

ПРОГРАММА КУРСА
**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ**

лектор Кудрявцева Е.А.

(331–332 группы, осенний семестр 2025 года)

1. Законы преобразования координат вектора, ковектора, матрицы линейного оператора и матрицы билинейной формы на векторном пространстве. Гладкое подмногообразие в \mathbb{R}^N , локальные координаты, атлас. Три определения касательного вектора. Канонические базисы касательного и кокасательного пространств. Дифференциал гладкого отображения.
2. Тензор и тензорное поле на многообразии. Примеры тензоров на гладком многообразии. Тензор как полилинейное отображение. Алгебраические операции над тензорными полями. Базис пространства тензоров на векторном пространстве.
3. Симметричные и кососимметричные тензорные поля. Примеры. Базис пространства кососимметрических тензоров. Кососимметрические тензоры максимального ранга. Алгебраические свойства кососимметрических тензорных полей. Внешняя производная, ее свойства.
4. Внешние дифференциальные формы. Внешнее умножение форм. Внешняя дифференциальная форма как функционал на касательных векторах. Преобразование внешних дифференциальных форм при гладком отображении многообразий, свойства.
5. Разбиение единицы. Вычисление объема области на римановом многообразии, обоснование. Объем и кососимметричный тензор максимального ранга на римановом многообразии. Интегрирование внешней формы максимального ранга по области на многообразии.
6. Многообразие с краем. Интеграл внешней формы по подмногообразию (по поверхности). Формулировка теоремы Стокса.
7. Доказательство теоремы Стокса. Частные случаи формулы Стокса на плоскости и в трехмерном пространстве (Грин, Кельвин, Стокс, Гаусс, Остроградский, Коши). Несжимаемые и бездивергентные потоки жидкости.
8. Замкнутые и точные формы. Группы когомологий де Рама. Вычисление 0-мерных когомологий. Сохранение интеграла замкнутой 1-формы по замкнутой кривой при гомотопии кривой. Критерий точности замкнутой 1-формы. Примеры вычисления 1-мерных когомологий: для односвязного многообразия, \mathbb{R}^n , окружности, сферы, тора.
9. Лемма Пуанкаре (с доказательством). Гладко гомотопные отображения. Гомоморфизмы групп когомологий, индуцированные гладко гомотопными отображениями многообразий. Гомотопически эквивалентные многообразия, их когомологии.
10. Операция $*$ на внешних формах в евклидовом пространстве и ее свойства. Коммутирование операции $*$ с действием группы $SO(n)$. Операция $*$ на внешних формах на ориентированном римановом многообразии.
11. Примеры операции “звездочка” на плоскости и в пространстве. Градиент функции, дивергенция и ротор векторного поля на трехмерном ориентированном римановом многообразии.
12. Введение ковариантного дифференцирования (аффинной связности) в криволинейных координатах в евклидовом пространстве. Появление символов Кристоффеля.
13. Вычисление явного вида операции “набла” (ковариантного дифференцирования) на векторах, ковекторах и линейных операторах в криволинейных координатах в евклидовом пространстве.

14. Общее определение ковариантного дифференцирования (= аффинной связности) на гладком многообразии. Символы Кристоффеля, тензор кручения, симметричные связности.
15. Алгебраические свойства ковариантного дифференцирования. Теорема об однозначности операции ковариантного дифференцирования.
16. Симметричные римановы связности. Теорема существования и единственности. Ковариантная производная вдоль кривой. Риманова связность на гиперповерхности в \mathbb{R}^n : дивидуационные формулы, геометрический смысл римановой связности.
17. Параллельный перенос в аффинной связности. Уравнение и свойства параллельного переноса. Геометрический смысл параллельного переноса на гиперповерхности в \mathbb{R}^n . Параллельный перенос на касающихся гиперповерхностях. Примеры параллельного переноса: на плоскости, цилиндре, конусе, сфере, плоскости Лобачевского.
18. Геодезические. Уравнение и свойства геодезических. Геодезические в римановой связности: геодезические как локально кратчайшие (без доказательства), поведение геодезических при изометриях. Перенос вдоль геодезических. Двумерный случай. Геометрический смысл геодезических на гиперповерхности в \mathbb{R}^n . Примеры.
19. Геодезические на плоскости, конусе, цилиндре, сфере, плоскости Лобачевского.
20. Теорема о размерности группы изометрий риманова многообразия. Полные группы изометрий стандартных метрик плоскости, сферы, плоскости Лобачевского.
21. Тензор кривизны Римана аффинной связности. Координатное и инвариантное определения. Коммутатор векторных полей, его свойства.
22. Алгебраические свойства тензора кривизны. Тензор Риччи, скалярная кривизна.
23. Теорема о скалярной кривизне двумерной поверхности и гауссовой кривизне. Явная формула для коэффициентов тензора кривизны через компоненты метрического тензора. Теорема Гаусса.
24. Регулярные значения гладкого отображения. Теорема Сарда (без доказательства). Степень гладкого отображения. Примеры.
25. Гладкая гомотопия. Теорема об инвариантности степени гладкого отображения многообразий при гомотопии и независимость степени от выбора точки.
26. Примеры вычисления степени. Основная теорема алгебры о корнях полинома.
27. Степень отображения и интегралы от внешних форм максимальной степени. Связь гауссовой кривизны и гауссова отображения.
28. Интеграл от гауссовой кривизны по замкнутой поверхности. Степень гауссова отображения. Связь с родом поверхности. Формула Гаусса-Бонне.