точка $P \in M$ обладает окрестностью V в $\mathbb{R}^N$, такой, что $U = V \cap M$ является регулярной параметризованной n-мерной поверхностью в $\mathbb{R}^N$. Пара (U, φ) называется *картой* на M.



Совокупность карт $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ на M называется *атласом* на M, если $\bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha = M$.

Функция $f : M \to \mathbb{R}$ называется *гладкой* (т.е. класса $C^\infty(M)$), если для любой системы регулярных локальных координат $(x) = (x^i)$, заданной в какой-либо области $U \subset M$, функция $f \circ \vec{r} : \Omega \to \mathbb{R}$ является гладкой.

Сформулируем теперь 3 эквивалентных определения *касательного вектора* к многообразию $M \subset \mathbb{R}^N$ в точке $P \in M$.

1) *Касательным вектором* ξ к многообразию M в точке $P \in M$ называется вектор скорости гладкой параметризованной кривой $\vec{r} \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, проходящей через точку P и содержащейся в M: $\xi = \frac{d}{dt}|_{t=0}\vec{r}(\gamma(t))$, где $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Omega$ — гладкая параметризованная кривая, такая, что $\gamma(0) = P$.

2) Отображение $D : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ называется *дифференцированием* в точке $P \in M$ (или касательным вектором к многообразию M в точке P), если оно линейно и удовлетворяет *правилу Лейбница*: $D(fg) = D(f)g(P) + f(P)D(g)$ для любых $f, g \in C^\infty(M)$. Нетрудно показать, что любое дифференцирование в точке $P = \vec{r}(x_0)$ на M имеет вид $D(f) = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial(f\circ\vec{r})}{\partial x^i}(x_0)$, где $U \subset M$ — окрестность точки P в M, $\vec{r} : \Omega \to U$ — ее регулярная параметризация и $\xi^1, \ldots, \xi^n \in \mathbb{R}$ — некоторые числа.

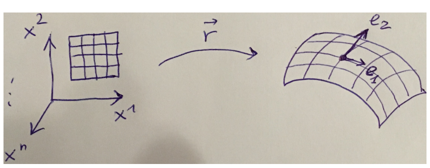
Отображение $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ называется *дифференцированием* на M (или *касательным векторным полем* к многообразию M в точке P), если оно линейно и удовлетворяет *правилу Лейбница*: $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ для любых $f, g \in C^\infty(M)$.

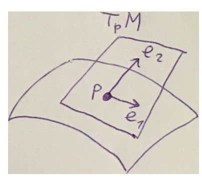
3) *Касательным вектором* ξ к многообразию M в точке $P \in M$ называется объект, задаваемый в каждой локальной системе криволинейных координат $(x) = (x^i)$ набором чисел $\{\xi^i\}_{i=1}^n$, который при переходе в любую другую локальную систему криволинейных координат $(x') = (x'^{i'})$ преобразуется по закону $\xi'^{i'} = \xi^i \frac{\partial x'^{i'}(x_0)}{\partial x^i}$.

Множество всех касательных векторов в точке P к M (в смысле любого из трех эквивалентных определений касательного вектора, см. выше) обозначается через $T_P M$ и называется *касательным пространством* в точке P к многообразию M.

Важное замечание об использовании штрихов. Мы часто будем помечать новую систему координат штрихом, который будет ставиться у индекса. При этом "штрих" будет нести двойную нагрузку. Во-первых он показывает, что система координат, в которой записан рассматриваемый объект, является "штрихованной", т.е. новой. Во-вторых, "штрих" относится к индексу, указывая, что индекс тоже является новым. Например, обозначение $x^{i'}$ показывает, что речь идет о новой "штрихованной" системе координат, и в этой системе координат мы рассматриваем координату с номером i' (который не имеет ничего общего с номером i, т.е. $i' \neq i$). Кроме того n у нас обычно обозначает размерность многообразия, поэтому (см. чуть выше) $n = n'$ (это естественно, не может же размерность многообразия измениться при переходе к новой системе координат).

Еще одно напоминание о старом соглашении. По повторяющимся индексам, один из которых стоит сверху, а другой — снизу, во всех наших формулах предполагается суммирование. Знак суммы при этом опускается.





Канонический базис. 1) Локальная система координат $(x^1, \ldots, x^n)$ на самом многообразии позволяет *однозначно построить базис* в каждом касательном пространстве (для точек, попавших в соответствующую карту), называемый *каноническим базисом*: $e_1 = \vec{r}_{x^1} = \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, e_n = \vec{r}_{x^n} = \frac{\partial}{\partial x^n}$ (векторы скорости координатных линий).

Важно, что после задания системы координат на самом многообразии *базис* в касательном пространстве *строится автоматически*. Поэтому мы всегда будем говорить о *локальных координатах на многообразии*, не акцентируя внимания на базис в касательном пространстве, помня однако о его существовании.

2) *Матрицей перехода* от одного базиса к другому служит матрица Якоби замены координат на многообразии: $e'_{i'} = \frac{\partial}{\partial x^{i'}} = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} e_i$. Здесь $(x') = (x'^{i'})$ — новая локальная система криволинейных координат на многообразии.

Определение 1.1. Тензором типа (p, q) в точке $P \in M$ называется объект, задаваемый в каждой локальной системе координат $x^1, \ldots, x^n$ набором чисел $\{T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\}$, который при переходе в любую другую локальную систему координат $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ преобразуется по следующему закону:

$$T^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q} = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \ \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}(P) \ldots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}}(P) \ \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}(P) \ldots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}}(P).$$

Если теперь мы в каждой точке многообразия рассмотрим тензор типа (p, q), гладко зависящий от точки (т.е. каждая из его компонент гладко зависит от координат точки), то мы получим тензорное поле на многообразии. Более формально тензорное поле задается следующим определением.

Определение 1.2. Тензорным полем типа (p, q) на многообразии M называется объект, задаваемый в каждой локальной системе координат $x^1, \ldots, x^n$ набором гладких функций $\{T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(x)\}$, который при переходе в любую другую локальную систему координат $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ преобразуется по следующему закону:

$$T^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q}(x') = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(x) \ \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \ldots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \ \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \ldots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}}.$$

Замечание. Эта формула имеет место только на той области, где она имеет смысл, а именно на пересечении карт, в которых заданы локальные координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$.

Задача 1.2. Частными случаями тензорных полей на многообразии являются, например, векторное поле (тензор типа $(1, 0)$); дифференциал гладкой функции $\mathrm{d}f = (\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n})$ (тензор типа $(0, 1)$); риманова метрика на многообразии (тензор типа $(0, 2)$). Более сложные примеры мы увидим ниже.

В линейной алгебре обычно дается другое определение тензора. Он определяется как полилинейное отображение. Эти два подхода эквивалентны, и мы сейчас укажем естественную связь между ними.

Рассмотрим конечномерное линейное пространство V и сопряженное к нему пространство V^*. Напомним, что в нашем курсе в качестве V мы рассматриваем касательное пространство к многообразию в точке: $V = T_P M$, но для следующего определения это несущественно.

Определение 1.3. Тензором типа (p, q) на пространстве V называется полилинейное отображение

$$\tilde{T} : V \times \cdots \times V \times V^* \times \cdots \times V^* \to \mathbb{R}.$$

Комментарий к определению. Здесь $V \times \cdots \times V \times V^* \times \cdots \times V^*$ обозначает декартово произведение q экземпляров пространства V и p экземпляров сопряженного пространства V^*. Другими словами, отображение $\tilde{T}$ имеет $(p + q)$ аргументов — q векторов и p ковекторов. Полилинейность означает, что $\tilde{T}$ зависит линейно от каждого из своих элементов по-отдельности.

Задача 1.3. Проинтерпретируйте как полилинейное отображение вектор, ковектор, линейный оператор и билинейную форму.

Связь между двумя определениями тензора очень проста. Для того, чтобы ее увидеть, достаточно для полилинейного отображения указать соответствующий ему набор чисел (при условии, что фиксирован некоторый базис) и, наоборот, для произвольного набора чисел построить некоторое полилинейное отображение. Сделаем это.

Рассмотрим произвольный базис $e_1, \dots, e_n$ в пространстве V. По этому базису можно однозначно построить сопряженный к нему базис $e^1, \dots, e^n$ в пространстве V. Напомним, что сопряженный базис определяется следующими соотношениями

$$e^i(e_j) = \delta^i_j.$$

Замечание. В случае касательного пространству к многообразию сопряженным к базису $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x^n}$ является базис $\mathrm{d}x^1, \dots, \mathrm{d}x^n$. Это не утверждение, а скорее объяснение обозначения $\mathrm{d}x^i$.

Рассмотрим теперь произвольное полилинейное отображение $\tilde{T}$, являющееся тензором типа (p, q) в смысле Определения 3. Это отображение произвольному набору из q векторов $(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_q)$ и p ковекторов $(\ell^1, \dots, \ell^p)$ ставит в соответствие некоторое вещественное число

$$\tilde{T}(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_q, \ell^1, \dots, \ell^p) \in \mathbb{R}$$

(здесь $\vec{\xi}_\alpha \in V$, $l_\beta \in V^*$, $\alpha = 1, \dots, q$, $\beta = 1, \dots, p$). В качестве набора чисел $\{T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}\}$ мы возьмем значения отображения T на всевозможных наборах базисных векторов, полагая

$$T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \tilde{T}(e_{j_1}, \dots, e_{j_q}, e^{i_1}, \dots, e^{i_p}).$$

Отметим, что зная значения отображения $\tilde{T}$ на всевозможных наборах базисных векторов, мы можем, пользуясь полилинейностью, определить его значение на произвольном наборе векторов и ковекторов. Действительно, разлагая каждый из аргументов полилинейного отображения $\tilde{T}$ по базису, мы получаем

$$\tilde{T}(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_q, \ell^1, \dots, \ell^p) = \tilde{T}(\xi_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, \xi_q^{j_q} e_{j_q}, \ell^1_{i_1} e^{i_1}, \dots, \ell^p_{i_p} e^{i_p}) =$$
$$\xi_1^{j_1} \dots \xi_q^{j_q} \ell^1_{i_1} \dots \ell^p_{i_p} \tilde{T}(e_{j_1}, \dots, e_{j_q}, e^{i_1}, \dots, e^{i_p}) = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \xi_1^{j_1} \dots \xi_q^{j_q} \ell^1_{i_1} \dots \ell^p_{i_p}.$$

Таким образом, используя эту формулу, мы можем построить полилинейное отображение, исходя из заданного набора чисел (см. первое определение тензора).

Итак, две выписанные только что формулы устанавливают соответствие между наборами чисел и полилинейными функционалами.

Задача 1.4. Проверьте корректность построенных соответствий. А именно, требуется убедиться в том, что наборы чисел, построенные по первой формуле, преобразуются по нужному закону. И наоборот, если наборы, участвующие во второй формуле, изменяются по требуемому закону, то построенное отображение определено корректно, т.е. не зависит от выбора системы координат. Предлагается проверить это самостоятельно. Мы лишь скажем, что формула преобразования компонент тензора взята не с потолка, а именно так, чтобы два определения тензора были эквивалентны.

Итак, мы обсудили следующее утверждение.

Теорема 1. *Сформулированные выше два определения тензора эквивалентны.*

Задача 1.5. Рассмотреть смешанное произведение в $\mathbb{R}^3$ как тензор типа $(0,3)$ и найти его компоненты.

Задача 1.6. Доказать, что набор δ_i^j является тензором типа $(1,1)$. Однако, тот же самый набор δ_{ij} не является тензором типа $(0,2)$.

Задача 1.7. Назовем тензор инвариантным, если его компоненты не меняются ни при каких заменах координат. Описать все инвариантные тензоры типа $(1,1)$ и $(2,2)$. Существуют ли инвариантные тензоры типа (p,q), если $p \neq q$?

Определение (дифференциала гладкого отображения)**.** Пусть $F : M^m \to N^n$ — гладкое отображение m-мерного гладкого многообразия $M = M^m$ в n-мерное гладкое многообразие $N = N^n$, $P \in M$, и $v \in T_P M$ — произвольный касательный вектор. Пусть γ — кривая, такая что $\gamma(0) = P$ и $\dot\gamma(0) = v$. Рассмотрим образ кривой γ при отображении F. Иными словами, если кривая γ задается гладким отображением $\gamma : (-1,1) \to M$, то ее образ — это гладкая кривая в N, заданная отображением $F \circ \gamma$. Кривая $F \circ \gamma$ проходит через образ $F(P)$ точки P. Обозначим через w вектор скорости кривой $F \circ \gamma$ в точке $F(P)$. По определению, $w \in T_{F(P)}N$. Определим дифференциал $D_P F$ отображения F в точке P как отображение касательных пространств

$$D_P F : T_P M \to T_{F(P)} N,$$

заданное так: $D_P F : v \mapsto w$.

Запишем дифференциал $D_P F$ в координатах.

Задача 1.8. Пусть $(x) = (x^1, \ldots, x^m)$ — локальные координаты на M в окрестности точки P, $(y) = (y^1, \ldots, y^n)$ — локальные координаты на N в окрестности точки $F(P)$, а $x \mapsto y(x)$ или $(x^1, \ldots, x^m) \mapsto (y^j(x^1, \ldots, x^m))_{j=1}^n$ — координатное представление отображения F. Если $t \mapsto (x^i(t))_{i=1}^m$ — координатное представление кривой γ, то координатное представление кривой $F \circ \gamma$ выглядит так: $t \mapsto (y^j(x^1(t), \ldots, x^m(t)))_{j=1}^n$. По стандартной *теореме о дифференцировании сложной функции* имеем:

$$w = \frac{\mathrm{d}(F \circ \gamma)}{\mathrm{d}t}(0) = \left(\sum_i \frac{\partial y^1}{\partial x^i}(P) v^i, \ldots, \sum_i \frac{\partial y^n}{\partial x^i}(P) v^i \right) = Jv, \tag{1}$$

где $J = \|\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(P)\|$ — матрица Якоби координатной записи отображения F в точке P. Таким образом, *дифференциал* $D_P F$ отображения F — это линейное отображение касательных пространств, задаваемое в канонических базисах выбранных систем координат матрицей Якоби отображения F в этих координатах.

В частности, из задачи 1.8 получаем, что при переходе от одной системы координат к другой векторы скоростей преобразуются по формуле (1), которая совпадает с законом преобразования координат касательного вектора.

1.1 Упражнения к лекции 1

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис в пространстве V. Пусть $e'_1, \dots, e'_n$ — другой базис и $C = (c_i^j)$ — матрица перехода. Напомним, что по столбцам матрицы C стоят координаты векторов нового базиса в старом базисе так, что верно формальное равенство

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C.$$

Пусть $(\xi^{i'})$, $(l_{i'})$ — координаты вектора ξ и ковектора l в новом базисе, A' и B' — матрицы линейного оператора $\mathcal{A}$ и квадратичной формы $\mathcal{B}$ в новом базисе.

Упражнение 1.1. Тогда (убедитесь в этом самостоятельно) имеют место следующие формулы:

1. Закон преобразования координат вектора:

$$\begin{pmatrix} \xi^{1'} \\ \vdots \\ \xi^{n'} \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} \xi^{1} \\ \vdots \\ \xi^{n} \end{pmatrix}.$$

2. Закон преобразования координат ковектора:

$$\begin{pmatrix} l_{1'} \\ \vdots \\ l_{n'} \end{pmatrix} = C^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} l_{1} \\ \vdots \\ l_{n} \end{pmatrix}.$$

3. Закон преобразования матрицы линейного оператора:

$$A' = C^{-1}AC.$$

4. Закон преобразования матрицы билинейной формы:

$$B' = C^{\mathrm{T}}BC.$$

Упражнение 1.2. Частными случаями тензорных полей на многообразии являются, например, векторное поле (тензор типа $(1,0)$); дифференциал гладкой функции $\mathrm{d}f = (\dfrac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x^n})$ (тензор типа $(0,1)$); риманова метрика на многообразии (тензор типа $(0,2)$). Более сложные примеры мы увидим ниже.

Упражнение 1.3. Проинтерпретируйте как полилинейное отображение вектор, ковектор, линейный оператор и билинейную форму.

Упражнение 1.4. Проверьте корректность построенных соответствий. А именно, требуется убедиться в том, что наборы чисел, построенные по первой формуле, преобразуются по нужному закону. И наоборот, если наборы, участвующие во второй формуле, изменяются по требуемому закону, то построенное отображение определено корректно, т.е. не зависит от выбора системы координат. Предлагается проверить это самостоятельно. Мы лишь скажем, что формула преобразования компонент тензора взята не с потолка, а именно так, чтобы два определения тензора были эквивалентны.

Упражнение 1.5. Рассмотреть смешанное произведение в $\mathbb{R}^3$ как тензор типа $(0,3)$ и найти его компоненты.

Упражнение 1.6. Доказать, что набор δ_i^j является тензором типа $(1,1)$. Однако, тот же самый набор δ_{ij} не является тензором типа $(0,2)$.

Упражнение 1.7. Назовем тензор инвариантным, если его компоненты не меняются ни при каких заменах координат. Описать все инвариантные тензоры типа $(1,1)$ и $(2,2)$. Существуют ли инвариантные тензоры типа (p,q), если $p \neq q$?