ВОПРОСЫ
Дифференциальная геометрия и топология, семестр II (весна 2005, Иванов)

Ориентируемые и неориентируемые многообразия. Два определения, их эквивалентность, примеры.

Теорема классификации двумерных замкнутых связных многообразий, схема доказательства.

Координатное и инвариантное определения тензора. Их эквивалентность. Тензорные поля. Примеры.

Линейное пространство тензоров. Его размерность.

Алгебраические операции над тензорами.

Пространства симметрических и кососимметрических тензоров, их размерности.

Риманова метрика как пример тензорного поля. Римановы многообразия. Индуцированная метрика. Теорема существования римановой метрики на компактном многообразии.

Внешние дифференциальные формы. Внешнее произведение.

Формы и отображения.

Внешнее дифференцирование.

Интегрирование дифференциальных форм на ориентируемых многообразиях.

Многообразия с краем. Задание многообразия с краем системой уравнений и неравенством.

Многообразия с краем. Ориентируемость края ориентируемого многообразия.

Интегрирование формы по подмногообразию. Теорема Стокса.

Формула Грина как следствие общей формулы Стокса.

Формула Гаусса—Остроградского как следствия общей теоремы Стокса.

Формула Стокса для поверхностей как следствия общей теоремы Стокса.

Определение групп когомологий де Рама. Когомологии прямой и окружности.

Когомологии и отображения. Гомотопическая инвариантность когомологий.

Евклидова связность.

Аффинная связность. Ковариантная производная по направлению.

Алгебраические свойства ковариантного дифференцирования.

Теорема “единственности” операции тензорного дифференцирования.

Риманова связность. Теоремы существования римановой связности и аффинной связности.

Параллельный перенос. Особенности параллельного переноса в римановой связности.

Геодезические. Геодезические на прямом цилиндре, сфере, плоскости Лобачевского.

Формула первой вариации длины кривой. Стационарность геодезических.

Экспоненциальное отображение и нормальные координаты. Первая квадратичная форма поверхности и символы Кристоффеля в нормальных координатах.

Формула первой вариации длины кривой. Лемма Гаусса о геодезической сфере.

Геодезические — локально кратчайшие кривые.

Тензор кривизны произвольной аффинной связности.

Коммутатор векторных полей, его свойства.

Инвариантное определение тензора кривизны симметричной связности.

Тензор кривизны симметричной связности, тождество Якоби.

Тензор кривизны римановой связности, его симметрии.

Тензор кривизны двумерной поверхности. Теорема Гаусса о гауссовой кривизне.

Количество независимых компонент тензора кривизны римановой связности.

Понятие степени отображения. Независимость степени от выбора регулярного значения и от гомотопии.

Понятие степени отображения. Основная теорема алгебры.

Степень отображения и интеграл.

Понятие степени отображения. Теорема Гаусса—Бонне.

Понятие степени отображения. Индекс векторного поля.

Понятие степени отображения. Теорема Брауэра.