

Лекции по классической дифференциальной
геометрии

А.О.Иванов, А.А.Тужилин

Оглавление

1	Кривые в евклидовом пространстве	6
1.1	Обозначения и напоминания	6
1.2	Параметрические кривые	7
1.3	Кривые–графики	10
1.4	Неявные кривые	11
1.5	Локальная эквивалентность	12
1.6	Длина кривой, натуральный параметр	12
1.7	Кривизна регулярной кривой	14
1.8	Плоские кривые	16
1.9	Задачи	20
1.10	Дополнительный материал	21
1.10.1	Кривая Пеано в треугольнике	21
1.10.2	Ломаная как гладкая параметрическая кривая	22
1.10.3	Длина кривой как предел длин вписанных ломаных	22
1.10.4	Соприкасающаяся окружность	23
1.10.5	О явных решениях натурального уравнения	24
1.10.6	Эволюты и эвольвенты	24
1.10.7	Маятник Гюйгенса	27
1.10.8	Определение кривой как подмногообразия	29
2	Кривые в трехмерном пространстве	30
2.1	Формулы Френе	30
2.2	Натуральные уравнения	32
2.3	Задачи	35
2.4	Дополнительный материал	37
2.4.1	Линии откоса	37
3	Поверхности. Первая фундаментальная форма	38
3.1	Параметрические поверхности	38
3.2	Поверхности–графики	40
3.3	Неявные поверхности	41
3.4	Локальная эквивалентность	42
3.5	Поверхности и отображения	43
3.6	Кривые на поверхности	44

3.7	Касательное пространство	44
3.8	Дифференциал	47
3.9	Первая фундаментальная форма	48
3.10	Длины и углы	49
3.11	Изометрии поверхностей	51
3.12	Задачи	54
3.13	Дополнительный материал	55
3.13.1	Примеры вычисления индуцированной метрики	55
3.13.2	Локсодрома	56
3.13.3	Первая квадратичная форма и объем	56
3.13.4	Изометрии евклидовой метрики	57
4	Поверхности. Вторая фундаментальная форма	59
4.1	Определение второй формы	59
4.2	Геометрический смысл второй формы — кривизны плоских сечений	62
4.3	Главные кривизны и главные направления	64
4.4	Средняя и гауссова кривизны	66
4.5	О теореме Бонне	68
4.6	Задачи	70
4.7	Дополнительный материал	71
4.7.1	Другое доказательство утверждения 4.7	71
4.7.2	Вторая форма цилиндра и теорема Менье	71
4.7.3	Главные кривизны цилиндра	72
4.7.4	Теорема Лапласа–Пуассона	73
4.7.5	Средняя и гауссова кривизны двумерной поверхности	73
4.7.6	О выборе координат на поверхности	73
4.7.7	Конформные координаты двумерной поверхности	74
4.7.8	Минимальные поверхности	74
4.7.9	Поверхности вращения постоянной гауссовой кривизны	77
4.7.10	Случай произвольной коразмерности	78
5	Элементы дифференциального исчисления на поверхностях	79
5.1	Деривационные формулы Вейнгартена–Гаусса	79
5.2	Теорема Гаусса	83
5.3	Ковариантная производная касательного векторного поля	85
5.4	Дополнительный материал	89
5.4.1	О многомерных обобщениях теоремы Гаусса	89
5.4.2	Другое доказательство утверждения 5.27	89
6	Геодезические на поверхностях	90
6.1	Определение и простейшие свойства геодезических	90
6.2	Примеры, теорема Клеро	94
6.3	Задачи	98
6.4	Дополнительный материал	99
6.4.1	Геодезические и изометрии	99

6.4.2	Другое доказательство теоремы Клеро	99
6.4.3	Экстремальные свойства геодезических	99
7	Криволинейные координаты в области и на поверхности	102
7.1	Определение криволинейных координат	103
7.2	Примеры регулярных систем координат	104
7.3	Касательное пространство к области	106
7.4	Евклидова метрика в криволинейных координатах	108
7.5	Регулярные координаты на поверхности	110
7.6	Стереографические координаты сферы	110
7.7	Задачи	113
7.8	Дополнительный материал	114
7.8.1	Свойства стереографической проекции	114
7.8.2	Многомерная стереографическая проекция	114
7.8.3	Нормальные координаты	115
7.8.4	Полугеодезические координаты	117
8	Риманова и псевдориманова метрики	119
8.1	Билинейная форма в области	119
8.2	Псевдоевклидовы пространства	122
8.3	Пространство–время	123
8.4	Геометрия псевдосферы	124
8.5	Задачи	127
8.6	Дополнительный материал	128
8.6.1	Двумерные поверхности постоянной гауссовой кривизны	128
9	Геометрия Лобачевского	131
9.1	Неевклидовы геометрии	131
9.1.1	Эллиптическая геометрия	131
9.1.2	Геометрия Лобачевского (гиперболическая геометрия)	132
9.2	Модель Пуанкаре в круге	133
9.3	Дробно-линейные преобразования	134
9.4	Запись метрики в комплексной форме	138
9.5	Модель верхней полуплоскости	139
9.6	Изометрии плоскости Лобачевского	140
9.7	Задачи	142
9.8	Дополнительный материал	143
9.8.1	Свойства стереографической проекции	143
9.8.2	Метрика в модели верхней полуплоскости	143
9.8.3	Геодезические на плоскости Лобачевского	144
9.8.4	Движения плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре в круге	144
9.8.5	Расстояние между точками на плоскости Лобачевского	144
9.8.6	Треугольники на плоскости Лобачевского	145

10 Топологические пространства и непрерывные отображения	148
10.1 Топологические пространства	148
10.1.1 Топология и топологическое пространство	148
10.1.2 Метрические пространства	149
10.1.3 Топологическая внутренность и топологическое замыкание	151
10.2 Непрерывные отображения	152
10.3 Стандартные конструкции	153
10.4 Задачи	156
10.5 Дополнительный материал	157
10.5.1 Примеры метрических пространств	157
10.5.2 Свойства метрических пространств	157
10.5.3 Примеры топологических пространств	158
11 Классы топологических пространств	159
11.1 Связность	159
11.2 Аксиомы отделимости	161
11.3 Компактность	163
11.4 Задачи	166
11.5 Дополнительный материал	167
11.5.1 Функциональная отделимость	167
11.5.2 Разбиение единицы	169
12 Многообразия	170
12.1 Топологические многообразия	170
12.2 Функции и отображения	172
12.3 Гладкие многообразия	173
12.4 Примеры гладких многообразий	174
12.5 Гладкие функции, гладкие отображения, диффеоморфизмы	175
12.6 Задание многообразий уравнениями — геометрический смысл теоремы о неявной функции	178
12.7 Задачи	181
12.8 Дополнительный материал	183
12.8.1 Патологические примеры	183
12.8.2 Задание структуры гладкого многообразия на множестве	183
12.8.3 Гомеоморфизм $\mathbb{R}P(3)$ и $SO(3)$	183
13 Касательное пространство к многообразию, дифференциал	185
13.1 Определения касательного вектора	185
13.2 Касательное расслоение	191
13.3 Определение дифференциала	192
13.4 Локальные свойства отображений	193
13.5 Задачи	198
13.6 Дополнительный материал	199
13.6.1 Пространство всех дифференцирований	199
13.6.2 Локальное устройство субмерсий и иммерсий	200

14 Вложения многообразий в евклидово пространство	202
14.1 Существование вложения	202
14.2 Теорема Сарда	205
14.3 “Слабая” теорема Уитни	207
14.4 Задачи	210
14.5 Дополнительный материал	211
14.5.1 К доказательству теоремы Сарда	211
14.5.2 Примеры погружений	211
15 Дополнительные структуры: риманова метрика, ориентируемость	213
15.1 Риманова метрика, римановы многообразия	213
15.2 Изометрии	219
15.3 Ориентируемость многообразия	220
15.4 Задачи	229
15.5 Дополнительный материал	230
15.5.1 Примеры: бутылка Клейна	230
15.5.2 Примеры: проективное пространство $\mathbb{R}P^3$	230
16 Классификация связных компактных двумерных многообразий	232
16.1 Склейки многоугольников	232
16.2 Заклеивание сферы	234
16.3 Теорема классификации	236
16.3.1 Триангуляции	237
16.3.2 Канонические склейки многоугольников	238
16.3.3 Последний шаг, эйлерова характеристика	239
Литература	242

Тема 1

Кривые в евклидовом пространстве

Классическая дифференциальная геометрия изучает объекты, расположенные в конечномерном евклидовом пространстве. Мы начнем с напоминания необходимых определений и обозначений из математического анализа и линейной алгебры.

1.1 Обозначения и напоминания

Через \mathbb{R}^n мы будем обозначать n -мерное арифметическое евклидово линейное пространство, т.е. множество всех упорядоченных наборов $x = (x^1, \dots, x^n)$ вещественных чисел x^i , на котором введена естественная структура линейного пространства, а также стандартное скалярное произведение

$$\langle (v^1, \dots, v^n), (w^1, \dots, w^n) \rangle = \sum_{i=1}^n v^i w^i.$$

Элемент из \mathbb{R}^n , состоящий из $(n-1)$ -го нуля и одной единицы, расположенной на i -ом месте, обозначим через e_i . Векторы e_1, \dots, e_n образуют ортонормированный базис пространства \mathbb{R}^n , который мы будем называть *стандартным базисом* в \mathbb{R}^n , а координаты x^i вектора $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$ относительно этого базиса — *стандартными координатами*. Векторы из \mathbb{R}^n будем также называть *точками*.

Скалярное произведение порождает *норму* $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ и *функцию расстояния* $|vw| = \|v - w\|$. С помощью функции расстояния определяются *замкнутый шар* $B_r^n(x)$, *открытый шар* $U_r^n(x)$ и *сфера* $S_r^{n-1}(x)$ радиуса r с центром в точке x :

$$\begin{aligned} B_r^n(x) &= \{y \in \mathbb{R}^n : |xy| \leq r\}, \\ U_r^n(x) &= \{y \in \mathbb{R}^n : |xy| < r\}, \\ S_r^{n-1}(x) &= \{y \in \mathbb{R}^n : |xy| = r\}. \end{aligned}$$

Пустое множество, а также произвольные объединения открытых шаров называются *открытыми множествами* в \mathbb{R}^n . Эквивалентная формулировка: подмножество

евклидова пространства *открыто*, если и только если оно вместе с каждой точкой содержит и некоторый открытый шар с центром в этой точке. Легко видеть, что произвольные объединения, а также конечные пересечения открытых множеств являются открытыми множествами (проверьте).

Перейдем теперь к определению кривых. Мы рассмотрим несколько подходов, которые приводят, вообще говоря, к разным теориям. Однако, если рассматривать “достаточно малые” фрагменты возникающих объектов, эти теории оказываются эквивалентными. Мы начнем с параметрических кривых, затем определим кривые–графики для векторнозначных функций, и, наконец, введем в рассмотрение неявные кривые, которые задаются в виде решения систем уравнений, удовлетворяющих условиям теоремы о неявной функции.

1.2 Параметрические кривые

Обозначим через $I \subset \mathbb{R}$ конечный или бесконечный *промежуток* одного из следующих видов: отрезок $[a, b]$, интервал (a, b) , полуинтервал $(a, b]$ или $[a, b)$. Для каждой точки $t \in I$ ее *окрестностью* будем называть каждое множество вида $I \cap (t - \varepsilon_1, t + \varepsilon_2)$, где ε_1 и ε_2 — произвольные положительные числа¹.

Пример 1.1. Каждая окрестность точки a отрезка $[a, b]$ является или полуинтервалом вида $[a, a + \varepsilon)$, или совпадает со всем отрезком $[a, b]$.

Рассмотрим отображение $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Для каждого $t \in I$ точка $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ имеет вид $(x^1(t), \dots, x^n(t))$, поэтому отображение γ порождает n функций $x^i(t)$, которые называются *координатными функциями отображения* γ . Напомним, что отображение γ является непрерывным (векторнозначным отображением), если и только если все его координатные функции непрерывны.

Определение 1.2. Непрерывное отображение $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *параметрической кривой*, а переменная $t \in I$ — ее *параметром*.

Замечание 1.3. Параметрическую кривую можно представить себе как математическую формализацию *движения* материальной точки в пространстве \mathbb{R}^n , при этом t соответствует времени, а $\gamma(t)$ — положению материальной точки в момент времени t ; образ кривой γ можно воспринимать как *траекторию движения* материальной точки.

Параметрические кривые в \mathbb{R}^3 называются *пространственными*, а на плоскости \mathbb{R}^2 — *плоскими*. Кривые, встречавшиеся в курсе аналитической геометрии, — прямые, окружности, эллипсы, ветви гипербол, параболы, — можно представить как образы плоских параметрических кривых.

Определение 1.4. Если при некоторых $t \neq t'$ точки $\gamma(t)$ и $\gamma(t')$ совпадают, то $P = \gamma(t) = \gamma(t')$ называется *точкой самопересечения параметрической кривой* γ . Если γ не имеет точек самопересечения, то ее называют *вложенной*.

¹В общей топологии окрестность точки понимается в более общем смысле, см. лекцию 10. В рамках данной лекции нам достаточно будет рассматривать именно такие “интервальные” окрестности.

Пример 1.5. Параметрические кривые $\gamma(t) = (A \cos(at), B \sin(bt + c))$, $t \in [0, 2\pi]$, называются *кривыми Лиссажу*, см. рис. 1.1. Эти кривые хорошо известны в технике: именно они возникают на экране осциллографа при сравнении частот двух электрических колебаний (на экран выводится светящаяся точка, координаты которой задаются как $\gamma(t)$, в результате точка замечает кривую Лиссажу). Здесь A, B — амплитуды колебаний, a, b — частоты, c — сдвиг фаз. Замкнутая устойчивая картинка на экране соответствует соизмеримости частот, т.е., в наших обозначениях, рациональности отношения a/b .

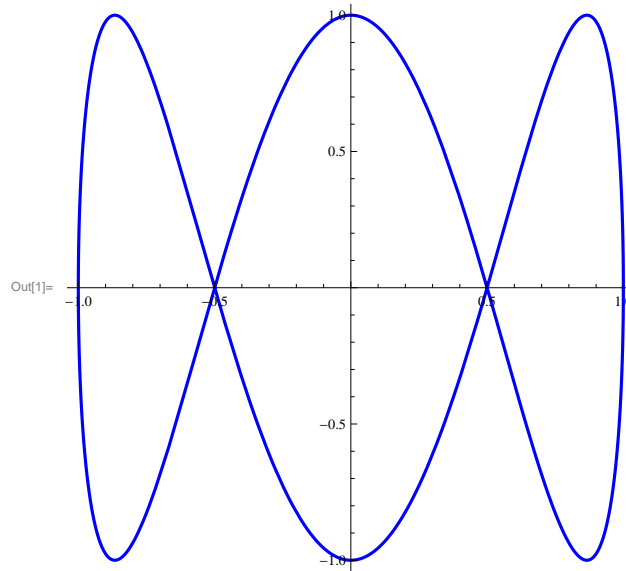


Рис. 1.1: Кривая Лиссажу для $A = B = a = 1$, $b = 3$ и $c = 0$. Точки самопересечения лежат на одной оси, значит одна частота кратна другой.

Замечание 1.6. Интуитивное представление о параметрической кривой как о траектории движения материальной точки иногда оказывается несостоятельным. Так, например, известные из курса математического анализа кривые Пеано отображают отрезок на весь треугольник или весь квадрат, см. Дополнительный материал 1.10.1. Таких “неприятностей” не возникает, если ввести дополнительные требования на рассматриваемые кривые.

Следуя традиции, мы будем называть бесконечно дифференцируемые функции *гладкими*.²

Определение 1.7. Параметрическая кривая $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *гладкой*, если все ее координатные функции $x^i(t)$ — гладкие.

Для каждого значения параметра t_0 гладкой параметрической кривой $\gamma(t)$ определен вектор $\dot{\gamma}(t_0) = (\dot{x}^1(t_0), \dots, \dot{x}^n(t_0))$, составленный из производных координатных функций, вычисленных в точке t_0 .

² Иногда в дифференциальной геометрии гладкой называют функцию непрерывно дифференцируемую столько раз, сколько требуется для решения конкретной задачи.

Определение 1.8. Вектор $\dot{\gamma}(t_0)$ называется *вектором скорости* параметрической кривой γ в точке $\gamma(t_0)$, соответствующим значению параметра $t = t_0$.

Замечание 1.9. В точках самопересечения гладкой параметрической кривой определено несколько векторов скорости. Чтобы выделить один, нужно указать значение параметра.

Точка гладкой параметрической кривой, в которой вектор скорости обращается в ноль, называется *особой* или *сингулярной*, а остальные точки — *неособыми* или *регулярными*.

Определение 1.10. Гладкая параметрическая кривая называется *регулярной*, если ее вектор скорости всюду отличен от нуля.

Замечание 1.11. Образ гладкой параметрической кривой, в отличие, скажем, от кривой Пеано, не может содержать никакого открытого шара. Это вытекает из теоремы Сарда, известной из курса математического анализа, см. также лекцию 14.

Пример 1.12. Интуитивное представление о гладкости кривой как об отсутствии изломов оказывается не всегда верным в рамках данного определения. Рассмотрим полукубическую параболу — плоскую гладкую параметрическую кривую $\gamma(t) = (t^3, t^2)$, $t \in [-1, 1]$, изображенную на рис. 1.2. Вектор скорости $\dot{\gamma}(t)$ в начале координат равен нулю, а его направление, т.е. нормированный вектор $\dot{\gamma}(t)/\|\dot{\gamma}(t)\|$, имеет разрыв, т.е. направление скорости меняется скачком. В этом случае говорят, что кривая имеет излом. Ясно, что регулярная кривая не может иметь изломов.

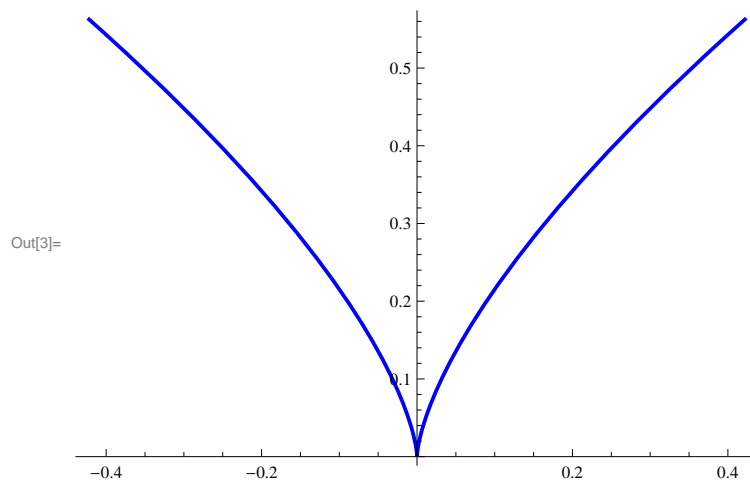


Рис. 1.2: Полукубическая параболка имеет излом.

Пусть $t(s)$ — некоторая строго монотонная непрерывная функция, отображающая промежуток I' на промежуток I , а $\gamma(t)$, $t \in I$, — некоторая параметрическая кривая. Тогда $\delta(s) = \gamma(t(s))$ — тоже некоторая параметрическая кривая.

Определение 1.13. Отображение $t: I' \rightarrow I$ называется *заменой параметра*, а про кривую $\delta(s) = \gamma(t(s))$ говорят, что она *получена из кривой γ заменой параметра $t = t(s)$* .

Если кривая δ получена из γ заменой параметра, то, очевидно, γ и δ имеют одинаковые образы. Однако, замена параметра гладкой кривой может привести к потере гладкости.

Пример 1.14. Если в гладкой параметрической кривой $\gamma(t) = (t, 0)$ сделать замену $t = t(s)$, для которой функция $t(s)$ равна s при $s \leq 0$ и $2s$ при $s \geq 0$, то полученная кривая $\gamma(t(s))$ не будет дифференцируемой в $s = 0$.

Замечание 1.15. Если замена параметра $t = t(s)$ и обратная замена параметра $s = s(t)$ — гладкие, то регулярность кривой $\gamma(t)$ равносильна регулярности кривой $\delta(s)$, полученной из $\gamma(t)$ такой заменой параметра.

Замечание 1.16. Замена параметризации может превратить нерегулярную параметрическую кривую в регулярную. Например, параметрическая кривая γ с координатными функциями $x(t) = t^3$, $y(t) = t^6$ не регулярна. Положив $\tau = t^3$, мы получим регулярную параметрическую кривую $x(\tau) = \tau$, $y(\tau) = \tau^2$. При этом, отображение $\tau(t) = t^3$ не обладает гладким обратным, так как производная $\tau'(t)$ обращается в нуль.

Замечание 1.17. Представление подмножества в виде образа параметрической кривой неоднозначно, так как одна и та же траектория–подмножество может быть по-разному пройдена. При этом неоднозначность возникает не только “при выборе скоростного режима” (монотонные замены параметра), но и при определении порядка прохождения перекрестков (точек самопересечения), а также из-за возможности пройти траекторию несколько раз или развернуться.

Предположим, что две регулярные параметрические кривые γ_1 и γ_2 пересекаются, т.е. для некоторых значений параметров выполнено равенство $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = P$.

Определение 1.18. Углом между γ_1 и γ_2 в их точке пересечения P , соответствующим значениям параметров t_1 и t_2 , называется угол между векторами скоростей $\dot{\gamma}_1(t_1)$ и $\dot{\gamma}_2(t_2)$.

Упражнение 1.19. Напишите в явном виде выражение для угла между пересекающимися регулярными параметрическими кривыми.

1.3 Кривые–графики

Пусть $f: I \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ — непрерывная векторнозначная функция.

Определение 1.20. Множество $\text{Gr}(f) = \{(t, f(t)) \mid t \in I\} \subset \mathbb{R}^n$ называется *кривой–графиком* в пространстве \mathbb{R}^n .

По определению, множество $\text{Gr}(f)$ — образ непрерывного отображения $\gamma_f(t) = (t, f(t))$, представляющего собой параметрическую кривую, про которую будем говорить, что она *соответствует кривой–графику* $\text{Gr}(f)$. Если отображение f гладкое, то $\text{Gr}(f)$ назовем *гладкой кривой–графиком*.

Замечание 1.21. Параметрическая кривая γ_f , соответствующая гладкой кривой–графику, всегда регулярна, так как $\dot{\gamma}_f(t) = (1, \dot{f}(t)) \neq 0$.

Замечание 1.22. Образ параметрической кривой не всегда является кривой–графиком. Действительно, кривая–график однозначно проецируется на координатную прямую, а, например, дуга окружности угловой величины больше π — нет.

Лемма 1.23. Пусть $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ — регулярная параметрическая кривая. Для каждого $t_0 \in I$ существует такая его окрестность $U \subset I$, что множество $\gamma(U)$ является кривой–графиком $\text{Gr}(f)$ для некоторой гладкой векторнозначной функции f (возможно, после перенумерации координат).

Доказательство. Так как $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$, для некоторого i имеем $\dot{x}^i(t_0) \neq 0$. Без ограничения общности будем считать, что $i = 1$ (иначе перенумеруем координаты). Тогда при всех t из некоторой окрестности U точки t_0 функция $x^1(t)$ строго монотонна и имеет ненулевую производную, поэтому на промежутке $I' = x^1(U)$ существует гладкая обратная функция $t = t(x^1)$. Но тогда функция

$$f(x^1) = \left(x^2(t(x^1)), \dots, x^n(t(x^1)) \right)$$

является гладкой и порождает искомую кривую–график $\text{Gr}(f)$. \square

1.4 Неявные кривые

Пусть $F^i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 2, \dots, n$, — гладкие функции, заданные на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и $c = (c^2, \dots, c^n)$ — некоторый постоянный вектор. Предположим, что семейство функций F^i удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции, т.е. множество M_c всех решений системы уравнений

$$F^i(x^1, \dots, x^n) = c^i, \quad i = 2, \dots, n,$$

не пусто, и ранг матрицы Якоби $J = (\partial F^i / \partial x^j)$ в каждой точке из M_c равен $n - 1$.

Определение 1.24. Множество M_c называется *неявной кривой*.

Замечание 1.25. Каждая гладкая кривая–график $\text{Gr}(f)$ векторнозначной функции $f = (f^2, \dots, f^n)$, определенной на некотором интервале (a, b) , является также и неявной кривой, заданной системой уравнений $x^i - f^i(x^1) = 0$, $i = 2, \dots, n$, на области $(a, b) \times \mathbb{R}^{n-1}$. Обратный результат снова не имеет места: например окружность $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1$ не представляется в виде кривой–графика.

Лемма 1.26. Пусть P — произвольная точка неявной кривой M_c . Тогда в некоторой окрестности точки P в \mathbb{R}^n множество M_c можно представить как гладкую кривую–график для некоторой векторнозначной функции f (возможно, после перенумерации координат).

Доказательство. Без ограничения общности, предположим, что минор, порожденный столбцами матрицы Якоби J в точке P , начиная со второго, отличен от нуля. Тогда, по теореме о неявной функции, в некоторой окрестности точки P система уравнений, задающая M_c , разрешима в том смысле, что переменные x^2, \dots, x^n выражаются через x^1 . Это означает, что часть множества M_c , попавшая в эту окрестность, представляется в виде $(x^1, x^2(x^1), \dots, x^n(x^1))$, т.е. является гладкой кривой–графиком. \square

1.5 Локальная эквивалентность

Подведем итог. В предыдущих разделах мы описали три разных подхода к определению понятия кривой. Как мы уже видели выше, эти три определения задают “в целом” разные объекты. Однако, в силу лемм 1.23 и 1.26 имеет место следующий результат.

Теорема 1.27. *С локальной точки зрения три способа задания регулярной кривой эквивалентны в следующем смысле:*

- если $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ — регулярная параметрическая кривая, то для каждого $t \in (a, b)$ существует такая окрестность U точки t в интервале (a, b) , что ее образ $\gamma(U)$ является и гладкой кривой–графиком, и неявной кривой;
- для каждой точки P кривой–графика $\text{Gr}(f)$ произвольной гладкой функции f , заданной на некотором интервале (a, b) , существует такая окрестность $U \subset \mathbb{R}^n$, что $U \cap \text{Gr}(f)$ есть и образ регулярной параметрической кривой, и неявная кривая;
- для каждой точки P неявной кривой M_c существует такая окрестность $U \subset \mathbb{R}^n$, что $U \cap M_c$ есть и образ регулярной параметрической кривой, и кривая–график в \mathbb{R}^n .

Приведем одно очевидное, но полезное следствие локальной эквивалентности параметрического задания кривой и представления ее в виде кривой–графика.

Следствие 1.28. *Пусть $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ — регулярная параметрическая кривая. Для каждого $t \in I$ существует такая окрестность U точки t в промежутке I , что ограничение отображения γ на U взаимно однозначно с образом.*

Ниже мы будем заниматься *локальной теорией регулярных кривых*, поэтому, опираясь на теорему 1.27, будем использовать следующее соглашение.

Соглашение 1.29. Там, где это не вызовет недоразумений, мы будем говорить просто о *регулярной кривой*, подразумевая что соответствующий объект задан удобным для нас способом (или как кривая–график, или как неявная кривая, или как регулярная параметрическая кривая). Причем в последнем случае, если не оговорено противное, параметризующее отображение предполагается взаимно однозначными с образом, а замены параметризации —гладкими и с гладкими обратными, т.е. как в замечании 1.15.

Замечание 1.30. В рамках принятого только что соглашения 1.29 можно рассматривать регулярную кривую как подмножество в объемлющем пространстве.

1.6 Длина кривой, натуральный параметр

Общее определение длины кривой обычно использует приближение кривой вписанными ломаными. Для случая гладкой параметрической кривой $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ мы сразу дадим определение через интеграл. Связь двух этих подходов обсуждается в курсе математического анализа, см. также добавление 1.10.3.

Определение 1.31. *Длиной $\ell(\gamma)$ гладкой параметрической кривой $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется величина интеграла $\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$.*

Предложение 1.32. *Длина гладкой параметрической кривой не меняется при замене параметризации.*

Доказательство. Действительно, пусть $\gamma(t)$ — гладкая кривая, $t = t(s)$ — замена параметра, где $t \in [t_0, t_1]$, а $s \in [s_0, s_1]$. Положим $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$. По теореме о замене параметра в определенном интеграле имеем:

$$\ell(\tilde{\gamma}) = \int_{s_0}^{s_1} \left\| \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \right\| ds = \int_{t(s_0)}^{t(s_1)} \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| \cdot \left| \frac{dt}{ds} \right| \frac{ds}{dt} dt.$$

Осталось избавиться от модуля в правой части. Так как $t(s)$ — строго монотонная функция, ее производная по s знакопостоянна. Если $t(s)$ монотонно возрастает, то производная dt/ds неотрицательна и модуль можно опустить. При этом, $t(s_0) = t_0$ и $t(s_1) = t_1$, поэтому правая часть равна длине $\ell(\gamma)$ параметрической кривой γ , т.е. утверждение доказано. Если же функция $t(s)$ монотонно убывает, то $dt/ds < 0$, и модуль раскрывается с минусом. Но $t(s_0) = t_1$ и $t(s_1) = t_0$, что и дает недостающий “минус” в правой части. Доказательство закончено. \square

Из утверждения 1.32 следует возможность корректно определить *длину кривой-графика* и *длину неявной кривой* как длины соответствующих (взаимно однозначных с образом) параметрических кривых.

Понятие длины позволяет выбрать на кривой некоторое естественное семейство параметризаций, соответствующих движению по траектории с единичной по величине скоростью.

Определение 1.33. Параметр s , $s \in [a, b]$, гладкой параметрической кривой $\gamma(s)$ называется *натуральным*, если величина $s - a$ равна длине части кривой γ между точками $\gamma(a)$ и $\gamma(s)$ для любого $s \in [a, b]$.

Предложение 1.34. *Параметр s на гладкой кривой $\gamma(s)$ является натуральным, если и только если $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$.*

Доказательство. Пусть s — натуральный параметр, т.е.

$$s = a + \int_a^s \|\dot{\gamma}(\sigma)\| d\sigma.$$

Дифференцируя левую и правую части равенства по s , получаем требуемое. Обратно, если $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$, то

$$s - a = \int_a^s 1 d\sigma = \int_a^s \|\dot{\gamma}(\sigma)\| d\sigma,$$

поэтому $s - a$ равно длине части кривой γ между точками $\gamma(a)$ и $\gamma(s)$, т.е. s — натуральный параметр, что и требовалось доказать. \square

Замечание 1.35. Если t — произвольный параметр гладкой кривой $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, то отображение $\varphi(t) = \int_a^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau$ задает замену параметра, приводящую к натуральному параметру $s = \varphi(t)$. Однако, после такой замены кривая может перестать быть гладкой. Дело в том, что обратная функция $\varphi^{-1}(s)$ не обязана быть гладкой. Как видно из следующего утверждения, гладкость полученной в результате кривой равносильна регулярности исходной.

Предложение 1.36. *Переход к натуральному параметру сохраняет гладкость параметрической кривой, если и только если эта кривая регулярна.*

Доказательство. Если кривая $\gamma(t)$ регулярна, то отображение

$$\varphi: t \mapsto \int_a^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau$$

имеет гладкое обратное (так как $\dot{\varphi}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| \neq 0$), поэтому результирующая кривая $\gamma(\varphi^{-1}(s))$ — это гладкая кривая с натуральным параметром $s = \varphi(t)$. Обратное утверждение следует из предложения 1.34. \square

Упражнение 1.37. Если s_1 и s_2 — два натуральных параметра на кривой γ , то $s_1 = \pm s_2 + c$ для некоторого числа $c \in \mathbb{R}$.

Определение 1.38. *Вектором ускорения гладкой параметрической кривой γ в точке $\gamma(t)$ называется вектор $\ddot{\gamma}(t) = (\ddot{x}^1(t), \dots, \ddot{x}^n(t))$.*

Предложение 1.39. *Пусть s — натуральный параметр на регулярной кривой γ . Тогда в каждой точке кривой γ вектор ускорения $\ddot{\gamma}$ перпендикулярен вектору скорости $\dot{\gamma}$.*

Доказательство. Действительно, $\langle \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \rangle = 1$ в силу предложения 1.34. Дифференцируя это равенство по s , получаем

$$2\langle \dot{\gamma}(s), \ddot{\gamma}(s) \rangle = 0,$$

что и требовалось доказать. \square

1.7 Кривизна регулярной кривой

Чтобы охарактеризовать степень искривления отдельных участков кривой, обычно используют величину ускорения при равномерном движении по рассматриваемой кривой.

Определение 1.40. Пусть γ — произвольная регулярная кривая, параметризованная натуральным параметром s . Величина $k(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\|$ называется *кривизной кривой γ в точке $\gamma(s)$* , а величина $R(s) = 1/k(s)$ — *радиусом кривизны в точке $\gamma(s)$* (если $k(s) = 0$, то полагают $R(s) = \infty$).

Из задачи 1.37 следует, что $k(s)$ и $R(s)$ не зависят от выбора натурального параметра.

Пример 1.41. Рассмотрим окружность радиуса r , заданную в параметрическом виде так: $\gamma(s) = r(\cos(s/r), \sin(s/r))$, $s \in [0, 2\pi r]$. Тогда $\gamma'(s) = (-\sin(s/r), \cos(s/r))$, и параметр s — натуральный в соответствии с предложением 1.34. Далее, $\gamma''(s) = -1/r(\cos(s/r), \sin(s/r))$, откуда $k(s) = 1/r$, а $R(s) = r$.

Утверждение 1.42. Если t — произвольный параметр на регулярной кривой γ , то кривизна в точке $\gamma(t)$ может быть вычислена по формуле

$$k(t) = \frac{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3},$$

где через $\|v \times w\|$ обозначена площадь параллелограмма, натянутого на векторы v и w из \mathbb{R}^n .

В случае кривой на плоскости \mathbb{R}^2 формула для кривизны в явном виде имеет вид

$$k(t) = \frac{|\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)|}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}},$$

где (x, y) — стандартные координаты на плоскости, а в случае пространства \mathbb{R}^3 в числителе стоит модуль векторного произведения векторов $\dot{\gamma}(t)$ и $\ddot{\gamma}(t)$.

Доказательство. Частные случаи получаются из общей формулы, геометрической интерпретации определителя и определения векторного произведения, поэтому достаточно доказать только общую формулу. Пусть сначала $t = s$ — натуральный параметр. Тогда

$$\dot{\gamma} = \tau, \quad \|\dot{\gamma}\| = 1, \quad \ddot{\gamma} = k\nu, \quad \|[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]\| = k,$$

где последнее равенство имеет место так как векторы $\dot{\gamma}$ и $\ddot{\gamma}$ перпендикулярны, поэтому в этом случае утверждение имеет место.

Теперь сделаем замену параметра. Оказывается, что общая формула при этом не изменится. Действительно, обозначая исходный параметр через s , новый параметр — через t , а дифференцирования по параметрам — соответствующими нижними индексами, получаем

$$\gamma_s = \gamma_t t_s, \quad \gamma_{ss} = \gamma_{tt} t_s^2 + \gamma_t t_{ss}$$

откуда

$$[\gamma_s, \gamma_{ss}] = [\gamma_t, \gamma_{tt}] t_s^3$$

и, наконец,

$$\frac{\|[\gamma_s, \gamma_{ss}]\|}{\|\gamma_s\|^3} = \frac{\|[\gamma_t, \gamma_{tt}]\|}{\|\gamma_t\|^3}.$$

Доказательство закончено. □

Определение 1.43. Регулярная параметрическая кривая $\gamma(t)$ называется *бирегулярной*, если ее кривизна всюду отлична от нуля.

Из утверждения 1.42 получается следующий результат.

Следствие 1.44. *Регулярная кривая γ бирегулярна, если и только если ее векторы скорости $\dot{\gamma}(t)$ и ускорения $\ddot{\gamma}(t)$ линейно независимы в каждой точке $\gamma(t)$ в произвольной параметризации.*

Конструкция 1.45. Пусть $\gamma(s)$ — натурально параметризованная бирегулярная кривая в \mathbb{R}^n . Обозначим через τ единичный вектор скорости $\dot{\gamma}(s)$ в точке $\gamma(s)$, а через ν — нормированный вектор ускорения в точке $\gamma(s)$, т.е. $\nu = \ddot{\gamma}(s)/\|\ddot{\gamma}(s)\|$. Из предложения 1.39 следует, что векторы τ и ν ортогональны.

Определение 1.46. Вектор ν называется *главной нормалью* бирегулярной кривой γ в точке $\gamma(s)$.

1.8 Плоские кривые

Рассмотрим случай плоских кривых более подробно. Воспользуемся конструкцией 1.45. Случай $n = 2$ отличается от общего тем, что пара векторов (τ, ν) образует ортонормированный базис.

Определение 1.47. Пара векторов (τ, ν) называется *репером Френе* плоской бирегулярной кривой в соответствующей её точке.

Теорема 1.48 (Формулы Френе). *Пусть γ — натурально параметризованная плоская бирегулярная кривая, и s — натуральный параметр. Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$\begin{cases} \dot{\tau} = k\nu, \\ \dot{\nu} = -k\tau, \end{cases}$$

где $k = k(s)$ — кривизна кривой γ в точке $\gamma(s)$.

Доказательство. Первое равенство мгновенно следует из определения векторов τ и ν .

Докажем второе равенство. Дифференцируя тождество $\langle \nu, \nu \rangle = 1$, находим, что $\langle \dot{\nu}, \nu \rangle = 0$, т.е. вектор $\dot{\nu}$ перпендикулярен ν и поэтому коллинеарен τ (здесь мы пользуемся тем, что кривая — плоская). Следовательно,

$$\dot{\nu} = \langle \dot{\nu}, \tau \rangle \tau.$$

Покажем, что $\langle \dot{\nu}, \tau \rangle = -k$. Для этого продифференцируем тождество $\langle \nu, \tau \rangle = 0$. Получим

$$0 = \langle \dot{\nu}, \tau \rangle + \langle \nu, \dot{\tau} \rangle = \langle \dot{\nu}, \tau \rangle + \langle \nu, k\nu \rangle = \langle \dot{\nu}, \tau \rangle + k,$$

что и требовалось доказать. \square

Для плоских кривых можно определить понятие *ориентированной* кривизны, которое в некоторых случаях оказывается более удобным.

Конструкция 1.49. Фиксируем стандартную ориентацию плоскости, т.е. объявим положительно ориентированными те базисы, матрицы перехода от которых к стандартному базису имеют положительный определитель, а все остальные — отрицательно

ориентированными. Пусть $\gamma(s)$ — натурально параметризованная плоская регулярная кривая, и $\nu_o(s)$ — семейство единичных нормалей, таких, что при каждом s пара $(\dot{\gamma}(s), \nu_o(s))$ образует положительно ориентированный базис.

Определение 1.50. Базис $(\dot{\gamma}(s), \nu_o(s))$ называется *ориентированным репером Френе*. Ориентированной кривизной $k_o(s)$ кривой γ в точке $\gamma(s)$ называется число $\langle \ddot{\gamma}(s), \nu_o(s) \rangle$.

Легко видеть, что $k_o(s) = \pm k(s)$. Кроме того, имеет место следующий аналог формул Френе из теоремы 1.48.

Теорема 1.51 (Ориентированные формулы Френе). *Справедливы следующие соотношения:*

$$\begin{cases} \dot{\tau} = k_o \nu_o, \\ \dot{\nu}_o = -k_o \tau. \end{cases}$$

Следующий результат доказывается аналогично утверждению 1.42.

Утверждение 1.52. *Если t — произвольный параметр на регулярной кривой γ , то*

$$k_o(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3},$$

где через $v \times w$ обозначен определитель матрицы, столбцы которой — компоненты векторов v и w , т.е. ориентированная площадь параллелограмма, натянутого на эти векторы. В явном виде :

$$k_o(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{\frac{3}{2}}},$$

где (x, y) — стандартные координаты на плоскости.

Теорема 1.53. *Пусть $f(s)$ — произвольная гладкая функция, заданная на промежутке I . Тогда существует плоская регулярная кривая γ , натурально параметризованная параметром s , такая, что ее ориентированная кривизна $k_o(s)$ в каждой точке $\gamma(s)$ равна $f(s)$, причем такая кривая единственна с точностью до движения плоскости, сохраняющего ориентацию.*

Доказательство. Пусть $\gamma(s)$ — произвольная натурально параметризованная регулярная плоская кривая, ориентированная кривизна которой $k_o(s)$ равна $f(s)$. Выясним, как такая кривая может выглядеть. Так как вектор $\dot{\gamma}$ — единичный, его можно представить в виде $(\cos \varphi, \sin \varphi)$, где $\varphi = \varphi(s)$. Поэтому

$$\ddot{\gamma} = \dot{\varphi} (-\sin \varphi, \cos \varphi) = \dot{\varphi} \nu_o(s),$$

откуда $\dot{\varphi} = k_o$. Следовательно, $\varphi(s) = \varphi_0 + \int_a^s f(t) dt$, $a \in I$, и

$$x^1(s) = x_0^1 + \int_a^s \cos \varphi(t) dt, \quad x^2(s) = x_0^2 + \int_a^s \sin \varphi(t) dt,$$

где φ_0 , x_0^1 и x_0^2 — некоторые числа. Таким образом, мы нашли кривую γ с точностью до чисел φ_0 , x_0^1 и x_0^2 , т.е. с точностью до поворота плоскости на угол φ_0 и сдвига на вектор (x_0^1, x_0^2) .

Покажем теперь, что построенная кривая γ — искомая. Действительно, вычислив скорость и ускорение кривой γ , заметим, что она регулярна, натурально параметризована, и ее ориентированная кривизна равна $f(s)$. Доказательство закончено. \square

Замечание 1.54. Мы нашли явные формулы для восстановления регулярной кривой γ по ее ориентированной кривизне.

Замечание 1.55. Любая гладкая функция может быть реализована как ориентированная кривизна некоторой плоской регулярной кривой.

Замечание 1.56. Чтобы задать на плоскости регулярную кривую (с точностью до движения), достаточно задать одну гладкую функцию — ориентированную кривизну этой кривой.

Замечание 1.57. Теорему 1.53 можно переформулировать и для обычной кривизны кривой. Чтобы воспользоваться разработанной выше техникой, основанной на формулах Френе, необходимо требовать бирегулярность кривой и, следовательно, положительность кривизны. Следующий результат доказывается аналогично теореме 1.53.

Теорема 1.58. Пусть $f(s)$ — произвольная положительная гладкая функция, заданная на промежутке I . Тогда существует плоская бирегулярная кривая γ , натурально параметризованная параметром s , такая, что ее кривизна $k(s)$ в каждой точке $\gamma(s)$ равна $f(s)$, причем такая кривая единственна с точностью до движения плоскости.

Замечание 1.59. Если попытаться распространить теорему 1.58 на случай произвольной регулярной кривой, то придется учесть, что кривизна такой кривой может обращаться в нуль. Однако, это приведет к дополнительной неоднозначности. Действительно, рассмотрим неотрицательную функцию $f(s)$ положительную на всем промежутке I , за исключением единственной его внутренней точки s_0 . Тогда теорема 1.58 применима к ограничению функции f на каждый из двух промежутков I_1 и I_2 , на которые распадается I после выбрасывания точки s_0 . Обозначим через γ_i , $i = 1, 2$, бирегулярную кривую восстановленную по функции $f|_{I_i}$. Обе кривые γ_i можно по непрерывности продолжить в точку s_0 . В результате получим регулярные кривые, ускорения которых обращаются в нуль в точке s_0 . Если совместить точки $\gamma_1(s_0)$ и $\gamma_2(s_0)$, а также вектора скоростей $\dot{\gamma}_1(s_0)$ и $\dot{\gamma}_2(s_0)$ с помощью некоторого движения Φ , то результате получится регулярная натурально параметризованная кривая, определенная на всем промежутке I и имеющая кривизну $f(s)$. Но движение Φ не определено однозначно: если отразить одну из кривых γ_i относительно прямой, проходящей через точку $\gamma_i(s_0)$ в направлении $\dot{\gamma}_i(s_0)$, то полученная в результате кривая также удовлетворяет всем нашим требованиям.

Определение 1.60. Соотношение $k_o(s) = f(s)$ называется *натуральным уравнением плоской кривой*. Решить натуральное уравнение означает найти натурально параметризованную регулярную кривую $\gamma(s)$, ориентированная кривизна которой равна $f(s)$.

Замечание 1.61. Часто натуральным уравнением называют соотношение $k(s) = f(s)$ на обычную кривизну плоской кривой. Однако из теоремы 1.53 и замечания 1.59 следует, что уравнение на ориентированную кривизну разрешимо для более широкого класса

функций, а множество его решений устроено проще. Поэтому мы назвали натуральным уравнением условие именно на ориентированную кривизну регулярной плоской кривой.

1.9 Задачи

Задача 1.62. Круг радиуса a катится по прямой без скольжения. Составить уравнение траектории точки, жестко связанной с кругом и находящейся на расстоянии d от его центра (при $d = a$ — *циклоида*, при $d < a$ — *укороченная циклоида*, при $d > a$ — *удлиненная циклоида*).

Задача 1.63. Ввести натуральную параметризацию на следующих кривых:

- (1) отрезке прямой $ax + by + c = 0$;
- (2) дуге окружности $x^2 + y^2 = R^2$;
- (3) графике функции $y = x^2$.

Задача 1.64. Записать явные формулы для длины кривой-графика гладкой функции $f: I \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ и для неявной кривой, заданной системой уравнений $F_i(x) = c_i$.

Задача 1.65. Вычислить кривизну следующих кривых:

- (1) окружности радиуса R ;
- (2) цепной линии, заданной графиком функции $y = a \operatorname{ch}(x/a)$, $a > 0$;
- (3) эллипса с полуосями a и b в его вершинах;
- (4) циклоиды, укороченной циклоиды, удлиненной циклоиды.

Задача 1.66. Решить натуральное уравнение $k = 1/s$.

Задача 1.67. Описать все плоские кривые постоянной кривизны.

Задача 1.68. Докажите, что объединение двух отрезков, стыкующихся под произвольным углом, можно представить как образ некоторой гладкой параметрической кривой (см. дополнительный материал 1.10.2).

Задача 1.69. Сколько, с точностью до движения, существует плоских регулярных кривых с кривизной $k(s) = \cos(s) + 1$, $s \in [0, 4\pi]$.

Задача 1.70. Не используя теорему Сарда докажите, что образ регулярной параметрической кривой не может содержать никакого открытого шара.

Задача 1.71. Приведите пример непрерывной кривой $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, для которой ограничение $\gamma|_I$ на любой невырожденный промежуток $I \subset [0, 1]$ не представляется в виде кривой-графика.

Задача 1.72. Пусть $\gamma(s)$ — натурально параметризованная бирегулярная кривая. Центром кривизны кривой γ в точке $\gamma(s)$ называется точка $\gamma(s) + R(s)\nu(s)$, где $R(s) = 1/k(s)$ — радиус кривизны, а $\nu(s)$ — главная нормаль. Множество центров кривизны называется *каустикой*, или *эволютой* кривой γ . Построить каустик для эллипса и циклоиды.

Задача 1.73. *Овалом* называется простая замкнутая кривая, кривизна которой отлична от нуля во всех ее точках (овал ограничивает строго выпуклую область). *Вершиной овала* называется точка, в которой кривизна имеет локальные минимум или максимум. Доказать, что каждый овал имеет по меньшей мере четыре вершины.

1.10 Дополнительный материал

1.10.1 Кривая Пеано в треугольнике

Кривая Пеано — непрерывная кривая, заполняющая квадрат или треугольник, может быть построена, например, следующим образом.

Конструкция 1.74. Возьмем равнобедренный прямоугольный треугольник T , разобьем его на два равнобедренных прямоугольных треугольника T_1 и T_2 , проведя высоту h из вершины прямого угла. Обозначим через r_1 отрезок, соединяющий центры треугольников T_j , $j = 1, 2$.

Чтобы построить ломаную r_2 , в каждом из треугольников T_j , $j = 1, 2$, построим такую же ломаную, как во всем треугольнике T на первом шаге. Другими словами, возьмем два экземпляра треугольника T с уже построенной ломаной r_1 , уменьшим их до размера треугольников T_j и отождествим каждый из экземпляров с соответствующим треугольником T_j , $j = 1, 2$. Полученное объединение отрезков достроим до связной ломаной, соединив две концевые вершины, ближайšie к высоте h .

Наконец, на $(i + 1)$ -м шаге построим ломаную r_{i+1} из ломаной r_i , полученной на i -м шаге. Для этого вновь разобьем треугольник T на два треугольника T_1 и T_2 , проведя в T высоту h из вершины прямого угла. Возьмем два экземпляра треугольника T с уже построенной ломаной r_i , уменьшим их до размера треугольников T_j и отождествим каждый из них с соответствующим треугольником T_j , $j = 1, 2$. Полученное объединение двух ломаных, лежащих в треугольнике T , достроим до связной ломаной, соединив две концевые вершины этих ломаных, ближайšie к высоте h .

Продолжим этот процесс до бесконечности (рис. 1.3). Предельная кривая γ называется кривой Пеано.

Несложно показать, что кривая Пеано проходит через каждую точку треугольника. Поэтому ее образ — это треугольник T .

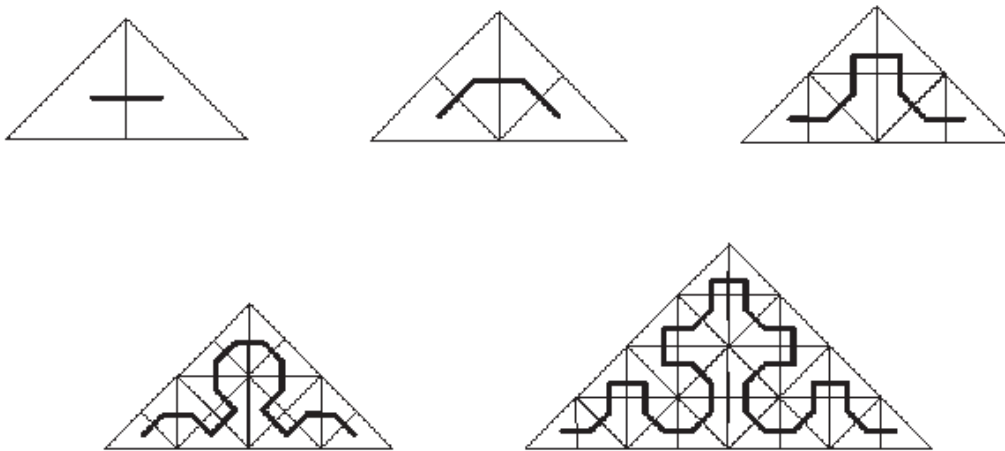


Рис. 1.3: Кривая Пеано в треугольнике.

Отметим, что можно построить много- и даже бесконечномерные аналоги кривой Пеано (теорема Мазуркевича).

Упражнение 1.75. Показать, что кривая Пеано непрерывна и проходит через каждую точку треугольника T . Найти число прообразов точек кривой Пеано.

1.10.2 Ломаная как гладкая параметрическая кривая

Рассмотрим отображение L отрезка $[-1, 1]$ в плоскость \mathbb{R}^2 , заданное координатными функциями $x^i(t)$:

$$x^1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \in [-1, 0], \\ e^{-1/t^2} & \text{при } t \in (0, 1]; \end{cases} \quad x^2(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{при } t \in [-1, 0), \\ 0 & \text{при } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Легко проверить, что функции $x^1(t)$ и $x^2(t)$ являются гладкими. Графики координатных функций $x^i(t)$, $i = 1, 2$, и сама гладкая кривая L изображены на рис. 1.4. Отметим, что построенная гладкая кривая не регулярна. Переход к натуральному параметру на ней возможен только с потерей гладкости.

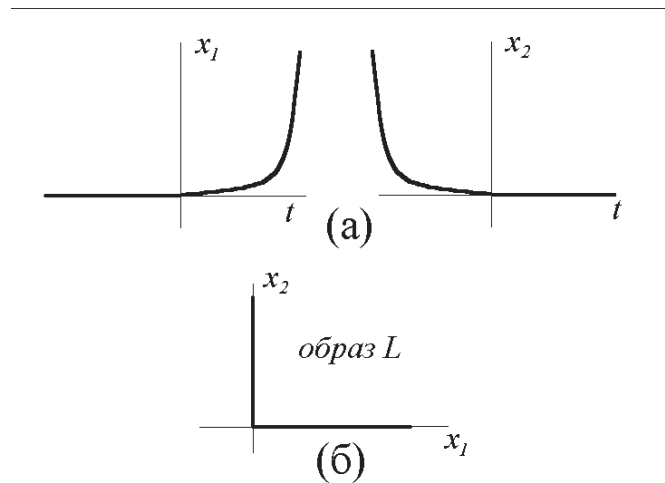


Рис. 1.4: Координатные функции и образ гладкой кривой L .

1.10.3 Длина кривой как предел длин вписанных ломаных

В разделе 1.6 мы определили длину гладкой параметрической кривой через интеграл. Более геометрический и универсальный подход состоит в определении длины кривой с помощью вписанных в нее ломаных.

Конструкция 1.76. Пусть ξ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$ точками $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Напомним, что *диаметром* δ_ξ разбиения ξ называется максимальное из чисел $t_i - t_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$. Разбиение ξ и кривая γ порождают ломаную L_ξ , последовательные вершины которой — суть точки $\gamma(t_i)$. Ломаную L_ξ будем называть *вписанной в γ ломаной, соответствующей разбиению ξ* . Напомним, что длина $\ell(L)$ произвольной ломаной L — это сумма длин всех ее ребер. Таким образом,

$$\ell(L_\xi) = \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|.$$

Определение 1.77. Непрерывная параметрическая кривая γ называется *измеримой*, если существует предел

$$\ell(\gamma) = \lim_{\delta_\xi \rightarrow 0} \ell(L_\xi).$$

Предел $\ell(\gamma)$ называется *длиной измеримой кривой γ* .

Упражнение 1.78. Доказать, что гладкая параметрическая кривая γ измерима и ее длина, как измеримой кривой, равна

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Другими словами, два определения длины гладкой кривой эквивалентны.

Упражнение 1.79. Доказать аналог утверждения 1.32 об инвариантности длины относительно замены параметризации для произвольной измеримой кривой.

1.10.4 Соприкасающаяся окружность

Определение 1.80. Центром кривизны бигулярной кривой γ в точке $\gamma(t)$ называется точка $\gamma(t) + R(t)\nu(t)$, где через $R(t)$ и $\nu(t)$ обозначены, соответственно, радиус кривизны и главная нормаль кривой γ в этой точке.

Выясним геометрический смысл радиуса и центра кривизны. Для этого определим порядок касания кривых и покажем, что окружность, касающаяся кривой в данной точке P с максимальным порядком, имеет радиус, равный радиусу кривизны кривой в точке P , а центр ее находится в центре кривизны кривой в P .

Рассмотрим на плоскости пару регулярных кривых γ_1 и γ_2 и предположим, что они пересекаются в точке P . Отнесем обе кривые к натуральному параметру s , выбрав в качестве начальной точки пересечения P . Отметим, что выбор таких параметризаций неоднозначен, так как мы можем двигаться по кривым в разных направлениях. Для каждой такой параметризации $\gamma_1(0) - \gamma_2(0) = 0$ и для некоторого $m \geq 0$ выполняется равенство $\gamma_1(s) - \gamma_2(s) = o(s^m)$ при $s \rightarrow 0$ (напомним, что векторнозначная функция $\gamma(s)$ называется $o(s^m)$ при $s \rightarrow 0$, если $\|\gamma(s)\|/s^m \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$).

Определение 1.81. Максимальное m , для которого справедливо соотношение $\gamma_1(s) - \gamma_2(s) = o(s^m)$ при $s \rightarrow 0$, где максимум берется также и по всевозможным натуральным параметризациям кривых γ_i , называется *порядком касания кривых γ_1 и γ_2* .

Пример 1.82. Пусть $\gamma(s)$ — произвольная регулярная кривая, параметризованная натуральным параметром, и $P = \gamma(0)$ — точка на ней. Рассмотрим семейство прямых на плоскости, проходящих через эту точку и тоже параметризованных натуральным параметром. Каждая такая прямая l имеет вид $l_E(s) = Es + \gamma(0)$, где E — единичный вектор. Найдем порядок касания прямой l_E и кривой γ в точке $s = 0$. Имеем:

$$\gamma(s) - l_E(s) = \gamma(0) + \dot{\gamma}(0)s + o(s) - \gamma(0) - Es = (\dot{\gamma}(0) - E)s + o(s), \quad s \rightarrow 0.$$

Поэтому все прямые, кроме $l_{\pm\dot{\gamma}(0)}$, имеют порядок касания 0, а порядок касания прямых $l_{\pm\dot{\gamma}(0)}$ не меньше 1. Таким образом, максимальный порядок касания имеет именно прямая, направленная вдоль вектора скорости, ее называют *касательной прямой*.

Перейдем теперь к окружностям, касающимся плоской регулярной кривой $\gamma(s)$, параметризованной натуральным параметром, в точке $P = \gamma(0)$. Предположим сначала, что кривизна кривой $\gamma(s)$ отлична от нуля в точке $s = 0$. Пусть $c(s)$ — натурально параметризованная окружность, касающаяся $\gamma(s)$ в точке $P = c(0)$ с порядком касания не меньше 2. Тогда вектора скоростей и вектора ускорений кривых $\gamma(s)$ и $c(s)$ в точке P совпадают. Следовательно, у этих кривых совпадают главные нормали, кривизны и центры кривизны. Поэтому центр окружности $c(s)$ находится в центре кривизны кривой γ в точке $\gamma(s)$, а радиус равен радиусу кривизны $R(s)$ кривой γ .

Пусть теперь кривизна кривой $\gamma(s)$ в точке $s = 0$ равна нулю, т.е. равно нулю ее ускорение. Поскольку у натурально параметризованной прямой ускорение также равно нулю, прямая, касающаяся кривой γ в точке $\gamma(0)$, имеет порядок касания не меньше, чем 2. Если прямые рассматривать как окружности бесконечного радиуса, то, опять же, заключаем, что и в этом случае существует единственная окружность (бесконечного радиуса), касающаяся кривой $\gamma(s)$ с порядком не меньше 2 (у других окружностей в натуральной параметризации ускорение отлично от нуля).

Итак, мы доказали следующее утверждение.

Предложение 1.83. Среди всех окружностей, проходящих через некоторую фиксированную точку P регулярной кривой, существует единственная окружность, для которой ее порядок касания с кривой больше или равен 2. Радиус этой окружности равен радиусу кривизны R кривой в точке P , а центр находится в центре кривизны.

Определение 1.84. Окружность из утверждения 1.83 называется *соприкасающейся окружностью* кривой γ в точке P .

Упражнение 1.85. Рассмотрим не только окружности, а, вообще, все кривые второго порядка, проходящие через точку регулярной кривой. Показать, что среди таких кривых найдется одна, порядок касания которой не меньше 4. Определить тип и параметры кривой второго порядка из предыдущего упражнения в терминах кривизны исходной кривой.

1.10.5 О явных решениях натурального уравнения

Натуральное уравнение в явном виде часто не решается — интегралы, как правило, не берутся. Скажем, если мы рассмотрим натуральное уравнение $k_o(s) = as + b$, то даже в этом, на первый взгляд простом случае, уже появляются специальные функции — интегралы Френеля. Однако численно найти решение не составляет труда (рис. 1.5).

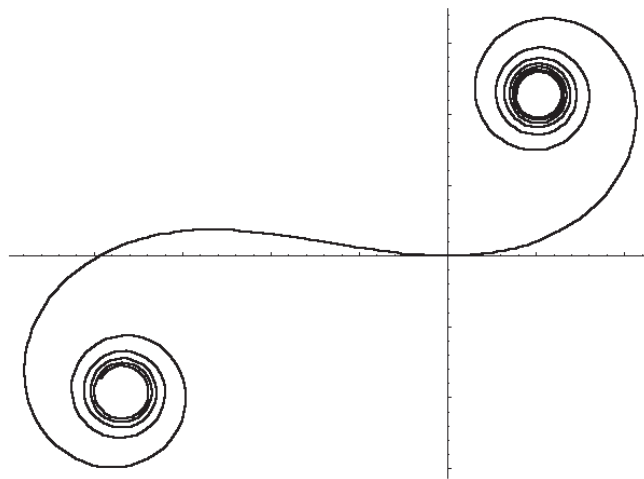


Рис. 1.5: Кривая с ориентированной кривизной $k_o(s) = 3s + 1$, $s \in [-5, 5]$.

1.10.6 Эволюты и эвольвенты

Конструкция 1.86. Пусть γ — регулярная кривая на плоскости и $\varepsilon \in \mathbb{R}$ — некоторое число. Построим новую кривую γ_ε , заменив каждую точку $\gamma(s)$ точкой, полученной смещением точки $\gamma(s)$ на вектор $\varepsilon \nu_o(s)$, т.е. $\gamma_\varepsilon(s) = \gamma(s) + \varepsilon \nu_o(s)$. Эта кривая называется (ориентированной) ε -эвидистантой кривой γ .

При малых ε эквидистанта γ_ε по-прежнему является регулярной кривой. Однако, когда ε возрастает, у эквидистант могут появляться особые точки. Опишем их.

Пусть кривая γ параметризована натуральным параметром s . Тогда вектор скорости ε -эквидистанты в силу формул Френе имеет вид

$$\dot{\gamma}_\varepsilon(s) = \dot{\gamma}(s) + \varepsilon \dot{\nu}_o(s) = (1 - \varepsilon k_o(s))\tau(s),$$

откуда следует, что точка $\gamma_\varepsilon(s)$ является особой, если и только если $k_o(s) = 1/\varepsilon$. Если последнее условие выполнено, то, очевидно, соответствующая точка эквидистанты имеет вид $\gamma_\varepsilon(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k_o(s)}\nu_o(s)$ и, в силу утверждения 1.83, совпадает с центром кривизны кривой γ в точке $\gamma(s)$. Итак, имеет место следующее утверждение.

Предложение 1.87. Вектор скорости ε -эквидистанты обращается в нуль, если и только если в соответствующей точке ориентированная кривизна исходной кривой равна $1/\varepsilon$. Множество особых точек эквидистант — это в точности множество центров кривизны исходной кривой.

Определение 1.88. Множество центров кривизны регулярной кривой γ называется *каустикой*, или *эволютой* кривой γ .

Следствие 1.89. Эволюта — это множество всех особых точек всех эквидистант.

Пример 1.90. Найдем, например, эволюту *циклоиды*, т.е. плоской кривой $\gamma(\varphi)$, заданной в виде

$$x(\varphi) = R\varphi - R\sin\varphi, \quad y(\varphi) = R - R\cos\varphi.$$

Параметр φ не является натуральным, поэтому для вычисления кривизны воспользуемся утверждением 1.52. Имеем

$$\dot{\gamma}(\varphi) = (R - R\cos\varphi, R\sin\varphi), \quad \ddot{\gamma}(\varphi) = (R\sin\varphi, R\cos\varphi),$$

$$\|\dot{\gamma}(\varphi)\| = R\sqrt{2(1 - \cos\varphi)} = 2R\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|,$$

$$\dot{\gamma}(\varphi) \times \ddot{\gamma}(\varphi) = R^2(\cos\varphi - 1) = -2R^2\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

откуда

$$k_o(\varphi) = \frac{-2R\sin^2(\varphi/2)}{8R^3|\sin(\varphi/2)|^3} = -\frac{1}{4R|\sin(\varphi/2)|}.$$

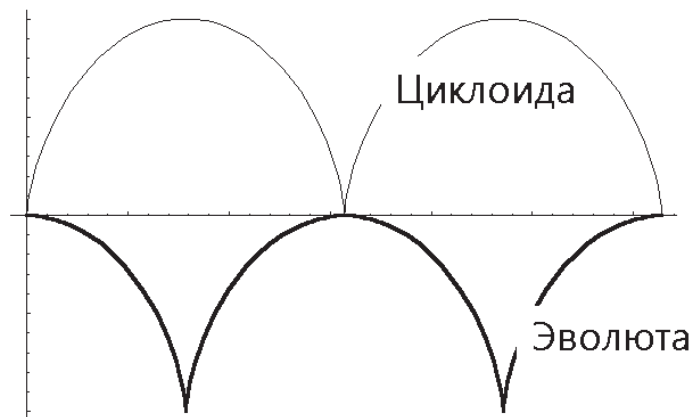


Рис. 1.6: Циклоида и ее эволюта.

Напомним, что вектор ориентированной главной нормали ν_o получается поворотом на $\pi/2$ нормированного вектора скорости, поэтому

$$\nu_o(\varphi) = \frac{1}{2R \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|} (-R \sin \varphi, R - R \cos \varphi),$$

откуда эволюта циклоиды может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} (R\varphi - R \sin \varphi, R - R \cos \varphi) - 4R \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| \frac{1}{2R \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|} (-R \sin \varphi, R - R \cos \varphi) = \\ = (R\varphi - R \sin \varphi, R - R \cos \varphi) - 2(-R \sin \varphi, R - R \cos \varphi) = \\ = (R\varphi + R \sin \varphi, R \cos \varphi - R). \end{aligned}$$

Заметим, что полученная эволюта — это снова циклоида, только смещенная (рис. 1.6). Итак, доказано следующее утверждение.

Предложение 1.91. Эволюта циклоиды — это снова циклоида.

Упражнение 1.92. Описать эквидистанты для циклоиды.

Упражнение 1.93. Построить эквидистанты и эволюту эллипса (рис. 1.7).

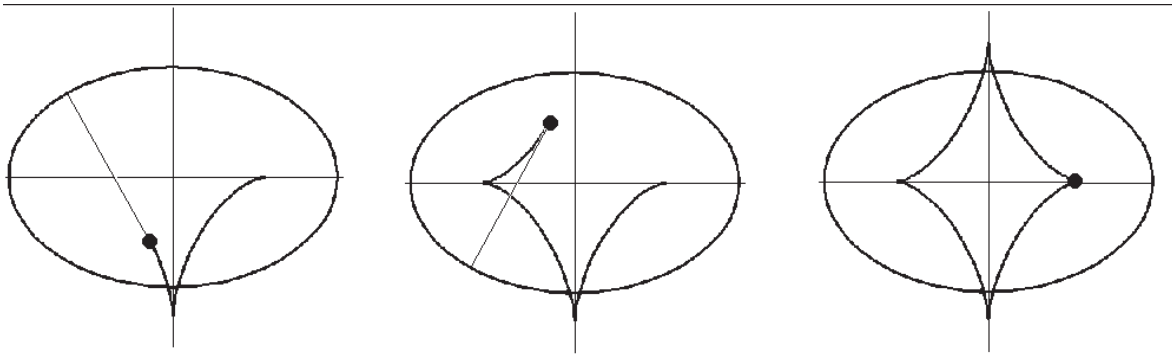


Рис. 1.7: Построение эволюты эллипса: жирная точка — центр кривизны, тонкий прямолинейный отрезок — радиус соответствующей соприкасающейся окружности.

Рассмотрим теперь следующую обратную задачу. Пусть на плоскости задана регулярная кривая δ . Существует ли кривая γ , для которой δ является эволютой?

Предположим, что $\gamma(s)$ — это искомая кривая, параметризованная натуральным параметром. Тогда, по определению эволюты, имеем:

$$\delta(s) = \gamma(s) + \frac{\nu_o(s)}{k_o(s)}.$$

Продифференцировав это равенство по s , получаем в силу формул Френе

$$\frac{d\delta}{ds} = \dot{\gamma} + \frac{\dot{\nu}_o}{k_o} - \frac{\nu_o \dot{k}_o}{k_o^2} = -\frac{\nu_o \dot{k}_o}{k_o^2}.$$

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 1.94. *Нормаль к регулярной кривой, проведенная в точке P , является касательной к эволюте этой кривой в соответствующей точке $P + \frac{1}{k_o} \nu_o$. Другими словами, регулярная кривая перпендикулярна каждой касательной своей эволюты.*

Конструкция 1.95. Пусть $\gamma(s)$ — регулярная кривая, параметризованная натуральным параметром. Построим в каждой ее точке касательную прямую и проведем из некоторой начальной точки кривую δ , перпендикулярную всем построенным касательным. Эта кривая δ может быть записана в виде $\delta(s) = \gamma(s) + \tau(s)f(s)$, где $f(s)$ — некоторая гладкая функция. Условие перпендикулярности дает следующее уравнение на $f(s)$:

$$\langle \dot{\delta}, \tau \rangle = \langle \dot{\gamma}(s) + \dot{\tau}(s)f(s) + \tau(s)\dot{f}(s), \tau(s) \rangle = 0, \quad \text{т.е.} \quad \dot{f}(s) = -1.$$

Поэтому $f(s) = C - s$, и окончательно, $\delta(s) = \gamma(s) + \tau(s)(C - s)$.

Определение 1.96. Кривая δ , перпендикулярная ко всем касательным данной кривой, называется *эвольвентой* этой кривой.

Предложение 1.97. *Каждая эвольвента натурально параметризованной кривой $\gamma(s)$ может быть записана в виде $\delta(s) = \gamma(s) + \tau(s)(C - s)$.*

Замечание 1.98. Эвольвенте соответствует следующая механическая модель. Представим себе, что на кривую $\gamma(s)$ наклеена нерастяжимая нить, начальный отрезок длины C которой свисает в точке $\gamma(0)$. Натянем нить вдоль касательной к кривой в точке $\gamma(0)$ и будем сматывать ее с кривой так, чтобы она в каждый момент времени оставалась натянутой по соответствующей касательной. Конец нити в этом случае опишет эвольвенту с параметром C .

Следствие 1.99. *Каждая регулярная кривая является некоторой эвольвентой своей эволюты.*

Упражнение 1.100. Найти эвольвенты окружности и циклоиды.

1.10.7 Маятник Гюйгенса

В 1657 г. Гюйгенс (Huygens) изобрел и изготовил особо точные (для того времени) часы, за что получил огромную денежную премию, а принципиальная схема этих часов стала эмблемой XVII века. Такое внимание к часам в эпоху географических открытий, бурного развития колоний, мореплавания и т.п. объяснить легко — точные часы необходимы для вычисления географической долготы. Периодические свойства маятников были уже известны во времена Гюйгенса, однако проблема состояла в том, что период колебаний, скажем, кругового маятника (точка движется по дуге окружности) меняется при затухании, что крайне затрудняет измерение времени с помощью часов, в основе которых лежит такой маятник³. Чтобы преодолеть эту трудность, нужно чтобы маятник двигался не по окружности, а по какой-нибудь другой кривой. Подходящая кривая — циклоида — была найдена Гюйгенсом. Он показал, что период колебания циклоидального маятника не зависит от начального положения точки на дуге циклоиды. Удивительно, что, как выяснилось через 150 лет, кривая, обладающая таким свойством, единственна. Этот факт был установлен в 1823 г. Абелем (Abel), который для этого решил одно из первых в истории интегральных уравнений. Однако изучение теоремы Абеля выходит за рамки данного курса. Мы только убедимся, следуя Гюйгенсу, что циклоида действительно обладает искомым свойством.

³ Зависимость периода T от угла φ размаха колебаний кругового маятника имеет вид $T \approx 2\pi\sqrt{l/g}(1 + \varphi^2/16)$, где l — длина маятника и g — ускорение свободного падения.

Рассмотрим дугу циклоиды, выпуклую вниз и заданную параметрически в следующем виде:

$$x(t) = R(t + \pi + \sin t), \quad y(t) = R - R \cos t, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Легко сосчитать, что если выбрать в качестве начальной точки самую нижнюю точку O циклоиды, т.е. точку $t = 0$, то натуральный параметр s будет иметь следующий простой вид: $s = \sqrt{8Ry}$. Чтобы найти уравнение движения маятника, запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + mgy = \text{const}.$$

Тогда, если h_0 — это начальная высота точки, а начальная скорость равна нулю, то $v^2 = 2g(h_0 - y)$. Учитывая, что при движении от начальной точки расстояние s до точки O убывает, получаем следующее дифференциальное уравнение: $ds/dt = -\sqrt{2g(h_0 - y)}$. Но $y = s^2/(8R)$, поэтому имеем окончательно:

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{\frac{g}{4R}(s_0^2 - s^2)}.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, находим, что $s = s_0 \cos(t\sqrt{g/(4R)})$, поэтому период колебаний циклоидального маятника равен $2\pi\sqrt{4R/g}$, что не зависит от начального положения точки на циклоиде. Итак, мы доказали следующее важное свойство циклоиды.

Предложение 1.101. *Время движения материальной точки по циклоиде к положению равновесия без начальной скорости не зависит от начального положения точки на циклоиде.*

Это свойство циклоиды называется *таутохронностью*.

Однако, мало было открыть это замечательное свойство циклоидального маятника. Нужно было еще решить нетривиальную инженерную задачу: заставить маятник колебаться вдоль циклоиды. Для этого Гюйгенс воспользовался тем уже известным нам фактом, что среди эвольвент циклоиды есть ее эволюта, которая, как мы знаем, конгруэнтна самой циклоиде. В итоге была получена конструкция, изображенная на рис. 1.8. Движение математического маятника ограничено двумя пластинами, имеющими форму дуг циклоид. Поэтому маятник в свою очередь сам описывает циклоиду и, значит, совершает таутохронные колебания.

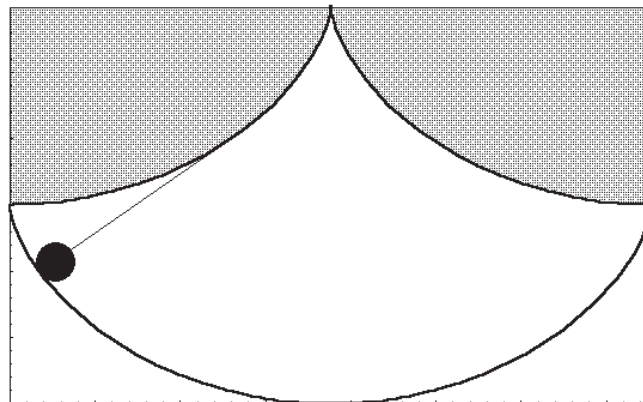


Рис. 1.8: Маятник Гюйгенса.

1.10.8 Определение кривой как подмногообразия

Определение 1.102. Непрерывная параметрическая кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $[a, b]$ — конечный отрезок, называется *простой*, если она взаимно-однозначна с образом. Непрерывная параметрическая кривая $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *простой*, если она представляет собой ограничение простой непрерывной параметрической кривой $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ на промежуток $I \subset [a, b]$.

Замечание 1.103. Простая непрерывная параметрическая кривая по определению параметризована *конечным* промежутком.

Определение 1.104. Кривой в пространстве \mathbb{R}^n называется подмножество Γ пространства \mathbb{R}^n , такое, что у каждой точки $x \in \Gamma$ имеется некоторая открытая окрестность $V \subset \mathbb{R}^n$, для которой $\Gamma \cap V$ является образом простой непрерывной параметрической кривой γ . При этом γ называется *представлением кривой Γ в окрестности точки x* . Если в окрестности каждой точки x кривой Γ существует гладкое (регулярное) представление γ , то кривая Γ называется *гладкой* (соответственно, *регулярной*).

Упражнение 1.105. Покажите, что график любой гладкой функции задает регулярную кривую на плоскости \mathbb{R}^2 . Пусть $F(x, y)$ — гладкая функция, дифференциал которой отличен от нуля во всех точках множества $\Gamma = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$. Покажите, что Γ — регулярная кривая.

Упражнение 1.106. Покажите, что объединение координатных лучей Ox и Oy является гладкой, но не регулярной кривой на плоскости. Является ли кривой объединение координатных прямых Ox и Oy на плоскости? Тот же вопрос для замкнутого круга.

Тема 2

Кривые в трехмерном пространстве

Рассмотрим теперь регулярные кривые в трехмерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 . В предыдущем разделе мы построили репер Френе для плоской бирегулярной кривой и изучили его зависимость от натурального параметра, что, в конечном счете, позволило нам решить натуральное уравнение. В трехмерном пространстве двух векторов — скорости и главной нормали, — не хватает для репера, поэтому нужны дополнительные построения.

2.1 Формулы Френе

Конструкция 2.1. Пусть $\gamma(s)$ — натурально параметризованная бирегулярная кривая в \mathbb{R}^3 . Как и выше, пусть τ — вектор скорости $\dot{\gamma}(s)$, и ν — главная нормаль к γ в точке $\gamma(s)$. Обозначим через β — векторное произведение $[\tau, \nu]$. Тройка (τ, ν, β) образует положительно ориентированный ортонормальный базис в \mathbb{R}^3 .

Определение 2.2. Вектор β называется *бинормалью* к бирегулярной кривой γ в точке $\gamma(s)$, а базис (τ, ν, β) — *репером Френе* кривой γ в точке $\gamma(s)$.

Лемма 2.3. Производная $\dot{\beta}(s)$ вектора бинормали по натуральному параметру коллинеарна вектору главной нормали ν .

Доказательство. По формуле Лейбница имеем

$$\dot{\beta} = [\tau, \nu] \cdot = [\dot{\tau}, \nu] + [\tau, \dot{\nu}] = [\tau, \dot{\nu}],$$

где последнее равенство справедливо, так как вектор $\dot{\tau}$, равный $\ddot{\gamma}$, коллинеарен ν и, значит, $[\dot{\tau}, \nu] = 0$. Отсюда, в частности, следует, что вектор $\dot{\beta}$ ортогонален τ . Далее, так как вектор $\beta(s)$ — единичный при каждом s , то $\dot{\beta}$ перпендикулярен β . Следовательно, $\dot{\beta}$ коллинеарен вектору ν , что и требовалось. \square

Определение 2.4. Величина $\varkappa = -\langle \dot{\beta}, \nu \rangle$ называется *кручением* бирегулярной кривой γ в точке $\gamma(s)$.

Замечание 2.5. Из определения и леммы 2.3 вытекает, что $\dot{\beta} = -\varkappa \nu$. Ясно, что кручение \varkappa является гладкой функцией натурального параметра s .

Теорема 2.6 (Формулы Френе). *В сделанных предположениях справедливы следующие соотношения:*

$$\begin{cases} \dot{\tau} = k \nu, \\ \dot{\nu} = -k \tau + \varkappa \beta, \\ \dot{\beta} = -\varkappa \nu. \end{cases}$$

где k и \varkappa — кривизна и кручение бирегулярной кривой γ в точке $\gamma(s)$, соответственно.

Доказательство. Первое и третье уравнения — это фактически определения кривизны и кручения. Осталось доказать второе равенство.

Так как вектор $\dot{\nu}$ перпендикулярен ν , то его можно разложить по векторам τ и β . Положим $\dot{\nu} = a \tau + b \beta$. В силу ортонормальности репера Френе имеем $a = \langle \dot{\nu}, \tau \rangle$ и $b = \langle \dot{\nu}, \beta \rangle$. Мы должны показать, что $a = -k$, а $b = \varkappa$.

Так как $\langle \nu, \tau \rangle = \langle \nu, \beta \rangle = 0$, то, дифференцируя эти равенства, заключаем, что

$$0 = \langle \dot{\nu}, \tau \rangle + \langle \nu, \dot{\tau} \rangle = a + k, \quad 0 = \langle \dot{\nu}, \beta \rangle + \langle \nu, \dot{\beta} \rangle = b - \varkappa,$$

что и требовалось доказать. \square

Приведем теперь явные формулы для вычисления кривизны и кручения кривой в произвольной параметризации.

Теорема 2.7. *Пусть $\gamma(t)$ — бирегулярная кривая. Тогда*

$$k = \frac{\|[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}, \quad \varkappa = \frac{(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma})}{\|[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]\|^2},$$

где через (u, v, w) обозначено смешанное произведение векторов u, v и w из \mathbb{R}^3 .

Доказательство. Пусть сначала $t = s$ — натуральный параметр. Тогда

$$\dot{\gamma} = \tau, \quad \|\dot{\gamma}\| = 1, \quad \ddot{\gamma} = k \nu, \quad \|[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]\| = k$$

и

$$\ddot{\gamma} = \dot{k} \nu + k(-k \tau + \varkappa \beta), \quad (\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}) = k^2 \varkappa,$$

поэтому в этом случае теорема имеет место.

Сделаем замену параметра. Оказывается, что приведенные формулы при этом не изменятся. Действительно, обозначая начальный параметр через s , новый параметр — через t , а дифференцирования по параметрам — соответствующими нижними индексами, получаем

$$\gamma_s = \gamma_t t_s, \quad \gamma_{ss} = \gamma_{tt} t_s^2 + \gamma_t t_{ss}, \quad \gamma_{sss} = \gamma_{ttt} t_s^3 + 3\gamma_{tt} t_s t_{ss} + \gamma_t t_{sss},$$

откуда

$$[\gamma_s, \gamma_{ss}] = [\gamma_t, \gamma_{tt}] t_s^3, \quad (\gamma_s, \gamma_{ss}, \gamma_{sss}) = (\gamma_t, \gamma_{tt}, \gamma_{ttt}) t_s^6$$

и, наконец,

$$\frac{\|[\gamma_s, \gamma_{ss}]\|}{\|\gamma_s\|^3} = \frac{\|[\gamma_t, \gamma_{tt}]\|}{\|\gamma_t\|^3} \quad \text{и} \quad \frac{(\gamma_s, \gamma_{ss}, \gamma_{sss})}{\|[\gamma_s, \gamma_{ss}]\|^2} = \frac{(\gamma_t, \gamma_{tt}, \gamma_{ttt})}{\|[\gamma_t, \gamma_{tt}]\|^2}.$$

Доказательство закончено. \square

Упражнение 2.8. Пусть t — произвольный параметр пространственной бигулярной кривой γ . Проверить справедливость следующих формул для вычисления векторов бинормали и главной нормали:

$$\beta(t) = \frac{[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]}{\|[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]\|}, \quad \nu(t) = [\beta, \tau].$$

2.2 Натуральные уравнения

Оказывается, кривизна и кручение полностью определяют форму бигулярной кривой в трехмерном пространстве.

Теорема 2.9. Пусть $f(s)$ и $g(s)$ — две гладкие функции на отрезке $[a, b]$, причем функция $f(s)$ положительна. Тогда существует единственная, с точностью до сохраняющего ориентацию движения пространства, натурально параметризованная кривая $\gamma(s)$, такая, что ее кривизна $k(s)$ и кручение $\kappa(s)$ равны соответственно $f(s)$ и $g(s)$.

Доказательство. Формулы Френе, в которые вместо кривизны подставлена функция f , а вместо кручения — функция g , можно рассматривать как систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка с девятью неизвестными — компонентами векторов τ , ν и β . Эту систему будем обозначать символом (*). Нам будет удобно записать ее в матричном виде. Пусть $\tau = (\tau^1, \tau^2, \tau^3)$, $\nu = (\nu^1, \nu^2, \nu^3)$, $\beta = (\beta^1, \beta^2, \beta^3)$, тогда система (*) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{\tau}^1 & \dot{\tau}^2 & \dot{\tau}^3 \\ \dot{\nu}^1 & \dot{\nu}^2 & \dot{\nu}^3 \\ \dot{\beta}^1 & \dot{\beta}^2 & \dot{\beta}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f & 0 \\ -f & 0 & g \\ 0 & -g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau^1 & \tau^2 & \tau^3 \\ \nu^1 & \nu^2 & \nu^3 \\ \beta^1 & \beta^2 & \beta^3 \end{pmatrix}.$$

Матрицу из системы (*), строками которой являются координаты векторов τ , ν и β , обозначим через η , а матрицу, содержащую f и g , — через Ω . Таким образом, система (*) имеет вид $\dot{\eta} = \Omega\eta$. Отметим, что Ω — кососимметричная матрица.

Выберем в \mathbb{R}^3 некоторый ортонормальный положительно ориентированный репер (τ_0, ν_0, β_0) . По теореме существования и единственности решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений существуют и единственны вектор-функции $\tau(s)$, $\nu(s)$, $\beta(s)$, удовлетворяющие системе (*) и начальным условиям $\tau(a) = \tau_0$, $\nu(a) = \nu_0$, $\beta(a) = \beta_0$. Положим

$$\gamma(s) = \gamma_0 + \int_a^s \tau(t) dt,$$

где γ_0 — произвольный вектор, и покажем, что γ — искомая кривая, т.е. γ — бирегулярная кривая, параметризованная натуральным параметром s , её кривизна $k(s)$ равна $f(s)$, а кручение $\varkappa(s)$ равно $g(s)$.

Лемма 2.10. *При каждом s тройка $(\tau(s), \nu(s), \beta(s))$ образует ортонормальный положительно ориентированный репер.*

Доказательство. Ортонормированность репера $(\tau(s), \nu(s), \beta(s))$ равносильна ортогональности матрицы $\eta(s)$ при каждом s , т.е. $\eta^T(s)\eta(s) = E$, где E — единичная матрица. Так как начальное условие (τ_0, ν_0, β_0) представляет собой ортонормальный репер, то при $s = a$ матрица $\eta(a)$ ортогональна. Поэтому достаточно проверить, что матрица $\eta^T(s)\eta(s)$ не зависит от s . Для этого продифференцируем выражение $\eta^T(s)\eta(s)$ по s и воспользуемся тем, что $\dot{\eta}(s) = \Omega\eta$. Имеем:

$$(\eta^T \eta)' = \dot{\eta}^T \eta + \eta^T \dot{\eta} = \eta^T \Omega^T \eta + \eta^T \Omega \eta = \eta^T (\Omega^T + \Omega) \eta = 0,$$

где последнее равенство следует из кососимметричности матрицы Ω , что и требовалось.

Положительность ориентации репера $(\tau(s), \nu(s), \beta(s))$ при каждом s следует из того, что репер (τ_0, ν_0, β_0) ориентирован положительно по предположению, а определитель матрицы $\eta(s)$ не обращается в нуль ни при каком s , значит ориентация не меняется. Лемма доказана. \square

Проверим, что γ — искомая кривая. Так как $\dot{\gamma}(s) = \tau(s)$, то из леммы 2.10 следует, что γ — регулярна, и s — натуральный параметр. Продифференцируем еще раз и воспользуемся тем, что γ — решение системы (*): $\ddot{\gamma}(s) = \dot{\tau}(s) = f(s)\nu(s)$. По предположению функция $f(s)$ положительна, а $\nu(s)$ — единичный вектор в силу леммы 2.10, поэтому $f(s)$ совпадает с кривизной, а $\nu(s)$ — с главной нормалью кривой γ в точке $\gamma(s)$. Так как $f(s) > 0$ при любом s , то кривая γ — бирегулярна. Далее, поскольку каждый из ортонормальных реперов $(\tau(s), \nu(s), \beta(s))$ положительно ориентирован, то $\beta(s)$ совпадает с бинормалью к γ . Наконец, по условию $\dot{\beta}(s) = -g(s)\nu(s)$, откуда $g(s)$ совпадает с кручением кривой γ . Таким образом, доказано существование кривой γ .

Теперь докажем теперь единственность кривой γ . Пусть имеются две натурально параметризованные параметром s кривые γ_1 и γ_2 с одинаковыми кривизной k и кручением \varkappa . С помощью движения совместим их начальные точки и начальные реперы Френе. Полученные кривые вновь обозначим теми же буквами. Пусть $(\tau_i(s), \nu_i(s), \beta_i(s))$ — семейство реперов Френе для кривой γ_i . Заметим, что эти реперы удовлетворяют одной и той же системе обыкновенных дифференциальных уравнений Френе и имеют одинаковые начальные условия. Отсюда по теореме единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения реперы Френе кривых γ_i совпадают в соответствующих точках. В частности, совпадают векторы $\tau_i(s)$. Наконец, так как $\gamma_i(s)$ является решением дифференциального уравнения $\dot{\gamma}_i(s) = \tau_i(s)$ с одинаковыми начальными условиями, кривые γ_i совпадают. Теорема доказана. \square

Определение 2.11. Если $f(s)$ и $g(s)$ — две гладкие функции, такие, что $f(s) > 0$ при всех s , то условия $k(s) = f(s)$, $\varkappa(s) = g(s)$ на кривизну k и кручение \varkappa кривой γ называются *натуральными уравнениями пространственной кривой*. Решить натуральные уравнения означает найти натурально параметризованную бирегулярную кривую $\gamma(s)$ с кривизной $f(s)$ и кручением $g(s)$.

Следствие 2.12. *Натуральное уравнение пространственной кривой всегда имеет решение. Более того, это решение единственно с точностью до сохраняющего ориентацию движения пространства \mathbb{R}^3 .*

Замечание 2.13. Напомним, что в плоском случае по одной гладкой функции — ориентированной кривизне — однозначно восстанавливается регулярная (не обязательно бирегулярная) кривая. Дело в том, что в двумерном случае семейство ориентированных главных нормалей регулярной кривой продолжается по непрерывности в те точки кривой, в которых ускорение обращается в нуль, т.е. нарушается бирегулярность. В трехмерном пространстве такое продолжение, вообще говоря, невозможно, так как в окрестности точки, в которой нарушается бирегулярность, прямая, проведенная вдоль главной нормали, может меняться скачком.

Упражнение 2.14. Привести пример регулярной кривой $\gamma(s)$, для которой выполнено равенство $(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dddot{\gamma}) = 0$, но кривая γ не лежит ни в одной двумерной плоскости. Может ли такая кривая быть бирегулярной? Исследовать поведение главной нормали построенной кривой в окрестности точек, в которых нарушается бирегулярность.

2.3 Задачи

Задача 2.15. Найти векторы репера Френе и вычислить кривизну и кручение:

- (1) винтовой линии $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$;
- (2) кривой $\gamma(t) = (t^2, 1 - t, t^3)$.

Задача 2.16. Показать, что если кривые отличаются на движение, то они имеют одинаковые кривизну и кручение в соответствующих точках.

Задача 2.17. Доказать, что кручение бигулярной кривой в \mathbb{R}^3 равно тождественно нулю тогда, и только тогда, когда эта кривая лежит в некоторой плоскости. Найти уравнение этой плоскости в пространстве.

Задача 2.18. Верно ли, что если в каждой точке регулярной кривой γ в \mathbb{R}^3 выполняется равенство

$$(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\dot{\gamma}}) = 0,$$

то γ — плоская кривая?

Задача 2.19. Описать класс бигулярных кривых в \mathbb{R}^3 с постоянными кривизной и кручением.

Задача 2.20. Показать, что каждая кривая постоянной ненулевой кривизны k может быть получена из натурально параметризованной кривой $\tau(s)$, лежащей на единичной сфере, следующим образом:

$$\gamma(s) = \frac{1}{k} \int_0^{sk} \tau(\sigma) d\sigma + \gamma(0).$$

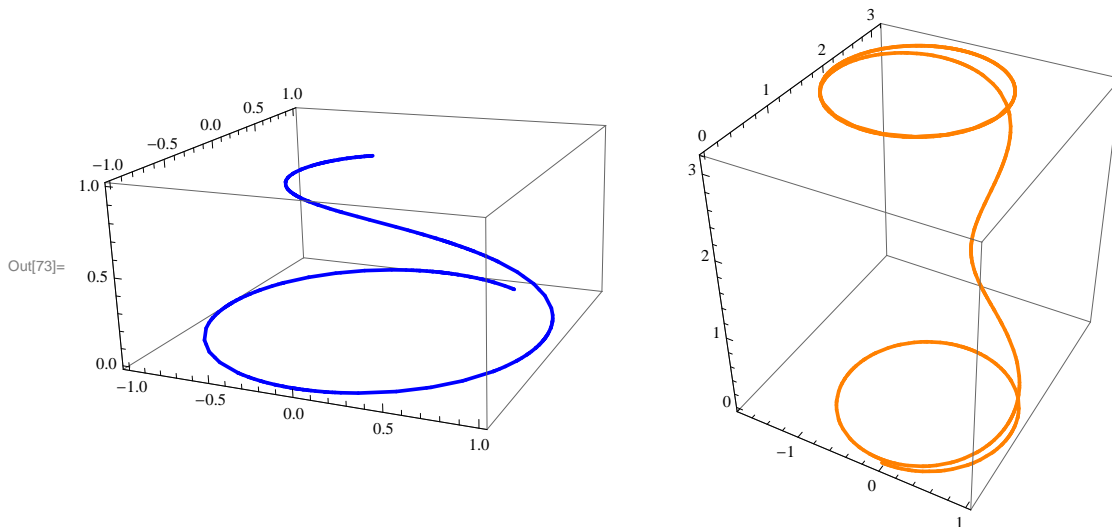


Рис. 2.1: Пример кривой постоянной кривизны. Справа показана сама кривая γ , а слева — соответствующая кривая τ на сфере.

Задача 2.21. Описать класс бигулярных кривых в \mathbb{R}^3 с постоянным кручением.

Задача 2.22. Доказать, что кривизна бигулярной кривой в \mathbb{R}^3 пропорциональна кручению, если и только если найдется постоянный ненулевой вектор u , такой, что $\langle u, \tau \rangle = \text{const}$.

Задача 2.23. Доказать, что бигулярная кривая в \mathbb{R}^3 с ненулевым кручением \varkappa лежит на сфере радиуса R тогда, и только тогда, когда справедливо соотношение

$$R^2 = \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{(k')^2}{(\varkappa k)^2} \right),$$

где k — кривизна кривой.

2.4 Дополнительный материал

2.4.1 Линии откоса

Бирегулярная кривая называется *линией откоса*, если вдоль нее отношение кручения к кривизне не меняется, т.е. $k(s)/\varkappa(s) = \text{const}$. Опишем класс таких кривых.

Положим для удобства $k(s)/\varkappa(s) = \text{tg } \alpha$, где α — некоторый фиксированный угол. Тогда указанное соотношение можно переписать в виде

$$k(s) \cos \alpha - \varkappa(s) \sin \alpha = 0.$$

Умножая первое из уравнений Френе на $\cos \alpha$, а последнее — на $\sin \alpha$ и вычитая из первого уравнения последнее, получаем

$$\tau'(s) \cos \alpha - \beta'(s) \sin \alpha = \nu(s) (k(s) \cos \alpha - \varkappa(s) \sin \alpha) = 0.$$

Поэтому единичный вектор $m = \tau(s) \cos \alpha - \beta(s) \sin \alpha$ не меняется вдоль кривой. В то же время, $\langle m, \tau(s) \rangle = \cos \alpha$, поэтому угол между вектором m и касательным вектором к кривой γ постоянен и равен α . Проведем через каждую точку кривой прямую в направлении вектора m . Получим цилиндрическую поверхность. Очевидно, кривая γ лежит на этой цилиндрической поверхности, причем при разворачивании поверхности в плоскость, кривая превращается в прямую, пересекающуюся с образующей прямой под углом α . Оказывается, что верно и обратное утверждение.

Предложение 2.24. *Всякая линия откоса есть такая линия на подходящей цилиндрической поверхности, которая переходит в прямую после разворачивания поверхности в плоскость. Обратное: всякая кривая, обладающая указанным свойством, есть линия откоса.*

Доказательство. Нам осталось доказать лишь обратное утверждение. Пусть m — направляющий вектор прямых, образующих цилиндрическую поверхность. Тогда по условию $\langle m, \tau(s) \rangle = \cos \alpha = \text{const}$. Продифференцировав это равенство по s , получим $\langle m, k(s)\nu(s) \rangle = 0$. Поскольку кривая бирегулярна, ее кривизна не обращается в нуль. Поэтому $\langle m, \nu(s) \rangle = 0$ для любого s , т.е. существуют такие функции $x(s)$ и $y(s)$, что $m = x(s)\tau(s) + y(s)\beta(s)$. Но, напомним, что $\langle m, \tau(s) \rangle = \cos \alpha$, откуда $x(s) = \text{const} = \cos \alpha$, а $y(s) = \text{const} = \sin \alpha$, т.е. $m = \tau(s) \cos \alpha + \beta(s) \sin \alpha$. Продифференцировав последнее равенство, из формул Френе получим $k(s) \cos \alpha + \varkappa(s) \sin \alpha = 0$, т.е. $\varkappa(s)/k(s) = \text{const}$.

Итак, γ — это линия откоса. Утверждение доказано. \square

Тема 3

Поверхности. Первая фундаментальная форма

Понятие кривых естественным образом обобщается на объекты большей размерности, которые называются поверхностями. Как и в случае кривых, мы рассмотрим несколько подходов к определению понятия поверхности, которые приводят к, вообще говоря, разным, но, тем не менее, локально эквивалентным объектам.

3.1 Параметрические поверхности

Обозначим через Ω *область* в евклидовом пространстве \mathbb{R}^k , т.е., напомним, его открытое связное подмножество.

Определение 3.1. *Непрерывной параметрической поверхностью* размерности k в n -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n , $n \geq k$, называется произвольное непрерывное отображение $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ из некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ в \mathbb{R}^n .

Такое отображение r задается набором из n *координатных функций* $x^i(u^1, \dots, u^k)$, где u^1, \dots, u^k — стандартные координаты в $\mathbb{R}^k \supset \Omega$, а x^1, \dots, x^n — стандартные координаты в \mathbb{R}^n . При этом непрерывность отображения r равносильна непрерывности всех функций $x^i(u^1, \dots, u^k)$. Координаты u^i называются *параметрами* для r , или *координатами* на параметрической поверхности r .

Непрерывная параметрическая поверхность r может, вообще говоря, иметь самопересечения, т.е. могут существовать такие точки P и P' из Ω , что $r(P) = r(P')$.

Определение 3.2. Если отображение r взаимно-однозначно с образом, то параметрическая поверхность r называется *вложенной*.

Определение 3.3. Будем называть непрерывную параметрическую поверхность $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ *гладкой*, если все ее координатные функции $x^i(u^1, \dots, u^k)$ — гладкие, т.е., напомним, непрерывно дифференцируемые бесконечное число раз.

Для каждой точки (u^1, \dots, u^k) области Ω гладкой параметрической поверхности определены векторы $r_{u^i} = (x_{u^i}^1, \dots, x_{u^i}^n)$, где через $x_{u^i}^j$ обозначена частная производная функции x^j по параметру u^i в этой точке.

Определение 3.4. Векторы r_{u^j} , $j = 1, \dots, k$, называются *базисными касательными векторами поверхности r в точке (u^1, \dots, u^k)* .

Замечание 3.5. Одна и та же точка образа параметрической поверхности может соответствовать разным точкам параметризующей области (именно так дело обстоит в точках самопересечения). Поэтому, чтобы выделить один набор базисных касательных векторов, нужно указывать значения параметров.

Отметим, что интуитивное представление о гладкости поверхности не соответствует данному определению, что иллюстрируется следующим упражнением.

Упражнение 3.6. Показать, что конус и двугранный угол можно представить как образы гладких параметрических поверхностей.

Для поверхностей “изломы” могут возникать лишь в тех точках, в которых базисные касательные векторы линейно зависимы. Такие точки называются *особыми*, или *сингулярными*, а все остальные — *регулярными*, или *неособыми*.

Определение 3.7. Гладкая параметрическая поверхность называется *регулярной*, если ее базисные касательные векторы линейно независимы в каждой точке параметризующей области.

Замечание 3.8. Условие регулярности, очевидно, равносильно тому, что матрица Якоби $(x_{u^j}^i)$ параметризующего отображения r имеет во всех точках максимальный ранг (равный, очевидно, k).

Пусть $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывная параметрическая поверхность. Рассмотрим взаимнооднозначное непрерывное вместе со своим обратным отображение $\varphi: \Omega' \rightarrow \Omega$ области $\Omega' \subset \mathbb{R}^k$ на область $\Omega \subset \mathbb{R}^k$. Каждое такое отображение порождает новую непрерывную параметрическую поверхность $r \circ \varphi: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Определение 3.9. Отображение φ называется *заменой параметризации*, а про поверхность $r \circ \varphi$ говорят, что она получена из поверхности r *заменой параметризации*.

Ясно, что если φ — замена параметризации, то φ^{-1} также является заменой параметризацией. Параметрические поверхности r и $r \circ \varphi$, полученные друг из друга заменой параметризации, имеют совпадающие образы в \mathbb{R}^n .

Замечание 3.10. Как и в случае параметрических кривых, гладкая замена параметризации может нарушить регулярность параметрической поверхности. Однако, если оба отображения φ и φ^{-1} , задающие замену параметризации, — гладкие, то отличающиеся на такую замену параметризации параметрические поверхности регулярны одновременно.

3.2 Поверхности-графики

Пусть $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ — векторнозначная функция, заданная на области $\Omega \subset \mathbb{R}^k$, и u^1, \dots, u^k — стандартные координаты на \mathbb{R}^k .

Определение 3.11. Множество

$$\text{Gr}(f) = \left\{ (u^1, \dots, u^k, f(u^1, \dots, u^k)) \mid (u^1, \dots, u^k) \in \Omega \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

называется *поверхностью-графиком* в пространстве \mathbb{R}^n .

По определению, поверхность-график $\text{Gr}(f)$ представляет собой образ k -мерной параметрической поверхности $r_f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, где

$$r_f: (u^1, \dots, u^k) \mapsto (u^1, \dots, u^k, f(u^1, \dots, u^k)),$$

про которую будем говорить, что она *соответствует* поверхности-графику $\text{Gr}(f)$. Если функция f — гладкая, то $\text{Gr}(f)$ будем называть *гладкой поверхностью-графиком*. В этом случае, очевидно, r_f — гладкая параметрическая поверхность.

Замечание 3.12. Гладкая параметрическая поверхность, соответствующая гладкой поверхности-графику является регулярной параметрической поверхностью, поскольку матрица Якоби отображения r_f содержит единичную подматрицу размером $k \times k$. Обратное, как и в случае кривых, разумеется, не верно (кривая график взаимно однозначно проецируется на некоторую k -мерную плоскость).

Пример 3.13. Образ вложенной регулярной поверхности

$$r: (u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v), \quad u \in (0, 2\pi), \quad v \in \mathbb{R},$$

(это прямой круговой цилиндр с выброшенной прямой) не представим в виде поверхности-графики, поскольку его проекция на любую плоскость не взаимно-однозначна с образом.

Лемма 3.14. Для любой регулярной параметрической поверхности $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ и любой точки $P \in \Omega$ существует такая окрестность $U \subset \Omega$ этой точки, что образ отображения $r|_U$ является графиком некоторой гладкой функции (возможно, после перенумерации координат в \mathbb{R}^n).

Доказательство. Пусть x^i — стандартные координаты в \mathbb{R}^n , а u^i — координаты на поверхности r . В силу регулярности поверхности r ранг матрицы $(x_{u^j}^i(P))$ равен k . Без ограничения общности будем считать, что квадратная матрица $(x_{u^j}^i(P))_{i,j=1}^k$ невырождена (иначе — перенумеруем координаты x^j). Тогда по теореме об обратной функции отображение

$$\psi: (u^1, \dots, u^k) \mapsto (x^1(u^1, \dots, u^k), \dots, x^k(u^1, \dots, u^k)),$$

ограниченное на некоторую окрестность U точки P , имеет гладкое обратное отображение $\varphi: \psi(U) \rightarrow U$, где

$$\varphi: (x^1, \dots, x^k) \mapsto (u^1(x^1, \dots, x^k), \dots, u^k(x^1, \dots, x^k)),$$

являющееся, по определению, заменой параметризации для поверхности $r: U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Согласно определению отображения φ имеем

$$x^i(u^1(x^1, \dots, x^k), \dots, u^k(x^1, \dots, x^k)) = x^i, \quad i = 1, \dots, k,$$

Положим $\psi(U) = \Omega'$. Тогда параметрическая поверхность $r \circ \varphi: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет вид

$$\begin{aligned} r \circ \varphi: (x^1, \dots, x^k) &\mapsto \\ &\mapsto \left(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}(u^1(x^1, \dots, x^k), \dots, u^k(x^1, \dots, x^k)), \dots, \right. \\ &\quad \left. x^n(u^1(x^1, \dots, x^k), \dots, u^k(x^1, \dots, x^k)) \right), \end{aligned}$$

т.е. ее образ $r \circ \varphi(\Omega') = r(U)$ является графиком гладкой векторнозначной функции $f: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, где

$$\begin{aligned} f(x^1, \dots, x^k) &= \left(x^{k+1}(u^1(x^1, \dots, x^k), \dots, u^k(x^1, \dots, x^k)), \dots, \right. \\ &\quad \left. x^n(u^1(x^1, \dots, x^k), \dots, u^k(x^1, \dots, x^k)) \right). \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

3.3 Неявные поверхности

Пусть $F: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ — гладкая векторнозначная функция, заданная на некоторой области $U \subset \mathbb{R}^n$, и пусть c — некоторый постоянный вектор из \mathbb{R}^{n-k} . Предположим, что система уравнений $F(x^1, \dots, x^n) = c$ удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции, а именно, множество $M_c = \{(x^1, \dots, x^n) \mid F(x^1, \dots, x^n) = c\}$ всех решений этой системы не пусто, и ранг матрицы Якоби $(\partial F^i / \partial x^j)$ в каждой точке из M_c максимален и равен $n - k$.

Определение 3.15. Множество M_c называется *неявной поверхностью*.

Замечание 3.16. Поверхность-график произвольной гладкой векторнозначной функции $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^k$, является неявной поверхностью, поскольку может быть задана как множество решений системы уравнений $x^i - f^{i-k}(x^1, \dots, x^k) = 0$, $i = k + 1, \dots, n$, где через f^i обозначены компоненты вектора f . Обратное неверно.

Упражнение 3.17. Проверьте невырожденность матрицы Якоби системы уравнений из замечания 3.16.

Пример 3.18. Неявная поверхность — двумерная сфера, заданная уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, не является графиком функции, так как не проецируется однозначно ни на какую двумерную плоскость.

Лемма 3.19. Пусть P — произвольная точка неявной поверхности M_c . Тогда в некоторой окрестности точки $P \in M_c$ в пространстве \mathbb{R}^n множество M_c можно представить как гладкую поверхность-график некоторой векторнозначной функции f (возможно, после перенумерации координат).

Доказательство. По условию ранг матрицы Якоби $(\partial F^i/\partial x^j)$ в точке P равен $n - k$. Предположим, что невырожденной оказалась подматрица $(\partial F^i/\partial x^j)$, $i = 1, \dots, n - k$ и $j = k + 1, \dots, n$ (иначе — перенумеруем координаты). Обозначим через P' проекцию точки P на координатную плоскость $x^{k+1} = \dots = x^n = 0$. Тогда по теореме о неявной функции в некоторой окрестности U' точки P' (на этой плоскости) определена гладкая векторнозначная функция $f: U' \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, такая, что

$$F(x^1, \dots, x^k, f(x^1, \dots, x^k)) = c \quad \text{для всех } (x^1, \dots, x^k) \in U',$$

т.е. точки $(x^1, \dots, x^k, f(x^1, \dots, x^k))$, где $(x^1, \dots, x^k) \in U'$, принадлежат M_c . Таким образом, положив $U = U' \times \mathbb{R}^{n-k}$, заключаем, что множество $U \cap M_c$ является графиком гладкой функции f . Лемма доказана. \square

3.4 Локальная эквивалентность

Подведем итог. Мы описали три разных подхода к определению понятия поверхности. При этом, каждая поверхность–график представляет собой также и неявную поверхность, и образ регулярной параметрической поверхности, однако, неявная поверхность, вообще говоря, не обязана быть поверхностью–графиком, а образ регулярной параметрической поверхности не обязан быть неявной поверхностью. Таким образом, в целом, все три определения поверхности задают разные объекты. С другой стороны, как было показано выше, см. Леммы 3.14 и 3.19, с локальной точки зрения эти три подхода к определению регулярной поверхности эквивалентны в следующем смысле.

Теорема 3.20. *С локальной точки зрения три способа задания регулярной поверхности эквивалентны в следующем смысле:*

- если $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ — регулярная параметрическая поверхность, то для каждого $u \in \Omega$ существует такая окрестность U точки u в области Ω , что ее образ $r(U)$ является поверхностью–графиком для некоторой гладкой векторнозначной функции;
- для каждой точки P неявной поверхности M_c существует такая окрестность $U \subset \mathbb{R}^n$, что $U \cap M_c$ есть поверхность–график.

Так как каждая поверхность–график может быть представлена как образ регулярной параметрической поверхности, у которой параметризующее отображение взаимно однозначно с образом, то имеет место следующий результат.

Следствие 3.21. *Пусть $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ — регулярная параметрическая поверхность. Для каждого $u \in \Omega$ существует такая окрестность U точки u в области Ω , что ограничение отображения r на U взаимно однозначно с образом.*

Сначала мы будем заниматься локальной теорией регулярных поверхностей, поэтому, опираясь на теорему 3.20, будем использовать следующее соглашение.

Соглашение 3.22. Там, где это не вызовет недоразумений, мы будем говорить просто о регулярной поверхности, подразумевая, что соответствующий объект задан удобным

для нас способом (или как поверхность–график, или как неявная поверхность, или как регулярная параметрическая поверхность или её образ). Причем в последнем случае, если не оговорено противное, параметризующее отображение предполагается взаимно однозначными с образом, а замены параметризации гладкими и с гладкими обратными.

Замечание 3.23. Глобальные характеристики поверхностей изучаются в теории многообразий, см. ниже.

3.5 Поверхности и отображения

В рамках принятого соглашения 3.22, регулярную поверхность можно рассматривать как некоторое подмножество в объемлющем пространстве, поэтому имеет смысл говорить об отображениях поверхности и в поверхность. Однако, чтобы определить гладкость таких отображений, необходимы дополнительные построения.

Конструкция 3.24. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — регулярная поверхность, и $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ — (векторнозначная) функция на поверхности. Пусть $r_M: \Omega_M \rightarrow \mathbb{R}^n$ — (взаимно-однозначное с образом) параметризующее отображение поверхности M . Положим $\tilde{f} = f \circ r_M$. Обратно, так как отображение r_M взаимно-однозначно с образом, то для каждой функции $\tilde{f}: \Omega_M \rightarrow \mathbb{R}^m$ однозначно определена функция $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$, такая, что $f = \tilde{f} \circ r_M^{-1}$, а именно $f = \tilde{f} \circ r_M^{-1}$, где $r_M^{-1}: M \rightarrow \Omega_M$.

Аналогично, пусть задано отображение $\gamma: I \rightarrow M$ промежутка I в регулярную поверхность M . Тогда определено отображение $\tilde{\gamma} = r_M^{-1} \circ \gamma: I \rightarrow \Omega_M$, и наоборот, для каждого отображения $\tilde{\gamma}: I \rightarrow \Omega_M$ из промежутка I в параметризующую область Ω_M однозначно определено отображение $\gamma = r_M \circ \tilde{\gamma}: I \rightarrow M$, причем $\tilde{\gamma} = r_M^{-1} \circ \gamma$.

Наконец, пусть $N \subset \mathbb{R}^n$ — ещё одна регулярная поверхность, и $r_N: \Omega_N \rightarrow \mathbb{R}^n$ — её (взаимно-однозначное с образом) параметризующее отображение. Пусть $F: M \rightarrow N$ отображение поверхности M в поверхность N . Тогда в силу взаимной однозначности параметризующих отображений определено отображение $\tilde{F}: \Omega_M \rightarrow \Omega_N$ следующего вида: $\tilde{F} = r_N^{-1} \circ F \circ r_M$. Обратно, для каждого отображения $\tilde{F}: \Omega_M \rightarrow \Omega_N$ однозначно определено отображение поверхностей $F: M \rightarrow N$, такое, что $\tilde{F} = r_N^{-1} \circ F \circ r_M$.

Определение 3.25. Функция \tilde{f} и отображения \tilde{F} и $\tilde{\gamma}$ называются *координатными представлениями* функции f и отображений F и γ соответственно.

Поскольку соответствие между отображениями и их координатными представлениями взаимно-однозначно, мы, как правило, не будем их различать.

Замечание 3.26. Координатное представление представляет собой обычное отображение из области в \mathbb{R}^n в область пространства \mathbb{R}^k . Именно такие отображения рассматриваются в математическом анализе, и поэтому можно говорить об их непрерывности, дифференцируемости и т.д. без каких-либо оговорок.

Определение 3.27. Гладкое отображение F одной регулярной поверхности в другую называется *регулярным*, если регулярным является его координатное представление, т.е. если ранг матрицы Якоби отображения \tilde{F} максимален в каждой точке.

3.6 Кривые на поверхности

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — регулярная поверхность и $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ — параметрическая кривая.

Определение 3.28. Говорят, что *кривая γ лежит на M* , если $\gamma(I) \subset M$. Лежащая на поверхности параметрическая кривая называется *гладкой*, если она гладкая как отображение промежутка в поверхность, т.е., если её координатное представление в смысле определения 3.25 — гладкое.

Замечание 3.29. Если γ — гладкая параметрическая кривая, лежащая на регулярной поверхности, то соответствующая параметрическая кривая в \mathbb{R}^n тоже гладкая. В этом случае координатное представление кривой γ задает регулярную кривую в \mathbb{R}^k , если и только если кривая γ регулярна.

Замечание 3.30. Пусть $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ — параметризация регулярной поверхности M , u^1, \dots, u^k — координаты в пространстве \mathbb{R}^k , в котором лежит области Ω , и x^1, \dots, x^n — координаты в объемлющем пространстве. Координатное представление кривой γ задается набором функций $u^i(t)$, $t \in I$, $i = 1, \dots, k$, которые называются *координатными функциями* кривой. Сама параметрическая кривая γ записывается через координатные функции так: $\gamma(t) = r(u^1(t), \dots, u^k(t))$. Координатные функции кривой γ имеют вид $x^i(t) = x^i(u^1(t), \dots, u^k(t))$, где $x^i(u^1, \dots, u^k)$ — координатные функции поверхности r .

Пример 3.31. Пусть u^1, \dots, u^k — координаты на регулярной поверхности M . Через каждую точку на M проходит k так называемых *координатных линий*, вдоль каждой из которых меняется лишь одна координата u^i , а остальные — постоянны. А именно, если $P \in M$ — точка на поверхности с координатами (u_0^1, \dots, u_0^k) , то i -й *координатной линией*, проходящей через точку P , называется кривая, координатное представление которой имеет вид:

$$u^j(t) = u_0^j, \quad j \neq i; \quad u^i(t) = t, \quad t \in (u_0^i - \varepsilon, u_0^i + \varepsilon),$$

где ε выбрано настолько малым, чтобы интервал с центром в точке (u_0^1, \dots, u_0^k) , имеющий длину 2ε и параллельный i -ой координатной оси не выходил за пределы параметризующей области.

3.7 Касательное пространство

Пусть $P \in M$ — произвольная точка регулярной поверхности M , и $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкая кривая, лежащая на M . Пусть $\gamma(t_0) = P$, т.е. γ проходит через P .

Определение 3.32. Вектор скорости $\dot{\gamma}(t_0) \in \mathbb{R}^n$ кривой γ в точке P назовем *касательным вектором* к поверхности M в точке P . Совокупность касательных векторов в точке P , построенных по всем гладким кривым на поверхности M , проходящим через эту точку, называется *касательным пространством* к поверхности M в точке P и обозначается через $T_P M$.

Утверждение 3.33. Пусть $P \in M$ — произвольная точка регулярной k -мерной поверхности $M \subset \mathbb{R}^n$. Тогда касательное пространство $T_P M$ является линейным пространством размерности k .

Доказательство. Пусть, как и выше, $x^i = x^i(u^1, \dots, u^k)$, $i = 1, \dots, n$, — координатные функции поверхности M . Возьмем произвольную кривую $\gamma(t)$ на поверхности, проходящую через точку P , и пусть $u^j = u^j(t)$ — координатные функции этой кривой, а $P = \gamma(t_0)$. Тогда i -я координата соответствующего касательного вектора имеет вид

$$\left. \frac{dx^i}{dt} \right|_{t=t_0} = \sum_{j=1}^k \left. \frac{\partial x^i}{\partial u^j} \right|_P \left. \frac{du^j}{dt} \right|_{t=t_0}.$$

Таким образом, вектор скорости кривой γ — произвольный элемент касательного пространства $T_P M$, — это линейная комбинация вида

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial u^1} \end{pmatrix} \frac{du^1}{dt} + \dots + \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^k} \\ \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial u^k} \end{pmatrix} \frac{du^k}{dt},$$

где векторы-столбцы $(\partial x^1/\partial u^i, \dots, \partial x^n/\partial u^i)^T$, $i = 1, \dots, k$, не зависят от выбора кривой γ и однозначно определяются координатными функциями $x^i(u^1, \dots, u^k)$ поверхности M и точкой P . В то же время, в силу произвольности гладкой кривой γ числа $du^i/dt|_{t=t_0}$ произвольны. Поэтому касательное пространство $T_P M$ — это линейное пространство, натянутое на векторы $\partial_{u^1}, \dots, \partial_{u^k}$, где через ∂_{u^i} обозначен вектор-столбец

$$(\partial x^1/\partial u^i, \dots, \partial x^n/\partial u^i)^T.$$

Матрица, составленная из векторов-столбцов ∂_{u^i} , — это в точности матрица Якоби отображения $x^i = x^i(u^1, \dots, u^k)$, задающего поверхность M . Ранг этой матрицы, в силу регулярности поверхности M , равен k , поэтому векторы $\partial_{u^1}, \dots, \partial_{u^k}$ линейно независимы и образуют базис в линейном пространстве $T_P M$. \square

Замечание 3.34. Теперь понятно, почему в определении 3.4 векторы ∂_{u^j} называются базисными касательными векторами,

Определение 3.35. Базис в касательном пространстве $T_P M$, составленный из векторов ∂_{u^j} , называется *каноническим базисом в точке P* , соответствующим координатам u^1, \dots, u^k на поверхности. Коэффициенты разложения касательного вектора к поверхности по элементам канонического базиса (∂_{u^i}) называются *компонентами* или *координатами* этого вектора в этом каноническом базисе или его *координатами* (компонентами) относительно системы координат (u^1, \dots, u^k) .

Замечание 3.36. Векторы, образующие канонический базис, суть ни что иное, как вектора скоростей соответствующих координатных линий. Действительно, вектор скорости кривой с координатным представлением $u^j(t)$ равен линейной комбинации векторов ∂_{u^p} с коэффициентами du^p/dt . Но, по определению i -й координатной линии, см. пример 3.31, $du^p/dt = \delta_i^p$, поэтому касательный вектор к i -й координатной линии совпадает с базисным вектором ∂_{u^i} .

Утверждение 3.37. При замене координат на регулярной поверхности, векторы канонического базиса в каждой точке поверхности преобразуются с помощью матрицы Якоби этой замены координат, которая играет роль матрицы перехода от одного базиса к другому. Компоненты одного и того же касательного вектора в разных системах координат связаны между собой с помощью этой матрицы перехода.

Доказательство. Пусть $v^i = v^i(u^1, \dots, u^k)$ — замена координат на регулярной поверхности M . Тогда в каждой точке $P \in M$ определены сразу два канонических базиса: (∂_{u^i}) и (∂_{v^i}) . Из определения векторов канонических базисов и теоремы о дифференцировании сложной функции получаем:

$$\partial_{v^i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial v^i} \\ \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial v^i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j \frac{\partial x^1}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial v^i} \\ \vdots \\ \sum_j \frac{\partial x^n}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial v^i} \end{pmatrix} = \sum_j \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^j} \\ \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial u^j} \end{pmatrix} \frac{\partial u^j}{\partial v^i},$$

т.е. окончательно имеем:

$$\partial_{v^i} = \sum_j \partial_{u^j} \frac{\partial u^j}{\partial v^i},$$

или, в матричном виде,

$$(\partial_{v^1}, \dots, \partial_{v^k}) = (\partial_{u^1}, \dots, \partial_{u^k})J, \quad J = \left(\frac{\partial u^j}{\partial v^i} \right).$$

Далее, пусть $a \in T_P M$ произвольный касательный вектор, и пусть

$$a = \sum_{j=1}^k a^j \partial_{u^j} = \sum_{i=1}^k \tilde{a}^i \partial_{v^i},$$

т.е. (a^1, \dots, a^k) и $(\tilde{a}^1, \dots, \tilde{a}^k)$ — компоненты вектора a в базисах (∂_{u^i}) и (∂_{v^i}) соответственно. Тогда из теорем линейной алгебры о преобразовании компонент вектора при замене базиса вытекает, что

$$(\tilde{a}^1, \dots, \tilde{a}^k)^T = J^{-1}(a^1, \dots, a^k)^T, \quad J = \left(\frac{\partial u^j}{\partial v^i} \right)$$

или, поскольку матрицы $\left(\frac{\partial u^j}{\partial v^i} \right)$ и $\left(\frac{\partial v^i}{\partial u^j} \right)$ взаимно обратны, в координатах имеем:

$$\tilde{a}^i = \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial v^i}{\partial u^\alpha} a^\alpha, \quad i = 1, \dots, k.$$

Утверждение доказано. □

Упражнение 3.38. Получите формулу преобразования компонент касательного вектора как следствие теоремы о производной сложной функции: запишите координатные функции кривой в системе координат v^1, \dots, v^k в виде $v^i(t) = v^i(u^1(t), \dots, u^k(t))$ и вычислите производную по t .

3.8 Дифференциал

Напомним, что в математическом анализе каждое дифференцируемое отображение порождает семейство дифференциалов — линейных отображений, приближающих исходное в соответствующих точках. На самом деле, эти линейные отображения действуют на касательных пространствах, и могут быть построены также для отображений поверхностей.

Конструкция 3.39. Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение регулярных поверхностей, $P \in M$ — произвольная точка поверхности M и $v \in T_P M$ — произвольный касательный вектор. Напомним, что каждый такой вектор является по определению вектором скорости некоторой кривой γ , проходящей через точку P . Пусть $v = \dot{\gamma}(t_0)$, где γ — гладкая кривая на M и $\gamma(t_0) = P$. Построим отображение $dF|_P: T_P M \rightarrow T_{F(P)} N$, положив

$$dF|_P(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} F(\gamma(t)).$$

Заметим, что $F \circ \gamma$ — гладкая кривая на поверхности N , проходящая через точку $F(P)$, а именно, $F(\gamma(t_0)) = F(P)$, поэтому отображение $dF|_P$ определено корректно.

Определение 3.40. Отображение $dF|_P: T_P M \rightarrow T_{F(P)} N$ называется *дифференциалом* отображения F в точке P .

Замечание 3.41. В частности, конструкция 3.39 позволяет определить дифференциал гладкой функции $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ на поверхности M в точке $P \in M$ как отображение $df|_P: T_P M \rightarrow T_{f(P)} \mathbb{R} = \mathbb{R}$, а также дифференциал гладкой кривой $\gamma: I \rightarrow M$ в точке $t \in I$ как $d\gamma|_t: T_t I = \mathbb{R} \rightarrow T_{\gamma(t)} M$.

Утверждение 3.42. *Дифференциал гладкого отображения регулярных поверхностей — линейное отображение соответствующих касательных пространств. В канонических базисах систем координат он задается матрицей Якоби координатного представления отображения, вычисленной в соответствующей точке.*

Доказательство. Пусть u^1, \dots, u^m — координаты на поверхности M , а v^1, \dots, v^n — координаты на поверхности N , точка P имеет координаты u_0^1, \dots, u_0^m , и $v^i = v^i(u^1, \dots, u^m)$ — координатные функции отображения F . Рассмотрим произвольный вектор $v \in T_P M$, и пусть $a = \dot{\gamma}(t_0)$ для некоторой проходящей через P гладкой кривой γ на M , $\gamma(t_0) = P$, координатные функции которой имеют вид $u^i(t)$. Тогда компоненты a^i вектора a в каноническом базисе (∂_{u^j}) имеют вид $a^i = \dot{u}^i(t_0)$.

Вычислим вектор $dF|_P(a)$. Координатные функции кривой $F \circ \gamma$ имеют вид $v^j(t) = v^j(u^1(t), \dots, u^m(t))$, поэтому

$$\dot{v}^j(t_0) = \sum_{\alpha=1}^m \left. \frac{\partial v^j}{\partial u^\alpha} \right|_P \dot{u}^\alpha(t_0) = \sum_{\alpha=1}^m \left. \frac{\partial v^j}{\partial u^\alpha} \right|_P a^\alpha.$$

Таким образом, компоненты $\dot{v}^j(t_0)$ вектора $dF|_P(a)$ в базисе (∂_{v^j}) получаются из столбца компонент вектора a в базисе (∂_{u^i}) умножением на матрицу Якоби координатного представления отображения F в точке P . Это доказывает линейность дифференциала и требуемую формулу. \square

3.9 Первая фундаментальная форма

Пусть, как и выше, P — произвольная точка регулярной k -мерной поверхности $M \subset \mathbb{R}^n$. Скалярное произведение векторов в \mathbb{R}^n порождает скалярное произведение касательных векторов из $T_P M$.

Конструкция 3.43. Пусть ξ и η — касательные векторы к поверхности M в точке P . Определим функцию $\mathfrak{G}(P): T_P M \times T_P M \rightarrow \mathbb{R}$ так: $\mathfrak{G}(\xi, \eta) = \langle \xi, \eta \rangle$, где справа стоит стандартное скалярное произведение в \mathbb{R}^n . Другими словами, функция $\mathfrak{G}(P)$ есть ограничение стандартного скалярного произведения на подпространство $T_P M$.

Утверждение 3.44. В произвольной точке P регулярной поверхности M функция $\mathfrak{G}(P)$ — это положительно определенная симметричная билинейная форма на касательном пространстве $T_P M$.

Доказательство. Линейность по каждому аргументу, положительная определенность и симметричность функции $\mathfrak{G}(P)$ вытекают из соответствующих свойств евклидова скалярного произведения. \square

Определение 3.45. Билинейная форма $\mathfrak{G}(P)$ называется *первой фундаментальной формой поверхности* в точке P или *индуцированной метрикой*.

Замечание 3.46. Иногда первой фундаментальной формой поверхности называют соответствующую квадратичную форму. Как известно из линейной алгебры, имеется взаимно однозначное соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами, поэтому мы будем называть первой фундаментальной формой поверхности и то и другое.

Выясним, как выглядит матрица (g_{ij}) билинейной формы $\mathfrak{G}(P)$ в каноническом базисе.

Утверждение 3.47. Пусть $x^i(u^1, \dots, u^k)$ — координатные функции регулярной поверхности. Тогда компоненты g_{ij} матрицы первой фундаментальной формы имеют вид

$$g_{ij}(u^1, \dots, u^k) = \sum_{p=1}^n \frac{\partial x^p}{\partial u^i} \frac{\partial x^p}{\partial u^j}.$$

В частности, g_{ij} — гладкие функции координат u^i , т.е. гладко зависят от точки P .

Доказательство. Пусть ξ и η — произвольные касательные векторы к поверхности M в точке P , а $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^k)$ и $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^k)$ — их компоненты в этих координатах. Тогда $\xi = \sum_i \xi^i \partial_{u^i}$ и $\eta = \sum_j \eta^j \partial_{u^j}$, где $\{\partial_{u^i}\}$ — канонический базис в точке P . Поэтому, с одной стороны,

$$\mathfrak{G}(P)(\xi, \eta) = \langle \xi, \eta \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^k \xi^i \partial_{u^i}, \sum_{j=1}^k \eta^j \partial_{u^j} \right\rangle = \sum_{i,j=1}^k \langle \partial_{u^i}, \partial_{u^j} \rangle \xi^i \eta^j,$$

а с другой

$$\mathfrak{G}(P)(\xi, \eta) = \sum_{i,j=1}^k g_{ij}(P)\xi^i\eta^j,$$

откуда $g_{ij} = \langle \partial_{u^i}, \partial_{u^j} \rangle$, и нам остается воспользоваться видом векторов канонического базиса, см. утверждение 3.33. \square

Определение 3.48. Числа $g_{ij}(P)$ называются *компонентами индуцированной метрики* или *компонентами первой фундаментальной формы поверхности* M в координатах u^1, \dots, u^k , а матрица $G(P) = (g_{ij}(P))$ — *матрицей первой фундаментальной формы* или *матрицей индуцированной метрики*.

Теперь из стандартных теорем линейной алгебры об изменении матрицы билинейной формы при замене базиса получаем следующий результат.

Следствие 3.49. При замене координат $v^i = v^i(u^1, \dots, u^k)$ матрица первой фундаментальной формы поверхности меняется по закону изменения матриц билинейных форм: $G(u) = J^T \tilde{G}(v(u)) J$, где G — матрица первой фундаментальной формы в координатах u^1, \dots, u^k , \tilde{G} — матрица той же формы в координатах v^1, \dots, v^k , а $J = \left(\frac{\partial v^i}{\partial u^j} \right)$ — матрица Якоби замены координат.

Замечание 3.50. Этот же результат можно легко получить и непосредственно, воспользовавшись теоремой о дифференцировании сложной функции. В покомпонентной записи он выглядит так:

$$g_{ij}(u^1, \dots, u^k) = \sum_{pq} \tilde{g}_{pq}(v^1(u^1, \dots, u^k), \dots, v^k(u^1, \dots, u^k)) \frac{\partial v^p}{\partial u^i} \frac{\partial v^q}{\partial u^j},$$

где частные производные вычисляются в точке (u^1, \dots, u^k) .

Замечание 3.51. Если задана первая фундаментальная форма, то для вычисления скалярного произведения касательных векторов, их длин и углов между ними нет необходимости вычислять их координаты в объемлющем пространстве. Достаточно знать их координаты на поверхности. В частности, нам не важен конкретный вид отображения r , задающего поверхность. Иногда, чтобы подчеркнуть этот факт, говорят, что *скалярное произведение вычисляется во внутренних терминах*, а индуцированную метрику называют *внутренней метрикой поверхности*, или *внутренним скалярным произведением*. Здесь слово “внутренний” подчеркивает независимость вычисления скалярных произведений от объемлющего пространства.

3.10 Длины и углы

В терминах первой фундаментальной формы легко записываются длины касательных векторов и углы между ними и, как следствие, — длины кривых на поверхности и углы между кривыми.

Утверждение 3.52. Пусть u^1, \dots, u^k — координаты на регулярной поверхности, $g_{ij}(u)$ — компоненты её первой фундаментальной формы в этих координатах, $(u^1(t), \dots, u^k(t))$, $t \in [a, b]$, — координатные функции гладкой кривой γ , лежащей на этой поверхности. Тогда

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} \dot{u}^i(t) \dot{u}^j(t)} dt.$$

Определение 3.53. Пусть γ_1 и γ_2 — две кривые на поверхности, пересекающиеся в точке P . Тогда углом между кривыми γ_1 и γ_2 в точке P называется меньший из двух углов между касательными векторами к этим кривым в точке P .

Напомним, что угол между векторами определяется через скалярное произведение. А именно, если a и b — произвольные векторы, то косинус угла между ними, по определению, равен

$$\frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|}.$$

Утверждение 3.54. Пусть P — точка регулярной поверхности, и кривые γ_p , $p = 1, 2$, лежат на ней и пересекаются в точке P . Пусть u^1, \dots, u^k — координаты на этой поверхности, $g_{ij}(u)$ — компоненты её первой фундаментальной формы в этих координатах, а $u_p^i = u_p^i(t)$, $p = 1, 2$, — координатные функции кривых γ_p . Тогда косинус угла между кривыми γ_p может быть вычислен по формуле

$$\frac{\sum g_{\alpha\beta}(P) \dot{u}_1^\alpha \dot{u}_2^\beta}{\sqrt{\sum g_{\alpha\beta}(P) \dot{u}_1^\alpha \dot{u}_1^\beta} \sqrt{\sum g_{\alpha\beta}(P) \dot{u}_2^\alpha \dot{u}_2^\beta}}.$$

Замечание 3.55. В дифференциальной геометрии первую квадратичную форму часто называют “квадратом элемента длины” поверхности и используют так называемую “запись в дифференциалах”. При этом саму форму \mathfrak{G} обозначают через ds^2 — квадрат элемента длины, — и, в координатах u^1, \dots, u^k записывают в виде

$$ds^2 = \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta.$$

Можно относиться к этой форме записи просто как к удобному формализму. Например, если записать квадрат элемента длины в объемлющем пространстве \mathbb{R}^n со стандартными координатами x^1, \dots, x^n в виде

$$ds^2 = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2,$$

подставить в это выражение явный вид задающих поверхность координатных функций $x^i(u^1, \dots, u^k)$, вычислить дифференциалы $dx^i = \sum_j \partial x^i / \partial u^j du^j$ и записать полученную формулу как полином от du^j , то получится выражение для первой фундаментальной формы поверхности (проверьте это).

С другой стороны, эта форма записи приобретает смысл, если договориться обозначать через $\{du^i\}$ линейные функционалы на касательном пространстве $T_P M$, образующие в двойственном пространстве $T_P^* M$ двойственный базис по отношению к

каноническому базису $\{\partial_{u^i}\}$. Напомним, что двойственный базис в T_P^*M однозначно определяется из соотношений $du^i(\partial_{u^j}) = \delta_j^i$ (здесь, как обычно, через δ_j^i обозначены символы Кронекера). При этом если $a = (a^1, \dots, a^k)$ — касательный вектор, заданный своими координатами в каноническом базисе $\{\partial_{u^i}\}$, то значение функционала du^j на векторе a равно a^j . Теперь выражение для ds^2 можно воспринимать как запись билинейной формы в виде комбинации произведений линейных форм (т.е. как элемент пространства $T_P^*M \otimes T_P^*M$). Значение формы ds^2 на паре векторов a и b вычисляется следующим образом:

$$ds^2(a, b) = \sum_{\alpha \beta} g_{\alpha\beta} du^\alpha(a) du^\beta(b) = \sum_{\alpha \beta} g_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta,$$

где $a = (a^i)$ и $b = (b^i)$, что полностью согласуется с данными выше определениями.

В Дополнительном материале приведены примеры вычисления первой фундаментальной формы и угла между кривыми.

3.11 Изометрии поверхностей

Общее понятие *изометрии* как отображения, сохраняющего расстояния относится скорее к метрической геометрии, т.е. к геометрии метрических пространств общего вида. Здесь мы дадим определение и приведем ряд результатов, основанных на дифференциально-геометрическом подходе.

Определение 3.56. Пусть заданы две k -мерные регулярные поверхности M_i , $i = 1, 2$. Будем говорить, что поверхности M_1 и M_2 *изометричны*, если существует гладкое, взаимно-однозначное, регулярное отображение $\psi: M_1 \rightarrow M_2$, сохраняющее длины всех переходящих друг в друга гладких кривых.

Замечание 3.57. Условие сохранения длин означает следующее: если $\gamma_1: I \rightarrow M_1$ — произвольная гладкая кривая на поверхности M_1 и $\gamma_2 = \psi \circ \gamma_1$ — соответствующая кривая на поверхности M_2 , то длина кривой γ_1 , вычисленная относительно первой фундаментальной формы \mathfrak{G}_1 поверхности M_1 , совпадает с длиной кривой γ_2 , вычисленной относительно первой фундаментальной формы \mathfrak{G}_2 поверхности M_2 .

Утверждение 3.58. Гладкое взаимно-однозначное регулярное отображение $\psi: M_1 \rightarrow M_2$ задает изометрию регулярных поверхностей M_i , $i = 1, 2$, если и только если отображение ψ “сохраняет первую фундаментальную форму” в следующем смысле:

$$G_1 = J^T G_2 J,$$

где G_i — матрица первой фундаментальной формы поверхности M_i , а J — матрица Якоби отображения ψ в соответствующих координатах.

Доказательство. Проверим достаточность. Рассмотрим произвольную гладкую кривую γ на поверхности M_1 . Зафиксируем на M_1 некоторые координаты u^1, \dots, u^k , а на M_2 — координаты v^1, \dots, v^k . Пусть $u^i(t)$ — координатные функции кривой γ . Если $v^i(u^1, \dots, u^k)$ — координатные функции, задающие отображение ψ , то образ кривой γ

при отображении ψ имеет вид $v^i(t) = v^i(u^1(t), \dots, u^k(t))$. Обозначим через g_{ij} элементы матрицы $G_1(u)$ первой фундаментальной формы поверхности M_1 , а через h_{ij} — элементы матрицы $G_2(v)$ первой фундаментальной формы поверхности M_2 в выбранных координатах. Тогда длина кривой γ на M_1 имеет вид

$$\ell(\gamma) = \int \sqrt{\sum_{ij} g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j} dt.$$

В то же время длина кривой $\psi \circ \gamma$ на M_2 вычисляется как

$$\begin{aligned} \ell(\psi \circ \gamma) &= \int \sqrt{\sum_{ij} h_{ij} \dot{v}^i \dot{v}^j} dt = \int \sqrt{\sum_{ij} h_{ij} \sum_{\alpha} \frac{\partial v^i}{\partial u^{\alpha}} \dot{u}^{\alpha} \sum_{\beta} \frac{\partial v^j}{\partial u^{\beta}} \dot{u}^{\beta}} dt = \\ &= \int \sqrt{\sum_{\alpha\beta} \left(\sum_{ij} h_{ij} \frac{\partial v^i}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial v^j}{\partial u^{\beta}} \right) \dot{u}^{\alpha} \dot{u}^{\beta}} dt = \int \sqrt{\sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \dot{u}^{\alpha} \dot{u}^{\beta}} dt = \ell(\gamma), \end{aligned}$$

поскольку

$$\sum_{ij} h_{ij} \frac{\partial v^i}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial v^j}{\partial u^{\beta}} = g_{\alpha\beta}$$

по предположению, что и требовалось.

Докажем справедливость обратного утверждения. Пусть ψ — некоторое регулярное взаимно-однозначное отображение из M_1 в M_2 , сохраняющее длины всех кривых. Это означает, что для произвольной кривой γ при сделанных выше обозначениях справедливо приведенное выше интегральное равенство. Из произвольности кривой γ следует совпадение подынтегральных выражений для каждого вектора. Действительно, для вектора $a \in T_P(M)$ достаточно рассмотреть семейство кривых $\gamma_s: [0, s] \rightarrow M$, координатные функции которых имеют вид $u^i(t) = u_0^i + a^i t$, где (u_0^1, \dots, u_0^k) — координаты точки P , и a^i — компонент вектора a . Тогда интегральное равенство имеет вид

$$\ell(\gamma_s) = \int_0^s \sqrt{\sum_{ij} g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j} dt = \ell(\psi \circ \gamma_s) = \int_0^s \sqrt{\sum_{ij} h_{ij} \dot{v}^i \dot{v}^j} dt,$$

откуда, дифференцируя его по верхнему пределу в $s = 0$, получаем равенство подынтегральных выражений:

$$\sum_{ij} g_{ij} a^i a^j = \sum_{\alpha\beta} \left(\sum_{ij} h_{ij} \frac{\partial v^i}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial v^j}{\partial u^{\beta}} \right) a^{\alpha} a^{\beta}.$$

Далее, из произвольности вектора a вытекает, что $g_{\alpha\beta} = \sum_{ij} h_{ij} (\partial v^i / \partial u^{\alpha}) (\partial v^j / \partial u^{\beta})$ в каждой точке поверхности M_1 . Последнее, по определению, означает, что отображение ψ сохраняет первую квадратичную форму. Доказательство закончено. \square

Замечание 3.59. Условие утверждения 3.58 означает, что дифференциал отображения ψ , рассматриваемый как отображение евклидовых пространств $(T_P M_1, g_1(P))$ и $(T_{\psi(P)} M, g_2)$, где g_i — скалярные произведения, заданные первыми фундаментальными формами, сохраняет скалярные произведения.

Замечание 3.60. Легко проверить, что множество всех изометрий данной поверхности относительно композиции образует группу — *группу изометрий поверхности*.

Пример 3.61. Рассмотрим в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 с декартовыми координатами (x^1, x^2, x^3) прямой цилиндр над регулярной плоской кривой. А именно пусть $\gamma(s) = (x^1(s), x^2(s))$, $s \in [0, L]$, — регулярная плоская кривая, параметризованная натурально и лежащая в координатной плоскости Ox^1x^2 . *Прямым цилиндром над γ* назовем поверхность M в \mathbb{R}^3 , заданную как отображение полосы $[0, L] \times (-\infty, +\infty)$ в \mathbb{R}^3 в виде

$$x^1(u^1, u^2) = x^1(u^1), \quad x^2(u^1, u^2) = x^2(u^1), \quad x^3(u^1, u^2) = u^2.$$

Вычислим первую квадратичную форму поверхности M . Канонический базис, соответствующий координатам (u^1, u^2) на M , имеет вид

$$\partial_{u^1} = (\dot{x}^1, \dot{x}^2, 0), \quad \partial_{u^2} = (0, 0, 1).$$

Поэтому первая квадратичная форма цилиндра в координатах (u^1, u^2) равна

$$ds^2 = ((\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2)(du^1)^2 + (du^2)^2 = (du^1)^2 + (du^2)^2.$$

Покажем, что прямой цилиндр над произвольной регулярной плоской кривой изометричен полосе на евклидовой плоскости. Действительно, если (y^1, y^2) — декартовы координаты на плоскости, то изометрию ψ между цилиндром и плоскостью можно задать в явном виде: $\psi: (u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^2)$, где (u^1, u^2) — координаты на цилиндре, описанные выше. Другими словами, координатные функции $y^i(u^1, u^2)$ отображения ψ имеют вид $y^i(u^1, u^2) = u^i$.

Замечание 3.62. В примере 3.61 мы построили целое семейство поверхностей, которые очень не похожи друг на друга, но все они попарно изометричны между собой. Это говорит о том, что первой фундаментальной формы недостаточно для того, чтобы описать расположение поверхности в \mathbb{R}^n . Поэтому нужны еще какие-то инварианты. Именно с этой целью в следующей лекции строится вторая фундаментальная форма поверхности.

3.12 Задачи

Задача 3.63. Составить параметрическое уравнение поверхности, образованной касательными к данной кривой $\gamma = \gamma(u)$. Такая поверхность называется *развертывающейся поверхностью*. Исследовать развертывающуюся поверхность на регулярность.

Задача 3.64. Вокруг оси Oz вращается плоская кривая $x = f(v)$, $z = g(v)$. Составить параметрические уравнения поверхности вращения. Рассмотреть частный случай, когда меридиан задан уравнением $x = f(z)$.

Задача 3.65. Прямая движется поступательно с постоянной скоростью, пересекая другую прямую под прямым углом, и одновременно равномерно вращается вокруг этой прямой. Составить уравнение поверхности, которую описывает движущаяся прямая (*прямой геликоид*).

Задача 3.66. Составить уравнение поверхности, образованной вращением трактрисы

$$\gamma(v) = \left\{ a \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{v}{2} \right) - a \sin v, a \cos v \right\}$$

вокруг ее асимптоты (*псевдосфера*).

Задача 3.67. Вычислить первую квадратичную форму следующих поверхностей:

- (1) $r(u, v) = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v)$ (*сфера*);
- (2) $r(u, v) = (a \cos u \cos v, b \sin u \cos v, c \sin v)$ (*эллипсоид*);
- (3) $r(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$ (*поверхность вращения*).

Задача 3.68. Первая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2.$$

Требуется вычислить:

- периметр криволинейного треугольника, образованного пересечением кривых

$$u = \pm \frac{1}{2}av^2, \quad v = 1;$$

- углы этого криволинейного треугольника;
- площадь треугольника, образованного пересечением кривых $u = \pm av$, $v = 1$.

Задача 3.69. Найти на поверхности

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = a \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2})$$

кривые, пересекающие каждую кривую $v = \text{const}$ под постоянным углом θ (*локсодромы*).

3.13 Дополнительный материал

3.13.1 Примеры вычисления индуцированной метрики

Рассмотрим двумерную плоскость Π в \mathbb{R}^3 , заданную параметрически в виде $r(u^1, u^2) = r_0 + a_1 u^1 + a_2 u^2$, где r_0 , a_1 и a_2 — фиксированные векторы, причем a_1 и a_2 — линейно независимы. Поскольку $\partial_{u^i} = a_i$, $i = 1, 2$, поверхность Π невырождена в каждой своей точке. Первая квадратичная форма \mathfrak{G}_Π плоскости Π постоянна и имеет вид

$$ds^2 = \langle a_1, a_1 \rangle (du^1)^2 + 2\langle a_1, a_2 \rangle du^1 du^2 + \langle a_2, a_2 \rangle (du^2)^2$$

или

$$G(u) = \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \langle a_1, a_2 \rangle \\ \langle a_2, a_1 \rangle & \langle a_2, a_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} = A^T A,$$

где A — матрица, столбцы которой суть векторы a_1 и a_2 соответственно.

В качестве следующего примера возьмем стандартную сферу радиуса R в \mathbb{R}^3 , заданную параметрически так:

$$\begin{aligned} x^1 &= R \cos \vartheta \cos \varphi, \\ x^2 &= R \cos \vartheta \sin \varphi, \\ x^3 &= R \sin \vartheta. \end{aligned}$$

В координатах (ϑ, φ) первая квадратичная форма сферы имеет вид

$$ds^2 = R^2 (d\vartheta)^2 + R^2 \cos^2 \vartheta (d\varphi)^2.$$

Длина четверти меридиана $\varphi = \varphi_0$, $\vartheta \in [0, \pi/2]$, например, вычисляется следующим образом:

$$\int_0^{\pi/2} R \sqrt{1 + \cos^2 \vartheta} \cdot 0 = R\pi/2.$$

Рассмотрим теперь поверхность-график функции $z = f(x, y)$. Тогда соответствующее параметрическое представление имеет вид

$$r = (x, y, f(x, y)), \quad r_x = (1, 0, f_x), \quad r_y = (0, 1, f_y),$$

а значит, матрица метрики —

$$\begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix},$$

т.е. $ds^2 = (1 + f_x^2) dx^2 + 2f_x f_y dx dy + (1 + f_y^2) dy^2$.

Упражнение 3.70. Вычислить первую квадратичную форму поверхности, заданной как график гладкой функции $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$.

Упражнение 3.71. Вычислить первую квадратичную форму поверхности, заданной как множество решений уравнения $F(x^1, \dots, x^n) = 0$, $dF \neq 0$.

Вычислим угол между меридианом и параллелью на стандартной сфере S^2 радиуса R . Как и выше, параметризуем сферу координатами (ϑ, φ) . Пусть γ_1 — это параллель, координатные функции которой имеют вид $\vartheta(t) = \vartheta_0$, $\varphi(t) = t$, и γ_2 — это меридиан с координатными функциями $\vartheta(t) = t$, $\varphi(t) = \varphi_0$. Они пересекаются в точке $P = (\vartheta_0, \varphi_0)$. Касательные векторы $\dot{\gamma}_1 = (0, 1)$ и $\dot{\gamma}_2 = (1, 0)$. Далее, первая квадратичная форма сферы, как уже известно, в этих координатах записывается в виде

$$ds^2 = R^2 (d\vartheta)^2 + R^2 \cos^2 \vartheta (d\varphi)^2,$$

поэтому $\langle \dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2 \rangle = 0$, т.е. косинус угла между ними тоже равен нулю, а угол — $\pi/2$.

3.13.2 Локсодрома

Найдем на стандартной двумерной сфере кривую, пересекающую все меридианы под одним и тем же углом α (обладающая этим свойством кривая называется *локсодромой*). Пусть снова на сфере выбраны координаты (ϑ, φ) и меридианы имеют вид $\vartheta = t$, $\varphi = \varphi_0$. Далее, пусть локсодрома параметризована следующим образом: $\vartheta = \vartheta(\varphi)$, $\varphi = t$. Тогда касательные векторы к ней и меридиану имеют соответственно вид $(\dot{\vartheta}, 1)$ и $(1, 0)$, поэтому по определению локсодромы имеем

$$\frac{R^2 \dot{\vartheta}}{R \sqrt{R^2 \dot{\vartheta}^2 + R^2 \cos^2 \vartheta}} = \cos \alpha.$$

Получаем следующее дифференциальное уравнение на $\vartheta(t)$:

$$\dot{\vartheta} = \cos \vartheta \operatorname{ctg} \alpha$$

(мы воспользовались тем, что $\vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]$, и предположили, что $\operatorname{ctg} \alpha > 0$). Решая это уравнение, находим

$$\varphi = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} \log \left(\frac{1 + \sin \vartheta}{1 - \sin \vartheta} \right) + C.$$

На рис. 3.1 изображена локсодрома для $\alpha = 0,45\pi$ (т.е. близкого к $\pi/2$).

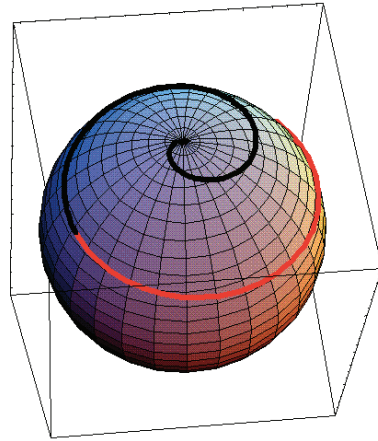


Рис. 3.1: Локсодрома; $\alpha = 0,45\pi$.

3.13.3 Первая квадратичная форма и объем

В терминах первой квадратичной формы также естественно записывается k -мерный объем поверхности. Пусть заданы регулярная параметрическая поверхность $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^k$, (u^1, \dots, u^k) — координаты на r и $P \in \Omega$ — произвольная точка. Обозначим через $\Pi(P)$ параллелепипед, натянутый на векторы $\{\partial_{u^i}\}$ канонического репера, а через $|\Pi(P)|$ — его k -мерный объем. Тогда k -мерным объемом, или просто объемом параметрической поверхности r , называется величина

$$\operatorname{vol}_k(M) = \int_{\Omega} |\Pi(P)| du^1 \cdots du^k.$$

Напомним, как определяется и вычисляется k -мерный объем параллелепипеда. Хорошо известно, что двумерный объем (площадь) параллелограмма может быть вычислен как произведение одномерного объема (длины) его основания на высоту. Это подводит к следующему индуктивному определению площади параллелепипеда: k -мерный объем параллелепипеда, натянутого на векторы a_1, \dots, a_k , $a_i \in \mathbb{R}^n$, равен произведению $(k-1)$ -мерного объема параллелепипеда, натянутого на векторы a_1, \dots, a_{k-1} , (площадь основания) на высоту, т.е. длину ортогональной проекции вектора a_k на ортогональное дополнение к a_1, \dots, a_{k-1} . Напомним следующий результат из линейной алгебры.

Предложение 3.72. Если определить объем k -мерного параллелепипеда по индукции как произведение объема его основания — $(k-1)$ -мерного параллелепипеда, на высоту, то полученное число может быть вычислено по формуле $\sqrt{\det G}$, где $G = A^T A$ — матрица Грамма системы векторов a_1, \dots, a_k , на которые натянут параллелепипед.

Доказательство. Пусть сначала $k = 2$. Тогда

$$\begin{aligned}\det(G) &= \|a_1\|^2 \|a_2\|^2 - \langle a_1, a_2 \rangle^2 = \\ &= \|a_1\|^2 \|a_2\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = \|a_1\|^2 \|a_2\|^2 \sin^2 \varphi,\end{aligned}$$

где φ — угол между векторами a_1 и a_2 . В итоге получаем

$$\sqrt{\det(G)} = \|a_1\| (\|a_2\| \sin \varphi),$$

т.е. определенная нами площадь равна длине вектора a_1 — длине основания, умноженной на длину проекции вектора a_2 на нормаль к a_1 , проведенную в плоскости (a_1, a_2) . Таким образом, в случае $k = 2$ данное утверждение имеет место.

Рассмотрим теперь общий случай. Представим вектор a_k в виде суммы его проекции T на плоскость Π_{k-1} , натянутую на векторы a_1, \dots, a_{k-1} , и нормальной составляющей N . Воспользовавшись равенством $\langle a_k, a_i \rangle = \langle T, a_i \rangle + \langle N, a_i \rangle$ и полилинейностью определителя как функции строк и столбцов, найдем, что $\det(A^T A) = \det(\tilde{A}^T \tilde{A})$, где матрица \tilde{A} получена из A заменой столбца a_k на столбец N . Осталось заметить, что последняя строка и столбец матрицы $\tilde{A}^T \tilde{A}$ содержат ровно один ненулевой элемент — последний, который равен $\|N\|^2$, поэтому имеет место равенство

$$\det(\tilde{A}^T \tilde{A}) = \det(A_{k-1}^T A_{k-1}) \|N\|^2,$$

где A_{k-1} — матрица, составленная из первых $k-1$ вектора a_1, \dots, a_{k-1} . Но по предположению индукции этот определитель равен квадрату площади параллелепипеда, натянутого на эти векторы, т.е. квадрату площади основания, а длина нормальной составляющей N — это и есть длина высоты. Утверждение доказано. \square

Таким образом, возвращаясь к определению k -мерного объема поверхности, можно сказать, что k -мерный объем $|\Pi(P)|$ параллелепипеда $\Pi(P)$, натянутого на векторы канонического репера, может быть вычислен как корень из определителя матрицы Грамма канонического репера, т.е. матрицы первой квадратичной формы:

$$\text{vol}_k(M) = \int_{\Omega} |\Pi(P)| du^1 \cdots du^k = \int_{\Omega} \sqrt{\det(G)} du^1 \cdots du^k.$$

Следующее утверждение следует из теоремы о замене переменных в кратном интеграле и из следствия 3.49.

Предложение 3.73. *Определенный нами k -мерный объем поверхности не меняется при замене параметризации.*

Таким образом, имеет смысл говорить о k -мерном объеме поверхности, понимая под ним объем произвольного представителя этой поверхности.

Упражнение 3.74. Выписать формулы для вычисления площади гиперповерхности, заданной в виде графика функции, а также неявно.

3.13.4 Изометрии евклидовой метрики

Найдем все изометрии евклидовой метрики $ds^2 = \sum_i (dx^i)^2$ пространства \mathbb{R}^n . Отметим, что в линейной алгебре было получено описание всех *линейных* отображений пространства \mathbb{R}^n в себя, сохраняющих евклидово скалярное произведение (т.е. евклидову метрику). Ими оказались так называемые ортогональные преобразования. Напомним, что линейное преобразование называется *ортогональным*, если его матрица A в ортонормированном базисе обладает свойством $AA^T = E$. Однако из результатов линейной алгебры не следует, что не существует какого-нибудь нелинейного регулярного отображения \mathbb{R}^n на себя, сохраняющего метрику.

Пусть $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — изометрия \mathbb{R}^n . Выберем в каждом из экземпляров \mathbb{R}^n декартовы координаты, которые обозначим через (x^1, \dots, x^n) и (y^1, \dots, y^n) соответственно. Тогда отображение ψ может быть записано в виде $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$.

В силу утверждения 3.58 в каждой точке \mathbb{R}^n выполнено равенство

$$\sum_{ij} \delta_{ij} \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} = \delta_{\alpha\beta},$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ — символы Кронекера. Выполним суммирование по i в левой части предыдущего равенства:

$$\sum_j \frac{\partial y^j}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} = \delta_{\alpha\beta}.$$

Продифференцировав последнее равенство по x^γ , получим для произвольной тройки α, β, γ :

$$\sum_j \left(\frac{\partial^2 y^j}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} + \frac{\partial y^j}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \right) = 0.$$

Чтобы выразить отсюда вторые производные функций y^j , вычтем из этого уравнения точно такое же для тройки β, γ, α , а затем, прибавим еще одно для тройки γ, α, β . В результате будем иметь:

$$\begin{aligned} \sum_j \left(\frac{\partial^2 y^j}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} + \frac{\partial y^j}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} - \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \frac{\partial y^j}{\partial x^\gamma} - \right. \\ \left. - \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^\gamma \partial x^\beta} \frac{\partial y^j}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial y^j}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) = 0. \end{aligned}$$

Приводя подобные члены, заключаем, что

$$2 \sum_j \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{\partial y^j}{\partial x^\alpha} = 0.$$

Итак, получили однородную линейную систему уравнений на неизвестные величины $\partial^2 y^j / \partial x^\beta \partial x^\gamma$, $j = 1, \dots, n$, где β, γ — произвольная фиксированная пара индексов. Матрица этого уравнения по построению невырождена, откуда следует, что существует единственное решение

$$\frac{\partial^2 y^j}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} = 0.$$

Поэтому все функции $y^j(x^1, \dots, x^n)$ — линейны, а следовательно, все изометрии пространства \mathbb{R}^n с евклидовой метрикой — суть линейные ортогональные преобразования и сдвиги.

Тема 4

Поверхности. Вторая фундаментальная форма

В данной лекции ограничимся рассмотрением гиперповерхностей в \mathbb{R}^n . Общий случай будет кратко разобран в разделе “Дополнительный материал”.

4.1 Определение второй формы

Пусть M — регулярная гиперповерхность в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n .

Конструкция 4.1. Обозначим через (x^1, \dots, x^n) стандартные координаты \mathbb{R}^n , а через (u^1, \dots, u^{n-1}) — координаты на поверхности. В каждой точке P на M определен канонический базис $\{\partial_{u^i}\}$ касательного пространства $T_P M$. Поэтому в каждой точке P поверхности однозначно определен единичный вектор $N(P)$, ортогональный всем векторам ∂_{u^i} и дополняющий систему векторов $\{\partial_{u^i}\}$ до положительно ориентированного базиса в \mathbb{R}^n . Другими словами, вектор $N(P)$ однозначно определяется из соотношений $\langle \partial_{u^i}, N(P) \rangle = 0$, $\langle N(P), N(P) \rangle = 1$ и, наконец,

$$\det(\partial_{u^1}, \dots, \partial_{u^{n-1}}, N(P)) > 0.$$

Так как векторы ∂_{u^i} гладко зависят от точки поверхности, то и вектор $N(P)$ тоже гладко зависит от точки.

Определение 4.2. Вектор $N(P)$ называется (*ориентированной*) *поле нормалью* к поверхности M , соответствующей координатам (u^i) . Также будем говорить, что N — это *поле ориентированных нормалей*, имея ввиду, что вектор $N(P)$ задан в каждой точке $P \in M$.

Утверждение 4.3. *Предположим, что на поверхности M заданы две системы координат: (u^1, \dots, u^{n-1}) , (v^1, \dots, v^{n-1}) , и $v^i = v^i(u^1, \dots, u^{n-1})$. Тогда векторы ориентированных нормалей в точке P , соответствующие координатам (u^i) и (v^i) , отличаются на знак определителя матрицы Якоби $(\partial v^i / \partial u^j)$ замены координат.*

Доказательство. Прямая, проходящая через вектор $N(P)$ в точке P , однозначно определяется касательным пространством $T_P M$ и не зависит от выбора базиса в нем. Для завершения доказательства осталось воспользоваться утверждением 3.37. \square

Следствие 4.4. *На регулярной гиперповерхности существуют в точности два ориентированных поля нормалей, которые в каждой точке поверхности противоположно направлены.*

Замечание 4.5. Пусть (u^1, \dots, u^{n-1}) — координаты на поверхности M . Ясно, что все замены $v^i = v^i(u^1, \dots, u^{n-1})$ координат на M можно разделить на два непересекающихся класса, в зависимости от знака определителя матрицы Якоби. Замена координат внутри каждого из классов имеет, очевидно, положительный якобиан. Из сказанного выше следует, что выбор одного из двух полей нормалей равносителен выбору одного из классов замен координат. Такой выбор часто называют *выбором ориентации поверхности M* . Отметим, что в дальнейшем аналогично будет введено понятие ориентации гладкого многообразия.

Конструкция 4.6. Пусть M — регулярная гиперповерхность в \mathbb{R}^n и $P \in M$ — некоторая ее точка. Фиксируем одно из двух полей нормалей к поверхности M и обозначим его через N . Пусть $\gamma(t)$ — произвольная кривая, лежащая на M и проходящая через P , $\gamma(t_0) = P$, и $\xi \in T_P M$ — вектор скорости $\dot{\gamma}(t_0)$ кривой γ в точке P . Построим функцию $q: T_P M \rightarrow \mathbb{R}$, положив $q(\xi) = \langle \ddot{\gamma}(t_0), N \rangle$.

Утверждение 4.7. *Пусть на регулярной гиперповерхности M фиксировано поле нормалей N . Функция q является квадратичной формой на линейном пространстве $T_P M$. Если (u^1, \dots, u^{n-1}) — координаты на M , то матрица квадратичной формы q в соответствующем каноническом базисе (∂_{u^i}) имеет вид $q_{ij} = \langle r_{u^i u^j}, N \rangle$.*

Доказательство. Пусть (u^1, \dots, u^{n-1}) — координаты на поверхности M и $u^i(t)$ — координатные функции кривой γ . Тогда $\xi = (\dot{u}^1, \dots, \dot{u}^{n-1})$ и

$$\ddot{\gamma} = \left(\sum_i r_{u^i} \dot{u}^i \right)' = \sum_{ij} r_{u^i u^j} \dot{u}^i \dot{u}^j + \sum_i r_{u^i} \ddot{u}^i,$$

поэтому

$$q(\xi) = \langle \ddot{\gamma}, N \rangle = \sum_{ij} \langle r_{u^i u^j}, N \rangle \dot{u}^i \dot{u}^j,$$

поскольку $\langle r_{u^i}, N \rangle = 0$. Таким образом, $q(\xi)$ зависит лишь от компонент вектора ξ и величин $\langle r_{u^i u^j}(P), N(P) \rangle$, которые не зависят от вектора ξ , а зависят только от точки P . Более того, при фиксированной P величина $q(\xi)$ равна значению квадратичной формы на векторе ξ , где форма эта задана в базисе (∂_{u^i}) матрицей $Q(u) = \left(\langle r_{u^i u^j}(P), N(P) \rangle \right)$. \square

Следствие 4.8. *Пусть u^1, \dots, u^{n-1} и v^1, \dots, v^{n-1} — две системы координат на регулярной поверхности M . Тогда в каждой точке P матрицы $Q(u) = \left(\langle r_{u^i u^j}(P), N(P) \rangle \right)$ и $Q(v) = \left(\langle r_{v^i v^j}(P), N(P) \rangle \right)$ связаны между собой по правилу $Q(u) = J^t Q(v) J$, где $J = \left(\frac{\partial v^i}{\partial u^j} \right)$ — матрица Якоби замены координат, вычисленная в точке P .*

Доказательство. Величина $q(\xi) = \langle \dot{\gamma}, N \rangle$ не зависит от выбора координат (напомним, что мы зафиксировали поле нормалей N , т.е. рассматриваем только замены координат с положительным якобианом). С другой стороны,

$$q(\xi) = \sum_{ij} \langle r_{v^i v^j}, N \rangle \dot{v}^i \dot{v}^j = \sum_{ij} \langle r_{u^i u^j}, N \rangle \dot{u}^i \dot{u}^j,$$

где \dot{u}^i и \dot{v}^i — компоненты одного и того же касательного вектора ξ в координатах u^i и v^i соответственно. Поэтому матрицы $Q(u)$ и $Q(v)$ — суть матрицы одной и той же квадратичной формы в разных базисах. Осталось применить теорему из линейной алгебры об изменении матрицы квадратичной формы. \square

Замечание 4.9. Закон преобразования величин $\langle r_{u^i u^j}, N \rangle$ при замене координат легко проверить и прямым подсчетом (см. Дополнительный материал).

Определение 4.10. Квадратичная форма q на касательном пространстве $T_P M$ называется *второй фундаментальной формой*, или *второй квадратичной формой*, гиперповерхности M в точке P (по отношению к нормали N).

Замечание 4.11. Если заменить поле N на $-N$, то вторая фундаментальная форма изменит знак.

Замечание 4.12. В отличие от первой фундаментальной формы поверхности, вторая фундаментальная форма не обязана быть ни невырожденной, ни положительно определенной.

Замечание 4.13. Вторую фундаментальную форму также часто записывают в дифференциальном виде:

$$dq^2 = \sum_{ij} q_{ij} du^i dw^j.$$

Пример 4.14. Пусть двумерная гиперповерхность задана в виде графика $z = f(x, y)$. Тогда соответствующее параметрическое представление имеет вид

$$\begin{aligned} r &= (x, y, f(x, y)), & r_x &= (1, 0, f_x), & r_y &= (0, 1, f_y), \\ r_{xx} &= (0, 0, f_{xx}), & r_{xy} &= (0, 0, f_{xy}), & r_{yy} &= (0, 0, f_{yy}), \\ N &= \frac{[r_x, r_y]}{\|[r_x, r_y]\|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \end{aligned}$$

и, значит, матрица второй фундаментальной формы в координатах (x, y) выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Упражнение 4.15. Вычислить вторую форму гиперповерхности, заданной в виде графика гладкой функции $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$.

Упражнение 4.16. Вычислить вторую фундаментальную форму гиперповерхности, заданной неявно в виде $F(x^1, \dots, x^n) = 0$, где $dF \neq 0$, в любой ее точки.

4.2 Геометрический смысл второй формы — кривизны плоских сечений

Пусть M — регулярная гиперповерхность, ориентированная с помощью поля нормалей N , P — произвольная ее точка, и \mathfrak{q} — вторая фундаментальная форма поверхности. Мы начнем со следующего общего результата.

Теорема 4.17 (Об отношении форм). *Пусть γ — произвольная регулярная кривая на M , проходящая через точку P . Обозначим через $\xi \in T_P M$ её вектор скорости в точке P , а через k — её кривизну. Тогда или k и $\mathfrak{q}(\xi)$ одновременно равны нулю, или кривая γ бирегулярна в точке P и*

$$k \cos \theta = \frac{\mathfrak{q}(\xi)}{\mathfrak{G}(\xi)},$$

где θ — угол между главной нормалью ν кривой γ и нормалью N к поверхности M в точке P (напомним, что вторая фундаментальная форма вычисляется по отношению к N).

Доказательство. Рассмотрим первую возможность. Условие $k = 0$ равносильно линейной зависимости векторов $\dot{\gamma}$ и $\ddot{\gamma}$, что, в свою очередь, возможно, если и только если $\ddot{\gamma}$ лежит в касательной плоскости $T_P M$. Значит, условие $k = 0$ равносильно перпендикулярности векторов $\ddot{\gamma}$ и N , что равносильно условию $\mathfrak{q}(\xi) = 0$. В первом случае теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай $k \neq 0$. Покажем сначала, что равенство, которое мы доказываем, не меняется при регулярной замене параметра на кривой γ . Действительно, левая часть вообще не зависит от параметризации, а вектор скорости кривой при замене растягивается в некоторое число раз. С другой стороны, каждая квадратичная форма — однородная функция степени однородности 2, поэтому $\mathfrak{q}(\lambda\xi) = \lambda^2 \mathfrak{q}(\xi)$ и $\mathfrak{G}(\lambda\xi) = \lambda^2 \mathfrak{G}(\xi)$ для любых вектора $\xi \in T_P M$ и числа $\lambda \neq 0$. Поэтому

$$\frac{\mathfrak{q}(\xi)}{\mathfrak{G}(\xi)} = \frac{\mathfrak{q}(\lambda\xi)}{\mathfrak{G}(\lambda\xi)}.$$

Таким образом, теорему достаточно доказать для естественно параметризованной кривой γ .

Выберем на кривой γ натуральный параметр s , такой, что $\gamma(s_0) = P$, $\dot{\gamma}(s_0) = \xi$, тогда $\ddot{\gamma}(s_0) = k\nu$, $\mathfrak{G}(\xi) = 1$ и

$$\frac{\mathfrak{q}(\xi)}{\mathfrak{G}(\xi)} = \langle \ddot{\gamma}(s_0), N \rangle = \langle k\nu, N \rangle = k \langle \nu, N \rangle = k \cos \theta,$$

что и требовалось доказать. □

Чтобы выяснить геометрический смысл второй фундаментальной формы, рассмотрим на поверхности кривые специального вида.

Конструкция 4.18. Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — произвольная, проходящая через $P \in M$ двумерная аффинная плоскость, не лежащая в $T_P M$. Несложно показать, что она пересекает поверхность M около точки P по некоторой регулярной кривой γ .

Определение 4.19. Кривая γ называется *плоским сечением*, проходящим через P . Если плоскость Π проходит через нормаль N к поверхности M в точке P , то плоское сечение γ называется *нормальным*. Нам также будет удобно говорить, что сечение γ проведено в направлении вектора $\dot{\gamma}(t_0)$, где t — произвольный параметр на γ , такой, что $\gamma(t_0) = P$.

Следствие 4.20. Пусть $\xi \in T_P M$ — произвольный ненулевой вектор, γ — плоское сечение, проведенное через P в направлении ξ , и Π — плоскость сечения. Фиксируем в плоскости Π некоторый единичный вектор m перпендикулярный ξ и фиксируем ориентацию этой плоскости с помощью базиса (ξ, m) . Обозначим через k_o ориентированную кривизну плоского сечения γ в точке P . Тогда

$$k_o \cos \theta = \frac{q(\xi)}{\mathfrak{G}(\xi)},$$

где θ — угол между m и нормалью N к поверхности M в точке P .

Доказательство. Заметим, что знак выражения $k_o \cos \theta$ не зависит от выбора вектора m , поскольку при замене m на $-m$ меняется знак и у ориентированной кривизны, и у $\cos \theta$. Поэтому, если кривая γ бирегулярна в точке P , то достаточно выбрать $m = \nu$ и применить теорему 4.17. Если же кривая не является бирегулярной, то ориентированная кривизна равна нулю, а величина $q(\xi)$ равна нулю снова по теореме 4.17. Следствие доказано. \square

Следствие 4.21. Значение $q(\xi)$ второй фундаментальной формы поверхности M на единичном векторе $\xi \in T_P M$ равно ориентированной кривизне k_o плоского нормального сечения γ , проведенного через P в направлении ξ (плоскость сечения ориентирована с помощью базиса (ξ, N)). В частности, для обычной кривизны плоского нормального сечения выполнено равенство $k = |q(\xi)|$.

Определение 4.22. Ориентированной кривизной нормального сечения, проведенного через точку P в направлении $\xi \in T_P M$, (без явного указания ориентации плоскости сечения) будем называть его ориентированную кривизну, соответствующую ориентации плоскости сечения базисом (ξ, N) .

Замечание 4.23. Для ориентаций плоскости сечения базисами $(\pm\xi, N)$ ориентированные кривизны нормального сечения совпадают.

Конструкция 4.24. Фиксируем касательный вектор $\xi \in T_P M$ и проведем через него два плоских сечения, одно — нормальное, которое мы обозначим через γ_n , и еще одно, не нормальное, которое обозначим через γ . На вопрос о том, как связаны кривизны этих сечений отвечает Теорема Менье.

Следствие 4.25 (Теорема Менье). Пусть $\xi \in T_P M$ — ненулевой вектор, γ и γ_n — некоторое плоское и плоское нормальное сечения, проведенные через P в одном и том же направлении ξ , а k и k_n — их кривизны. Тогда или одновременно $k = 0$ и $k_n = 0$, или $k_n = k \cos \alpha$, где α — угол между главными нормальными к этим сечениям.

Доказательство. По следствию 4.21 из равенства нулю одной из кривизн равносильно равенству нулю величины $\mathfrak{q}(\xi)$, что, в свою очередь, равносильно равенству нулю второй кривизны снова по следствию 4.21.

Пусть теперь $k \neq 0$. Выберем в качестве нормали N к поверхности в точке P главную нормаль к плоскому нормальному сечению γ_n . По теореме 4.17

$$k \cos \alpha = \frac{\mathfrak{q}(\xi)}{\mathfrak{G}(\xi)} = k_n \cos 0 = k_n,$$

что и требовалось доказать. □

Замечание 4.26. В дифференциальной геометрии поверхностей сложилась следующая терминология. Объекты и величины, определяемые первой фундаментальной формой, принято называть элементами *внутренней геометрии*. Напомним, что саму первую форму называют иногда *внутренним скалярным произведением*. К внутренней геометрии, например, принадлежат такие понятия, как длина кривых, углы между кривыми, площади областей. Однако, как отмечалось выше, первая фундаментальная форма определяет не всё. Например, в терминах первой фундаментальной формы нельзя вычислить кривизну кривой на поверхности. Объекты и величины, для определения которых недостаточно первой фундаментальной формы, называют элементами *внешней геометрии поверхности*, или *геометрии погружения*.

4.3 Главные кривизны и главные направления

Пусть, как и выше, P — произвольная точка регулярной гиперповерхности M в \mathbb{R}^n . Тогда, как уже известно, в точке P определены две квадратичные формы: \mathfrak{G} и \mathfrak{q} . Следующая теорема, известная в линейной алгебре как теорема о паре квадратичных форм, позволяет выбрать удобный базис, в котором обе формы имеют простой вид.

Предложение 4.27. Пусть в линейном пространстве \mathbb{R}^n , в котором фиксирован произвольный базис, задано скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ с помощью симметричной невырожденной, положительно определенной матрицы G . Пусть, кроме того, задана квадратичная форма \mathfrak{q} . Тогда в \mathbb{R}^n существует такой базис (e_i) , ортонормальный относительно указанного скалярного произведения, что форма \mathfrak{q} имеет в нем диагональный вид. При этом если Q — это матрица формы \mathfrak{q} в исходном базисе, то базис (e_i) и соответствующие собственные числа формы Q относительно формы G могут быть найдены из следующего характеристического уравнения:

$$\det(Q - \lambda G) = 0.$$

Доказательство. Как известно из линейной алгебры (теорема о собственном базисе квадратичной формы), в пространстве \mathbb{R}^n существует базис (f_i) , ортонормированный относительно невырожденной, положительно определенной квадратичной формы, задающей скалярное произведение. Пусть A — матрица перехода к этому базису, другими словами, компоненты X произвольного вектора в исходном базисе связаны с его компонентами X_f в базисе (f_i) так: $X_f = AX$. Тогда матрица G_f квадратичной формы \mathfrak{G} , задающей скалярное произведение, связана с матрицей G этой квадратичной формы

в исходном базисе: $A^T G_f A = G$. Аналогично, $A^T Q_f A = Q$. Отметим, что, так как базис (f_i) выбран ортонормированным относительно нашего скалярного произведения, матрица G_f — это единичная матрица, т.е. $A^T A = G$.

Теперь воспользуемся теоремой о приведении квадратичной формы q в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n к главным осям. В силу этой теоремы форма q имеет ортонормированный собственный базис (e_i) . Отметим, что, так как базис (e_i) ортонормированный, матрица формы \mathfrak{G} в нем по-прежнему единичная. Собственные числа и собственные векторы формы q могут быть найдены, как известно, при решении характеристического уравнения $\det(Q_f - \lambda E) = 0$. Умножив это уравнение на не равный нулю квадрат определителя матрицы перехода A и внося матрицу A под знак определителя, получим

$$\det A^T \det(Q_f - \lambda E) \det A = \det(A^T Q_f A - \lambda A E A^T) = \det(Q - \lambda G).$$

Таким образом, характеристическое уравнение эквивалентно уравнению $\det(Q - \lambda G) = 0$, что и требовалось доказать. \square

Определение 4.28. Пусть G и Q — матрицы первой и второй фундаментальных форм регулярной гиперповерхности M в некоторой ее точке P . Корни уравнения $\det(Q - \lambda G) = 0$ называются *главными кривизнами* поверхности M в точке P . Если λ_0 — главная кривизна, то векторы из $T_P M$, соответствующие нетривиальным решениям линейного уравнения $(Q - \lambda_0 G)X = 0$, называются *главными направлениями* поверхности M в точке P .

Замечание 4.29. Если λ_0 — главная кривизна, то $\det(Q - \lambda_0 G) = 0$, поэтому уравнение $(Q - \lambda_0 G)X = 0$ имеет нетривиальные решения.

Замечание 4.30. Из утверждения 4.27 следует, что главные кривизны и главные направления поверхности не зависят от выбора координат на поверхности, и что из векторов главных направлений можно составить базис пространства $T_P M$.

Следствие 4.31. Пусть P — произвольная точка регулярной гиперповерхности M . Тогда в базисе из векторов главных направлений в касательном пространстве $T_P M$ первая и вторая фундаментальные формы поверхности будут иметь вид

$$ds^2 = \sum_i (du^i)^2, \quad dq^2 = \sum_i \lambda_i (du^i)^2$$

соответственно. При этом числа λ_i являются главными кривизнами поверхности M в точке P .

Следующий результат, получающийся из следствия 4.21, проясняет геометрический смысл главных кривизн.

Следствие 4.32. Главная кривизна λ_i поверхности M в точке P равна ориентированной кривизне нормального сечения поверхности в точке P вдоль соответствующего главного направления.

С помощью главных кривизн и главных направлений можно легко вычислить кривизну любого нормального сечения.

Конструкция 4.33. Фиксируем в касательном пространстве $T_P M$ к поверхности M в точке P произвольный касательный вектор V единичной длины. Выберем в касательном пространстве $T_P M$ ортонормированный базис, состоящий из векторов главных направлений. Тогда координаты вектора V в этом базисе могут быть записаны в виде

$$V = (\cos \varphi_1, \dots, \cos \varphi_{n-1}),$$

где φ_i — угол между вектором V и i -м базисным вектором. В силу следствий 4.21 и 4.31 ориентированная кривизна $k_n(V)$ нормального сечения поверхности в точке P в направлении V может быть вычислена следующим образом:

$$k_n(V) = dq^2(V, V) = \sum_i \lambda_i (\cos \varphi_i)^2.$$

Особенно полезна эта формула в случае двумерной поверхности в \mathbb{R}^3 .

Следствие 4.34 (Формула Эйлера). Пусть M^2 — двумерная регулярная поверхность в \mathbb{R}^3 и P — точка из M . Тогда ориентированная кривизна $k_n(V)$ нормального сечения в точке P в направлении $V \in T_P M$ может быть вычислена следующим образом:

$$k_n(V) = \lambda_1 (\cos \varphi)^2 + \lambda_2 (\sin \varphi)^2,$$

где λ_1, λ_2 — главные кривизны поверхности в точке M , а φ — угол между вектором V и главным направлением, соответствующим главной кривизне λ_1 .

Следствие 4.35. Главные кривизны и главные направления двумерной регулярной поверхности в точке P соответствуют наибольшему и наименьшему значениям функции $\lambda_1 (\cos \varphi)^2 + \lambda_2 (\sin \varphi)^2$, значение которой равно ориентированной кривизне нормального сечения, проведенного в направлении вектора $(\cos \varphi, \sin \varphi)$.

Доказательство. Производная функции $k_n(\varphi) = \lambda_1 (\cos \varphi)^2 + \lambda_2 (\sin \varphi)^2$ по φ имеет вид

$$k'_n(\varphi) = 2(\lambda_2 - \lambda_1) \cos \varphi \sin \varphi = (\lambda_2 - \lambda_1) \sin 2\varphi,$$

поэтому, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то точки экстремума функции $k(\varphi)$ — это точки вида $\varphi = k\pi$ и $\varphi = \pi/2 + k\pi$, т.е. как раз главные направления. Если же $\lambda_1 = \lambda_2$, то все ориентированные кривизны нормальных сечений одинаковы. Доказательство закончено. \square

4.4 Средняя и гауссова кривизны

Как и в линейной алгебре, иногда бывает полезно исследовать инвариантные функции главных кривизн, а не сами главные кривизны.

Определение 4.36. Сумма главных кривизн поверхности M в точке P называется *средней кривизной* поверхности M в точке P и обозначается $H(P)$. Произведение главных кривизн называется *гауссовой кривизной* и обозначается $K(P)$.

Утверждение 4.37. *Средняя и гауссова кривизны поверхности не зависят от выбора координат на поверхности. При этом, если G и Q — матрицы первой и второй квадратичных форм поверхности в точке P в некотором базисе, то средняя и гауссова кривизны могут быть вычислены следующим образом:*

$$H(P) = \text{trace}(G^{-1}Q), \quad K(P) = \det(G^{-1}Q) = \frac{\det Q}{\det G}.$$

Доказательство. Первое утверждение очевидно, так как сами главные кривизны не зависят от выбора параметризации. Второе утверждение тоже очевидно, так как приведенные формулы справедливы в базисе, составленном из главных направлений, а в силу первого утверждения и инвариантности этих формул — и в любом другом базисе. \square

Знак гауссовой кривизны двумерной поверхности имеет простой геометрический смысл.

Утверждение 4.38. *Пусть P — произвольная точка двумерной регулярной поверхности $M \subset \mathbb{R}^3$. Если в точке P гауссова кривизна $K(P)$ поверхности M положительна, то достаточно малая окрестность точки P поверхности расположена целиком в одном из двух полупространств, определяемых касательной плоскостью $T_P M$, рассматриваемой как аффинная плоскость, проходящая через точку P пространства \mathbb{R}^3 . Если же $K(P) < 0$, то это не так, а именно, любая окрестность точки P пересекается с внутренностью обоих полупространств.*

Доказательство. Действительно, пусть гауссова кривизна $K(P)$ положительна. В двумерном случае это равносильно тому, что обе главные кривизны поверхности M в точке P имеют один и тот же знак, т.е. их главные нормали лежат в одном и том же полупространстве по отношению к касательной плоскости $T_P M$. Но тогда из формулы Эйлера вытекает, что главная нормаль любого нормального сечения поверхности в точке P определена и расположена в том же полупространстве. Отсюда следует, что в том же полупространстве находятся и сами сечения (в некоторой достаточно малой окрестности). Если же $K(P) < 0$, то из сказанного выше очевидно, что нормальные сечения вдоль главных направлений лежат в разных полупространствах по отношению к $T_P M$. Доказательство закончено. \square

Замечание 4.39. Утверждение 4.38 можно обобщить на многомерный случай, потребовав одинаковости знаков *всех* главных кривизн поверхности в точке P .

Определение 4.40. Точка двумерной поверхности, в которой $K > 0$, называется *точкой выпуклости*, или *сферической точкой*. Точка, в которой $K < 0$, называется *седловой*.

Геометрический смысл средней кривизны менее очевиден. Определенное представление о нем дает теорема Лапласа–Пуассона (см. Дополнительный материал).

Следующее важное свойство средней кривизны, объясняет отчасти ее название.

Утверждение 4.41. *Пусть P — произвольная точка гиперповерхности $M \subset \mathbb{R}^n$ и N — нормаль к M в точке P . Пусть v_1, \dots, v_{n-1} — произвольный набор попарно*

ортогональных единичных векторов из $T_P M$. Обозначим через k_i ориентированную кривизну нормального сечения поверхности M вдоль направления v_i . Тогда сумма чисел k_i равна средней кривизне поверхности M в точке P .

Доказательство. Это очевидно из следствия 4.31. Действительно, пусть $A = (a_i^j)$ — матрица, столбцы которой — суть координаты векторов v_i в ортонормированном базисе из главных направлений поверхности M в точке P . Тогда, по определению, матрица A ортогональна. Величина k_i равна

$$\lambda_1(a_i^1)^2 + \cdots + \lambda_{n-1}(a_i^{n-1})^2,$$

поэтому, суммируя все k_i , меняя порядок суммирования и пользуясь тем свойством ортогональной матрицы, что скалярный квадрат любой ее строки равен единице, получаем

$$\sum_i k_i = \sum_i \left(\sum_\alpha \lambda_\alpha (a_i^\alpha)^2 \right) = \sum_\alpha \left(\lambda_\alpha \sum_i (a_i^\alpha)^2 \right) = \sum_\alpha \lambda_\alpha 1 = H(P),$$

что и требовалось доказать. \square

Пример 4.42. Пусть поверхность задана графиком функции $z = f(x, y)$. Тогда (см. выше вид матриц первой и второй фундаментальных форм) средняя и гауссова кривизны в соответствии с утверждением 4.37 имеют вид

$$H = \frac{(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy}}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}, \quad K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}.$$

Пример 4.43. Пусть $M = S^2$ — стандартная сфера радиуса R . В качестве N выберем внутренние нормали к S^2 , т.е. нормали, направленные к центру сферы. Так как каждое плоское нормальное сечение является окружностью радиуса R , кривизна каждого такого сечения равна $1/R$. Поэтому кривизны главных нормальных сечений также равны $1/R$, и, значит, средняя кривизна равна $2/R$, а гауссова — $1/R^2$.

Пример 4.44. Пусть $M = T^2$ — тор в \mathbb{R}^3 , полученный вращением окружности радиуса r вокруг оси, находящейся в плоскости этой окружности на расстоянии $R > r$ от её центра. Пусть $P \in T^2$ — точка, расположенная ближе всего к оси вращения. Вычислим среднюю кривизну $H(P)$ тора в этой точке. Воспользуемся утверждением 4.41. Через точку P проходит два ортогональных плоских сечения — окружность радиуса r (образующая) и окружность радиуса $R - r$ (направляющая). Пусть нормаль N направлена наружу тора. Тогда $H(P) = 1/(R - r) - 1/r$

4.5 О теореме Бонне

Возникает вопрос: а всё ли “знают” про поверхность ее первая и вторая квадратичные формы? Может быть, следует определить еще несколько квадратичных форм, или достаточно уже определенных двух? Сформулируем задачу более формально.

Пусть Ω — область, в точках которой заданы две квадратичные формы g и q , гладко зависящие от точки. Если фиксированы координаты, то можно считать, что просто

заданы матрицы G и Q этих форм, гладко зависящие от координат. Предположим, что форма g невырождена и положительно определена. Можно ли задать на Ω параметрическую поверхность r так, чтобы ее первая квадратичная форма совпадала с g , а вторая — с q ?

Оказывается, в общем случае ответ — отрицательный. Дело в том, что первая и вторая формы не являются независимыми. Связь между ними выражается в так называемых *условиях Петерсона–Кодацци*¹. Мы поговорим о них в следующей лекции. Бонне удалось показать, что этих условий достаточно для восстановления поверхности.

Теорема 4.45 (Бонне, 1867). *Пусть на Ω заданы положительно определенная квадратичная форма g и произвольная квадратичная форма q , удовлетворяющие условиям Петерсона–Кодацци. Тогда существует единственная (с точностью до движения объемлющего пространства) регулярная поверхность на Ω , такая, что ее первая квадратичная форма совпадает с g , а вторая квадратичная форма — с q .*

¹ Впервые часть этих условий была найдена Гауссом. Полная система уравнений была независимо найдена Петерсоном (1853), Майнардди (1856) и Кодацци (1867).

4.6 Задачи

Задача 4.46. Вычислить вторую фундаментальную форму для поверхности, заданной неявной функцией $F(x, y, z)$. Вычислить среднюю и гауссову кривизны этой поверхности.

Задача 4.47. Вычислить среднюю и гауссову кривизны для гиперповерхности, заданной графиком $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$. Вычислить среднюю и гауссову кривизны для поверхности, заданной неявной функцией $F(x^1, \dots, x^n)$.

Задача 4.48. Вычислить вторую фундаментальную форму, а также среднюю и гауссову кривизны следующих поверхностей вращения:

- $r = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)$ (сфера);
- $r = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)$ (тор);
- $r = (a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v, a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin v, u)$ (катеноид).

Задача 4.49. Вычислить среднюю и гауссову кривизны поверхности, полученной вращением графика функции $x = f(z) > 0$ вокруг оси z .

Задача 4.50. Пусть S — некоторая данная поверхность. Отложим на нормалях к поверхности S в одном направлении отрезки постоянной длины. Концы отложенных отрезков описывают поверхность S^* , параллельную поверхности S . Если уравнение поверхности S есть $r = r(u, v)$, то уравнение S^* имеет вид

$$\rho = r(u, v) + a n(u, v),$$

где $n(u, v)$ — единичный вектор нормали к S .

Выразить первую и вторую фундаментальные формы поверхности S^* через первую и вторую фундаментальные формы поверхности S .

Выразить гауссову кривизну K^* и среднюю кривизну H^* поверхности S^* , параллельной поверхности S , через гауссову и среднюю кривизны поверхности S .

4.7 Дополнительный материал

4.7.1 Другое доказательство утверждения 4.7

Итак, пусть (u^i) и (v^i) — две системы координат на регулярной поверхности и N — фиксированное поле нормалей на ней. Определим, как связаны наборы чисел $q_{ij} = \langle r_{u^i u^j}, N \rangle$ и $\tilde{q}_{\alpha\beta} = \langle r_{v^\alpha v^\beta}, N \rangle$. Изучим сначала, как связаны векторы вторых частных производных от r . Так как

$$\frac{\partial r}{\partial u^i} = \sum_{\alpha} \frac{\partial r}{\partial v^\alpha} \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i},$$

то

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j} = \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\frac{\partial r}{\partial v^\alpha} \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i} \right) = \sum_{\alpha} \left(\sum_{\beta} \frac{\partial^2 r}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} \frac{\partial v^\beta}{\partial u^j} \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i} + \frac{\partial r}{\partial v^\alpha} \frac{\partial^2 v^\alpha}{\partial u^i \partial u^j} \right).$$

Умножив теперь левую и правую части предыдущего равенства скалярно на вектор нормали N и заметив, что вектор $\partial r / \partial v^\alpha$ — это просто вектор $r_{v^\alpha} = \partial_{v^\alpha}$ из канонического репера и поэтому перпендикулярен нормали N , получим:

$$\left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}, N \right\rangle = \sum_{\alpha\beta} \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial v^\alpha \partial v^\beta}, N \right\rangle \frac{\partial v^\beta}{\partial u^j} \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i}, \quad \text{т.е.} \quad q_{ij} = \sum_{\alpha\beta} \tilde{q}_{\alpha\beta} \frac{\partial v^\beta}{\partial u^j} \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i}.$$

Обозначим матрицу (q_{ij}) через $Q(u)$, матрицу $(\tilde{q}_{\alpha\beta})$ через $\tilde{Q}(v)$, а матрицу Якоби $(\partial v^\alpha / \partial u^i)$ через J . Тогда последнее соотношение принимает вид

$$Q(u) = J^T \tilde{Q}(v(u)) J.$$

4.7.2 Вторая форма цилиндра и теорема Менье

Рассмотрим прямой круговой цилиндр в трехмерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , заданный параметрически в виде

$$x^1(u^1, u^2) = R \cos u^1, \quad x^2(u^1, u^2) = R \sin u^1, \quad x^3(u^1, u^2) = u^2.$$

Обозначим через N поле нормалей к цилиндру, направленное наружу. Рассмотрим плоскость Π , пересекающую вертикальную координатную ось Ox^3 под углом α . Эта плоскость пересекает цилиндр по некоторому эллипсу. Найдём кривизну этого эллипса в его вершине P , наиболее удаленной от центра эллипса. Пусть V — касательный вектор к эллипсу в точке P и Π_N — двумерная плоскость, проходящая через векторы $N(P)$ и V . Эта плоскость, очевидно, пересекает цилиндр по окружности радиуса R (этим и хороша выбранная нами точка эллипса). Из следствия 4.25 получаем, что кривизна $k(P)$ эллипса в точке P может быть вычислена по формуле $k(P) \cos(\pi/2 - \alpha) = 1/R$, т.е. $k(P) = 1/(R \sin \alpha)$. В частности, если $\alpha = \pi/2$ (плоскость Π совпадает с Π_N), то $k(P) = 1/R$, а если $\alpha = 0$ (плоскость Π пересекает цилиндр по прямой, параллельной оси Ox^3), то $k(P) = \infty$.

Тот же результат, впрочем, можно получить и непосредственно из теоремы 4.17. Для этого нам придется вычислить обе квадратичные формы цилиндра, что и сделаем. Векторы канонического базиса цилиндра имеют вид

$$\partial_{u^1} = (-R \sin u^1, R \cos u^1, 0), \quad \partial_{u^2} = (0, 0, 1).$$

Представим вектор нормали N в виде нормированного векторного произведения:

$$N = [\partial_{u^1}, \partial_{u^2}] / \|\partial_{u^1}, \partial_{u^2}\|.$$

Получим: $N = (\cos u^1, \sin u^1, 0)$. Далее, первая квадратичная форма цилиндра в координатах (u^1, u^2) имеет вид

$$ds^2 = R^2 (du^1)^2 + (du^2)^2.$$

Чтобы найти вторую квадратичную форму цилиндра, вычислим вторые производные параметризующего отображения r . Получим:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u^1 \partial u^1} = (-R \cos u^1, -R \sin u^1, 0), \quad \frac{\partial^2 r}{\partial u^1 \partial u^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial u^2 \partial u^2} = 0.$$

Вторая квадратичная форма цилиндра будет иметь вид

$$dq^2 = -R(du^1)^2.$$

В координатах (u^1, u^2) вектор V принимает вид $V = (1/R, 0)$. Вектор главной нормали $n(P)$ к эллипсу направлен внутрь цилиндра, вектор $N(P)$ нормали к поверхности — наружу цилиндра, поэтому угол между векторами $n(P)$ и $N(P)$ равен $\pi/2 + \alpha$. Итак, из теоремы 4.17 получаем:

$$k(P) \cos(\pi/2 + \alpha) = \frac{-R(1/R)^2}{1} = -1/R,$$

поэтому $k(P) = 1/(R \sin \alpha)$, как и выше.

4.7.3 Главные кривизны цилиндра

Рассмотрим снова прямой круговой цилиндр

$$x^1(u^1, u^2) = R \cos u^1, \quad x^2(u^1, u^2) = R \sin u^1, \quad x^3(u^1, u^2) = u^2.$$

Выше были вычислены его первая и вторая квадратичные формы в этой параметризации. В матричном виде ответ можно записать так:

$$G = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\det \begin{pmatrix} -R - \lambda R^2 & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = R\lambda(1 + R\lambda) = 0,$$

и главные кривизны цилиндра равны 0 и $-1/R$. Главные направления находятся из линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/R \end{pmatrix} X = 0,$$

и соответственно равны $(0, 1)$ и $(1, 0)$. Другими словами, главные направления кругового цилиндра — это направления его параллелей и меридианов.

В этом случае формула Эйлера для кривизны нормального сечения имеет вид

$$k(\varphi) = \frac{\cos^2 \varphi}{R}.$$

График этой функции на интересующем нас отрезке $[0, 2\pi]$ изображен на рис. 4.1.

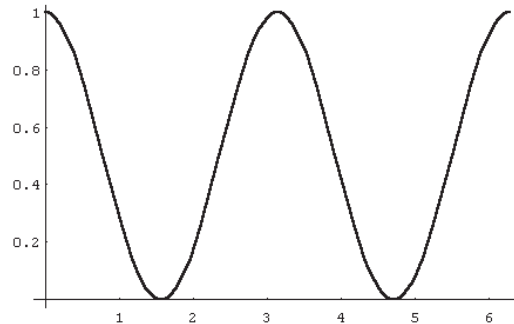


Рис. 4.1: Кривизны нормальных сечений кругового цилиндра.

Отметим, что, зная формулу Эйлера и принимая во внимание взаимную ортогональность главных направлений, можно определить главные кривизны и главные направления цилиндра, не вычисляя его фундаментальные формы. Действительно, рассмотрим всевозможные нормальные сечения цилиндра, проходящие через фиксированную точку P . Все эти сечения, кроме одного особого, представляют собой эллипсы, особое же сечение — это прямолинейная образующая цилиндра. Фиксируем внутреннюю нормаль к цилиндру. Векторы ускорений всех сечений-эллипсов направлены внутрь цилиндра, поэтому в формуле Эйлера следует выбрать знак “плюс” для произвольного направления $V = (\cos \varphi, \sin \varphi)$: $k_n(\varphi) = \lambda_1(\cos \varphi)^2 + \lambda_2(\sin \varphi)^2$. Далее, кривизна прямой равна нулю, поэтому на этом сечении достигается наименьшее возможное значение функции $k_n(\varphi)$. Следовательно, направление меридиана — главное, и соответствующая главная кривизна равна 0. Второе главное направление ортогонально первому, значит, это направление — направление параллели-окружности. Поэтому вторая главная кривизна равна кривизне окружности, т.е. $1/R$.

4.7.4 Теорема Лапласа–Пуассона

Понятие средней кривизны двумерной поверхности было впервые определено Томасом Юнгом (1805), а затем независимо Пьером Симоном Лапласом (1806). Лаплас изучал форму поверхности раздела двух физических сред, находящихся в равновесии, и выяснил, что средняя кривизна поверхности раздела пропорциональна разности давлений в разделяемых средах. Этот результат в механике сплошной среды называется теоремой Лапласа. Коэффициент пропорциональности называется *коэффициентом поверхностного натяжения*.

Приведем здесь схему рассуждений Лапласа. Рассмотрим малый участок поверхности раздела двух физических сред, в одной из которых давление равно p_1 , а в другой — p_2 (в окрестности поверхности). Представим себе малое возмущение поверхности, при котором каждая её точка движется вдоль нормального поля N , направленного, скажем, в сторону второй среды. При этом, если поверхность смещается на δN , то объем пространства между исходной и возмущенной поверхностями равен $\delta N dS$, где dS — элемент площади исходной поверхности. Полная работа δA при таком возмущении складывается из работы по изменению объема, которая есть $(p_2 - p_1)\delta N dS$, и работы поверхностных сил, которая, в свою очередь, есть $\sigma \delta S$. Здесь через δS обозначено изменение площади поверхности, а через σ — коэффициент поверхностного натяжения. Условие термодинамического равновесия записывается так:

$$\delta A = (p_2 - p_1)\delta N dS + \sigma \delta S = 0.$$

Вычислим площадь возмущенной поверхности. Рассмотрим пару главных нормальных сечений, проведенных через фиксированную точку P , и пусть $r_i(t_i)$ — их натуральные параметризации. Элемент dS площади невозмущенной поверхности можно записать в виде $dt_1 dt_2$. Рассмотрим возмущения главных сечений в их плоскостях вдоль вектора $N(P)$ нормали к поверхности в этой точке. Эти возмущения имеют вид $r_i + \varepsilon N$. Однако, по определению, вектор нормали N и вектор главной нормали n_i к кривой r_i коллинеарны, поэтому возмущения имеют вид $r_i + \varepsilon s_i n_i$, где $s_i = \langle n_i, N \rangle$. Из плоских формул Френе следует, что элемент длины возмущенной кривой r_i имеет вид $(1 + \varepsilon s_i k_i) dt_i$, что в силу следствий 4.25 и 4.32 можно переписать в виде $(1 + \varepsilon \lambda_i) dt_i$. Здесь через λ_i обозначена главная кривизна, соответствующая i -му главному направлению. Наконец, элемент площади возмущенной поверхности равен произведению элементов длин возмущенных кривых γ_i (эти кривые ортогональны), поэтому приращение δS площади равно

$$(1 + \varepsilon \lambda_1)(1 + \varepsilon \lambda_2) dt_1 dt_2 - dS = ((\lambda_1 + \lambda_2)\varepsilon + o(\varepsilon)) dS.$$

Подставляя полученный результат в условие термодинамического равновесия, заменяя в нем ε на δN и пренебрегая членами порядка $o(\varepsilon)$, получаем

$$((p_2 - p_1) + \sigma(\lambda_1 + \lambda_2))dS \delta N = 0.$$

Отсюда окончательно получаем уравнение Лапласа: $\sigma(P)H(P) = p_1 - p_2$.

Итак, доказан следующий результат.

Теорема 4.51 (Лаплас–Пуассон). *Средняя кривизна поверхности раздела двух равновесных физических сред пропорциональна разности давлений в этих средах вблизи поверхности раздела.*

4.7.5 Средняя и гауссова кривизны двумерной поверхности

Рассмотрим двумерную поверхность, заданную параметрически. Пусть (u, v) — координаты на этой поверхности, и метрика ds^2 и вторая форма $d\sigma^2$ имеют вид

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \quad d\sigma^2 = L du^2 + 2M du dv + N dv^2.$$

Тогда

$$H = \frac{GL - 2FM + EN}{EG - F^2}, \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Отметим, что такие буквенные обозначения для компонент первой и второй фундаментальных форм являются традиционными в классической теории поверхностей.

4.7.6 О выборе координат на поверхности

Часто бывает полезно выбрать такое представление поверхности (т.е. такие координаты на поверхности), для которого первая и/или вторая фундаментальная формы имеют наиболее простой вид. Как известно, при замене параметризации матрицы первой и второй форм меняются, как матрицы квадратичных форм, причем в качестве матрицы замены надо взять соответствующую матрицу Якоби.

Пусть M — поверхность, заданная параметрически с помощью отображения $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, и (u^1, \dots, u^{n-1}) — соответствующие координаты на этой поверхности. Пусть $P \in M$. Выберем произвольную невырожденную

матрицу (c_α^i) размера $(n-1) \times (n-1)$ и зададим с ее помощью линейное преобразование касательного пространства $T_P M$, переводящее канонический базис $\{\partial_{u^i}\}$ в базис $\{\xi_i\}$, имеющий вид $\xi_\alpha = \sum_i c_\alpha^i \partial_{u^i}$.

Пусть (e_1, \dots, e_{n-1}) — стандартный базис в пространстве $\mathbb{R}^{n-1} \supset \Omega$. Рассмотрим линейное преобразование C , отображающее \mathbb{R}^{n-1} на себя и переводящее базисные векторы e_i в базисные векторы $\bar{e}_\alpha = \sum_i c_\alpha^i e_i$. Тогда координаты \bar{u}^α пространства \mathbb{R}^{n-1} , порожденные базисом \bar{e}_α , связаны с координатами u^i по формуле $u^i = \sum_\alpha c_\alpha^i u^\alpha$.

Построим теперь новую параметризацию $\bar{r}: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ поверхности M , положив $\bar{\Omega} = C^{-1}(\Omega)$ и $\bar{r} = r \circ C$. Тогда матрица Якоби, с помощью которой осуществляется преобразование координат фундаментальных форм поверхности, составлена из частных производных $\partial u^i / \partial \bar{u}^\alpha$ и равна C .

Итак, доказано следующее.

Предложение 4.52. Любое линейное преобразование касательного пространства $T_P M$ поверхности M можно задать заменой координат на поверхности M , т.е. заменой параметрического представления этой поверхности. В частности, для любой точки $P \in M$ существуют такие координаты на M , в которых индуцированная метрика, вычисленная в точке P , задается единичной матрицей, а вторая фундаментальная форма в этой точке — диагональной матрицей.

Следующие координаты часто бывают полезными при разных вычислениях. Пусть M — некоторая двумерная поверхность в \mathbb{R}^3 и $P \in M$. Зададим поверхность M в окрестности точки P в виде графика функции $z = f(x, y)$, выбрав в качестве координатной плоскости XU касательную плоскость $T_P M$, а в качестве оси z — прямую, перпендикулярную к $T_P M$. Тогда точка P имеет координаты $(0, 0, 0)$, и график функции f касается плоскости XU в точке P , поэтому $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. Так как матрица индуцированной метрики имеет вид $\begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}$, видим, что в точке P эта матрица — единичная. Найдем матрицу второй фундаментальной формы, а также среднюю и гауссову кривизны в точке P . Имеем

$$Q = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix},$$

$$H = f_{xx} + f_{yy}, \quad K = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2.$$

Упражнение 4.53. Обобщить предыдущую конструкцию на случай гиперповерхности $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$.

Возникает естественный вопрос: можно ли так подобрать координаты на поверхности M , чтобы индуцированная метрика задавалась единичной матрицей в каждой точке? Оказывается, в общем случае ответ отрицателен. В следующем семестре будет рассмотрен так называемый тензор кривизны Римана, исследуя который, можно понять, когда существуют такие координаты (наличие таких координат равносильно занулению тензора Римана). В случае двумерных поверхностей кривизна Римана оказывается пропорциональной гауссовой кривизне.

4.7.7 Конформные координаты двумерной поверхности

В случае двумерной поверхности вид метрики можно значительно упростить, выбирая подходящие координаты. (Отметим сразу, что этот результат не обобщается на большие размерности.) Назовем координаты (u, v) на двумерной поверхности M *конформными*, или *изотермическими*, если в них индуцированная метрика имеет вид

$$ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2),$$

где $\lambda(u, v)$ — некоторая положительная функция. Этот результат приводим без доказательства.

Теорема 4.54 (Об униформизации). На любой двумерной поверхности M существуют конформные координаты.

Ниже покажем, как можно использовать эту теорему, например при исследовании важного класса двумерных поверхностей, называемых минимальными поверхностями.

4.7.8 Минимальные поверхности

Теорема Лапласа–Пуассона (см. выше) проясняет физический смысл средней кривизны двумерной поверхности (напомним, что средняя кривизна поверхности раздела двух однородных равновесных физических сред пропорциональна разности давлений). Частными случаями поверхностей раздела двух однородных сред являются мыльные пленки (средняя кривизна равна нулю) и мыльные пузыри (средняя кривизна постоянна).

Определение 4.55. Гиперповерхность M называется *минимальной*, если ее средняя кривизна тождественно равна нулю. Поверхность M называется поверхностью *постоянной средней кривизны*, если ее средняя кривизна постоянна.

Рассмотрим двумерную поверхность M в \mathbb{R}^3 , заданную параметрически в виде $x = r(u, v)$, где $x = (x^1, x^2, x^3)$ — стандартные координаты в \mathbb{R}^3 . Предположим, что координаты (u, v) являются конформными (по теореме 4.54 такие координаты всегда можно выбрать), т.е. индуцированная метрика ds^2 в координатах (u, v) имеет вид $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$, где $\lambda(u, v)$ — некоторая положительная функция.

Теорема 4.56. Пусть двумерная поверхность M в \mathbb{R}^3 задана параметрически в виде $r(u, v)$, причем координаты (u, v) — конформны. Пусть $N = [r_u, r_v] / \|[r_u, r_v]\|$ — единичная нормаль к поверхности M . Тогда

$$\Delta r = \frac{\partial^2 r}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial v^2} = r_{uu} + r_{vv} = \lambda H N,$$

где H — средняя кривизна поверхности M , вычисленная по отношению к нормали N . В частности, лапласиан Δr радиус-вектора r перпендикулярен поверхности M .

Доказательство. Покажем сначала, что $\Delta r \perp M$. Действительно,

$$\begin{aligned} \langle \Delta r, r_u \rangle &= \langle r_{uu} + r_{vv}, r_u \rangle = \langle r_{uu}, r_u \rangle + \langle r_{vv}, r_u \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle r_u, r_u \rangle_u + \langle r_v, r_u \rangle_v - \langle r_v, r_{uv} \rangle = \frac{1}{2} \lambda_u + 0 - \frac{1}{2} \langle r_v, r_v \rangle_u = \frac{1}{2} \lambda_u - \frac{1}{2} \lambda_u = 0. \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что $\langle \Delta r, r_v \rangle = 0$.

Вычислим теперь $\langle \Delta r, N \rangle$:

$$\langle \Delta r, N \rangle = \langle r_{uu}, N \rangle + \langle r_{vv}, N \rangle = \operatorname{tr} Q.$$

Так как $G^{-1}Q = \frac{1}{\lambda}Q$, то $H = \operatorname{tr}(G^{-1}Q) = \operatorname{tr} Q / \lambda$, откуда

$$\langle \Delta r, N \rangle = \lambda H \Rightarrow \Delta r = \lambda H N,$$

что и требовалось доказать. □

Радиус-вектор $r(u, v)$ назовем *гармоническим*, если

$$\Delta r = \frac{\partial^2 r}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial v^2} = 0.$$

Приведем важное следствие предыдущей теоремы.

Следствие 4.57. Двумерная поверхность M в \mathbb{R}^3 , заданная параметрически в виде $r(u, v)$, где (u, v) — конформные координаты, является минимальной, если и только если радиус-вектор $r(u, v)$ — гармонический.

Если поверхность задана графиком функции $z = f(x, y)$, то условие ее минимальности, в силу проделанных ранее явных вычислений средней кривизны, записывается в виде

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0.$$

Это уравнение, найденное Лагранжем, называется *уравнением минимальных поверхностей*. Интересно отметить, что, хотя для малых областей плоскости XU существует много разных решений этого уравнения, решений, определенных на всей плоскости, не так уж много. Одним из очевидных решений является произвольная линейная функция. Оказывается, что других таких решений нет. Приведем без доказательства следующую теорему, принадлежащую Бернштейну.

Теорема 4.58 (Бернштейн). Если $f(x, y)$ — решение уравнения минимальных поверхностей, определенное на всей плоскости XU , то функция f — линейна.

Приведем еще некоторые примеры минимальных поверхностей.

Пример 4.59. Опишем все минимальные поверхности вращения, т.е. поверхности вращения нулевой средней кривизны. Поверхность вращения, напомним, получается при вращении графика положительной гладкой функции f вокруг оси изменения параметра.

Зададим поверхность вращения M как отображение $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$x^1(\varphi, z) = f(z) \cos \varphi, \quad x^2(\varphi, z) = f(z) \sin \varphi, \quad x^3(\varphi, z) = z.$$

Векторы канонического базиса в точке (φ, z) имеют вид

$$\partial_\varphi = (-f(z) \sin \varphi, f(z) \cos \varphi, 0), \quad \partial_z = (f'(z) \cos \varphi, f'(z) \sin \varphi, 1),$$

поэтому первая квадратичная форма поверхности вращения равна

$$(f(z))^2(d\varphi)^2 + (1 + (f'(z))^2)(dz)^2.$$

Зададим поле нормалей на поверхности M как нормированное векторное произведение элементов канонического базиса:

$$N(\varphi, z) = \frac{[\partial_\varphi, \partial_z]}{\|[\partial_\varphi, \partial_z]\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(z))^2}} (\cos \varphi, \sin \varphi, -f'(z)).$$

Отметим, что это внешняя нормаль. Вычисляя вторую квадратичную форму поверхности M , получим:

$$dq^2 = \frac{-f(z)(d\varphi)^2 + f''(z)(dz)^2}{\sqrt{1 + (f'(z))^2}}.$$

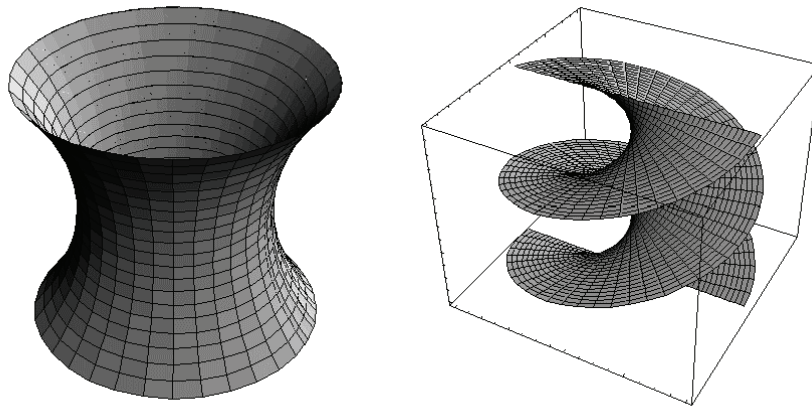


Рис. 4.2: Катеноид (слева) и геликоид (справа) — поверхности нулевой средней кривизны.

Найдем теперь среднюю кривизну поверхности вращения, воспользовавшись для этого утверждением 4.37:

$$H(P) = \text{trace}(G^{-1}Q) = \frac{f''(z)(f(z))^2 - f(z)(1 + (f'(z))^2)}{\sqrt{1 + (f'(z))^2}}.$$

Таким образом, условие равенства нулю средней кривизны поверхности вращения можно записать в виде

$$f''(z)f(z) - (f'(z))^2 - 1 = 0.$$

Решая полученное дифференциальное уравнение, находим: $f(z) = a \operatorname{ch}(z/a) + b$. Это так называемые *катеноиды* — поверхности, полученные при вращении цепной линии. Их можно наблюдать, опустив в мыльную воду проволочный контур, состоящий из двух окружностей. Один из катеноидов ($a = 1$, $b = 0$) показан на рис. 4.2.

Еще одним примером минимальных поверхностей является *геликоид*, представляющий собой поверхность, образованную прямой линией, которая равномерно движется вдоль некоторой оси и равномерно вращается вокруг нее (см. рис. 4.2). При специальном выборе координат в \mathbb{R}^3 геликоид можно записать в виде

$$(x = u \cos v, y = u \sin v, z = av),$$

где a — некоторая ненулевая постоянная (проверьте, что геликоид является минимальной поверхностью).

Напомним, что *линейчатой поверхностью* называется поверхность, порождаемая прямой линией при произвольном ее движении. Оказывается, что имеет место следующий результат (докажите).

Теорема 4.60 (Каталан). *Линейчатая поверхность минимальна, если и только если она является или плоскостью, или геликоидом (см. рис. 4.2).*

4.7.9 Поверхности вращения постоянной гауссовой кривизны

Некоторые поверхности постоянной гауссовой кривизны нам уже известны — сфера ($K = 1/R^2$) и плоскость ($K = 0$). В данном пункте построим ряд более сложных поверхностей постоянной гауссовой кривизны, которые можно найти среди поверхностей вращения.

Пользуясь приведенными выше выражениями для первой и второй квадратичных форм поверхности вращения графика функции f , заданной параметрически, найдем ее гауссову кривизну как отношение определителей форм:

$$K = \frac{-f''(z)}{f(z)(1 + f'(z)^2)^2}.$$

Решения этого дифференциального уравнения порождают поверхности вращения постоянной гауссовой кривизны, примеры которых приведены на рис. 4.3 и 4.4.

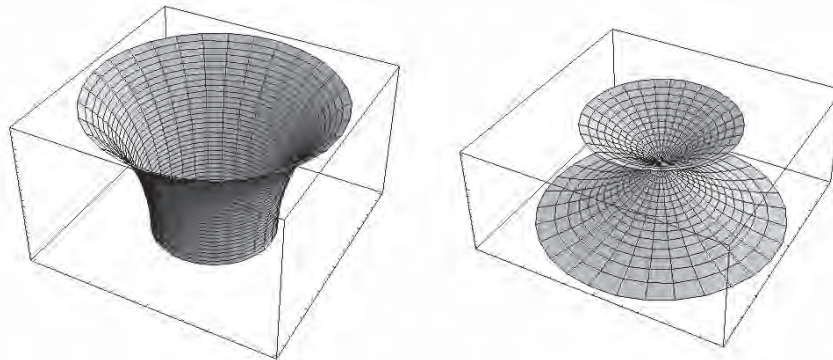


Рис. 4.3: Поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны.

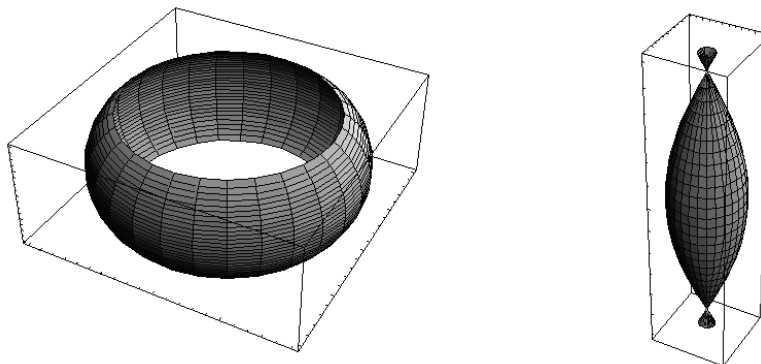


Рис. 4.4: Поверхности вращения постоянной положительной кривизны.

Существуют и гораздо более сложные поверхности постоянной гауссовой кривизны. На рис. 4.5 слева представлена поверхность Дини, ее кривизна отрицательна, а справа — поверхность постоянной положительной гауссовой кривизны.

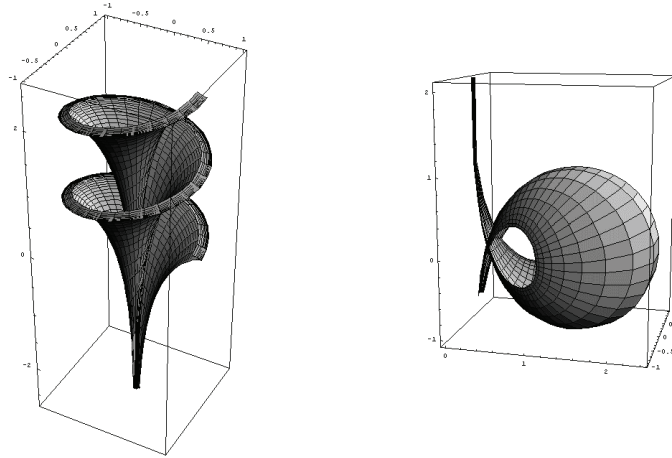


Рис. 4.5: Поверхности постоянной гауссовой кривизны.

4.7.10 Случай произвольной коразмерности

Выше в данной лекции мы ограничивались рассмотрением гиперповерхностей. Здесь вкратце обсудим общий случай. Итак, пусть M — произвольная k -мерная поверхность в \mathbb{R}^n . Рассмотрим произвольную точку $P \in M$. Пусть $T_P M$ — касательное пространство к поверхности в этой точке, а $(T_P M)^\perp$ — ортогональное дополнение к $T_P M$. Для произвольного вектора $X \in \mathbb{R}^n$ обозначим через X^T и X^N его ортогональные проекции на подпространства $T_P M$ и $(T_P M)^\perp$ соответственно.

Пусть $\gamma(t)$ — произвольная кривая, лежащая на M , такая, что $\gamma(0) = P$, и ξ — вектор скорости $\dot{\gamma}(0)$ кривой γ в точке P . Обозначим через $q(\xi)$ вектор $(\ddot{\gamma})^N$.

Пусть $r(u^1, \dots, u^k)$ — параметрическое задание поверхности M , и кривая γ задается в координатах (u^1, \dots, u^k) : $u^i = u^i(t)$, $i = 1, \dots, k$. Тогда $\xi = (\dot{u}^1, \dots, \dot{u}^k)$ и

$$\ddot{\gamma} = \left(\sum_i r_{u^i} \dot{u}^i \right)' = \sum_{ij} r_{u^i u^j} \dot{u}^i \dot{u}^j + \sum_i r_{u^i} \ddot{u}^i, \quad \text{откуда} \quad q(\xi) = \sum_{ij} (r_{u^i u^j})^N \dot{u}^i \dot{u}^j,$$

поскольку $(r_{u^i})^N = 0$.

Таким образом, величина $q(\xi)$ зависит не от конкретного вида кривой γ , а лишь от компонентов вектора скорости ξ и векторов $q_{ij}(P) = (r_{u^i u^j})^N(P)$.

Пусть $\partial_{u^i} = \partial_{u^i}(P)$ — векторы канонического базиса. Фиксируем в ортогональном дополнении $(T_P M)^\perp$ к касательному пространству $T_P M$ ортонормированный базис N_1, \dots, N_{n-k} , такой, что векторы

$$\partial_{u^1}, \dots, \partial_{u^k}, N_1, \dots, N_{n-k}$$

образуют положительно ориентированный базис в \mathbb{R}^n . Легко проверить, что для каждой достаточно близкой к P точки Q векторы $N_i(Q)$ можно выбрать так, чтобы их координаты гладко зависели от этой точки. Тогда $q_{ij}(P) = \sum_\alpha \langle r_{u^i u^j}, N_\alpha \rangle N_\alpha$.

Векторы $q_{ij}(P)$ задают билинейную форму на линейном пространстве $T_P M$ со значениями в $(T_P M)^\perp$ (т.е. билинейную функцию, значения которой — суть векторы из $(T_P M)^\perp$). Она называется *второй фундаментальной формой поверхности*. Многие конструкции, обсуждавшиеся выше, могут быть обобщены на общий случай. В частности, след этой билинейной формы называется *вектором средней кривизны* поверхности. Поверхности нулевой средней кривизны (называемые, как и в двумерном случае, минимальными) также обладают рядом важных и интересных свойств, что делает их предметом интенсивного изучения.

Тема 5

Элементы дифференциального исчисления на поверхностях

Материал данной лекции обычно не входит в стандартный курс классической дифференциальной геометрии, а излагается во втором семестре (в существенно более общем случае — случае римановых многообразий). Однако, по нашему мнению, знакомство с ним не только углубит понимание классической теории поверхностей, но, что более важно, облегчит восприятие более сложных конструкций тензорного анализа.

5.1 Деривационные формулы Вейнгартена–Гаусса

В практических задачах часто приходится рассматривать семейства векторов, зависящих от точки поверхности. Например, это могут быть векторы скоростей частиц жидкости, текущей по поверхности, векторы направления магнитного поля, и т.п.

Определение 5.1. Гладкое отображение $X: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ регулярной поверхности M в объемлющее пространство \mathbb{R}^n называется (*гладким*) *векторным полем на M* . Если при этом $X(P) \in T_P M$ для всех $P \in M$, то векторное поле X называется *касательным векторным полем*.

Пример 5.2. Поле нормалей на гиперповерхности является гладким векторным полем в смысле предыдущего определения.

Ниже в этом разделе мы ограничимся случаем гиперповерхностей.

Конструкция 5.3. Пусть на регулярной гиперповерхности M с полем нормалей N задано векторное поле X . Если на M фиксированы координаты u^1, \dots, u^{n-1} , то в каждой точке P вектор $X(P)$ можно разложить по базису, полученному из канонического базиса (∂_{u^i}) добавлением вектора нормали:

$$X = X^1 \partial_{u^1} + \dots + X^{n-1} \partial_{u^{n-1}} + X^n N.$$

При этом гладкость отображения X равносильна гладкости функций $X^i(u^1, \dots, u^{n-1})$. Обратно, по набору $X^i(u^1, \dots, u^{n-1})$, $i = 1, \dots, n$, гладких функций однозначно восстанавливается векторное поле. Если поле X — касательное, то достаточно $(n - 1)$ функции.

Определение 5.4. Функции X^i называются *компонентами векторного поля X в координатах u^1, \dots, u^{n-1}* .

Упражнение 5.5. Пусть фиксировано касательное векторное поле на поверхности и X^i — компоненты этого векторного поля в координатах u^1, \dots, u^k , а Y^i — компоненты того же векторного поля в координатах v^1, \dots, v^k . Проверьте, что $Y = JX$, где J — матрица Якоби замены координат, т.е. $Y^j = \sum_i \partial v^j / \partial u^i X^i$.

Наша ближайшая цель — научиться дифференцировать векторные поля на поверхности. Начнем с векторов канонического базиса и поля нормалей.

Конструкция 5.6. Пусть поверхность задана параметрически в виде $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, и на ней фиксированы координаты u^1, \dots, u^{n-1} . Напомним, что вектор ∂_{u^i} канонического базиса в точке P — это производная $\partial r / \partial u^i$ радиус-вектора поверхности по координате u^i в точке P . Поэтому производная вектора ∂_{u^i} по координате u^j — это вектор, равный второй производной радиус-вектора:

$$\frac{\partial}{\partial u^j} \partial_{u^i} = \frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}.$$

Для краткости будем обозначать дифференцирование по u^i нижним индексом i , например $\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j} = r_{ij}$, а $\partial_{u^i} = r_i$. Как и любой другой вектор, вектор r_{ij} раскладывается по базису объемлющего пространства \mathbb{R}^n , составленного из векторов r_i канонического базиса и вектора N нормали к гиперповерхности. Аналогично, по этому же базису раскладывается производная N_j по u^j вектора нормали. Запишем соответствующие разложения:

$$r_{ij} = \sum_{\alpha} \Gamma_{ij}^{\alpha} r_{\alpha} + q_{ij} N, \quad N_j = \sum_{\alpha} b_j^{\alpha} r_{\alpha} + c_j N,$$

где через Γ_{ij}^{α} , b_j^{α} , q_{ij} и c обозначены соответствующие коэффициенты.

Утверждение 5.7. Коэффициенты Γ_{ij}^{α} , b_j^{α} , q_{ij} и c_j выражаются через компоненты первой и второй фундаментальных форм.

Замечание 5.8. Введенные нами обозначения Γ_{ij}^{α} , b_j^{α} , q_{ij} и c являются традиционными. Точные формулы, эти коэффициенты через компоненты первой и второй фундаментальных форм называются *деривационные формулы Вейнгартена–Гаусса* и приведены ниже, в утверждении 5.12.

Доказательство. Вычислим коэффициенты при N . Умножая равенство

$$r_{ij} = \sum_{\alpha} \Gamma_{ij}^{\alpha} r_{\alpha} + q_{ij} N, \tag{*}$$

скалярно на N , найдем, что $q_{ij} = \langle r_{ij}, N \rangle$, т.е. матрица q_{ij} — это не что иное, как матрица второй квадратичной формы поверхности. Точно так же, умножая равенство

$$N_j = \sum_{\alpha} b_j^{\alpha} r_{\alpha} + c_j N, \quad (**)$$

скалярно на N , находим, что $\langle N, N_j \rangle = c_j$. С другой стороны, векторное поле N по модулю равно единице, поэтому, $\langle N, N \rangle = 1$ и, дифференцируя это последнее равенство по u^j заключаем, что $\langle N, N_j \rangle = 0$. Таким образом, $c_j = 0$.

Найдем теперь коэффициенты Γ_{ij}^{α} . Прежде всего, заметим, что так как r_{ij} и q_{ij} симметричны по i и j , то из равенства (*) следует, что то же самое верно и для любых Γ_{ij}^k , т.е. $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Далее, умножим равенство (*) скалярно на вектор r_k . Получим

$$\langle r_{ij}, r_k \rangle = \sum_{\alpha} \Gamma_{ij}^{\alpha} g_{\alpha k},$$

где $g_{\alpha k} = \langle r_{\alpha}, r_k \rangle$ — матрица первой квадратичной формы поверхности. В то же время

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \frac{\partial \langle r_i, r_j \rangle}{\partial u^k} = \langle r_{ik}, r_j \rangle + \langle r_i, r_{jk} \rangle = \sum_{\alpha} \Gamma_{ik}^{\alpha} g_{\alpha j} + \sum_{\alpha} \Gamma_{jk}^{\alpha} g_{\alpha i}.$$

Последнее равенство справедливо для любого набора индексов i, j и k . Поэтому, для фиксированной тройки индексов i, j и k можно записать систему из трех таких уравнений, добавив еще два, получающихся циклической перестановкой индексов. В итоге получим систему следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} &= \sum_{\alpha} \Gamma_{ik}^{\alpha} g_{\alpha j} + \sum_{\alpha} \Gamma_{jk}^{\alpha} g_{\alpha i}, \\ \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} &= \sum_{\alpha} \Gamma_{ji}^{\alpha} g_{\alpha k} + \sum_{\alpha} \Gamma_{ki}^{\alpha} g_{\alpha j}, \\ \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} &= \sum_{\alpha} \Gamma_{kj}^{\alpha} g_{\alpha i} + \sum_{\alpha} \Gamma_{ij}^{\alpha} g_{\alpha k}. \end{aligned}$$

Теперь вычтем первое уравнение из суммы двух последних. Воспользовавшись симметрией Γ_{ij}^k , получим

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = 2 \sum_{\alpha} \Gamma_{ij}^{\alpha} g_{\alpha k}.$$

Фиксируем произвольные i и j и выпишем такие уравнения для всех $k = 1, \dots, n-1$. Мы получим систему линейных уравнений на неизвестные величины Γ_{ij}^k , матрица которой — это матрица $g_{\alpha k}$ первой квадратичной формы. Так как эта матрица невырождена, полученная система всегда имеет единственное решение, которое легко получить, умножая нашу систему на матрицу, обратную к матрице (g_{ij}) . Эту матрицу в дифференциальной геометрии обычно обозначают через g^{ij} . Тогда ответ записывается в виде

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left(g^{k\alpha} \left(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^{\alpha}} \right) \right).$$

Нам осталось найти коэффициенты b_j^α . Умножив равенство (***) скалярно на r_k , получим

$$\langle N_i, r_k \rangle = \sum_j b_i^j \langle r_j, r_k \rangle = \sum_j b_i^j g_{jk},$$

Чтобы вычислить скалярное произведение в левой части последнего равенства, заметим, что $\langle N, r_k \rangle = 0$, поэтому

$$0 = \frac{\partial \langle N, r_k \rangle}{\partial u^i} = \langle N_i, r_k \rangle + \langle N, r_{ki} \rangle.$$

Однако $\langle N, r_{ki} \rangle = q_{ki}$, где q_{ki} — элемент второй квадратичной формы поверхности. Поэтому получаем следующие линейные уравнения на неизвестные b_i^j (индекс i фиксирован):

$$-q_{ki} = \sum_j b_i^j g_{jk}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Матрица этой линейной системы совпадает с (невырожденной) матрицей первой квадратичной формы поверхности, поэтому система имеет единственное решение, которое записывается через матрицу (g^{ij}) , обратную матрице (g_{ij}) так:

$$b_i^j = - \sum_k q_{ik} g^{kj}.$$

Доказательство утверждения закончено. □

Соглашение 5.9. Матрица, обратная к матрице первой фундаментальной формы поверхности в некоторых фиксированных координатах, обозначается той же буквой, но с верхними индексами. Например, если g_{ij} — матрица первой фундаментальной формы, то g^{ij} — обратная к ней.

Упражнение 5.10. Пусть g_{ij} и h_{ij} — матрицы первой фундаментальной формы регулярной поверхности в разных системах координат. Вывести формулы, связывающие компоненты матриц g^{ij} и h^{ij} .

Определение 5.11. Набор величин

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_\alpha \left(g^{k\alpha} \left(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\alpha} \right) \right)$$

называется *символами Кристоффеля поверхности M в точке P в системе координат (u^1, \dots, u^{n-1})* .

Собирая вместе формулы, полученные в ходе доказательства утверждения 5.7, получаем следующий результат.

Утверждение 5.12. Для вторых производных радиус-вектора неособой поверхности M имеют место следующие деривационные формулы Гаусса–Вейнгартена:

$$\frac{\partial}{\partial u^j} \partial u^i = \sum_\alpha \Gamma_{ij}^\alpha \partial u^\alpha + q_{ij} N,$$

где q_{ij} — матрица второй квадратичной формы поверхности, а Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля поверхности M .

Производные нормального векторного поля N на поверхности имеют вид

$$\frac{\partial N}{\partial u^i} = \sum_{\alpha} b_i^{\alpha} \partial_{u^{\alpha}},$$

где коэффициенты b_i^{α} выражаются через первую и вторую квадратичные формы поверхности так:

$$b_i^{\alpha} = - \sum_k q_{ik} g^{k\alpha}.$$

Упражнение 5.13. Выяснить, как преобразуются символы Кристоффеля при замене параметризации поверхности.

Упражнение 5.14. Вычислить символы Кристоффеля для плоскости, цилиндра, сферы, двумерной поверхности вращения.

Замечание 5.15. Коэффициенты деривационных формул связаны соотношениями, полученными при вычислении двумя разными способами третьих смешанных производных радиус-вектора и вторых смешанных производных вектора нормали. Часть из них была впервые записана Гауссом, а остальные — Петерсоном, Майнарди и Кодацци. Эти дифференциальные уравнения в частных производных на компоненты квадратичных форм поверхности принято называть уравнениями Петерсона–Кодацци. Именно они образуют набор необходимых и достаточных условий разрешимости системы, к которой сводится задача о восстановлении поверхности по первой и второй квадратичным формам. Однако эта тема выходит за рамки нашего курса. Мы выведем лишь уравнения Гаусса для двумерной поверхности в \mathbb{R}^3 . Из этих уравнений Гаусс получил свою знаменитую *Theorema Egregium* — “Блистательную теорему”.

5.2 Теорема Гаусса

Теорема 5.16 (С. Ф. Gauss). *Гауссова кривизна двумерной поверхности не меняется при изометрии. Другими словами, двумерные изометричные поверхности имеют в соответствующих точках одинаковую гауссову кривизну.*

Доказательство. Идея доказательства состоит в том, чтобы получить из деривационных формул уравнения Гаусса, приравняв друг к другу соответствующие коэффициенты в выражениях для третьих производных радиус-вектора поверхности. Уравнения Гаусса позволяют выразить гауссову кривизну поверхности через элементы ее первой квадратичной формы и их производные, откуда и следует утверждение теоремы. Действительно, напомним, что на изометричных поверхностях можно выбрать такие координаты, что их первые квадратичные формы совпадут, т.е. совпадут элементы соответствующих матриц. Поэтому в таких координатах равны друг другу и соответствующие производные компонент первых квадратичных форм. Таким образом, в этих координатах совпадают все функции, входящие в выражения для гауссовой кривизны, а значит и сами гауссовы кривизны.

Итак, пусть M — регулярная гиперповерхность, заданная параметрически в виде $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, и пусть u^1, \dots, u^{n-1} — координаты на M . Как и выше, будем обозначать нижним индексом i производную вектора по координате u^i . В этих обозначениях, напомним, вектор канонического репера ∂_{u^i} — это вектор r_i . Тогда, сохраняя обозначения предыдущего пункта и пользуясь утверждением 5.12, найдем, что

$$\begin{aligned} r_{ij} &= (r_{ii})_j = \left(\sum_k \Gamma_{ii}^k r_k + q_{ii} N \right)_j = \\ &= \sum_k \frac{\partial \Gamma_{ii}^k}{\partial u^j} r_k + \sum_k \Gamma_{ii}^k \left(\sum_\alpha \Gamma_{kj}^\alpha r_\alpha + q_{kj} N \right) + \frac{\partial q_{ii}}{\partial u^j} N + q_{ii} \sum_\alpha b_j^\alpha r_\alpha = \\ &= \sum_\beta \left(\frac{\partial \Gamma_{ii}^\beta}{\partial u^j} + \sum_k \Gamma_{ii}^k \Gamma_{kj}^\beta + q_{ii} b_j^\beta \right) r_\beta + \left(\sum_k \Gamma_{ii}^k q_{kj} + \frac{\partial q_{ii}}{\partial u^j} \right) N. \end{aligned}$$

В то же время аналогично

$$\begin{aligned} r_{ji} &= (r_{ij})_i = \\ &= \sum_\beta \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^\beta}{\partial u^i} + \sum_k \Gamma_{ij}^k \Gamma_{ki}^\beta + q_{ij} b_i^\beta \right) r_\beta + \left(\sum_k \Gamma_{ij}^k q_{ki} + \frac{\partial q_{ij}}{\partial u^i} \right) N. \end{aligned}$$

Очевидно, что $r_{ij} = r_{ji}$. Приравняв коэффициенты при r_β и воспользовавшись выражением для b_i^β , получим для любого набора индексов i, j и β следующее равенство:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{ii}^\beta}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^\beta}{\partial u^i} + \sum_k \left(\Gamma_{ii}^k \Gamma_{kj}^\beta - \Gamma_{ij}^k \Gamma_{ki}^\beta \right) &= q_{ij} b_i^\beta - q_{ii} b_j^\beta = \\ &= \sum_\alpha (q_{ii} q_{j\alpha} - q_{ij} q_{i\alpha}) g^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Умножим последнее равенство на $g_{\beta j}$ и просуммируем по всем β . Поскольку $\sum_\beta g^{\alpha\beta} g_{\beta j} = \delta_\alpha^j$ — символ Кронекера, получим в итоге *уравнения Гаусса*:

$$\sum_\beta g_{\beta j} \left\{ \frac{\partial \Gamma_{ii}^\beta}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^\beta}{\partial u^i} + \sum_k \left(\Gamma_{ii}^k \Gamma_{kj}^\beta - \Gamma_{ij}^k \Gamma_{ki}^\beta \right) \right\} = q_{ii} q_{jj} - q_{ij} q_{ij}.$$

Заметим, что до этого момента мы нигде не пользовались тем, что поверхность M двумерна. Теперь запишем уравнение Гаусса для двумерной поверхности при $i = 1$ и $j = 2$:

$$\sum_\beta g_{\beta 2} \left\{ \frac{\partial \Gamma_{11}^\beta}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{12}^\beta}{\partial u^1} + \sum_k \left(\Gamma_{11}^k \Gamma_{k2}^\beta - \Gamma_{12}^k \Gamma_{k1}^\beta \right) \right\} = \det Q.$$

Здесь Q — матрица второй квадратичной формы. Однако в силу утверждения 4.37 гауссова кривизна K равна отношению определителей первой и второй квадратичных форм. Из этого факта и уравнения Гаусса следует, что гауссова кривизна выражается только через элементы первой квадратичной формы. Доказательство закончено. \square

Приведем пример того, как используется теорема 5.16.

Следствие 5.17. *Никакую окрестность точки на стандартной двумерной сфере невозможно изометрично отобразить на плоскость.*

Доказательство. Действительно, в противном случае их гауссовы кривизны совпадали бы. Однако гауссова кривизна сферы радиуса R равна $1/R^2$, а гауссова кривизна плоскости равна нулю. Доказательство закончено. \square

Упражнение 5.18. Выведите все уравнения Петерсона–Кодацци.

5.3 Ковариантная производная касательного векторного поля

Воспользуемся деривационными формулами, чтобы вычислить производную произвольного касательного векторного поля.

Конструкция 5.19. Пусть X — касательное векторное поле на регулярной поверхности M , на которой фиксированы координаты u^i . Как и выше, представим векторное поле X в виде линейной комбинации координатных векторных полей: $X = \sum_{\alpha} X^{\alpha} \partial_{u^{\alpha}}$. Тогда, дифференцируя каждое слагаемое по формуле Лейбница и применяя утверждение 5.12, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u^i} &= \sum_{\alpha} \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial u^i} \partial_{u^{\alpha}} + \sum_{\beta} X^{\beta} \frac{\partial}{\partial u^i} \partial_{u^{\beta}} = \\ &= \sum_{\alpha} \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial u^i} \partial_{u^{\alpha}} + \sum_{\beta} \left(X^{\beta} \left(\sum_{\alpha} \Gamma_{i\beta}^{\alpha} \partial_{u^{\alpha}} + q_{i\beta} N \right) \right) = \\ &= \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial X^{\alpha}}{\partial u^i} + \sum_{\beta} \Gamma_{i\beta}^{\alpha} X^{\beta} \right) \partial_{u^{\alpha}} + \left(\sum_{\beta} q_{i\beta} X^{\beta} \right) N. \end{aligned}$$

Замечание 5.20. Производная касательного векторного поля X по координате u^i имеет, вообще говоря, нормальную составляющую и поэтому не является касательным векторным полем. Полезно определить на касательных векторных полях другое дифференцирование, такое, чтобы его результат был бы касательным векторным полем.

Определение 5.21. *Ковариантной производной $\nabla_i X$ касательного векторного поля X по координате u^i называется касательное векторное поле, полученное в каждой точке из вектора $\partial X / \partial u^i$ ортогональным проецированием на касательную плоскость:*

$$\nabla_i X = \left(\frac{\partial X}{\partial u^i} \right)^T,$$

где через $(\cdot)^T$ обозначена операция ортогонального проецирования на касательную плоскость.

Непосредственно из определения получаем следующее выражение для координат векторного поля $\nabla_i X$.

Утверждение 5.22. Пусть в окрестности точки P регулярной гиперповерхности M задано касательное векторное поле X , имеющее в координатах (u^1, \dots, u^{n-1}) вид $X = \sum_{\alpha} X^{\alpha} \partial_{u^{\alpha}}$. Тогда координаты касательного векторного поля $\nabla_i X$ относительно (u^1, \dots, u^{n-1}) могут быть вычислены следующим образом:

$$(\nabla_i X)^j = \frac{\partial X^j}{\partial u^i} + \sum_{\alpha} \Gamma_{i\alpha}^j X^{\alpha},$$

где Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля поверхности M .

Замечание 5.23. Операция ковариантного дифференцирования полностью определяется первой фундаментальной формой поверхности.

Упражнение 5.24. Проверить следующие свойства операции ковариантного дифференцирования:

- Линейность: $\nabla_i(\alpha X + \beta Y) = \alpha \nabla_i X + \beta \nabla_i Y$, где X и Y — произвольные касательные векторные поля, α и β — произвольные числа.
- Правило Лейбница: $\nabla_i(fX) = (\partial f / \partial u^i)X + f \nabla_i X$, где X — произвольное касательное векторное поле, f — произвольная гладкая функция на поверхности.

Замечание 5.25. Символы Кристоффеля Γ_{ij}^k имеют следующий прозрачный геометрический смысл: это коэффициенты разложения по векторам канонического базиса ковариантной производной j -го координатного поля по i -й координате:

$$\nabla_i \partial_{u^j} = \sum_{\alpha} \Gamma_{ij}^{\alpha} \partial_{u^{\alpha}}.$$

Замечание 5.26. Удобно распространить операцию ковариантного дифференцирования на функции на поверхности, положив, по определению, $\nabla_i f = \partial f / \partial u^i$ для произвольной функции f .

Утверждение 5.27. Если X и Y — произвольные касательные векторные поля на поверхности, то

$$\nabla_i \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_i X, Y \rangle + \langle X, \nabla_i Y \rangle.$$

Замечание 5.28. Иногда этот факт формулируют так: ковариантное дифференцирование сохраняет первую фундаментальную форму поверхности, или метрика поверхности ковариантно постоянна. Точный смысл этих выражений станет ясен в следующем семестре.

Доказательство. Воспользуемся определением ковариантной производной:

$$\frac{\partial X}{\partial u^i} = \left(\frac{\partial X}{\partial u^i} \right)^T + \left(\frac{\partial X}{\partial u^i} \right)^N = \nabla_i X + \left(\frac{\partial X}{\partial u^i} \right)^N,$$

где через $(\cdot)^N$ обозначена ортогональная проекция на нормаль к поверхности. Для любого касательного поля Y

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial u^i}, Y \right\rangle = \langle \nabla_i X, Y \rangle,$$

так как нормальный вектор $(Z)^N$ перпендикулярен касательному вектору Y для любого исходного вектора Z . Итак,

$$\nabla_i \langle X, Y \rangle = \frac{\partial \langle X, Y \rangle}{\partial u^i} = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u^i}, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{\partial Y}{\partial u^i} \right\rangle = \langle \nabla_i X, Y \rangle + \langle X, \nabla_i Y \rangle,$$

что и требовалось доказать. \square

Замечание 5.29. Утверждение 5.27 может быть доказано также прямым подсчетом. Эта довольно громоздкая выкладка приведена в Дополнительном материале.

Как и в случае обычного дифференцирования, определим ковариантную производную по направлению произвольного касательного векторного поля.

Определение 5.30. Ковариантной производной поля Y вдоль поля X называется касательное векторное поле

$$\nabla_X Y = \sum_{\alpha} X^{\alpha} \nabla_{\alpha} Y.$$

Утверждение 5.31. Пусть X и Y — касательные векторные поля на регулярной гиперповерхности M с координатами u^1, \dots, u^{n-1} . Тогда $\nabla_X Y$ — касательное векторное поле, компоненты которого имеют вид

$$(\nabla_X Y)^i = \sum_{\alpha} \frac{\partial Y^i}{\partial u^{\alpha}} X^{\alpha} + \sum_{k\alpha} \Gamma_{\alpha k}^i X^{\alpha} Y^k.$$

Доказательство. В силу определений и утверждения 5.22 имеем:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_{\alpha} X^{\alpha} \nabla_{\alpha} Y = \sum_{\alpha} \left(X^{\alpha} \sum_{\beta} (\nabla_{\alpha} Y)^{\beta} r_{\beta} \right) = \\ &= \sum_{\alpha, \beta} X^{\alpha} \left(\frac{\partial Y^{\beta}}{\partial u^{\alpha}} + \sum_k \Gamma_{\alpha k}^{\beta} Y^k \right) r_{\beta} = \\ &= \sum_{\beta} \left(\sum_{\alpha} \frac{\partial Y^{\beta}}{\partial u^{\alpha}} X^{\alpha} + \sum_{k\alpha} \Gamma_{\alpha k}^{\beta} X^{\alpha} Y^k \right) r_{\beta}, \end{aligned}$$

т.е. мы записали $\nabla_X Y$ в виде линейной комбинации векторов канонического базиса, что и требовалось. \square

Из утверждений 5.27 и 5.31 немедленно получается следующий результат.

Следствие 5.32. Пусть на поверхности M задано три касательных векторных поля X_1 , X_2 и Y . Тогда

$$\nabla_Y \langle X_1, X_2 \rangle = \langle \nabla_Y X_1, X_2 \rangle + \langle X_1, \nabla_Y X_2 \rangle.$$

Конструкция 5.33. Пусть X — векторное поле на поверхности M и γ — регулярная кривая на M , параметризованная параметром t . Рассмотрим ограничение $X(t)$ векторного поля X на кривую γ . Обозначим через $\nabla_{\dot{\gamma}}X$ ковариантную производную поля X вдоль поля скоростей $\dot{\gamma}$ кривой γ . Получим векторное поле, определенное в точках кривой $\gamma(t)$.

Определение 5.34. Векторное поле $\nabla_{\dot{\gamma}}X$, заданное в точках кривой $\gamma(t)$ называется *производной векторного поля X вдоль кривой γ* .

Замечание 5.35. Геометрический смысл ковариантного дифференцирования вдоль кривой ясен: мы дифференцируем поле $X(t)$ по t в точке $\gamma(t)$ и результат дифференцирования ортогонально проецируем на $T_{\gamma(t)}M$.

Следующее утверждение проверяется прямым подсчетом.

Утверждение 5.36. Если u^1, \dots, u^{n-1} — регулярные координаты на M и $u^i(t)$ — координатные функции кривой γ , то компоненты поля $\nabla_{\dot{\gamma}}X$ имеют вид

$$(\nabla_{\dot{\gamma}}X)^k = \frac{d}{dt}X^k + \sum_{ip} \Gamma_{ip}^k \dot{u}^i X^p.$$

В частности, поле $\nabla_{\dot{\gamma}}X$ полностью определяется значениями поля X в точках кривой γ , т.е. ограничением $X|_{\gamma}$ поля X на эту кривую.

Замечание 5.37. Из утверждения 5.36 вытекает, что можно корректно определить производную вдоль кривой γ от векторного поля, заданного только в точках этой кривой, например, от поля скоростей кривой.

5.4 Дополнительный материал

5.4.1 О многомерных обобщениях теоремы Гаусса

Теорема Гаусса имеет ряд нетривиальных обобщений на случаи поверхностей произвольной размерности. Например, оказывается, аналогично можно доказать, что все четные элементарные симметричные многочлены от главных кривизн, т.е. выражения вида

$$\sum_{i_1 < \dots < i_{2p}} k_{i_1} \cdots k_{i_{2p}},$$

где $2 \leq 2p \leq n$, определяются первой квадратичной формой гиперповерхности в \mathbb{R}^n .

5.4.2 Другое доказательство утверждения 5.27

Пусть (u^1, \dots, u^{n-1}) — координаты на поверхности. В силу утверждения 5.22 имеем

$$\langle \nabla_i X, Y \rangle = \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial u^i} Y^\beta + \sum_{\gamma} \Gamma_{i\gamma}^\alpha X^\gamma Y^\beta \right).$$

Точно так же

$$\langle X, \nabla_i Y \rangle = \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \left(X^\alpha \frac{\partial Y^\beta}{\partial u^i} + X^\alpha \sum_{\gamma} \Gamma_{i\gamma}^\beta Y^\gamma \right).$$

Складывая эти два равенства и пользуясь определением символов Кристоффеля, получаем

$$\begin{aligned} \langle \nabla_i X, Y \rangle + \langle X, \nabla_i Y \rangle &= \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial u^i} Y^\beta + X^\alpha \frac{\partial Y^\beta}{\partial u^i} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \left\{ g_{\alpha\beta} \sum_{\gamma} \left(\sum_k g^{\alpha k} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma k}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{i\gamma}}{\partial u^k} \right) X^\gamma Y^\beta + \right. \right. \\ &\left. \left. + \sum_{\gamma} \left(\sum_k g^{\beta k} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma k}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{i\gamma}}{\partial u^k} \right) \right) X^\alpha Y^\gamma \right\}. \end{aligned}$$

Теперь заметим, что после преобразований типа $\sum_{\alpha} g_{k\alpha} g^{\alpha l} = \delta_k^l$ в выражениях для символов Кристоффеля в последней формуле четыре из шести слагаемых сокращаются, а два оставшихся сворачиваются. В итоге имеем:

$$\langle \nabla_i X, Y \rangle + \langle X, \nabla_i Y \rangle = \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial u^i} Y^\beta + X^\alpha \frac{\partial Y^\beta}{\partial u^i} \right) + \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^i} X^\alpha Y^\beta.$$

Последнее выражение совпадает с ковариантной производной скалярного произведения векторных полей X и Y :

$$\begin{aligned} \nabla_i \langle X, Y \rangle &= \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta \right) = \\ &= \sum_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^i} X^\alpha Y^\beta + g_{\alpha\beta} \frac{\partial X^\alpha}{\partial u^i} Y^\beta + g_{\alpha\beta} X^\alpha \frac{\partial Y^\beta}{\partial u^i} \right). \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Тема 6

Геодезические на поверхностях

В данной лекции разработанная выше техника используется для определения важного понятия геодезической линии на поверхности. Обычно в курсах дифференциальной геометрии понятие геодезической вводится позднее — сразу для общего случая римановых многообразий. Нам, однако, кажется, что предварительное знакомство с геодезическими на обычных поверхностях облегчает понимание сути дела.

6.1 Определение и простейшие свойства геодезических

Воспользуемся теперь разработанной выше техникой для вычисления вектора ускорения произвольной гладкой кривой на поверхности.

Конструкция 6.1. Пусть M — регулярная гиперповерхность, заданная параметрически в виде $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, и пусть γ — гладкая кривая на M с параметром s . Фиксируем на M какие-нибудь координаты (u^1, \dots, u^{n-1}) , и пусть $u^i(s)$, $i = 1, \dots, n$, — координатные функции кривой γ . Обозначим через $x^k(u^1, \dots, u^{n-1})$ координатные функции поверхности M . Как и выше, будем обозначать дифференцирование по u^i нижним индексом i , а по параметру s — точкой. Тогда вектор скорости $\dot{\gamma}$ кривой γ как элемент касательного пространства к поверхности имеет вид

$$\dot{\gamma} = \sum_{\alpha} r_{\alpha} \dot{u}^{\alpha}.$$

Продифференцируем еще раз. Получим следующее выражение для вектора ускорения $\ddot{\gamma}$:

$$\frac{d}{ds} \dot{\gamma} = \sum_{\alpha} \frac{d}{ds} (r_{\alpha} \dot{u}^{\alpha}) = \sum_{\alpha} \left(\sum_{\beta} r_{\alpha\beta} \dot{u}^{\alpha} \dot{u}^{\beta} + r_{\alpha} \ddot{u}^{\alpha} \right).$$

Перепишем последнее выражение, воспользовавшись деривационными формулами (см. утверждение 5.12), и затем переменим порядок суммирования. Получим:

$$\begin{aligned}\ddot{\gamma} &= \sum_{\alpha} \left(\sum_{\beta} \left(\sum_k \Gamma_{\alpha\beta}^k r_k + q_{\alpha\beta} N \right) \dot{u}^{\alpha} \dot{u}^{\beta} + r_{\alpha} \ddot{u}^{\alpha} \right) = \\ &= \sum_k \left(\sum_{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^k \dot{u}^{\alpha} \dot{u}^{\beta} + \ddot{u}^k \right) r_k + \left(\sum_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} \dot{u}^{\alpha} \dot{u}^{\beta} \right) N.\end{aligned}$$

Выполним ряд формальных преобразований. Представив производную по параметру s в виде

$$\frac{d}{ds} = \sum_{\alpha} \dot{u}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}},$$

можно переписать вторую производную \ddot{u}^k в виде

$$\ddot{u}^k = \sum_{\alpha} \dot{u}^{\alpha} \frac{\partial \dot{u}^k}{\partial u^{\alpha}}.$$

Тогда в силу утверждения 5.31 выражение для вектора ускорения можно представить как

$$\ddot{\gamma} = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} + \mathbf{q}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})N,$$

где через \mathbf{q} обозначена вторая квадратичная форма поверхности.

Замечание 6.2. Выражение $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$ в данном контексте имеет лишь следующий формальный смысл: это касательный вектор к поверхности, определенный в точках кривой, компоненты которого в каноническом базисе $\{r_k\}$ имеют вид

$$\sum_{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^k \dot{u}^{\alpha} \dot{u}^{\beta} + \ddot{u}^k.$$

Отметим, что так как векторное поле $\dot{\gamma}$ задано лишь в точках кривой γ , операция $\nabla_i \dot{\gamma}$ не определена. На самом деле нетрудно показать, что поле $\dot{\gamma}$ можно продолжить на некоторую окрестность кривой γ в M и что результат ковариантного дифференцирования вдоль $\dot{\gamma}$ в точках кривой не зависит от такого продолжения. (В дальнейшем мы сделаем это при существенно более общих предположениях.)

Итак, доказано следующее утверждение.

Утверждение 6.3. Вектор ускорения кривой γ на гиперповерхности в каждой точке раскладывается в сумму касательного вектора $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$ и нормального вектора $\mathbf{q}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})N$.

Замечание 6.4. Предположим, что кривая γ соответствует движению некоторой материальной точки по поверхности M . Тогда её ускорение $\ddot{\gamma}$ пропорционально сумме сил, действующих на точку (второй закон Ньютона). Причем одна из этих сил присутствует всегда — это так называемая сила реакции поверхности, направленная по нормали к ней. Если предположить, что никакие другие силы на точку не действуют, т.е. точка движется по поверхности свободно, то её вектор ускорения должен быть коллинеарен вектору нормали. Кривые, для которых это так, обладают многими замечательными свойствами и выделяются в отдельный класс.

Определение 6.5. Параметрическая кривая γ на поверхности M называется *геодезической*, если в каждой её точке P вектор ускорения $\ddot{\gamma}(P)$ коллинеарен вектору нормали $N(P)$ к поверхности.

Утверждение 6.6. Гладкая кривая γ на поверхности M является геодезической, если и только если в каждой точке из γ имеет место равенство

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0.$$

Длина вектора скорости геодезической постоянна.

Если на поверхности фиксированы координаты (u^1, \dots, u^{n-1}) , то равенство $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$ эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\ddot{u}^k + \sum_{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^k \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta = 0, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Доказательство. Из утверждения 6.3 немедленно вытекает, что координатные функции геодезической удовлетворяют соотношению $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$. Обратно: если координатные функции кривой γ с параметром t удовлетворяют этому уравнению, то вектор ускорения $\ddot{\gamma}$ (относительно этого параметра t) коллинеарен нормали к поверхности. Далее, воспользовавшись следствием 5.32, имеем

$$\frac{d}{dt}\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = \nabla_{\dot{\gamma}}\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 2\langle \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0,$$

что и требовалось. Наконец, вид уравнений уже получен нами выше в конструкции 6.1. \square

Следствие 6.7. Каждая геодезическая на поверхности или является точечной кривой, или параметризована пропорционально натуральному параметру.

Доказательство. Длина $s(t)$ отрезка геодезической $\gamma([a, t])$ равна $(t-a)\|\dot{\gamma}\|$, откуда параметр t выражается через натуральный параметр $s(t)$ линейно: $t = a + s/\|\dot{\gamma}\|$. \square

Определение 6.8. Уравнения из утверждения 6.6 называются *уравнениями геодезических на гиперповерхности M* .

Замечание 6.9. Кривая γ является геодезической на поверхности M , если и только если ее координатные функции удовлетворяют уравнениям геодезических.

Упражнение 6.10. Показать, что если $\gamma(t)$ — геодезическая, то для произвольного числа $a \neq 0$ кривая $\gamma(at)$ — тоже геодезическая в своей области определения.

Упражнение 6.11. Опишите все замены параметризации $t = t(\tau)$, которые сохраняют свойство кривой $\gamma(t)$ быть решением уравнений из утверждения 6.6.

Замечание 6.12. Уравнения геодезической представляют собой систему дифференциальных уравнений второго порядка. Поэтому для них справедлива стандартная теорема существования и единственности решения задачи Коши. Начальные условия для уравнений второго порядка состоят из набора значений неизвестных функций и их первых производных в начальный момент времени. Таким образом, получается следующая теорема существования и единственности геодезической на поверхности.

Следствие 6.13. Пусть M — регулярная гиперповерхность, P — ее произвольная точка и $v \in T_P M$ — произвольный касательный вектор к M в точке P . Тогда на M существует геодезическая γ , выходящая из P и имеющая вектор скорости в точке P , равный v . Более того, геодезическая γ единственна в том смысле, что любые две такие геодезических совпадают в пересечении областей определения.

Замечание 6.14. Пусть v_1 и v_2 — касательные векторы к поверхности в некоторой её точке P , причем $v_2 = \lambda v_1$, $\lambda > 0$. Тогда геодезические γ_i , $i = 1, 2$, выходящие из точки P со скоростью $\dot{\gamma}_i = v_i$, — это разные геодезические. Кривые γ_1 и γ_2 отличаются друг от друга заменой параметра.

Конструкция 6.15. Пусть теперь γ — естественно параметризованная кривая на поверхности. Напомним, что тогда модуль вектора $\ddot{\gamma}$ по определению равен кривизне этой кривой. Из утверждения 6.3 и теоремы Пифагора следует, что кривизна $k(P)$ естественно параметризованной кривой γ в произвольной точке P может быть вычислена следующим образом:

$$k(P) = \sqrt{\|\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}\|^2 + (\mathbf{q}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}))^2}.$$

Замечание 6.16. Поскольку вектор $\dot{\gamma}$ имеет единичную длину, то $|\mathbf{q}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})|$ — это в точности кривизна $k_N(P)$ нормального сечения в направлении $\dot{\gamma}$ (см. следствие 4.32).

Определение 6.17. Для естественно параметризованной кривой γ величину $\|\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}\|$ обычно обозначают через $k_g(P)$ и называют *геодезической кривизной кривой γ в точке P* .

Предложение 6.18. Регулярная кривая γ на поверхности является геодезической, если и только если ее геодезическая кривизна равна нулю в каждой точке.

В терминах геодезической и нормальной кривизны можно, как отмечалось выше, вычислить кривизну регулярной кривой на поверхности (как кривой в объемлющем пространстве). А именно, имеет место следующее утверждение.

Предложение 6.19. Кривизна k регулярной кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^n$, лежащей на поверхности M , может быть вычислена следующим образом:

$$k = \sqrt{k_g^2 + k_N^2},$$

где k_g — геодезическая кривизна кривой γ , а k_N — кривизна нормального сечения в направлении вектора $\dot{\gamma}$.

Замечание 6.20. Отметим, что фактически выше были даны три эквивалентных определения геодезической:

- (1) (параметрическая) кривая на поверхности, вектор ускорения которой коллинеарен вектору нормали к поверхности;
- (2) кривая, удовлетворяющая уравнениям геодезической $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$;
- (3) (параметрическая) кривая нулевой геодезической кривизны.

Утверждение 6.21. Если $F: M_1 \rightarrow M_2$ — изометрия регулярных поверхностей, то F переводит геодезические в геодезические. Более формально, образ геодезической $\gamma_1 \subset M_1$ при изометрии F — это геодезическая на M_2 , и, наоборот, кривая γ_2 — геодезическая на M_2 , если и только если она является F -образом некоторой геодезической на M_1 .

Доказательство. Коэффициенты в уравнениях геодезических — это символы Кристоффеля, которые, напомним, вычисляются в терминах первой квадратичной формы поверхности, поэтому сохраняются при изометриях. Утверждение доказано. \square

6.2 Примеры, теорема Клеро

В данном разделе приводятся несколько простейших примеров геодезических, а также обсуждаются свойства геодезических на поверхностях вращения.

Утверждение 6.22. Геодезические на стандартной евклидовой плоскости — это всевозможные прямые линии.

Доказательство. Пусть \mathbb{R}^2 — стандартная евклидова плоскость с декартовыми координатами (x, y) . Напомним, что метрика на \mathbb{R}^2 имеет вид $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Поэтому все символы Кристоффеля тождественно равны нулю, и уравнения геодезических принимают вид

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0.$$

Их решения — это всевозможные прямые на плоскости, и только они. \square

Упражнение 6.23. Описать геодезические на следующих поверхностях:

- прямом цилиндре в \mathbb{R}^3 над плоской кривой;
- круговом конусе, заданном в \mathbb{R}^3 уравнением $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Конструкция 6.24. Пусть в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 задана поверхность вращения, параметризация которой имеет вид так:

$$x(\varphi, z) = f(z) \cos \varphi, \quad y(\varphi, z) = f(z) \sin \varphi, \quad z(\varphi, z) = z.$$

Здесь $f(z)$ — строго положительная гладкая функция. Поскольку канонический базис имеет вид

$$\partial_\varphi = (-f(z) \sin \varphi, f(z) \cos \varphi, 0), \quad \partial_z = (f'(z) \cos \varphi, f'(z) \sin \varphi, 1),$$

первая квадратичная форма поверхности вращения записывается как

$$ds^2 = (f(z))^2 d\varphi^2 + (1 + (f'(z))^2) dz^2.$$

Вектор нормали к поверхности вращения найдем как нормированное векторное произведение векторов канонического репера. Получим:

$$N = \frac{1}{1 + f'(z)^2} (\cos \varphi, \sin \varphi, -f'(z)).$$

Утверждение 6.25. Пусть $M \subset \mathbb{R}^3$ — поверхность вращения графика положительной гладкой функции $f(z)$. Тогда каждый меридиан на M является геодезической. Среди параллелей геодезическими являются те и только те, которые соответствуют критическим точкам функции f .

Доказательство. Начнем с параллелей (координатных линий $z = z_0$). Каждая из них представляет собой окружность, лежащую в плоскости, перпендикулярной оси Oz . Вектор ускорения естественно параметризованной плоской окружности в точке $P = (\varphi, z_0)$ коллинеарен вектору $(\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$. Этот вектор коллинеарен вектору $N(P)$ нормали к поверхности, если и только если $f'(z_0) = 0$. Итак, параллель $z = z_0$ является геодезической, если и только если функция $f(z)$ имеет в z_0 критическую точку.

Рассмотрим теперь меридиан (координатную линию $\varphi = \varphi_0$). Он тоже является плоской кривой, лежащей в плоскости, содержащей ось Oz и получающейся при повороте координатной плоскости Oxz вокруг Oz на угол φ_0 . Пусть сначала $\varphi_0 = 0$. Тогда меридиан лежит в плоскости Oxz и задается в этой плоскости в виде $x - f(z) = 0$. Поэтому вектор нормали к меридиану в этой плоскости может быть записан, как $(1, -f'(z))$. Вернувшись обратно в \mathbb{R}^3 , получим вектор $(1, 0, -f'(z))$. Меридиан с произвольным φ_0 получается из рассмотренного поворотом на угол φ_0 вокруг оси Oz .

Таким образом, вектор нормали к меридиану $\varphi = \varphi_0$ в точке $P = (\varphi_0, z)$ имеет вид $(\cos \varphi, \sin \varphi, -f'(z))$, т.е. коллинеарен вектору $N(P)$, поэтому любой меридиан является геодезической на поверхности вращения. \square

Следствие 6.26. Геодезические на стандартной двумерной сфере — это большие круги, и только они.

Доказательство. То, что большие круги являются геодезическими, следует из утверждения 6.25. То, что других геодезических нет, вытекает из следствия 6.13. Доказательство закончено. \square

Конструкция 6.27. Запишем уравнения геодезических на поверхности вращения. Для этого удобно перепараметризовать ее, выбрав на графике функции f натуральный параметр. Будем считать, что эта кривая задана, как плоская естественно параметризованная кривая в плоскости Oxz в виде $x = x(t)$, $z = z(t)$, где $x(t) \neq 0$. Тогда поверхность вращения можно параметризовать как

$$x(\varphi, t) = x(t) \cos \varphi, \quad y(\varphi, t) = x(t) \sin \varphi, \quad z(\varphi, t) = z(t).$$

В этой параметризации канонический базис имеет вид

$$\partial_\varphi = (-x(t) \sin \varphi, x(t) \cos \varphi, 0), \quad \partial_t = (x'(t) \cos \varphi, x'(t) \sin \varphi, z'(t)),$$

поэтому первая квадратичная форма выглядит следующим образом:

$$ds^2 = x(t)^2 d\varphi^2 + (x'(t)^2 + z'(t)^2) dt^2 = x(t)^2 \left(d\varphi^2 + \frac{dt^2}{x(t)^2} \right).$$

Перейдем к новому параметру $\tau = \tau(t)$, такому, что $d\tau = dt/x(t)$. Окончательно первая квадратичная форма поверхности вращения в параметрах (φ, τ) имеет вид

$$ds^2 = \rho(\tau)^2 (d\varphi^2 + d\tau^2),$$

где $\rho(\tau) = x(t(\tau))$. Отметим, что геометрический смысл функции $\rho(\tau)$ по-прежнему очень прост — это расстояние от точки (φ, τ) поверхности до оси вращения.

Чтобы записать уравнения геодезических на поверхности вращения, нам нужна матрица G первой квадратичной формы и обратная к ней матрица G^{-1} , которые могут быть записаны, как

$$G = \begin{pmatrix} \rho(\tau)^2 & 0 \\ 0 & \rho(\tau)^2 \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\rho(\tau)^2 & 0 \\ 0 & 1/\rho(\tau)^2 \end{pmatrix}.$$

Выпишем символы Кристоффеля для поверхности вращения. Поскольку матрица G^{-1} диагональна, в выражении для каждого символа Кристоффеля будет лишь одно слагаемое. Положив $u^1 = \varphi$, $u^2 = \tau$ и обратив внимание на то, что первая квадратичная форма не зависит от u^1 , получаем:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} \right) = 0, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \right) = \frac{2\rho(\tau)\rho'(\tau)}{2\rho(\tau)^2} = \frac{\rho'(\tau)}{\rho(\tau)} = \Gamma_{21}^1, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \right) = 0. \end{aligned}$$

Точно так же получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \right) = \frac{-2\rho(\tau)\rho'(\tau)}{2\rho(\tau)^2} = \frac{-\rho'(\tau)}{\rho(\tau)}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \right) = 0 = \Gamma_{21}^2, \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} \right) = \frac{2\rho(\tau)\rho'(\tau)}{2\rho(\tau)^2} = \frac{\rho'(\tau)}{\rho(\tau)}. \end{aligned}$$

В итоге уравнения геодезических имеют вид

$$\begin{cases} 0 = \ddot{\varphi} + 2\frac{\rho'(\tau)}{\rho(\tau)}\dot{\varphi}\dot{\tau}, \\ 0 = \ddot{\tau} + \frac{\rho'(\tau)}{\rho(\tau)}(\dot{\tau}^2 - \dot{\varphi}^2). \end{cases}$$

Мы используем приведенные выше вычисления для доказательства теоремы Клеро о первом интеграле уравнений геодезической на поверхности вращения.

Теорема 6.28 (Клеро). Пусть $\gamma(s)$ — произвольная геодезическая на поверхности, полученной вращением плоской регулярной кривой вокруг прямой, лежащей в той же плоскости, причем ось вращения и кривая не пересекаются. Тогда произведение $c(s)$ расстояния $\rho(\tau)$ от оси вращения до точки $\gamma(s)$ на синус угла α между $\gamma(s)$ и соответствующим меридианом есть величина постоянная вдоль γ :

$$c(s) = \rho(\tau(s)) \sin \alpha(s) = \text{const}.$$

Доказательство. Пусть $\gamma(s) = (\varphi(s), \tau(s))$ — решение уравнения геодезических. Вычислим угол α между геодезической и соответствующим меридианом (φ_0, τ) , с которым геодезическая γ пересекается в точке $\varphi(s_0) = \varphi_0, \tau_0 = \tau(s_0)$. Касательный вектор к геодезической имеет вид $\dot{\gamma} = (\dot{\varphi}, \dot{\tau})$, а касательный вектор к меридиану — $(0, 1)$ (здесь точкой обозначена производная по параметру s , а штрихом — по параметру τ). Поэтому

$$\cos \alpha = \frac{\dot{\tau} \rho(\tau)^2}{\sqrt{\rho(\tau)^2(\dot{\varphi}^2 + \dot{\tau}^2)} \sqrt{\rho(\tau)^2}} = \frac{\dot{\tau}}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\tau}^2}}$$

и соответственно

$$\sin \alpha = \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\tau}^2}}$$

(при этом мы учли, что $\rho(\tau) > 0$ по предположению).

Продифференцируем функцию $c(s) = \rho(\tau) \sin \alpha$ по параметру s . Получим:

$$\dot{c}(s) = \frac{d}{ds} \left(\frac{\rho(\tau) \dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\tau}^2}} \right) = \frac{(\rho' \dot{\tau} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi})(\dot{\varphi}^2 + \dot{\tau}^2) - \rho \dot{\varphi}(\dot{\varphi} \ddot{\varphi} + \dot{\tau} \ddot{\tau})}{(\dot{\varphi}^2 + \dot{\tau}^2)^{3/2}}.$$

Перепишем числитель последнего выражения в виде

$$\rho \dot{\tau}^2 \left(\ddot{\varphi} + 2 \frac{\rho'}{\rho} \dot{\varphi} \dot{\tau} \right) - \rho \dot{\varphi} \dot{\tau} \left(\ddot{\tau} + \frac{\rho'}{\rho} (\dot{\tau}^2 - \dot{\varphi}^2) \right).$$

Так как выражения в больших скобках равны нулю в силу уравнений геодезических, заключаем, что $c(s) = \text{const}$ вдоль произвольной геодезической, что и требовалось. \square

С помощью теоремы Клеро можно решить, например, следующую задачу.

Упражнение 6.29. Описать все поверхности вращения, на которых имеются замкнутые геодезические.

6.3 Задачи

Задача 6.30. Пусть $F: M \rightarrow M$ — некоторая изометрия, переводящая регулярную поверхность M в себя, и регулярная кривая $\gamma \subset M$ совпадает со множеством неподвижных точек изометрии F , т.е. $\gamma = \{x \in M | F(x) = x\}$. Докажите, что в этом случае кривая γ — геодезическая на M .

Задача 6.31. Воспользовавшись предыдущей задачей, описать геодезические на стандартной плоскости и стандартной сфере.

Задача 6.32. Пусть γ — произвольная регулярная кривая на регулярной поверхности M^2 в \mathbb{R}^3 , P — произвольная точка кривой γ и γ_π — образ кривой γ при ортогональной проекции на касательную плоскость $T_P M$. Показать, что геодезическая кривизна кривой γ , вычисленная в точке P , совпадает с кривизной плоской кривой γ_π в той же точке.

Задача 6.33. Обобщить результат предыдущей задачи на случай гиперповерхности в \mathbb{R}^n .

Задача 6.34. Будем говорить, что регулярные поверхности M_1 и M_2 *касаются вдоль кривой* γ , если $\gamma \subset M_i$, $i = 1, 2$, и в каждой точке $P \in \gamma$ касательные плоскости $T_P M_1$ и $T_P M_2$ совпадают. Показать, что если регулярные поверхности касаются вдоль некоторой кривой γ , являющейся геодезической на одной из поверхностей, то γ — геодезическая и на второй поверхности.

Задача 6.35. Показать, что если поверхность M содержит прямую ℓ , то эта прямая (в подходящей параметризации) — геодезическая на M .

6.4 Дополнительный материал

6.4.1 Геодезические и изометрии

Следующее утверждение часто бывает полезным для поиска геодезических на поверхностях с большими группами симметрий.

Предложение 6.36. Если множество неподвижных точек изометрии $\nu: M \rightarrow M$ совпадает с некоторой регулярной кривой γ , то γ — геодезическая (после подходящей замены параметра).

Доказательство. Действительно, пусть $P = \gamma(t_0)$ — произвольная точка из γ и $\xi = \dot{\gamma}(t_0) \neq 0$ — вектор скорости кривой γ в точке P . Рассмотрим геодезическую $\gamma_1(s)$, такую, что $\gamma_1(s_0) = P$ и $\dot{\gamma}_1(s_0) = \xi$. Так как γ — множество неподвижных точек изометрии ν , то изометрия сохраняет точку P и вектор ξ . Поэтому образ $\gamma_2 = \nu(\gamma_1)$ геодезической γ_1 — это геодезическая, проходящая через ту же точку P с тем же вектором скорости ξ . Теорема существования и единственности дает $\gamma_2 = \gamma_1$ (в некоторой окрестности параметра t_0), откуда образ γ_1 принадлежит образу γ . Поэтому в окрестности каждой точки кривая γ после соответствующей перепараметризации является геодезической. Доказательство закончено. \square

Пример 6.37. Рассмотрим стандартную двумерную сферу. Так как отражение относительно произвольной плоскости, проходящей через центр сферы, является изометрией, множество неподвижных точек которой совпадает с большим кругом, то большой круг — геодезическая в силу утверждения 6.36.

6.4.2 Другое доказательство теоремы Клеро

Приведем элементарное доказательство теоремы Клеро. Фиксируем в \mathbb{R}^3 систему координат, поместив точку O на ось вращения и направив ось Oz вдоль оси вращения. Обозначим через e единичный вектор, направленный вдоль оси вращения. Пусть $P = \gamma(s_0)$ — точка пересечения геодезической γ с плоскостью Oxy . Вектор $\dot{\gamma}(s_0)$ перпендикулярен оси вращения и равен по величине радиусу параллели, проходящей через точку $\gamma(s_0)$. Напомним, что вектор N нормали к поверхности вращения в точке $\gamma(s_0)$ лежит в плоскости, порожденной векторами e и $\dot{\gamma}(s_0)$. Вектор $\ddot{\gamma}(s_0)$ коллинеарен вектору N , поэтому смешанное произведение $(e, \dot{\gamma}(s_0), \ddot{\gamma}(s_0))$ равно нулю.

С другой стороны, величина

$$b(s_0) = \langle [e, \dot{\gamma}(s_0)], \ddot{\gamma}(s_0) \rangle = \|\dot{\gamma}(s_0)\| \cdot \|\ddot{\gamma}(s_0)\| \cos \beta(s_0) = (e, \dot{\gamma}(s_0), \ddot{\gamma}(s_0)),$$

где $\beta(s_0)$ — угол между параллелью и геодезической, отличается от функции $c(s_0)$ на множитель $\|\dot{\gamma}(s_0)\|$, постоянный вдоль геодезической. Но $\dot{b}(s_0) = (e, \dot{\gamma}(s_0), \ddot{\gamma}(s_0)) = 0$, поэтому функция $b(s)$, а значит и функция $c(s)$, постоянны вдоль геодезической. Теорема доказана.

6.4.3 Экстремальные свойства геодезических

Пусть M — некоторая регулярная поверхность. Рассмотрим на поверхности M произвольную регулярную кривую $\gamma: [t_1, t_2] \rightarrow M$, обозначив через $P = \gamma(t_1)$ и $Q = \gamma(t_2)$ ее концевые точки. Далее, пусть G — некоторое подмножество плоскости \mathbb{R}^2 с координатами (τ, t) , ограниченное прямыми $\tau = \pm\tau_0$ и двумя кривыми $t = t_1(\tau)$ и $t = t_2(\tau)$, где $t_1(\tau) < t_2(\tau)$ для любого $\tau \in [-\tau_0, \tau_0]$ и $t_1(0) = t_1$, а $t_2(0) = t_2$ (рис. 6.1). Гладкое отображение Φ области G в поверхность M называется *вариацией кривой γ* , если $\Phi(0, t) = \gamma(t)$. Гладкие кривые $p(\tau) = \Phi(\tau, t_1(\tau))$ и $q(\tau) = \Phi(\tau, t_2(\tau))$, по которым движутся точки $P = \Phi(0, t_1(0)) = p(0)$ и $Q = \Phi(0, t_2(0)) = q(0)$, называются *концевыми*. Если $p(\tau) = P$ и $q(\tau) = Q$ для любого τ , то отображение Φ называется *вариацией с закрепленными концами*.

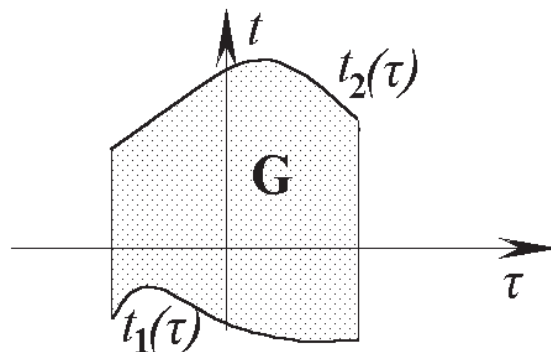


Рис. 6.1: Область определения вариации Φ .

Каждая вариация Φ задает семейство кривых $\gamma_\tau(t) = \Phi(\tau, t)$, причем $\gamma_0(t) = \gamma(t)$. Кроме того, в каждой точке $\gamma(t)$ вариация Φ определяет векторное поле

$$E(t) = \frac{\partial \Phi(0, t)}{\partial \tau},$$

которое называется *полем вариации*. Поле вариации — это касательное векторное поле к другому семейству кривых, задаваемым отображением Φ , а именно, к кривым $\nu_t(\tau) = \Phi(\tau, t)$. Отметим, что в конечных точках поле вариации вовсе не совпадает с касательными векторами к конечным кривым. Более точно, имеет место следующая лемма (здесь и ниже точкой обозначается дифференцирование по t , а штрихом — дифференцирование по τ).

Лемма 6.38. *Векторы скоростей конечных кривых в начальный момент $\tau = 0$ удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$p'(0) = t'_1(0)\dot{\gamma}(t_1) + E(t_1), \quad q'(0) = t'_2(0)\dot{\gamma}(t_2) + E(t_2).$$

Доказательство. Докажем, например, первое соотношение. По определению, имеем:

$$p'(\tau) = \frac{d\Phi(\tau, t_1(\tau))}{d\tau} = \frac{\partial \Phi(\tau, t_1(\tau))}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi(\tau, t_1(\tau))}{\partial t} \frac{dt_1(\tau)}{d\tau}.$$

Подставив значение $\tau = 0$ и вспомнив, что $t_1(0) = t_1$, получим

$$p'(0) = \frac{\partial \Phi(0, t_1(0))}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi(0, t_1(0))}{\partial t} t'_1(0) = E(t_1) + \dot{\gamma}(t_1)t'_1(0).$$

Доказательство закончено. □

Рассмотрим функцию $\ell(\tau)$, определенную на отрезке $[-\tau_0, \tau_0]$ и равную длине кривой γ_τ . Вычислим производную этой функции в $\tau = 0$. Дополнительно предположим для простоты, что кривая $\gamma(t)$ натурально параметризована. Запишем функцию $\ell(\tau)$ в виде

$$\ell(\tau) = \int_{t_1(\tau)}^{t_2(\tau)} \|\dot{\gamma}_\tau\| dt$$

и воспользуемся теоремой о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра. Получим:

$$\frac{d\ell(\tau)}{d\tau} = t'_2(\tau)\|\dot{\gamma}_\tau(t_2(\tau))\| - t'_1(\tau)\|\dot{\gamma}_\tau(t_1(\tau))\| + \int_{t_1(\tau)}^{t_2(\tau)} \|\dot{\gamma}_\tau(t)\|' dt.$$

Вычислим производную $\|\dot{\gamma}_\tau(t)\|'$. Для этого понадобится следующая лемма.

Лемма 6.39. *При сделанных выше обозначениях имеет место следующее равенство:*

$$\nabla_\tau \dot{\gamma}_\tau(t) = \nabla_t \nu'_t(\tau).$$

Доказательство. Пусть на поверхности фиксированы координаты (u^1, \dots, u^{n-1}) . Обозначим через $u^i(\tau, t)$ координатное представление вариации Φ . Тогда k -я компонента поля $\nabla_\tau \dot{\gamma}_\tau(t)$ имеет вид

$$\sum_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tau} \nabla_\alpha \dot{u}^k = \frac{\partial^2 u^k}{\partial t \partial \tau} + \sum_{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^k \dot{u}^\alpha (u^\beta)' = \sum_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial t} \nabla_\alpha (u^k)',$$

т.е. совпадает с k -й компонентой поля $\nabla_t \nu'_t(\tau)$. Доказательство закончено. □

Теперь с помощью леммы 6.39 найдем:

$$\|\dot{\gamma}_\tau(t)\|' = \nabla_\tau \sqrt{\langle \dot{\gamma}_\tau, \dot{\gamma}_\tau \rangle} = \frac{1}{2} \frac{\nabla_\tau \langle \dot{\gamma}_\tau, \dot{\gamma}_\tau \rangle}{\sqrt{\langle \dot{\gamma}_\tau, \dot{\gamma}_\tau \rangle}} = \frac{\langle \nabla_t \nu'_t, \dot{\gamma}_\tau \rangle}{\sqrt{\langle \dot{\gamma}_\tau, \dot{\gamma}_\tau \rangle}}.$$

Подставим полученное выражение в формулу для производной функции длины $\ell(\tau)$, положим $\tau = 0$, воспользуемся предположением о том, что кривая $\gamma(t)$ натурально параметризована, и тем, что $E(t) = \nu'_t(0)$ по определению. Получим:

$$\frac{d\ell(0)}{d\tau} = t'_2(0) - t'_1(0) + \int_{t_1}^{t_2} \langle \nabla_t E(t), \dot{\gamma} \rangle dt.$$

Далее,

$$\nabla_t \langle E(t), \dot{\gamma} \rangle = \langle \nabla_t E(t), \dot{\gamma} \rangle + \langle E(t), \nabla_t \dot{\gamma} \rangle,$$

поэтому выражение для производной имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\ell(0)}{d\tau} &= t'_2(0) - t'_1(0) + \int_{t_1}^{t_2} (\nabla_t \langle E(t), \dot{\gamma} \rangle - \langle E(t), \nabla_t \dot{\gamma} \rangle) dt = \\ &= t'_2(0) - t'_1(0) + \langle E(t_2), \dot{\gamma}(t_2) \rangle - \langle E(t_1), \dot{\gamma}(t_1) \rangle - \int_{t_1}^{t_2} \langle E(t), \nabla_t \dot{\gamma} \rangle dt. \end{aligned}$$

Теперь, представив $t'_i(0)$ в виде $t'_i(0) \langle \dot{\gamma}(t_i), \dot{\gamma}(t_i) \rangle$, $i = 1, 2$, заметим, что

$$t'_i(0) + \langle E(t_i), \dot{\gamma}(t_i) \rangle = \langle t'_i(0) \dot{\gamma}(t_i) + E(t_i), \dot{\gamma}(t_i) \rangle.$$

Наконец, воспользовавшись леммой 6.38 и определением производной вдоль кривой, перепишем выражение для производной в виде

$$\frac{d\ell(0)}{d\tau} = \langle q'(0), \dot{\gamma}(t_2) \rangle - \langle p'(0), \dot{\gamma}(t_1) \rangle - \int_{t_1}^{t_2} \langle E(t), \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \rangle dt.$$

Итак, доказано следующее важное утверждение.

Предложение 6.40 (Первая вариация длины). Пусть $\Phi(\tau, t)$ — произвольная вариация кривой $\gamma: [t_1, t_2] \rightarrow M$, а $p(\tau)$ и $q(\tau)$ — концевые кривые вариации Φ . Тогда первая производная длины $\ell(\tau)$ кривой $\gamma_\tau(t) = \Phi(\tau, t)$ в начальный момент времени $\tau = 0$ имеет вид

$$\frac{d\ell(0)}{d\tau} = \langle q'(0), \dot{\gamma}(t_2) \rangle - \langle p'(0), \dot{\gamma}(t_1) \rangle - \int_{t_1}^{t_2} \langle E(t), \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \rangle dt.$$

Из утверждения 6.40 вытекают несколько важных следствий.

Следствие 6.41 (Стационарность геодезических). Любая геодезическая $\gamma(t)$ на поверхности M является кривой стационарной длины по отношению к произвольной вариации кривой γ с закрепленными концами, т.е. производная длины геодезической при таких вариациях в начальный момент времени равна нулю.

Следствие 6.42. Если кривая γ — геодезическая, то для произвольной ее вариации $\Phi(\tau, t)$ производная функции длины $\ell(\tau)$ в начальный момент времени $\tau = 0$ имеет вид

$$\frac{d\ell(0)}{d\tau} = \langle q'(0), \dot{\gamma}(t_2) \rangle - \langle p'(0), \dot{\gamma}(t_1) \rangle,$$

где $p(\tau)$ и $q(\tau)$ — концевые кривые вариации Φ .

Тема 7

Криволинейные координаты в области и на поверхности

Выше мы уже видели, как выбор подходящих координат на поверхности позволяет проще решать те или иные задачи. В этой лекции излагается общая теория координат, обобщающих линейные замены, рассматриваемые в линейной алгебре и аналитической геометрии. Если при линейных заменах координатные линии всегда оставались прямыми, то в обобщенных координатах они могут, вообще говоря, отличаться от прямых. Чтобы подчеркнуть это отличие, обобщенные координаты часто называют *криволинейными*.

Общая идея, лежащая в основе понятия координат, состоит в “оцифровке” точек пространства. Иными словами, каждой точке из рассматриваемой области пространства \mathbb{R}^n приписывается n чисел, причем разным точкам приписываются разные наборы чисел.

Пример 7.1. Каждую точку P плоскости \mathbb{R}^2 можно задать ее стандартными евклидовыми координатами (x, y) , а можно поставить в соответствие точке P пару чисел (r, φ) , где r — расстояние от P до начала координат O , а φ — угол от направления оси OX до направления радиус-вектора точки P . Напомним, что пара (r, φ) называется полярными координатами точки P .

Отметим возникающие здесь сложности. Во-первых, если P совпадает с O , то направление радиус-вектора OP не определено. Во-вторых, для точек P , отличных от O , угол от направления оси OX до направления вектора OP определен неоднозначно (с точностью до 2π). Таким образом, нам не удастся корректно определить полярные координаты на всей плоскости \mathbb{R}^2 . Однако, если ограничиться областью Ω , полученной из \mathbb{R}^2 выбрасыванием, скажем, неотрицательной полуоси OX_+ , и положить, что φ меняется в пределах от 0 до 2π , получим корректно определенную “оцифровку” области Ω , являющуюся примером криволинейной системы координат. Именно такими объектами будем здесь заниматься.

7.1 Определение криволинейных координат

Пусть Ω — некоторая область в \mathbb{R}^n и (x^1, \dots, x^n) — евклидовы координаты в \mathbb{R}^n . Рассмотрим еще один экземпляр \mathbb{R}^n (обозначим его через \mathbb{R}_1^n) со стандартными координатами (y^1, \dots, y^n) .

Определение 7.2. Система из n функций $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$, $i = 1, \dots, n$, заданных на Ω , называется *непрерывной системой координат*, если отображение $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_1^n$, заданное в виде

$$\begin{cases} y^1 = y^1(x^1, \dots, x^n), \\ \dots \\ y^n = y^n(x^1, \dots, x^n), \end{cases}$$

является непрерывным и взаимно-однозначным с образом, а обратное к нему отображение ψ^{-1} , заданное системой функций

$$\begin{cases} x^1 = x^1(y^1, \dots, y^n), \\ \dots \\ x^n = x^n(y^1, \dots, y^n), \end{cases}$$

также непрерывно. Набор чисел $(y^1(P), \dots, y^n(P))$ для произвольной точки $P \in \Omega$ называется *криволинейными координатами точки P* (по отношению к системе координат, заданной функциями y^i , или, что то же самое, заданной отображением ψ).

Определение 7.3. Если все функции $x^i(y^1, \dots, y^n)$ — гладкие, то координаты y^i называются *гладкими*. Для гладкой системы координат определена *матрица Якоби J* , составленная из частных производных $(\partial x^i / \partial y^j)$, и *якобиан $|J|$* , равный определителю матрицы Якоби.

Замечание 7.4. Отметим, что из гладкости системы координат не следует гладкость отображения ψ (достаточно рассмотреть на прямой \mathbb{R}^1 пример замены координат, заданной в виде $x = y^3$; в точке $y = 0$ обратное отображение, т.е. отображение ψ гладким не является).

Определение 7.5. Гладкая система координат называется *регулярной*, если ее якобиан всюду отличен от нуля, иными словами, матрица Якоби всюду невырождена.

Из теоремы об обратной функции вытекает следующее утверждение.

Утверждение 7.6. В сделанных обозначениях, гладкая система координат является регулярной, если и только если отображение ψ — гладкое. В этом случае матрица Якоби отображения ψ равна J^{-1} .

Замечание 7.7. Отметим, что при решении конкретных задач намного проще бывает проверять, что якобиан отличен от нуля, чем искать обратное отображение и проверять его гладкость.

Конструкция 7.8. Пусть (y_0^1, \dots, y_0^n) — криволинейные координаты некоторой точки $P \in \Omega$. Для каждого i рассмотрим кривую $\delta_i(t)$, определенную для t , близких к y_0^i , так:

$$\begin{cases} x^1(t) = x^1(y_0^1, \dots, y_0^{i-1}, t, y_0^{i+1}, \dots, y_0^n), \\ \dots \\ x^n(t) = x^n(y_0^1, \dots, y_0^{i-1}, t, y_0^{i+1}, \dots, y_0^n). \end{cases}$$

Аналогично, для фиксированного набора индексов (i_1, \dots, i_k) , $k < n$, и для t^{i_p} , близких к $y_0^{i_p}$, зададим параметрически k -мерную поверхность:

$$\begin{cases} x^1(t^{i_1}, \dots, t^{i_k}) = x^1(y_0^1, \dots, t^{i_1}, \dots, t^{i_k}, \dots, y_0^n), \\ \dots \\ x^n(t^{i_1}, \dots, t^{i_k}) = x^n(y_0^1, \dots, t^{i_1}, \dots, t^{i_k}, \dots, y_0^n). \end{cases}$$

Определение 7.9. Построенная кривая $\delta_i(t)$ называется i -й *координатной кривой*, проходящей через точку P , а построенные поверхности — k -мерными *координатными поверхностями*. Если $k = n - 1$, то k -мерные координатные поверхности называются *координатными гиперповерхностями*.

Легко проверить справедливость следующего утверждения.

Утверждение 7.10. *Координатные кривые и поверхности регулярной системы координат являются регулярными кривыми и регулярными поверхностями соответственно.*

Конструкция 7.11. Пусть в области Ω заданы две регулярные системы координат, скажем координаты (y^1, \dots, y^n) , заданные с помощью отображения ψ , и координаты (z^1, \dots, z^n) , заданные с помощью отображения ξ . Поскольку отображения, задающие эти координаты, взаимно-однозначны, на их образах определены “сквозные” отображения $\psi \circ \xi^{-1}$ и $\xi \circ \psi^{-1}$, которые задаются наборами функций $y^i(z^1, \dots, z^n)$ и $z^i(y^1, \dots, y^n)$ соответственно. В силу регулярности координат, определены матрицы Якоби $J(y, z) = (\partial y^i / \partial z^j)$ и $J(z, y) = (\partial z^i / \partial y^j)$ этих систем функций.

Определение 7.12. Отображения $\psi \circ \xi^{-1}$ и $\xi \circ \psi^{-1}$ называются *заменами координат*, а матрицы $J(y, z)$ и $J(z, y)$ — *матрицами Якоби* этих замен.

Замечание 7.13. Регулярные криволинейные координаты $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_1^n$ на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — это фактически регулярная вложенная параметрическая поверхность размерности n в \mathbb{R}_1^n . Поэтому многие дальнейшие конструкции и вычисления аналогичны встречавшимся выше в теории поверхностей. Однако мы приводим формулировки и краткие доказательства, на которые теперь можно взглянуть с несколько иной точки зрения.

7.2 Примеры регулярных систем координат

Перечисленные ниже криволинейные системы координат являются наиболее распространенными.

Пример 7.14 (Евклидовы координаты). Если отображение ψ определено на всем \mathbb{R}^n и является тождественным, то криволинейная система координат, порожденная ψ , совпадает с самой евклидовой системой координат. При этом матрица Якоби в каждой точке \mathbb{R}^n постоянна и равна единичной матрице, а якобиан равен 1, поэтому это — регулярная система координат; координатные кривые — это параллельные координатным осям прямые, проходящие через данную точку; координатные k -мерные поверхности — это k -мерные плоскости, проходящие через данную точку параллельно некоторой k -мерной координатной плоскости.

Пример 7.15 (Линейная система координат). Линейное отображение ψ , заданное на \mathbb{R}^n , порождает на \mathbb{R}^n криволинейную систему координат, если и только если матрица A_ψ отображения ψ невырождена. Матрица Якоби линейной системы постоянна и совпадает с матрицей $(A_\psi)^{-1}$; якобиан равен $1/\det(A_\psi)$. Координатные кривые и k -мерные координатные поверхности — это соответствующие прямые и k -мерные плоскости.

Пример 7.16 (Полярная система координат). Если (x, y) — стандартные координаты на плоскости, то положим

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases}$$

где $r > 0$, а $0 < \varphi < 2\pi$. Описанное только что отображение задает регулярную систему координат (r, φ) на области $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$. Эта система координат называется *полярной*. Матрица Якоби равна

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix},$$

а якобиан равен r . Координатные линии — открытые лучи, выходящие из начала координат (за исключением положительной полуоси OX_+), а также окружности с центром в O (проколотые в точке пересечения с лучом OX_+).

Отметим, что полярной системой координат называется любая регулярная система, основанная на функциях (r, φ) (при разном корректном выборе области Ω и области изменения функций r и φ).

Пример 7.17 (Цилиндрические координаты). Если (x, y, z) — стандартные координаты в \mathbb{R}^3 , то положим

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

где $r > 0$, а $0 < \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Описанное только что отображение задает регулярную систему координат (r, φ, z) в подходящей области. Эта система координат называется *цилиндрической*.

Упражнение 7.18. Опишите какую-нибудь максимальную область, в которой цилиндрическая система координат корректно определена, найдите матрицу Якоби, якобиан, координатные кривые, координатные поверхности и докажите регулярность этой системы.

Пример 7.19 (Сферические координаты). Если (x, y, z) — стандартные евклидовы координаты, то для каждой точки $P = (x, y, z)$ определим три числа (r, θ, φ) , выбрав в качестве r расстояние между P и началом координат O , в качестве θ — угол между вектором OP и плоскостью XOY , а в качестве φ — угол между радиус-вектором проекции точки P на плоскость XOY и положительным направлением оси X . Чтобы избежать неприятностей, аналогичных тем, которые возникли при рассмотрении полярных координат, функции (r, θ, φ) зададим в области $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \Pi$, где Π — замкнутая полуплоскость в координатной плоскости XOZ , ограниченная осью OZ и содержащая положительную полуось OX_+ . Кроме того, будем считать, что $r > 0$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ и $0 < \varphi < 2\pi$. Связь между координатами (x, y, z) и (r, θ, φ) в явном виде выглядит так:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi, \\ y = r \cos \theta \sin \varphi, \\ z = r \sin \theta. \end{cases}$$

При описанных ограничениях функции (r, θ, φ) задают регулярную криволинейную систему координат, называемую *сферической*.

Упражнение 7.20. Для сферической системы координат найдите матрицу Якоби, якобиан, координатные кривые, координатные поверхности и докажите регулярность этой системы.

Упражнение 7.21. Часто в качестве сферической координаты θ точки $P \in \mathbb{R}^3$ выбирают угол между направлением оси OZ и вектором OP . В этом случае угол θ меняется в пределах $0 < \theta < \pi$. Запишите соответствующее отображение ψ , опишите область, в которой корректно определены соответствующие криволинейные координаты, найдите матрицу Якоби, якобиан, координатные кривые, координатные поверхности и докажите регулярность этой системы.

7.3 Касательное пространство к области

Как мы уже отмечали, область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ можно рассматривать как частный случай регулярной поверхности. Поэтому для нее определены касательные векторы и касательное пространство в каждой её точке. В данном пункте мы приведем независимые определения.

Определение 7.22. *Касательным вектором к области Ω в точке $T_P\Omega$ называется вектор скорости произвольной гладкой кривой, проходящей через P , вычисленный в этой точке. Касательным пространством $T_P\Omega$ в точке P области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется множество вычисленных в точке P векторов скоростей всевозможных гладких кривых, проходящих через P , т.е. множество всех касательных векторов к области в этой точке.*

Конструкция 7.23. Пусть (x^1, \dots, x^n) — регулярные координаты в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $v \in T_P\Omega$ — вектор скорости кривой $(x^1(t), \dots, x^n(t))$, причем $P = (x^1(t_0), \dots, x^n(t_0))$. Тогда вектор v в координатах (x^1, \dots, x^n) имеет вид $(\dot{x}^1(t_0), \dots, \dot{x}^n(t_0))$.

Определение 7.24. Величины $(\dot{x}^1(t_0), \dots, \dot{x}^n(t_0))$ называются *компонентами касательного вектора* v или *координатами касательного вектора* v в системе координат x^1, \dots, x^n .

Конструкция 7.25. Пусть снова (x^1, \dots, x^n) — регулярные координаты в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Рассмотрим i -ую координатную кривую, проходящую через точку P . Тогда компоненты ее вектора скорости, т.е. компоненты соответствующего касательного вектора из $T_P\Omega$, имеют вид: $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где единица стоит на i -ом месте.

Определение 7.26. Векторы скоростей координатных линий регулярной системы координат x^1, \dots, x^n обозначаются через ∂_{x^i} и называются *векторами канонического базиса*, соответствующего системе координат (x^1, \dots, x^n) .

Утверждение 7.27. Касательное пространство $T_P\Omega$ представляет собой n -мерное линейное пространство. Если x^1, \dots, x^n — регулярная система координат в области, то векторы ∂_{x^i} , $i = 1, \dots, n$, образуют базис в $T_P\Omega$, и каждый касательный вектор $v \in T_P\Omega$ представляется в виде $v = \sum_i v^i \partial_{x^i}$, где v^i — компоненты вектора v в системе координат x^1, \dots, x^n .

Доказательство. Пусть фиксирована система координат. Тогда каждый касательный вектор задает набор из n чисел — своих компонент, который является элементом арифметического пространства \mathbb{R}^n . С другой стороны, для любого вектора $a = (a^1, \dots, a^n)$ из арифметического пространства легко найти гладкую кривую в области, проходящую через точку P с вектором скорости a . Действительно, если P имеет координаты (x_0^1, \dots, x_0^n) , то достаточно рассмотреть кривую с координатными функциями $x^i(t) = x_0^i + a^i t$, где t меняется в достаточно малой окрестности нуля. Таким образом, множество $T_P\Omega$ отождествляется с арифметическим пространством \mathbb{R}^n , что и превращает его в линейное пространство.

Линейная независимость векторов ∂_{x^i} и формула $v = \sum_i v^i \partial_{x^i}$ тривиально следует из вида векторов ∂_{x^i} , описанного в конструкции 7.25. Утверждение доказано. \square

Утверждение 7.28. Пусть $v \in T_P\Omega$ — касательный вектор к области Ω , в которой задано две регулярных системы координат x^1, \dots, x^n и y^1, \dots, y^n . Тогда канонические базисы (∂_{x^i}) и (∂_{y^j}) связаны между собой с помощью матрицы Якоби $J(y, x)$ замены координат $y(x)$, вычисленной в точке P , а именно,

$$\partial_{x^i} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \partial_{y^\alpha}$$

или, в матричном виде,

$$(\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}) = (\partial_{y^1}, \dots, \partial_{y^n}) J(y, x).$$

Если v^1, \dots, v^n и $\tilde{v}^1, \dots, \tilde{v}^n$ обозначают компоненты вектора v в координатах x^1, \dots, x^n и y^1, \dots, y^n соответственно, то

$$\tilde{v}^i = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} v^\alpha.$$

Доказательство. Начнем с формулы пересчета компонент вектора. Пусть $\gamma(t)$ — такая гладкая кривая в области что $\gamma(t_0) = P$ и $\dot{\gamma}(0) = v$. Если $x^i(t)$ и $y^j(t)$ — координатные функции кривой γ в системах координат x^1, \dots, x^n и y^1, \dots, y^n , соответственно, то

$$y^j(t) = y^j(x^1(t), \dots, x^n(t)),$$

где $y^j(x^1, \dots, x^n)$ — функции замены координат. Тогда, по теореме о дифференцировании сложной функции имеем

$$\tilde{v}^j = \dot{y}^j(t_0) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\alpha(t_0) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^\alpha} v^\alpha,$$

что и требовалось.

Применив полученную формулу к вектору ∂_{x^k} , найдем, что его i -ая компонента в координатах y^1, \dots, y^n имеет вид

$$(\partial_{x^k})^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^k},$$

откуда

$$\partial_{x^k} = \sum_{\alpha} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^k} \partial_{y^\alpha}.$$

что и требовалось. □

Замечание 7.29. Из утверждения 7.28 вытекает, что структура линейного пространства на $T_P\Omega$, построенная при доказательстве утверждения 7.27, не зависит от выбора системы координат, участвовавшей в доказательстве.

7.4 Евклидова метрика в криволинейных координатах

Как и в общем случае регулярной поверхности, на касательных пространствах к области определено скалярное произведение.

Конструкция 7.30. Для любых двух касательных векторов v и w из $T_P\Omega$ определено их евклидово скалярное произведение $\langle v, w \rangle$ как векторов в \mathbb{R}^n . Тем самым, для каждой точки $P \in \Omega$ определена билинейная форма $g(P): T_P\Omega \times T_P\Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение 7.31. Семейство билинейных форм $g(P)$ называется *евклидовой метрикой* в области Ω .

Утверждение 7.32. Пусть x^1, \dots, x^n — декартовы координаты в \mathbb{R}^n , а y^1, \dots, y^n — регулярные координаты в области Ω . Матрица $G = (g_{ij})$ евклидовой метрики в точке P в базисе (∂_{y^i}) имеет вид

$$g_{ij} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^j}.$$

Если z^1, \dots, z^n еще одна регулярная система координат в Ω , а $H = (h_{pq})$ — матрица евклидовой метрики в точке P в базисе (∂_{z^j}) , то матрицы G и H связаны между собой с помощью матрицы Якоби замены координат так:

$$h_{ij} = \sum_{k,l} \frac{\partial y^k}{\partial z^i} \frac{\partial y^l}{\partial z^j} g_{kl}.$$

Доказательство. Пусть $(\tilde{v}^1, \dots, \tilde{v}^n)$ и $(\tilde{w}^1, \dots, \tilde{w}^n)$ — компоненты векторов v и w по отношению к y^i . Выразим скалярное произведение векторов v и w через эти компоненты. Имеем

$$v = \sum_i \tilde{v}^i \partial_{y^i}, \quad w = \sum_i \tilde{w}^i \partial_{y^i}, \quad \langle v, w \rangle = \sum_{i,j} \langle \partial_{y^i}, \partial_{y^j} \rangle \tilde{v}^i \tilde{w}^j.$$

Таким образом, матрица g_{ij} евклидовой метрики в базисе (∂_{y^i}) совпадает с матрицей Грама $\langle \partial_{y^i}, \partial_{y^j} \rangle$ базиса $(\partial_{y^1}, \dots, \partial_{y^n})$. Записав векторы ∂_{y^i} в декартовых координатах, получаем

$$g_{ij} = \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^k}{\partial y^j}.$$

Теперь найдем связь между матрицами H и G . Так как $h_{ij} = \langle \partial_{z^i}, \partial_{z^j} \rangle$, имеем:

$$\begin{aligned} h_{ij} = \langle \partial_{z^i}, \partial_{z^j} \rangle &= \left\langle \sum_k \frac{\partial y^k}{\partial z^i} \partial_{y^k}, \sum_l \frac{\partial y^l}{\partial z^j} \partial_{y^l} \right\rangle = \\ &= \sum_{k,l} \frac{\partial y^k}{\partial z^i} \frac{\partial y^l}{\partial z^j} \langle \partial_{y^k}, \partial_{y^l} \rangle = \sum_{k,l} \frac{\partial y^k}{\partial z^i} \frac{\partial y^l}{\partial z^j} g_{kl}. \end{aligned}$$

Иными словами, $H = J(y, z)^T G J(y, z)$, где $(\cdot)^T$ обозначает транспонирование матрицы. \square

Замечание 7.33. Компоненты метрики удобно вычислять на языке дифференциалов:

$$\begin{aligned} ds^2 = \sum_k (dx^k)^2 &= \sum_k \left(\sum_i \frac{\partial x^k}{\partial y^i} dy^i \right)^2 = \\ &= \sum_{i,j} \left(\sum_k \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \right) dy^i dy^j = \sum_{i,j} g_{ij} dy^i dy^j. \end{aligned}$$

Упражнение 7.34. Найдите вид евклидовой метрики в полярных, цилиндрических и сферических координатах. А именно, проверьте, что она имеет следующий вид:

- в полярной системе координат (r, φ) —

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2;$$

- в цилиндрической системе координат (r, φ, z) —

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2;$$

- в сферической системе координат (r, θ, φ) —

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \cos^2 \theta d\varphi^2.$$

7.5 Регулярные координаты на поверхности

Понятие регулярных (криволинейных) координат естественным образом переносится на случай регулярных поверхностей.

Определение 7.35. Пусть M — регулярная k -мерная поверхность в \mathbb{R}^n . Регулярное взаимно-однозначное с образом отображение $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ называется *регулярными координатами* на поверхности M .

Замечание 7.36. Пусть регулярная поверхность M в \mathbb{R}^n , задана параметрически, $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ — параметризующее отображение, и пусть $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ — регулярные координаты на M . Если u^1, \dots, u^k — евклидовы координаты в $\mathbb{R}^k \supset \Omega$, а y^1, \dots, y^k — евклидовы координаты в $\mathbb{R}^k \supset \psi(M)$, то возникает набор гладких функций $y^i(u^1, \dots, u^k)$, $i = 1, \dots, k$, — координатное представление отображения ψ , — причем матрица Якоби $\frac{\partial y^i}{\partial u^j}$ невырождена. Поэтому отображение $\psi \circ r$ задает регулярные координаты на области Ω . Положим $\Omega' = \psi(r(\Omega))$. Ясно, что Ω' — область в \mathbb{R}^k . Отображение $\psi^{-1}: \Omega' \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ задает в \mathbb{R}^n регулярную поверхность $r': \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^n$, которая отличается от исходной заменой параметризации. Если x^1, \dots, x^n — евклидовы координаты в \mathbb{R}^n , координатные функции параметризующего отображения r имеют вид $x^i(u^1, \dots, u^k)$, а координатные функции отображения ψ имеют вид $y^i(u^1, \dots, u^k)$, то координатные функции отображения r' имеют вид

$$x^j(y^1, \dots, y^k) = x^i(u^1(y^1, \dots, y^k), \dots, u^k(y^1, \dots, y^k)).$$

Замечание 7.37. Выше описано, как ведет себя первая фундаментальная форма поверхности при замене координат. Из сделанного замечания вытекает, что эти же формулы работают и в регулярных координатах на поверхности.

7.6 Стереографические координаты сферы

В качестве примера мы построим удобную систему координат на сфере.

Конструкция 7.38. Рассмотрим двумерную сферу радиуса R . Пусть (x, y, z) — стандартные координаты в \mathbb{R}^3 , тогда сфера S^2 задается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Обозначим через N северный полюс сферы S^2 , т.е. точку с координатами $(0, 0, R)$, а через S — южный полюс, т.е. точку с координатами $(0, 0, -R)$. Пусть Π — координатная плоскость $z = 0$. Зададим отображение

$$\nu: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \Pi$$

следующим образом. Для каждой точки $P \in S^2 \setminus \{N\}$ обозначим через P' единственную точку пересечения прямой NP с плоскостью Π . Положим $\nu(P) = P'$. Отображение $\nu: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ задает на сфере систему координат (ниже мы покажем что это — регулярные координаты).

Определение 7.39. Отображение ν называется *стереографической проекцией из северного полюса N* . Соответствующие координаты на сфере S^2 без северного полюса называются *стереографическими*.

Замечание 7.40. Аналогично можно построить стереографическую проекцию из южного полюса.

Утверждение 7.41. Пусть $P = (x, y, z)$ и $P' = \nu(P) = (u, v, 0)$ — образ точки P при стереографической проекции. Тогда

$$\left(x = \frac{2R^2 u}{u^2 + v^2 + R^2}, y = \frac{2R^2 v}{u^2 + v^2 + R^2}, z = R \frac{u^2 + v^2 - R^2}{u^2 + v^2 + R^2} \right).$$

Доказательство. Введем в пространстве цилиндрические координаты (r, φ, z) , и пусть $P = (r, \varphi, z)$ и $P' = (\rho, \varphi, 0)$ в этих координатах. Легко убедиться, что r и ρ связаны следующим соотношением: $\rho = rR/(R - z)$, откуда $r^2 = x^2 + y^2 = (R - z)^2 \rho^2 / R^2$. Так как $P \in S^2$, то

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{\rho^2}{R^2} (R - z)^2 + z^2.$$

Это уравнение описывает точки пересечения прямой NP со сферой. Корень $z = R$ соответствует точке N , поэтому нам нужен другой:

$$\begin{aligned} R^2 - z^2 &= (R - z)(R + z) = \frac{\rho^2}{R^2} (R - z)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow R + z = \frac{\rho^2}{R^2} (R - z) \Rightarrow \\ &\Rightarrow z = R \frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2 + R^2} = R \frac{u^2 + v^2 - R^2}{u^2 + v^2 + R^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$r = \frac{\rho}{R} (R - z) = \frac{2R^2 \rho}{\rho^2 + R^2},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi = \frac{2R^2 \rho \cos \varphi}{\rho^2 + R^2} = \frac{2R^2 u}{u^2 + v^2 + R^2}, \\ y &= r \sin \varphi = \frac{2R^2 \rho \sin \varphi}{\rho^2 + R^2} = \frac{2R^2 v}{u^2 + v^2 + R^2}, \end{aligned}$$

что и требовалось. □

Следствие 7.42. В полярных координатах (ρ, φ) на плоскости стереографическая проекция выглядит так:

$$\left(x = \frac{2R^2 \rho \cos \varphi}{\rho^2 + R^2}, y = \frac{2R^2 \rho \sin \varphi}{\rho^2 + R^2}, z = R \frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2 + R^2} \right).$$

Если (r, φ, z) — цилиндрическими координатами точки P , то

$$\left(r = \frac{2R^2 \rho}{\rho^2 + R^2}, \varphi = \varphi, z = R \frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2 + R^2} \right).$$

Следующий результат получается прямым подсчетом.

Теорема 7.43. *Индукцированная метрика $d\sigma^2$ на сфере S^2 радиуса R в стереографических координатах имеет вид*

$$d\sigma^2 = \frac{4R^4}{(u^2 + v^2 + R^2)^2} (du^2 + dv^2) = \frac{4R^4}{(\rho^2 + R^2)^2} (d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2),$$

где (u, v) — декартовы, а (ρ, φ) — полярные координаты в плоскости проекции.

Упражнение 7.44. Обобщить только что приведенные выкладки на случай гиперсферы в \mathbb{R}^n .

7.7 Задачи

Определение 7.45. Криволинейная система координат (q^1, \dots, q^n) , заданная в области пространства \mathbb{R}^n , называется *ортогональной*, если в ней евклидова метрика имеет вид $H_1^2 [dq^1]^2 + \dots + H_n^2 [dq^n]^2$, где $H_i, i = 1, \dots, n$, — положительные функции координат (q^1, \dots, q^n) , называемые *коэффициентами Ламе*.

Задача 7.46. Вычислить якобиан перехода $J = \left| \frac{\partial x^s}{\partial q^k} \right|$ от декартовых координат (x^i) к ортогональным криволинейным координатам (q^i) в пространстве \mathbb{R}^n .

Задача 7.47. *Эллиптические координаты* в \mathbb{R}^3

$$q^1 = \lambda, \quad q^2 = \mu, \quad q^3 = z$$

определяются с помощью формул

$$x = c\lambda\mu, \quad y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, \quad z = z,$$

где c — масштабный множитель.

- Найти координатные поверхности эллиптических координат.
- Вычислить коэффициенты Ламе.

7.8 Дополнительный материал

7.8.1 Свойства стереографической проекции

Отметим следующее важное свойство стереографической проекции.

Теорема 7.48. *Сtereoграфическая проекция $\nu: S^2 \rightarrow \Pi$ переводит каждую (невыврожденную) окружность на сфере S^2 , не проходящую через северный полюс N , в некоторую окружность на плоскости Π , а окружность на S^2 , проходящую через N , — в некоторую прямую на Π .*

Доказательство. Второе утверждение теоремы очевидно, так как каждая окружность на S^2 , проходящая через N , переходит, по определению, в прямую пересечения плоскости, задающей эту окружность, с плоскостью Π .

Докажем первое утверждение теоремы. Для простоты положим $R = 1$. Пусть окружность $\gamma \subset S^2$ получается, как пересечение плоскости Π' и сферы S^2 . Пусть плоскость Π' задается уравнением $ax + by + cz = d$. Подставляя в это уравнение выражение для x , y и z через стереографические координаты u и v , получаем

$$ax + by + cz = a \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1} + b \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1} + c \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} = \frac{2au + 2bv + c(u^2 + v^2 - 1)}{u^2 + v^2 + 1} = d,$$

откуда

$$2au + 2bv + c(u^2 + v^2 - 1) - d(u^2 + v^2 + 1) = (c - d)(u^2 + v^2) + 2au + 2bv - (d + c) = 0.$$

Так как при u^2 и v^2 стоят одинаковые коэффициенты, то это уравнение второго порядка задает или окружность (если $c \neq d$ и есть хотя бы два разных решения), или прямую (если $c = d$ и $a^2 + b^2 \neq 0$), или точку, или пустое множество. Но, по предположению, окружность γ невырождена (состоит более чем из одной точки) и не проходит через N , поэтому ее образ состоит более чем из одной точки и ограничен, откуда немедленно заключаем, что $\nu(\gamma)$ — окружность. Утверждение доказано. \square

7.8.2 Многомерная стереографическая проекция

Понятие стереографической проекции легко обобщается на случай стандартной сферы $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ радиуса R . Пусть в \mathbb{R}^{n+1} заданы стандартные евклидовы координаты (x^1, \dots, x^{n+1}) . В качестве параметризующей области выберем координатную плоскость Π , заданную уравнением $x^{n+1} = 0$. Стандартные декартовы координаты в этой плоскости обозначим через (u^1, \dots, u^n) .

Пусть сфера S^n задана как множество решений уравнения $\sum (x^i)^2 = R^2$. Обозначим через N точку сферы с координатами $(0, \dots, 0, 1)$ и назовем N *северным полюсом сферы*. Пусть P — произвольная точка из $S^n \setminus \{N\}$. Выпустим из точки N луч, проходящий через P . Очевидно, построенный луч пересекает плоскость Π в единственной точке, которую обозначим через $\nu(P)$. Таким образом, возникает взаимно-однозначное соответствие $\nu: S^n \setminus \{N\} \rightarrow \Pi$ между точками сферы S^n , из которой удален северный полюс, и точками плоскости Π . Отображение ν называется *стереографической проекцией*.

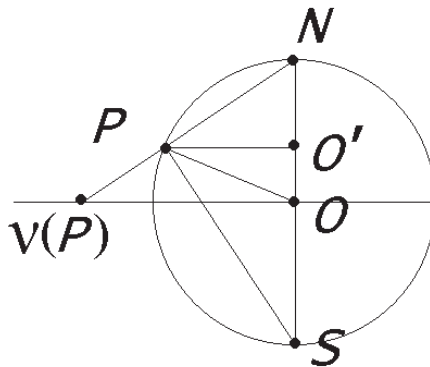


Рис. 7.1: Стереографическая проекция.

Запишем отображение ν в координатах. Ясно, что координаты (u^1, \dots, u^n) точки $\nu(P)$ и первые n координат (x^1, \dots, x^n) точки $P \in S^n \setminus \{N\}$ пропорциональны, причем коэффициент пропорциональности равен

коэффициенту подобия k между треугольниками $NO\nu(P)$ и $NO'P$, где через O обозначено начало координат в \mathbb{R}^{n+1} , а через O' — проекция точки P на ось Ox^{n+1} (рис. 7.1). Более точно, $x^i = u^i|PN|/|\nu(P)N|$, $i = 1, \dots, n$. В свою очередь, величину $|PN|$ вычислим из подобия треугольников $\nu(P)NO$ и SNP , где S — точка сферы, противоположная северному полюсу (ее, кстати, называют *южным полюсом*): $|PN| = |NS||NO|/|\nu(P)N|$. Поэтому, учитывая, что $|NS| = 2|NO| = 2R$, окончательно получаем:

$$x^i = \frac{2R^2 u^i}{|\nu(P)N|^2} = \frac{2R^2 u^i}{\sum_j (u^j)^2 + R^2}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Воспользовавшись задающим сферу уравнением, находим, что

$$(x^{n+1})^2 = R^2 \frac{(R^2 - \sum_j (u^j)^2)^2}{(R^2 + \sum_j (u^j)^2)^2}.$$

Осталось заметить, что $(n+1)$ -я координата x^{n+1} точки P положительна тогда и только тогда, когда точка $\nu(P)$ лежит вне круга радиуса R . Это дает возможность избавиться от модулей после извлечения корня в последнем равенстве. Окончательно имеем:

$$x^{n+1} = R \frac{\sum_j (u^j)^2 - R^2}{R^2 + \sum_j (u^j)^2}.$$

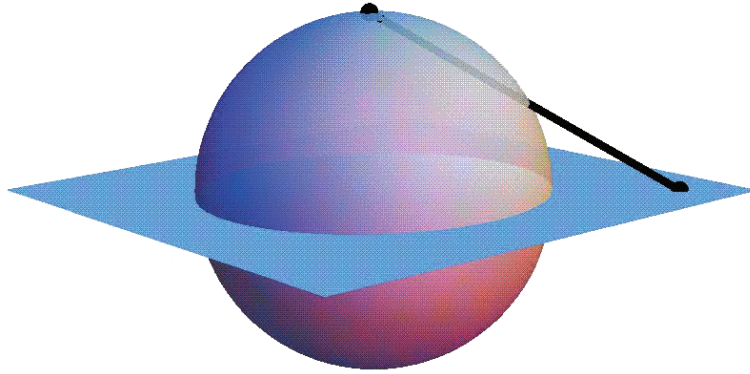


Рис. 7.2: Стереграфическая проекция из северного полюса.

Первая квадратичная форма сферы в координатах (u^1, \dots, u^n) выглядит, как

$$ds^2 = 4R^4 \frac{\sum_j (du^j)^2}{(R^2 + \sum_j (u^j)^2)^2}.$$

7.8.3 Нормальные координаты

С помощью геодезических определим на поверхности так называемые *нормальные координаты*, которые оказываются удобными для многих вычислений. Итак, пусть $M = \{r: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}\}$ — регулярная поверхность, заданная в параметрическом виде, P — некоторая точка на M и $T_P M$ — касательное пространство к поверхности M в точке P . Пусть V — произвольный касательный вектор из $T_P M$. Тогда в силу следствия 6.13 существует единственная геодезическая $\xi_V(s)$, удовлетворяющая начальным условиям $\xi_V(0) = P$ и $\dot{\xi}_V(0) = V$ (здесь точкой обозначено дифференцирование по s). Пусть a — произвольное вещественное число. Тогда для вектора aV существует своя такая геодезическая $\xi_{aV}(s)$. Оказывается, геодезические $\xi_V(s)$ и $\xi_{aV}(s)$ отличаются на перепараметризацию.

Лемма 7.49. При сделанных выше обозначениях

$$\xi_{aV}(s) = \xi_V(as)$$

в общей области определения.

Доказательство. Действительно, касательный вектор геодезической $\xi_V(as)$ в точке $P = \xi_V(0)$ имеет вид

$$\left. \frac{d\xi_V(as)}{ds} \right|_{s=0} = \dot{\xi}_V(0)a = aV,$$

поэтому геодезическая $\xi_V(as)$ удовлетворяет тем же начальным условиям, что и геодезическая $\xi_{aV}(s)$. Теперь утверждение леммы получается из следствия 6.13. \square

Определим *экспоненциальное отображение* \exp_P некоторой окрестности нуля в касательном пространстве $T_P M$ в поверхность M :

$$\exp_P: V \mapsto \xi_V(1).$$

Отображение \exp_P — гладкое в области определения (в силу теоремы о гладкой зависимости решения задачи Коши от начальных условий). Оказывается, что отображение \exp_P является также регулярным в некоторой окрестности нуля.

Предложение 7.50. Пусть P — произвольная точка регулярной поверхности M . Тогда отображение \exp_P задает регулярные координаты в некоторой окрестности точки P . Другими словами, отображение \exp_P гладко и взаимно-однозначно отображает некоторую окрестность нуля из $T_P M$ на окрестность точки P в M , причем матрица Якоби этого отображения невырождена.

Доказательство. Для доказательства утверждения достаточно показать, что матрица Якоби отображения \exp_P невырождена в точке $0 \in T_P M$. Действительно, если это так, то матрица Якоби невырождена и в некоторой окрестности нуля, и тогда утверждение следует из теоремы о неявной функции.

Итак, по определению, $\exp_P(V) = \xi_V(1)$. Фиксируем на M какие-нибудь регулярные координаты (u^1, \dots, u^n) , и пусть $u^i(s, V)$ — координатное представление геодезической $\xi_V(s)$. Если мы фиксируем какой-нибудь базис в $T_P M$ и в этом базисе $V = (v^1, \dots, v^n)$, то координатное представление отображения \exp_P в координатах (v^1, \dots, v^n) на $T_P M$ и (u^1, \dots, u^n) на M имеет вид

$$u^i = u^i(1, V) = u^i(1, v^1, \dots, v^n).$$

Пусть t — произвольное число. Поскольку в силу леммы 7.49 $\xi_{tV}(s) = \xi_V(st)$, в координатах имеем

$$u^i(s, tV) = u^i(st, V). \quad (*)$$

Продифференцируем соотношение (*) по t и положим $t = 0$. Дифференцируя левую часть, получим

$$\left. \frac{\partial u^i(s, tV)}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_j \left. \frac{\partial u^i(s, tV)}{\partial v^j} \right|_{t=0} v^j = \sum_j \frac{\partial u^i(s, 0)}{\partial v^j} v^j.$$

Дифференцируя правую часть соотношения (*), имеем

$$\left. \frac{\partial u^i(st, V)}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial u^i(st, V)}{\partial s} \right|_{t=0} s = \frac{\partial u^i(0, V)}{\partial s} s = (\dot{\xi}_V(0))^i s = v^i s.$$

Приравняв полученные выражения и положив в них $s = 1$, получим окончательно

$$\sum_j \frac{\partial u^i(1, 0)}{\partial v^j} v^j = v^i$$

для произвольного вектора V . Поэтому матрица Якоби $\left(\frac{\partial u^i(1, 0)}{\partial v^j} \right)$ отображения \exp_P в точке $V = 0$ равна единичной матрице и, в частности, невырождена. Утверждение доказано. \square

Определение 7.51. Пусть в касательном пространстве $T_P M$ фиксирован произвольный ортонормированный базис (e_i) и (v^1, \dots, v^n) — декартовы координаты в $T_P M$, порожденные этим базисом. Регулярные координаты, порожденные отображением

$$V = (v^1, \dots, v^n) \mapsto \exp_P(V),$$

переводящим некоторую окрестность точки $0 \in T_P M$ на некоторую окрестность точки P в M , называются *нормальными координатами с центром в точке P , порожденными базисом (e_i)* . Сама окрестность точки P , в которой заданы нормальные координаты, а также соответствующая окрестность точки 0 в $T_P M$ называются *нормальными окрестностями*.

Пусть в некоторой нормальной окрестности точки P фиксированы нормальные координаты. Рассмотрим в касательном пространстве $T_P M$ сферу $S^n(\varepsilon)$ радиуса ε , целиком лежащую в нормальной окрестности точки $0 \in T_P M$. Образ $\exp_P(S^n(\varepsilon))$ сферы $S^n(\varepsilon)$ при экспоненциальном отображении называется *геодезической сферой с центром в точке P и радиусом ε* . Имеет место следующее интересное утверждение.

Предложение 7.52 (Лемма Гаусса). *Пусть Q — произвольная точка геодезической сферы Σ с центром в точке P . Тогда геодезическая, соединяющая точки P и Q и целиком лежащая в нормальной окрестности точки P , — единственна. Более того, эта геодезическая приходит на геодезическую сферу Σ под прямым углом. Последнее означает, что геодезическая перпендикулярна любой регулярной кривой, проходящей через Q и лежащей в Σ .*

Доказательство. Первое утверждение следует из взаимной однозначности отображения \exp_P в нормальной окрестности. Докажем второе утверждение.

Пусть $\gamma(t)$ — геодезическая, соединяющая точки P и Q и лежащая в нормальной окрестности точки P , и пусть $\sigma(\tau)$, $\tau \in [-\tau_0, \tau_0]$ — произвольная регулярная кривая на геодезической сфере Σ , такая, что $\sigma(0) = Q$. Рассмотрим семейство геодезических $\gamma_\tau(t)$, целиком лежащих в нормальной окрестности точки P и соединяющих P с точкой $\sigma(\tau) \in \Sigma$. В силу первого утверждения каждая геодезическая $\gamma_\tau(t)$ однозначно определена. Ясно, что семейство геодезических $\gamma_\tau(t)$ порождает вариацию $\Phi(\tau, t) = \gamma_\tau(t)$ геодезической $\gamma(t) = \gamma_0(t)$. При этом, по определению, одна концевая кривая $p(\tau)$ вариации Φ состоит из одной точки P , а другая — $q(\tau)$ совпадает с кривой $\sigma(\tau)$. Воспользуемся формулой первой вариации длины (см. следствие 6.42). Поскольку длины всех геодезических $\gamma_\tau(t)$ равны между собой и равны радиусу сферы Σ , имеем

$$0 = \frac{d\ell(0)}{d\tau} = \langle \sigma'(0), \dot{\gamma} \rangle,$$

где вектор скорости $\dot{\gamma}$ вычисляется в точке Q , т.е. геодезическая γ перпендикулярна кривой σ , лежащей на сфере Σ . Доказательство закончено. \square

Упражнение 7.53. Пусть (u^1, \dots, u^n) — нормальные координаты с центром в точке P . Показать, что в этих координатах матрица первой квадратичной формы в точке P равна единичной, а символы Кристоффеля в точке P равны нулю.

7.8.4 Полугеодезические координаты

Определенные в предыдущем разделе нормальные координаты являются частным случаем так называемых координат Ферми. Координаты Ферми будут определены в следующем семестре для подмногообразия в римановом многообразии, а сейчас ограничимся другим частным случаем — так называемыми *полугеодезическими координатами на двумерной поверхности*.

Пусть $M = \{r: U \rightarrow \mathbb{R}^3\}$ — регулярная двумерная поверхность и $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ — регулярная кривая на M . Пусть $E(t)$ — гладкое касательное векторное поле единичной длины, заданное в точках кривой γ и перпендикулярное вектору скорости $\dot{\gamma}(t)$ в точке $\gamma(t)$. Построим отображение некоторой окрестности отрезка $I \times \{0\}$ в прямом произведении $I \times \mathbb{R}^1$ в поверхность M . Из каждой точки $\gamma(t)$ кривой γ выпустим геодезическую $\nu_t(s)$, определенную на некотором интервале $[-s_0(t), s_0(t)]$ и удовлетворяющую начальным условиям $\nu_t(0) = \gamma(t)$, $\nu'_t(0) = E(t)$. Точке $(t, s) \in I \times \mathbb{R}^1$ поставим в соответствие точку $\nu_t(s)$ поверхности M . Полученное отображение обозначим через \exp_γ и назовем *экспоненциальным отображением нормалей вдоль γ* .

Замечание 7.54. Так как $\|E(t)\| = 1$, все геодезические $\nu_t(s)$ параметризованы натурально.

Лемма 7.55. *Экспоненциальное отображение \exp_γ нормалей вдоль γ является гладким взаимно-однозначным и регулярным в некоторой окрестности отрезка $I \times 0$ в полосе $I \times \mathbb{R}^1$.*

Доказательство. Действительно, ограничение отображения \exp_γ на $I \times 0$ совпадает с отображением γ , а ограничение отображения \exp_γ на $t \times \mathbb{R}^1$ совпадает с ограничением отображения $\exp_{\gamma(t)}$ на прямую в касательной плоскости $T_{\gamma(t)} M$, проходящую через 0 в направлении вектора $E(t)$. Поэтому матрица Якоби отображения \exp_γ невырождена в каждой точке отрезка $I \times 0$ и, следовательно, так как отрезок компактен, в некоторой окрестности отрезка $I \times 0$. Лемма доказана. \square

В силу леммы 7.55 корректно следующее определение.

Определение 7.56. Регулярные координаты, порожденные в некоторой окрестности кривой γ отображением \exp_γ , называются *полугеодезическими координатами, ассоциированными с γ* .

Имеет место следующий важный аналог леммы Гаусса (см. утверждение 7.52).

Предложение 7.57 (Обобщенная лемма Гаусса). *На произвольной двумерной регулярной поверхности полугеодезические координаты, заданные в окрестности регулярной натурально параметризованной кривой, ортогональны.*

Доказательство. Пусть $\exp_\gamma : (t, s) \rightarrow M$ — полугеодезические координаты в окрестности естественно параметризованной кривой $\gamma(t)$. Обозначим через $\nu_t(s)$ координатные линии $t = \text{const}$, а через $\gamma_s(t)$ — координатные линии $s = \text{const}$. Нужно показать, что для любого t координатная линия $\nu_t(s)$ пересекает все координатные линии $\gamma_s(t)$ под прямым углом. Фиксируем некоторое s_0 . Семейство геодезических $\nu_t(s)$, проходящих на кривую $\gamma_{s_0}(t)$, порождают гладкую вариацию геодезической $\nu_{t_0}(s)$. При этом концевые кривые этой гладкой вариации совпадают с $\gamma_0(t)$ и $\gamma_{s_0}(t)$, а сама вариация — это просто ограничение отображения \exp_γ на прямоугольник $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times [0, s_0]$. Длины всех геодезических $\nu_t(s)$ при этом одинаковы и равны s_0 . Воспользуемся формулой первой вариации длины геодезической (см. следствие 6.42). Будем обозначать дифференцирование по s штрихом, а по t — точкой. Имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\ell(0)}{dt} = \langle \dot{\gamma}_{s_0}(t_0), \nu'_{t_0}(s_0) \rangle - \langle \dot{\gamma}(t_0), \nu'_{t_0}(0) \rangle = \\ &= \langle \dot{\gamma}_{s_0}(t_0), \nu'_{t_0}(s_0) \rangle - \langle \dot{\gamma}(t_0), E(t_0) \rangle. \end{aligned}$$

Второе слагаемое равно нулю по определению, поэтому и первое слагаемое равно нулю. В силу произвольности выбора s_0 и t_0 доказательство закончено. \square

Тема 8

Риманова и псевдориманова метрики

В данной лекции мы обобщим понятия евклидовой и индуцированной метрик. Это позволит нам расширить класс примеров метрик, не заботясь о построении конкретной поверхности и индуцированной метрики на ней.

Замечание 8.1. Индуцированная на поверхности метрика в общем случае не является евклидовой (например, метрика на стандартной сфере). Однако у той и другой много общего: обе позволяют вычислять скалярное произведение касательных векторов и, как следствие, длины кривых, углы между кривыми и т.д.; обе меняются по одинаковому закону при замене (регулярных) координат. Определим общий объект, называемый билинейной формой, частными случаями которой являются евклидова и индуцированная метрики.

8.1 Билинейная форма в области

Пусть M — регулярная k -мерная поверхность в \mathbb{R}^n , $k \leq n$, (напомним, что при $k = n$ мы имеем дело просто с областью в \mathbb{R}^n).

Определение 8.2. Будем говорить, что на поверхности (области) M задана билинейная форма b , если в каждой точке $P \in M$ определена билинейная форма $b(P)$ на касательном пространстве $T_P M$, т.е., напомним, линейное по каждому аргументу отображение $b(P): T_P M \times T_P M \rightarrow \mathbb{R}$.

Конструкция 8.3. Пусть u^1, \dots, u^k — регулярные координаты на поверхности M , на которой задана билинейная форма b . Тогда в каждой точке $P \in M$ определен канонический базис (∂_{u^i}) в касательном пространстве $T_P M$, поэтому определена матрица $b_{ij}(P)$ билинейной формы $b(P)$, а именно, $b_{ij}(P) = b(P)(\partial_{u^i}, \partial_{u^j})$. При этом величины $b_{ij}(P) = b_{ij}(u^1, \dots, u^k)$ естественно рассматривать как функции на параметризующей области.

Определение 8.4. Величины $b_{ij}(P)$ называются *компонентами билинейной формы* b в координатах u^1, \dots, u^k . Они образуют *матрицу* $B(P) = (b_{ij}(P))$ *билинейной формы* b в координатах u^1, \dots, u^k .

Определение 8.5. Билинейная форма на поверхности называется *гладкой*, если в некоторой системе координат все ее компоненты — гладкие функции от координат.

Соглашение 8.6. В дальнейшем все рассматриваемые билинейные формы предполагаются гладкими без специальных оговорок.

Утверждение 8.7. Пусть $v^i = v^i(u^1, \dots, u^k)$ — регулярная замена координат на регулярной поверхности M , и b_{ij} и \tilde{b}_{ij} — компоненты билинейной формы b в системе координат u^1, \dots, u^k и v^1, \dots, v^k соответственно. Тогда

$$\tilde{b}_{ij} = \sum_{\alpha, \beta=1}^k b_{\alpha\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial v^j}.$$

В частности, гладкость билинейной формы не зависит от выбора системы координат, участвующей в определении.

Доказательство. Действительно, как и в линейной алгебре, формулы преобразования компонент вытекают из формул преобразования векторов базиса:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{ij} = b(\partial_{v^i}, \partial_{v^j}) &= b\left(\sum_{\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i} \partial_{u^\alpha}, \sum_{\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial v^j} \partial_{u^\beta}\right) = \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial v^j} b(\partial_{u^\alpha}, \partial_{u^\beta}) = \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial v^j} b_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

что и требовалось. □

Утверждение 8.8. Пусть на регулярной поверхности M задана билинейная форма b , и пусть $x, y \in T_P M$ — касательные векторы к M в точке P . Пусть u^1, \dots, u^k — регулярные координаты на M , и x^i, y^j и b_{ij} , $1 \leq i, j \leq k$ — компоненты векторов x и y и билинейной формы $b(P)$ в этих координатах соответственно. Тогда

$$b(P)(x, y) = \sum_{ij} b_{ij} x^i y^j.$$

В частности, значение этого выражения не меняется при замене координат.

Доказательство. Доказательство точно такое же, как в линейной алгебре. Разложим векторы x и y по векторам канонического базиса (∂_{u^i}) . Получим:

$$b(x, y) = b\left(\sum_i x^i \partial_{u^i}, \sum_j y^j \partial_{u^j}\right) = \sum_{i,j} x^i y^j b(\partial_{u^i}, \partial_{u^j}) = \sum_{i,j} b_{ij} x^i y^j,$$

что и требовалось. □

Конструкция 8.9. Пусть M — регулярная поверхность. Чтобы задать на M некоторую билинейную форму b , достаточно в некоторой фиксированной системе координат u^1, \dots, u^k на M задать семейство матриц $B(u^1, \dots, u^k) = (b_{ij})$, гладко зависящее от точки, и положить $b(P)(x, y) = \sum_{ij} b_{ij}(P)x^i y^j$, где $x, y \in T_P M$, а x^i и y^j — компоненты этих касательных векторов в системе координат u^1, \dots, u^k . При этом, компоненты билинейной формы b в любой другой системе координат могут быть найдены с помощью утверждения 8.7.

Определение 8.10. Билинейная форма b на поверхности M называется *симметричной* (*невырожденной, положительно определенной*), если в каждой точке $P \in M$ билинейная форма $b(P)$, соответственно, симметрична, невырождена, положительно определена (в смысле линейной алгебры).

Утверждение 8.11. Билинейная форма b на поверхности M симметрична (*невырожденна, положительно определена*), если в некоторой системе координат на поверхности матрица формы b в этих координатах, соответственно, симметрична, невырождена, положительно определена в каждой точке поверхности.

Доказательство. В заданной системе координат в фиксированной точке утверждение известно из линейной алгебры. Независимость от выбора системы координат следует из утверждения 8.7. Доказательство закончено. \square

Замечание 8.12. Билинейную форму удобно записывать в координатах u^1, \dots, u^k в дифференциальном виде: $\sum_{ij} b_{ij} du^i du^j$.

Определение 8.13. Невырожденная симметричная билинейная форма на поверхности называется *псевдоримановой метрикой*, а невырожденная симметричная положительно определенная форма — *риманова метрикой*.

Пример 8.14. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область в \mathbb{R}^n , и x^1, \dots, x^n — линейные координаты в \mathbb{R}^n , как в арифметическом линейном пространстве. Рассмотрим в каждой точке области Ω билинейную форму, матрица которой в каноническом базисе (∂_{x^i}) имеет вид δ_{ij} . Полученная билинейная форма в Ω — это евклидова метрика в области, см. определение 7.31.

Пример 8.15. Пусть M — регулярная поверхность в \mathbb{R}^n . Тогда первая фундаментальная форма поверхности — это риманова метрика на M , которая называется также *индуцированной метрикой на M* .

Замечание 8.16. Отметим, что если $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ — параметризующее отображение регулярной поверхности, то индуцированную метрику на M можно также рассматривать как некоторую риманову метрику на Ω . В последнем случае говорят, что эта риманова метрика в области Ω *реализуется как индуцированная* при отображении $r: M \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Замечание 8.17. Практически все конструкции, описанные нами выше для индуцированной метрики на поверхности, дословно переносятся на случай римановой метрики в области. В частности, определены изометрии областей с метриками, геодезические в области с метрикой и др.

Замечание 8.18. Рассмотрим следующую обратную задачу. Пусть в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ в координатах (u^1, \dots, u^k) задана некоторая риманова метрика своими компонентами $g_{\alpha\beta}(u^1, \dots, u^k)$. Является ли эта метрика индуцированной? Другими словами, существует ли такая регулярная параметрическая поверхность $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, что соответствующая индуцированная метрика на Ω совпадает с заданной? Эта задача весьма сложна и выходит за рамки данного курса. В двумерном случае положительный ответ дает теорема Бонне.

8.2 Псевдоевклидовы пространства

Рассмотрим следующий важный пример.

Конструкция 8.19. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область в \mathbb{R}^n , и x^1, \dots, x^n — линейные координаты в \mathbb{R}^n , как в арифметическом линейном пространстве. Рассмотрим в каждой точке области Ω билинейную форму, матрица которой в каноническом базисе (∂_{x^i}) диагональна, причем на диагонали стоит s штук -1 и $n - s$ штук $+1$. Другими словами, в дифференциальной записи эта форма имеет вид

$$-\sum_{i=1}^s (dx^i)^2 + \sum_{i=s+1}^n (dx^i)^2.$$

Полученная билинейная форма является псевдоевклидовой метрикой.

Определение 8.20. Пространство \mathbb{R}^n на котором задана псевдоевклидова метрика из 8.19, называется *псевдоевклидовым пространством индекса s* и обозначается через \mathbb{R}_s^n , а координаты x^1, \dots, x^n — *псевдоевклидовыми*. Соответствующая билинейная форма называется *псевдоскалярным произведением*. Пространство \mathbb{R}_1^n называется *пространством Минковского*.

Определение 8.21. *Псевдосферой $S_s^{n-1}(R)$ индекса s и радиуса R* называется подмножество пространства \mathbb{R}_s^n , заданное уравнением

$$-\sum_{i=1}^s (x^i)^2 + \sum_{j=s+1}^n (x^j)^2 = R^2.$$

Замечание 8.22. В отличие от обычной сферы в евклидовом пространстве, псевдосфера может иметь не только положительный радиус, но и нулевой, а также чисто мнимый (комплексный) радиус, т.е. радиус $R = i\rho$ (при этом $R^2 = -\rho^2$). Ясно, что псевдосфера нулевого радиуса является конусом, который называется *изотропным конусом*.

Пример 8.23. В качестве примера (рис. 8.1) рассмотрим плоскость \mathbb{R}_1^2 с фиксированными стандартными координатами (x^1, x^2) , в которых псевдоевклидова метрика записывается в виде $-(dx^1)^2 + (dx^2)^2$. Тогда изотропный конус — это пара прямых $x^1 = \pm x^2$. Псевдосферы вещественного радиуса расположены в области, ограниченной изотропным конусом и определяемой неравенством $|x^2| > |x^1|$. Они представляют

собой гиперболы $-(x^1)^2 + (x^2)^2 = R^2$. Аналогично, в ограниченной изотропным конусом дополнительной области $|x^1| > |x^2|$ расположены псевдосферы мнимого радиуса. Они тоже суть гиперболы $-(x^1)^2 + (x^2)^2 = -R^2$.

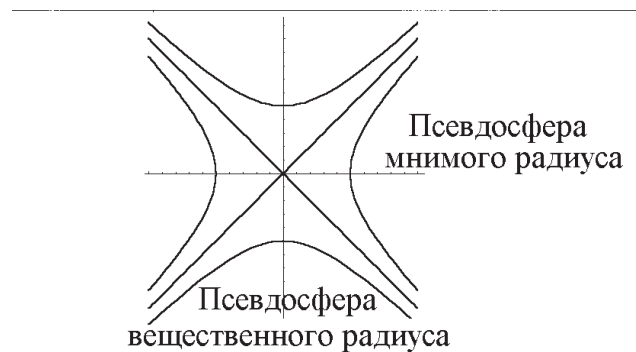


Рис. 8.1: Плоскость Минковского и псевдосферы.

Упражнение 8.24. Показать, что линейные преобразования плоскости \mathbb{R}_1^2 , сохраняющие псевдоскалярное произведение, образуют группу гиперболических поворотов, которая состоит из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} \pm \operatorname{ch} \varphi & \pm \operatorname{sh} \varphi \\ \pm \operatorname{sh} \varphi & \pm \operatorname{ch} \varphi \end{pmatrix},$$

где знаки в каждом из столбцов — одинаковы.

8.3 Пространство–время

Рассмотрим важный для физики частный случай псевдоевклидова пространства — пространство Минковского \mathbb{R}_1^4 , называемое в физике *пространственно-временным континуумом*. Это пространство фигурирует в специальной теории относительности.

Конструкция 8.25. Каждой точке $x = (x^1, x^2, x^3)$ пространства \mathbb{R}^3 и каждому моменту времени t поставим в соответствие точку (t, x^1, x^2, x^3) четырехмерного пространства, называемую *событием*. Превратим четырехмерное пространство в псевдоевклидово, выбрав в качестве псевдоевклидовых координат координаты $(x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$, где c — постоянная, интерпретируемая как скорость света в вакууме. Таким образом, псевдоевклидово скалярное произведение векторов

$$P = (P^0 = ct_P, P^1, P^2, P^3) \quad \text{и} \quad Q = (Q^0 = ct_Q, Q^1, Q^2, Q^3)$$

имеет вид

$$\langle P, Q \rangle_1 = -P^0 Q^0 + P^1 Q^1 + P^2 Q^2 + P^3 Q^3 = -c^2 t_P t_Q + P^1 Q^1 + P^2 Q^2 + P^3 Q^3.$$

Псевдоевклидово расстояние между точками P и Q , т.е. величина $\sqrt{\langle P - Q, P - Q \rangle_1}$, называется *пространственно-временным интервалом между событиями P и Q* ; векторы из изотропного конуса, т.е. векторы V , такие, что $\langle V, V \rangle_1 = 0$, называются *световыми* (поэтому изотропный конус называется *световым*); векторы P , для которых

$\langle P, P \rangle_1 < 0$, называются *времениподобными*, а векторы P , для которых $\langle P, P \rangle_1 > 0$, — *пространственно-подобными*.

Основной постулат специальной теории относительности гласит, что скорость любого объекта не может превосходить скорости света c . Переформулируем его на геометрическом языке. Каждой траектории $x(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$ движения материальной точки соответствует кривая $m(t) = (ct, x(t))$ в пространстве-времени, называемая *мировой линией*. Ясно, что $\langle \dot{m}, \dot{m} \rangle_1 = -c^2 + \langle v, v \rangle$, где $v = \dot{x}$ — вектор скорости материальной точки. Постулат $\langle v, v \rangle < c^2$ равносильно условию $\langle \dot{m}, \dot{m} \rangle_1 < 0$. Другими словами, вектор скорости мировой линии должен быть *времениподобен*.

8.4 Геометрия псевдосферы

Изучим более подробно геометрию псевдосферы $S_1^n(iR)$.

Конструкция 8.26. Пусть M — регулярная поверхность в пространстве \mathbb{R}_s^{n+1} , заданная параметрически в виде $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_s^{n+1}$. Точно так же, как и в случае евклидова пространства, заданное в \mathbb{R}_s^{n+1} псевдоевклидово скалярное произведение индуцирует в каждой касательной плоскости $T_P M$ поверхности M симметричную билинейную форму (которая может быть вырожденной).

Определение 8.27. Если билинейная форма из 8.26 является римановой метрикой, то поверхность M называется *пространственноподобной*.

Конструкция 8.28. Рассмотрим в пространстве \mathbb{R}_1^{n+1} псевдосферу S_1^n чисто мнимого радиуса iR . По определению, она задается уравнением

$$-(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = -R^2.$$

Ясно, что псевдосфера S_1^n состоит из двух компонент, разделенных координатной гиперплоскостью $x^1 = 0$ (при $n = 2$ это обычный двуполостный гиперболоид). Рассмотрим половинку псевдосферы, заданную неравенством $x^1 > 0$, и произвольную точку P из этой половинки соединим с точкой $S = (-R, 0, \dots, 0)$ отрезком SP , см. рис. 8.2. Этот отрезок пересекает плоскость $x^1 = 0$ в некоторой точке, которую обозначим через $\sigma(P)$. Определим отображение σ , положив $\sigma: P \mapsto \sigma(P)$. Ясно, что отображение σ взаимно-однозначно отображает полусферу $S_1^n(x^1 > 0)$ на открытый шар радиуса R в плоскости $x^1 = 0$. Обозначим через (u^1, \dots, u^n) стандартные координаты в плоскости $x^1 = 0$ (для точек плоскости $x^1 = 0$, по определению, положим $x^i = u^{i-1}$, $i = 2, \dots, n+1$).

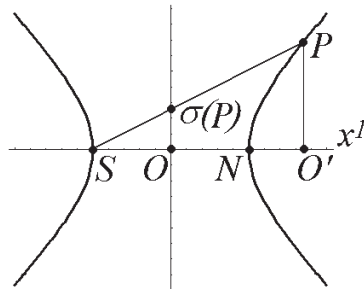


Рис. 8.2: Стереографическая проекция псевдосферы.

Определение 8.29. Точка $N = (R, 0, \dots, 0)$ называется *северным полюсом псевдосферы*, точка $S = (-R, 0, \dots, 0)$ — *южным полюсом*, а отображение $\sigma: S_1^n(x^1 > 0) \rightarrow \mathbb{R}^n(x^1 = 0)$ — *стереографической проекцией из южного полюса*.

Лемма 8.30. Стереографическая проекция взаимно-однозначно отображает половину псевдосферы $S_1^n(x^1 > 0)$ на открытый шар радиуса R в плоскости $x^1 = 0$. Во введенных выше обозначениях, если (u^1, \dots, u^n) — координаты точки $\sigma(P)$, то координаты (x^1, \dots, x^{n+1}) точки P могут быть вычислены следующим образом:

$$x^1 = R \frac{R^2 + \sum_i (u^i)^2}{R^2 - \sum_i (u^i)^2}, \quad x^{i+1} = \frac{2R^2 u^i}{R^2 - \sum_i (u^i)^2}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Доказательство. Действительно, поскольку треугольники $S\sigma(P)O$ и SPO' подобны (рис. 8.2), имеют место следующие равенства:

$$\frac{u^i}{x^{i+1}} = \frac{R}{R + x^1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Подставляя их в уравнение псевдосферы, получаем квадратное уравнение на x^1 . Решая его и отбрасывая решение $x^1 = -R$, соответствующее южному полюсу, находим

$$x^1 = R \frac{R^2 + \sum_i (u^i)^2}{R^2 - \sum_i (u^i)^2}.$$

Подставляя это соотношение в предыдущие, получаем

$$x^{i+1} = \frac{2R^2 u^i}{R^2 - \sum_i (u^i)^2}, \quad i = 1, \dots, n,$$

что и требовалось доказать. \square

Определение 8.31. Регулярные координаты (u^1, \dots, u^n) , заданные стереографической проекцией на полусфере $S_1^n(x^1 > 0)$ называются *координатами стереографической проекции*.

Из леммы 8.30 с помощью непосредственных, хотя и довольно громоздких, вычислений получаем следующее утверждение (проверьте).

Утверждение 8.32. *Псевдосфера мнимого радиуса iR с центром в начале координат в пространстве Минковского \mathbb{R}_1^{n+1} является пространственноподобной поверхностью. Индуцированная на ней риманова метрика в координатах стереографической проекции (соответствующая риманова метрика в шаре радиуса R) имеет вид*

$$ds^2 = \frac{4R^4}{(R^2 - \sum_i (u^i)^2)^2} \sum_i (du^i)^2.$$

Определение 8.33. Открытый шар радиуса R в \mathbb{R}^n с метрикой из утверждения 8.32 называется *шаром Пуанкаре* (при $n = 2$ — *кругом Пуанкаре*).

Замечание 8.34. Ниже псевдосфера используется для построения примера метрики постоянной отрицательной кривизны и для изучения замечательной геометрии таких метрик, обнаруженной Лобачевским.

Замечание 8.35. Отметим, что метрика на (псевдо-)сфере, записанная в стереографических координатах, отличается от евклидовой на функциональный множитель, т.е. имеет вид $\lambda^2(u) \sum_i (du_i)^2$.

Определение 8.36. Метрики, отличающиеся от евклидовой на функциональный множитель, называются *конформно-евклидовыми*.

Утверждение 8.37. *Предположим, что в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ заданы две римановых метрики ds^2 и $d\sigma^2$, отличающиеся на положительную функцию λ^2 , т.е. $d\sigma^2 = \lambda^2 ds^2$. Тогда величины угла между парой пересекающихся кривых, вычисленные по отношению к обоим этим метрикам, одинаковы.*

Доказательство. Пусть γ и δ — две кривые в Ω , пересекающиеся в точке P под углом α по отношению к ds^2 и под углом β по отношению к $d\sigma^2$. Обозначим через ξ и η векторы скоростей этих кривых. Тогда

$$\cos \alpha = \frac{ds^2(\xi, \eta)}{ds(\xi)ds(\eta)} = \frac{\lambda^2 ds^2(\xi, \eta)}{\lambda ds(\xi)\lambda ds(\eta)} = \frac{d\sigma^2(\xi, \eta)}{d\sigma(\xi)d\sigma(\eta)} = \cos \beta,$$

что и требовалось доказать. Здесь через $ds^2(\xi, \eta)$ и $d\sigma^2(\xi, \eta)$ обозначены скалярные произведения векторов ξ и η по отношению к метрикам ds^2 и $d\sigma^2$ соответственно, а через $ds(\xi)$ и $d\sigma(\xi)$ — длина вектора ξ , вычисленная по отношению к этим метрикам. \square

Следствие 8.38. *Стереографическая проекция сохраняет углы между кривыми на сфере S^n .*

Следствие 8.39. *Углы между кривыми на псевдосфере S_1^n , вычисленные в индуцированной метрике, совпадают с евклидовыми углами.*

8.5 Задачи

Задача 8.40. Доказать, что меньший из двух отрезков большого круга, на которые его делят две точки A и B , является кратчайшей кривой на сфере среди всех регулярных кривых, соединяющих A и B .

Задача 8.41. Вычислить длину окружности и площадь круга радиуса ρ на сфере (радиус понимается в смысле метрики на сфере).

Задача 8.42. Показать, что сумма углов сферического треугольника равна $\pi + S$, где S — площадь этого треугольника.

Задача 8.43. Пусть ABC — сферический треугольник на сфере S^2 ; α, β, γ — величины углов при вершинах A, B, C ; a, b, c — длины сторон BC, AC, AB . Доказать теорему косинусов:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Задача 8.44. Пусть L^2 — круг Пуанкаре радиуса R и A, B — точки на одном из его диаметров. Доказать, что отрезок AB является кратчайшей кривой среди всех регулярных кривых, соединяющих A и B в круге Пуанкаре.

Задача 8.45. Вычислить длину окружности и площадь круга радиуса ρ с центром в начале координат в круге Пуанкаре (радиус понимается в смысле соответствующей римановой метрики).

8.6 Дополнительный материал

8.6.1 Двумерные поверхности постоянной гауссовой кривизны

В этом разделе разработанная выше техника применяется для изучения поверхностей постоянной кривизны.

Знаменитая теорема Гаусса, доказанная выше, утверждает, что изометричные двумерные поверхности имеют одинаковую гауссову кривизну. Покажем, что если гауссова кривизна поверхности постоянна, то верно и обратное, т.е. *две поверхности одинаковой постоянной гауссовой кривизны локально изометричны*.

Для доказательства этого факта введем на поверхности координаты специального вида — полугеодезические координаты, ассоциированные с натурально параметризованной геодезической (см. Дополнительные материалы к лекции 7). А именно, пусть M , как и выше, — регулярная двумерная поверхность и пусть $\gamma(t)$ — натурально параметризованная геодезическая на M . Введем в окрестности геодезической $\gamma(t)$ ассоциированные с ней полугеодезические координаты $\text{exp}_\gamma: (t, s) \rightarrow M$. В этих координатах первая квадратичная форма поверхности M записывается особенно просто.

Лемма 8.46. *Пусть $\text{exp}_\gamma: (t, s) \rightarrow M$ — полугеодезические координаты на регулярной поверхности M , ассоциированные с натурально параметризованной геодезической $\gamma(t)$. Первая квадратичная форма поверхности в этих координатах имеет вид*

$$ds^2 + G(t, s)dt^2,$$

причем функция G удовлетворяет следующим соотношениям:

$$G(t, 0) = 1, \quad \frac{\partial G(t, 0)}{\partial s} = 0.$$

Доказательство. В силу утверждения 7.57 координаты (t, s) являются ортогональными, поэтому первая квадратичная форма имеет вид

$$E(t, s)ds^2 + G(t, s)dt^2.$$

Функция $E(t, s)$ равна, по определению, скалярному квадрату вектора ∂_s , т.е. вектора скорости соответствующей геодезической $\nu_t(s)$, поэтому $E(t, s) = 1$. Далее, функция $G(t, 0)$ равна скалярному квадрату вектора скорости натурально параметризованной геодезической $\gamma_0(t) = \gamma(t)$, поэтому $G(t, 0) = 1$. Осталось вычислить производную от $G(t, s)$ по s при $s = 0$. Имеем:

$$\frac{\partial G(t, s)}{\partial s} = \frac{\partial \langle \partial_t, \partial_t \rangle}{\partial s} = \nabla_s \langle \dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s \rangle = 2 \langle \nabla_s \dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s \rangle.$$

Отображение exp_γ задает гладкую вариацию геодезической $\nu_t(s)$ (для каждого значения t), поэтому применима лемма 6.39. В результате получаем:

$$\frac{\partial G(t, s)}{\partial s} = 2 \langle \nabla_s \dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s \rangle = 2 \langle \nabla_t \nu'_t, \dot{\gamma}_s \rangle.$$

Наконец, так как векторы ν'_t и $\dot{\gamma}_s$ ортогональны,

$$\langle \nabla_t \nu'_t, \dot{\gamma}_s \rangle = -\langle \nu'_t, \nabla_t \dot{\gamma}_s \rangle,$$

поэтому окончательно имеем

$$\frac{\partial G(t, s)}{\partial s} = 2 \langle \nabla_t \nu'_t, \dot{\gamma}_s \rangle = -2 \langle \nu'_t, \nabla_t \dot{\gamma}_s \rangle.$$

Положив в последнем равенстве $s = 0$ и воспользовавшись тем, что γ_0 — геодезическая и поэтому $\nabla_t \dot{\gamma} = 0$, получаем, наконец, что

$$\frac{\partial G(t, 0)}{\partial s} = 0.$$

Лемма доказана. □

Вычислим теперь гауссову кривизну поверхности в координатах (t, s) . Для этого воспользуемся формулой Гаусса:

$$\sum_{\beta} g_{\beta 2} \left\{ \frac{\partial \Gamma_{11}^{\beta}}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{12}^{\beta}}{\partial u^1} + \sum_k \left(\Gamma_{11}^k \Gamma_{k2}^{\beta} - \Gamma_{12}^k \Gamma_{k1}^{\beta} \right) \right\} = \det Q,$$

где Q — матрица второй квадратичной формы поверхности; g_{ij} — матрица первой квадратичной формы и Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля. В силу диагональности матрицы первой квадратичной формы получаем для гауссовой кривизны K следующее выражение:

$$K = \frac{g_{22}}{\det(g_{ij})} \left\{ \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u^1} + \sum_k (\Gamma_{11}^k \Gamma_{k2}^2 - \Gamma_{12}^k \Gamma_{k1}^2) \right\}.$$

Вычислим символы Кристоффеля. Положим $u^1 = s$, $u^2 = t$ и заметим, что матрица первой квадратичной формы и обратная ей матрица диагональны; более того, $g_{11} = g^{11} = 1$. Получим:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} \right) = 0, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \right) = 0 = \Gamma_{21}^1, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \right) = \frac{-G_s}{2}, \end{aligned}$$

где дифференцирования по t и s обозначены нижними индексами. Точно так же

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \right) = 0, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \right) = \frac{G_s}{2G} = \Gamma_{21}^2, \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \right) = \frac{G_t}{2G}. \end{aligned}$$

Подставим выражения для символов Кристоффеля в формулу Гаусса для кривизны. Тогда

$$\begin{aligned} K &= \frac{G}{G} \left\{ 0 - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{G_s}{2G} \right) + 0 + 0 - 0 - \left(\frac{G_s}{2G} \right)^2 \right\} = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{G_s}{G} \right)_s - \frac{1}{4} \left(\frac{G_s}{G} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{G_s}{G} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{G_{ss}}{G} = -\frac{(\sqrt{G})_{ss}}{\sqrt{G}}. \end{aligned} \quad (*)$$

Предположим теперь, что гауссова кривизна K поверхности M постоянна. Тогда получаем следующее дифференциальное уравнение на функцию \sqrt{G} :

$$(\sqrt{G})_{ss} + K\sqrt{G} = 0.$$

Это уравнение легко решается:

$$\sqrt{G} = \begin{cases} A \cos(a(s+B)), & \text{если } K = a^2 > 0, \\ As + B, & \text{если } K = 0, \\ A \operatorname{ch}(a(s+B)), & \text{если } K = -a^2 < 0, \end{cases}$$

где a — некоторая постоянная, A и B — произвольные функции от t . Однако, в силу леммы 8.46, для любого t должны иметь место следующие соотношения:

$$1 = \sqrt{G(t, 0)} = \begin{cases} A \cos(aB), & \text{при } K > 0, \\ B, & \text{при } K = 0, \\ A \operatorname{ch}(aB), & \text{при } K < 0. \end{cases} \quad (*)$$

Так как

$$(\sqrt{G})_s = \frac{1}{2} \frac{G_s}{\sqrt{G}} = \begin{cases} -Aa \sin(a(s+B)), & \text{при } K > 0, \\ A, & \text{при } K = 0, \\ Aa \operatorname{sh}(a(s+B)), & \text{при } K < 0, \end{cases}$$

для любого t имеют также место равенства

$$0 = (\sqrt{G(t, 0)})_s = \begin{cases} -Aa \sin(aB), & \text{если } K = a^2 > 0, \\ A, & \text{если } K = 0, \\ Aa \operatorname{sh}(aB), & \text{если } K = -a^2 < 0. \end{cases} \quad (**)$$

Осталось заметить, что из тождеств (*) и (**) однозначно находятся функции A и B в каждом из трех рассматриваемых случаев. Окончательно получаем:

$$\sqrt{G} = \begin{cases} \cos(as), & \text{если } K = a^2 > 0, \\ 1, & \text{если } K = 0, \\ \operatorname{ch}(as), & \text{если } K = -a^2 < 0. \end{cases}$$

Таким образом, задание постоянной гауссовой кривизны однозначно определяет первую квадратичную форму поверхности в некоторой окрестности отрезка любой натурально параметризованной геодезической на ней. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 8.47. Пусть M_1 и M_2 — двумерные регулярные поверхности постоянной гауссовой кривизны K и пусть P_i — произвольная точка на M_i , $i = 1, 2$. Тогда у точек P_i на M_i , $i = 1, 2$, существуют изометричные окрестности. Другими словами, поверхности M_1 и M_2 локально изометричны.

Следствие 8.48. Двумерная поверхность нулевой гауссовой кривизны локально изометрична плоскости. Двумерная поверхность положительной гауссовой кривизны a^2 локально изометрична стандартной сфере радиуса $1/a$.

Осталось выяснить, как выглядят поверхности постоянной отрицательной кривизны. Пока про них известно только, что в полугеодезических координатах их метрика имеет вид $ds^2 = du^2 + (\operatorname{ch}(au))^2 dv^2$, где a — некоторая константа (квадрат которой равен кривизне поверхности с точностью до знака).

Упражнение 8.49. Выяснить, существуют ли поверхности вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны. Если да, то описать их.

Рассмотрим псевдосферу в трехмерном пространстве Минковского \mathbb{R}_1^3 . Выше метрика псевдосферы была записана в стереографических координатах. Здесь, однако, будет удобно переписать эту метрику в других координатах. Для этого сначала введем на пространстве Минковского так называемые *псевдосферические координаты*, положив:

$$x^1(\rho, \chi, \varphi) = \rho \operatorname{ch} \chi, \quad x^2(\rho, \chi, \varphi) = \rho \operatorname{sh} \chi \cos \varphi, \quad x^3(\rho, \chi, \varphi) = \rho \operatorname{sh} \chi \sin \varphi.$$

Легко проверить, что это — действительно регулярные координаты в \mathbb{R}_1^3 при $\rho > 0$ и $\varphi \in (0, 2\pi)$. В то же время координатная поверхность $\rho = R$ совпадает с псевдосферой чисто мнимого радиуса iR . Наконец, псевдоевклидово скалярное произведение в этих координатах имеет вид

$$-(d\rho)^2 + \rho^2(d\chi)^2 + \rho^2(\operatorname{sh} \chi)^2(d\varphi)^2,$$

поэтому на псевдосфере радиуса iR получаем метрику следующего вида

$$ds^2 = R^2((d\chi)^2 + (\operatorname{sh} \chi)^2(d\varphi)^2).$$

Введем новые параметры $\xi = R\chi$ и $\psi = R\varphi$. Тогда метрика псевдосферы примет вид

$$ds^2 = (d\xi)^2 + \left(\operatorname{sh} \frac{\xi}{R}\right)^2(d\psi)^2.$$

Для метрик такого вида выше уже вычислялась гауссова кривизна K по формуле Гаусса. Для псевдосферы радиуса iR по формуле (*) получаем $K = -1/R^2$. Итак, доказано следующее утверждение.

Предложение 8.50. Гауссова кривизна псевдосферы S_1^2 радиуса iR в \mathbb{R}_1^3 постоянна и равна $-1/R^2$.

Из теоремы 8.47 немедленно получаем следствие.

Следствие 8.51. Двумерная поверхность отрицательной гауссовой кривизны $-a^2$ локально изометрична псевдосфере радиуса i/a .

Упражнение 8.52. Показать, что геодезическими на круге радиуса R с метрикой Лобачевского являются дуги окружностей, пересекающие ограничивающую этот круг окружность под прямым углом, и только они.

Упражнение 8.53. Пусть на верхней полуплоскости $(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0$ задана риманова метрика

$$ds^2 = R^2 \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Эта метрика называется *метрикой Лобачевского на верхней полуплоскости*. Вычислить гауссову кривизну верхней полуплоскости в метрике Лобачевского. Как устроены геодезические в этой метрике?

Тема 9

Геометрия Лобачевского

Эта лекция посвящена геометрии метрик постоянной отрицательной кривизны — геометрии Лобачевского. Отметим, однако, что Лобачевский открыл свою знаменитую геометрию совсем из других соображений, с краткого неформального обсуждения которых мы и начнем.

9.1 Неевклидовы геометрии

Принято считать, что “школьная” геометрия, или *евклидова геометрия*, была аксиоматизирована в знаменитых “Началах” Евклида 3 в. до н.э. Свои построения Евклид базировал на так называемых *постулатах*, в числе которых был и знаменитый пятый постулат, который, в одной из своих многочисленных формулировок, выглядит так:

через данную точку вне прямой можно провести единственную параллельную ей (т.е. не пересекающуюся с ней) прямую.

Пятый постулат похож на теорему, поэтому многие комментаторы “Начал” Евклида пытались вывести его из остальных постулатов евклидовой геометрии, однако их попытки не увенчались успехом.

Существенной переработкой аксиом евклидовой геометрии занялся Гильберт. В его аксиоматике (1899) выделяются три основных неопределяемых понятия — точка, прямая и плоскость, и основные неопределяемые отношения: “принадлежит”, “между”, “конгруэнтность”. Аксиомы делятся на пять групп: аксиомы принадлежности, порядка, движения, непрерывности и параллельности.

Оказывается, пятый постулат Евклида (аксиома параллельности) является независимой аксиомой: существуют геометрии, в которых выполняются все аксиомы, кроме аксиомы параллельности.

9.1.1 Эллиптическая геометрия

Опишем сначала геометрию, в которой пятый постулат не выполнен, а из остальных аксиом выполняются почти все.

Конструкция 9.1. Рассмотрим стандартную сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ единичного радиуса с центром в нуле. Точками будут точки из S^2 , прямыми — большие круги (пересечение сферы S^2 с плоскостями, проходящими через ее центр), а движениями — преобразования сферы, индуцированные ортогональными преобразованиями пространства \mathbb{R}^3 .

Замечание 9.2. Ясно, что в такой геометрии вообще нет параллельных прямых. Недостаток — через диаметрально противоположные точки сферы проходит больше одной (фактически бесконечно много) прямых. От этого неприятного обстоятельства можно легко избавиться, отождествив противоположные точки x и $-x$. В результате получим проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$ и естественную проекцию $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$. В качестве прямых на $\mathbb{R}P^2$ рассмотрим образы больших кругов при проекции π . Теперь через две разные точки проходит в точности одна прямая. Однако имеется еще одно неприятное обстоятельство: как на сфере, так и на $\mathbb{R}P^2$ не определено корректно понятие “между”. Можно показать, что на $\mathbb{R}P^2$ выполняются все аксиомы евклидовой геометрии, за исключением аксиом параллельности и порядка. Построенная только что геометрия на $\mathbb{R}P^2$ называется *эллиптической*, или *проективной*.

9.1.2 Геометрия Лобачевского (гиперболическая геометрия)

Можно ли построить пример геометрии, где выполняются все постулаты, кроме пятого? Ответ на этот вопрос положительный. Геометрия, в которой это так, называется геометрией Лобачевского. Оказывается, чтобы ее получить, надо вместо сферы взять псевдосферу.

Конструкция 9.3. Рассмотрим пространство \mathbb{R}_1^3 с псевдоевклидовыми координатами (x, y, z) . Псевдосфера мнимого радиуса iR (двуполостный гиперboloид) задается уравнением

$$-x^2 + y^2 + z^2 = -R^2.$$

Обозначим половинку этой псевдосферы, выделенную условием $x > 0$, через $L^2(R)$ и рассмотрим на $L^2(R)$ геометрию, в которой *прямые* — это пересечения $L^2(R)$ с плоскостями, проходящими через начало координат в \mathbb{R}_1^3 , а движения — преобразования $L^2(R)$, индуцированные преобразованиями пространства \mathbb{R}_1^3 , сохраняющими псевдоскалярное произведение и переводящими $L^2(R)$ в себя.

Определение 9.4. Поверхность $L^2(R)$ называется *плоскостью Лобачевского*, а определенная на ней геометрия — *геометрией Лобачевского*, или *гиперболической геометрией*.

Оказывается, построенная геометрия удовлетворяет всем аксиомам евклидовой геометрии, кроме аксиомы параллельности. Мы докажем только последнее.

Утверждение 9.5. Пусть ℓ — произвольная прямая на плоскости Лобачевского $L^2(R)$, и P — произвольная точка из $L^2(R)$, не лежащая на ℓ . Тогда на $L^2(R)$ существует бесконечно много прямых, проходящих через P и не пересекающих ℓ .

Доказательство. Действительно, пусть ℓ — прямая в $L^2(R)$, порожденная плоскостью \mathcal{L} , и $P \in L^2(R)$ — произвольная точка, не лежащая на ℓ . Обозначим через S множество

всех векторов из \mathcal{L} неотрицательной (псевдоевклидовой) длины. Легко видеть, что это множество не пусто и ограничено пересечением плоскости \mathcal{L} с изотропным конусом, поэтому само является невырожденным конусом с центром в начале координат (другими словами, C — это подмножество плоскости, ограниченное парой пересекающихся в начале координат прямых).

Рассмотрим произвольную прямую m' , лежащую в C , и пусть \mathcal{L}' — плоскость, проходящая через P и m' . Так как $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}' = m'$ и прямая m' не пересекает $L^2(R)$, то соответствующая плоскости \mathcal{L}' прямая ℓ' на $L^2(R)$, проходящая через P , не пересекает прямой ℓ . Из построения видно, что существует бесконечно много таких прямых ℓ' (так как имеется бесконечно много прямых m' из конуса C), что и требовалось доказать. \square

9.2 Модель Пуанкаре в круге

Для того чтобы представить себе геометрию Лобачевского более наглядно, удобно воспользоваться другими координатами на $L^2(R)$, а именно координатами стереографической проекции (см. выше).

Конструкция 9.6. Обозначим через (x, y, z) — координаты в \mathbb{R}_1^3 , причем будем предполагать, что псевдоскалярное произведение в \mathbb{R}_1^3 имеет вид $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$. Рассмотрим стереографическую проекцию плоскости Лобачевского $L^2(R)$ из южного полюса $(0, 0, -R)$ на координатную плоскость $Oxy = \Pi$, стандартные координаты на которой обозначим через (u, v) . Стереографическая проекция описана в лемме 8.30. Она переводит $L^2(R)$ во внутренность круга $D^2(R)$ радиуса R с центром в начале координат. Метрика на плоскости Лобачевского в координатах стереографической проекции, как было показано в предыдущей лекции, имеет вид

$$ds^2 = \frac{4R^4}{(R^2 - u^2 - v^2)^2} ((du)^2 + (dv)^2).$$

Определение 9.7. Круг $D^2(R)$ на плоскости с координатами (u, v) , на котором задана метрика

$$ds^2 = \frac{4R^4}{(R^2 - u^2 - v^2)^2} ((du)^2 + (dv)^2),$$

называется *моделью Пуанкаре плоскости Лобачевского в круге* или, кратко, *кругом Пуанкаре*. Окружность, ограничивающая круг $D^2(R)$, называется *абсолютом*.

Следствие 9.8. Углы между кривыми на плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре совпадают с евклидовыми углами, т.е. углами, измеренными в евклидовой метрике.

Доказательство. Это следует из конформно-евклидовой формы метрики на круге Пуанкаре. \square

Утверждение 9.9. Стереографическая проекция $\sigma: L^2(R) \rightarrow \Pi$ переводит каждую прямую Лобачевского в дугу окружности, перпендикулярную абсолюту, или в диаметр диска $D^2(R)$.

Доказательство. Доказательство получается прямым подсчетом (см. также дополнительный материал). \square

Теперь невыполнимость аксиомы параллельности становится еще более наглядной (рис. 9.1).

Замечание 9.10. Модель Пуанкаре в круге, в сущности, — это просто удобная система координат на псевдосфере. Как уже не раз отмечалось выше, в разных задачах удобны разные координаты. Поэтому естественно ожидать, что, кроме модели Пуанкаре в круге, существуют и другие стандартные модели. Для понимания некоторых из них нам понадобится понятие дробно-линейного преобразования плоскости.

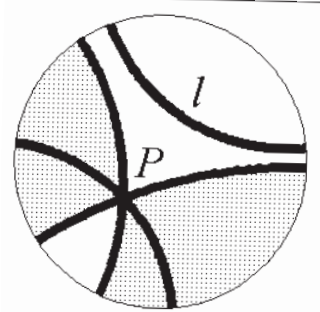


Рис. 9.1. Пятый постулат в модели Пуанкаре в круге: через точку P проходит бесконечно много прямых, параллельных прямой l .

Замечание 9.11. Геометрию Лобачевского часто называют геометрией постоянной отрицательной кривизны. Как мы уже знаем, гауссова кривизна двумерной поверхности полностью задается ее первой фундаментальной формой, т.е. метрикой, поэтому гауссова кривизна естественно определяется и для области с римановой метрикой. Оказывается, что гауссова кривизна плоскости Лобачевского, как нетрудно убедиться, проведя вычисления, например в модели Пуанкаре, постоянна и равна $-1/R^2$. Кроме того, геодезические на круге Пуанкаре — суть прямые плоскости Лобачевского (см. Дополнительный материал).

9.3 Дробно-линейные преобразования

При изучении геометрии Лобачевского оказывается очень полезным комплексный язык. Напомним необходимые конструкции.

Конструкция 9.12. Каждую точку плоскости \mathbb{R}^2 , на которой введены стандартные декартовы координаты (u, v) , можно рассматривать как комплексное число $z = u + iv$, где i — мнимая единица. Также полезна так называемая *тригонометрическая форма записи комплексного числа*, а именно, если (r, φ) — полярные координаты на \mathbb{R}^2 , то комплексное число z равно $re^{i\varphi}$, где $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

Утверждение 9.13. Арифметические операции над комплексными числами и комплексное сопряжение задают преобразования плоскости, являющиеся композициями сдвига, растяжения, осевой симметрии и инверсии относительно единичной окружности с центром в нуле.

Доказательство. Пусть $c = c_1 + ic_2$ — некоторое фиксированное комплексное число. Преобразование плоскости, ставящее в соответствие каждой точке z точку $z + c$, т.е. в явном виде

$$z = u + iv \mapsto z + c = (u + c_1) + i(v + c_2),$$

представляет собой сдвиг плоскости (т.е. параллельный перенос) на вектор s .

Далее, напомним, что комплексное число $\bar{z} = u - iv$ называется сопряженным с $z = u + iv$. Преобразование, ставящее в соответствие каждому числу z число \bar{z} , является осевой симметрией относительно координатной оси Ou .

Пусть теперь $a = r_a e^{i\varphi_a}$ — некоторое ненулевое комплексное число, записанное в тригонометрической форме. Преобразование, ставящее в соответствие каждому числу $z = r e^{i\varphi}$ число az , имеет вид

$$z = r e^{i\varphi} \mapsto az = r r_a e^{i(\varphi + \varphi_a)},$$

иными словами, полярный радиус точки z увеличивается в r_a раз (растяжение плоскости в r_a раз), а полярный угол φ изменяется на φ_a (поворот плоскости на угол φ_a вокруг начала координат). Таким образом, рассмотренное преобразование есть композиция растяжения и поворота.

Наконец, рассмотрим теперь преобразование, ставящее в соответствие каждой точке z точку $1/z$. В явном виде

$$z = r e^{i\varphi} \mapsto \frac{1}{r} e^{-i\varphi},$$

поэтому полярный радиус r меняется на $1/r$ (при сохранении полярного угла φ это — инверсия относительно стандартной единичной окружности с центром в нуле), а полярный угол меняется с φ на $-\varphi$ (осевая симметрия относительно оси u). \square

Конструкция 9.14. Пополним обычную (комплексную) плоскость $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, добавив к ней бесконечность ∞ . Для этого рассмотрим стереографическую проекцию ν сферы S^2 из северного полюса N на плоскость \mathbb{C} и отождествим точки из $S^2 \setminus N$ с их образами на плоскости, а точку N — с бесконечностью. Тем самым, расширенная комплексная плоскость $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — это вся сфера S^2 .

Определение 9.15. *Расширенной комплексной плоскостью $\bar{\mathbb{C}}$ называется сфера S^2 вместе с описанным только что отождествлением ее точек с комплексными числами.*

Конструкция 9.16. Пусть a, b, c, d — комплексные числа. Рассмотрим отображение, заданное формулой

$$\Phi: z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

Отметим, что Φ определено на всей плоскости \mathbb{C} , за исключение точки $-d/c$, в которой знаменатель дроби, стоящей в правой части, обращается в ноль. Кроме того, отображение Φ есть отображение в точку, если и только если $ad - bc = 0$ (в этом случае числитель дроби пропорционален знаменателю), поэтому, так как нас будут интересовать преобразования плоскости, мы будем предполагать, что $ad - bc \neq 0$. Доопределим Φ до отображения расширенной комплексной плоскости на себя, положив $\Phi(-d/c) = \infty$, а $\Phi(\infty) = a/c$.

Определение 9.17. Построенное отображение $\Phi: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ называется *дробно-линейным преобразованием плоскости* с матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, которая, в свою очередь, называется *матрицей дробно-линейного преобразования Φ* .

Утверждение 9.18. Каждое дробно-линейное преобразование представимо в одном из двух видов:

$$z \mapsto Az + B \quad \text{или} \quad z \mapsto \frac{A}{z + B} + C,$$

где A, B, C — некоторые комплексные числа. Поэтому каждое дробно-линейное преобразование есть или композиция поворота, растяжения и сдвига (в первом случае), или композиция сдвига, инверсии, осевой симметрии, поворота, растяжения и сдвига (во втором случае).

Доказательство. Возможны следующие два случая: $c = 0$ и $c \neq 0$. В первом случае $d \neq 0$ (матрица преобразования невырождена), поэтому

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = Az + B,$$

т.е. дробно-линейное преобразование есть композиция поворота, растяжения и сдвига. Во втором случае

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a(z + d/c) + b - ad/c}{c(z + d/c)} = \frac{A}{z + B} + C,$$

поэтому рассматриваемое преобразование есть композиция сдвига, инверсии, осевой симметрии, поворота, растяжения и сдвига. Утверждение доказано. \square

Следствие 9.19. Каждое дробно-линейное преобразование переводит прямые и окружности в прямые и окружности, а также сохраняет углы между кривыми.

Доказательство. Действительно, этими свойствами обладают все преобразования, перечисленные в утверждении 9.18, а значит и их композиции. \square

Утверждение 9.20. Множество всех дробно-линейных преобразований расширенной комплексной плоскости образует группу относительно операции композиции. В частности, дробно-линейные преобразования — действительно преобразования, т.е. взаимно однозначные отображения расширенной плоскости на себя.

Доказательство. Рассмотрим композицию $\mu \circ \nu$ двух дробно-линейных преобразований:

$$\mu : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{и} \quad \nu : z \mapsto \frac{a'z + b'}{c'z + d'}.$$

Имеем:

$$\mu \circ \nu(z) = \frac{a \frac{a'z + b'}{c'z + d'} + b}{c \frac{a'z + b'}{c'z + d'} + d} = \frac{(aa' + bc')z + ab' + bd'}{(ca' + dc')z + cb' + dd'}.$$

т.е. эта композиция также является дробно-линейным преобразованием, причем его матрица $M_{\mu \circ \nu}$ совпадает с произведением матриц $M_\mu = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и $M_\nu = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ преобразований μ и ν , $M_{\mu \circ \nu} = M_\mu M_\nu$, поэтому невырождена. Ассоциативность композиции имеет место для произвольных отображений и хорошо известна. Тожественное

преобразование $z: \mapsto z$, которое, очевидно, является дробно линейным (ему соответствует единичная матрица), представляет собой нейтральный элемент. Наконец, дробно-линейное преобразование с матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$ будет обратным для дробно-линейного преобразования с матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, поскольку матрица композиции есть произведение матриц. Таким образом, множество дробно линейных преобразований — группа. Из обратимости дробно-линейного преобразования вытекает его взаимно однозначность. Утверждение доказано. \square

Конструкция 9.21. Обозначим через $GL(2, \mathbb{C})$ группу невырожденных комплексных (2×2) -матриц. Рассмотрим отображение ψ из группы $GL(2, \mathbb{C})$ в группу дробно-линейных преобразований:

$$\psi: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right).$$

Утверждение 9.22. *Отображение ψ является эпиморфизмом (т.е. сюръективным гомоморфизмом групп). Группа дробно-линейных преобразований изоморфна группе $GL(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}^*$.*

Доказательство. Действительно, $\psi(AB) = \psi(A) \circ \psi(B)$ для любых $A, B \in GL(2, \mathbb{C})$, что мы, фактически проверили при доказательстве утверждения 9.20. Далее, если M_μ — матрица дробно линейного преобразования μ , то $\psi(M_\mu) = \mu$, поэтому ψ — сюръекция. Вычислим теперь ядро эпиморфизма ψ . Если $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ задает тождественное дробно-линейное отображение $z \mapsto z$, то

$$z = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{при всех } z, \text{ откуда } cz^2 + dz = az + b, \Rightarrow c = b = 0, a = d.$$

Итак, ядро отображения ψ состоит из всех диагональных невырожденных матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ и изоморфно группе \mathbb{C}^* всех ненулевых комплексных чисел (с операцией умножения). Остается применить теорему о гомоморфизме. Утверждение доказано. \square

Конструкция 9.23. Множество комплексных (2×2) -матриц с единичным определителем образует группу, которая, напомним, называется комплексной специальной линейной группой, обозначается через $SL(2, \mathbb{C})$ и является подгруппой в группе $GL(2, \mathbb{C})$. Обозначим через ψ' ограничение отображения ψ , описанного в конструкции 9.21, на $SL(2, \mathbb{C})$.

Имеет место следующий аналог утверждения 9.22, доказательство которого мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Утверждение 9.24. *Отображение ψ' — эпиморфизм. Группа дробно-линейных преобразований изоморфна группе $SL(2, \mathbb{C})/\{\pm E\}$, где через $E \in SL(2, \mathbb{C})$ обозначена единичная матрица, т.е. изоморфна группе $SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$.*

9.4 Запись метрики в комплексной форме

Работая с дробно-линейными (комплексными) преобразованиями плоскости, удобно уметь записывать метрику на ней в комплексной форме. Особенно удобным это оказывается в случае конформно-евклидовых метрик.

Конструкция 9.25. Пусть на плоскости со стандартными координатами u, v задана конформно-евклидова метрика $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$. Поскольку $z = u + iv$ и $\bar{z} = u - iv$, введем в рассмотрение следующие комплексные дифференциалы:

$$dz = du + i dv, \quad d\bar{z} = du - i dv.$$

Легко сосчитать, что $du^2 + dv^2 = dz d\bar{z}$, поэтому конформно-евклидова метрика $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$ в комплексном виде выглядит так:

$$ds^2 = \mu(z, \bar{z}) dz d\bar{z},$$

где функция $\mu(z, \bar{z})$ получается из $\lambda(u, v)$ подстановкой $u = (z + \bar{z})/2$, $v = (z - \bar{z})/(2i)$.

Замечание 9.26. Поясним конструкцию 9.25 более формально. Пусть \mathbb{R}^2 — стандартная плоскость с евклидовыми координатами u, v . Соответствующий базис в линейном пространстве \mathbb{R}^2 — это базис $\{\partial_u, \partial_v\}$. Рассмотрим комплексификацию \mathbb{C}^2 пространства \mathbb{R}^2 , т.е. \mathbb{C}^2 — это множество всевозможных линейных комбинаций векторов ∂_u и ∂_v , но уже с комплексными коэффициентами. Ясно, что исходное \mathbb{R}^2 — подпространство в \mathbb{C}^2 и, кроме того, $\{\partial_u, \partial_v\}$ — базис в \mathbb{C}^2 . Выберем теперь в \mathbb{C}^2 новый базис $\{\partial_z, \partial_{\bar{z}}\}$, т.е. сделаем линейную замену координат, положив

$$\partial_z = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

Если (u, v) — координаты некоторого вектора V из \mathbb{C}^2 в базисе $\{\partial_u, \partial_v\}$, то координаты (z, \bar{z}) этого вектора в базисе $\{\partial_z, \partial_{\bar{z}}\}$ имеют вид $z = u + iv$ и $\bar{z} = u - iv$. Соответствующие линейные формы dz и $d\bar{z}$ связаны с линейными формами du и dv так: $dz = du + idv$ и $d\bar{z} = du - idv$.

Далее, любая риманова метрика на плоской области, как мы знаем, — это билинейная форма, заданная в каждой точке области (на соответствующем касательном пространстве, которое отождествляется с \mathbb{R}^2). Она задает билинейную форму (комплекснозначную) на комплексификации \mathbb{C}^2 (с той же матрицей в том же исходном базисе). Именно эта форма в базисе $\{\partial_z, \partial_{\bar{z}}\}$ имеет указанный в конструкции 9.25 вид. Интересующая нас метрика — это ограничение этой формы на подпространство $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$.

Пример 9.27. Приведем примеры комплексной записи известных метрик.

(1) $ds^2 = dz d\bar{z}$ (метрика плоскости), $z = u + iv$, (u, v) — стандартные евклидовы координаты;

(2) $ds^2 = \frac{4R^4 dz d\bar{z}}{(R^2 + |z|^2)^2}$ (метрика сферы радиуса R), $z = u + iv$, (u, v) — стереографические координаты;

(3) $ds^2 = \frac{4R^4 dz d\bar{z}}{(R^2 - |z|^2)^2}$ (метрика плоскости Лобачевского $L^2(R)$ в модели Пуанкаре в круге), $z = u + iv$, (u, v) — стереографические координаты.

Утверждение 9.28. *Дробно-линейное преобразование сохраняет конформно-евклидов вид метрики. В частности, для конформно-евклидовых метрик дробно-линейные преобразования сохраняют углы между кривыми.*

Доказательство. Пусть $z = \frac{aw + b}{cw + d}$ — дробно-линейное преобразование. Тогда

$$dz = \frac{a(cw + d) - c(aw + b)}{(cw + d)^2} dw = \frac{ad - cb}{(cw + d)^2} dw, \quad d\bar{z} = \frac{\overline{ad - cb}}{(cw + d)^2} d\bar{w},$$

поэтому

$$ds^2 = \lambda dz d\bar{z} = \lambda \frac{|ad - cb|^2}{|cw + d|^4} dw d\bar{w},$$

т.е. метрика по-прежнему имеет конформно-евклидов вид, что и требовалось. \square

9.5 Модель верхней полуплоскости

Мы будем искать изометрии плоскости Лобачевского среди дробно-линейных преобразований. Для этого мы построим еще одну модель плоскости Лобачевского.

Конструкция 9.29. Выберем на плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре в круге новую систему координат. Для этого рассмотрим дробно-линейное преобразование плоскости, заданное в виде

$$w = -iR \frac{z + iR}{z - iR}.$$

Это дробно-линейное преобразование отображает круг Пуанкаре на верхнюю (открытую) полуплоскость. Чтобы проверить это, выясним сначала, куда перейдет окружность $S^1 = \{|z| = R\}$, т.е. абсолют. Так как дробно-линейные преобразования переводят прямые и окружности в прямые и окружности, то образ каждой окружности однозначно задается образами любых трех ее точек. В качестве таких точек возьмем $-R$, $-iR$ и R . Имеем:

$$\begin{aligned} -R &\mapsto -iR \frac{-R + iR}{-R - iR} = -iR \frac{-1 + i}{-1 - i} = -iR \frac{(-1 + i)(-1 + i)}{2} = -R, \\ -iR &\mapsto 0, \\ R &\mapsto -iR \frac{R + iR}{R - iR} = -iR \frac{1 + i}{1 - i} = -iR \frac{(1 + i)(1 + i)}{2} = -iR \frac{2i}{2} = R, \end{aligned}$$

поэтому абсолют переходит в вещественную координатную прямую. Отсюда следует, что внутренность круга $D^2(R)$ при рассматриваемом преобразовании переходит или в верхнюю, или в нижнюю полуплоскость. Но поскольку точка $0 \in D^2(R)$ переходит в точку iR , внутренность $D^2(R)$ переходит именно в верхнюю полуплоскость. Из следствия 9.19 вытекает, что прямые модели Пуанкаре переходят в окружности и прямые, перпендикулярные вещественной оси.

Утверждение 9.30. В модели верхней полуплоскости метрика Лобачевского имеет вид

$$ds^2 = R^2 \frac{du^2 + dv^2}{v^2} = -\frac{4R^2 dw d\bar{w}}{(w - \bar{w})^2},$$

где $w = u + iv$ — соответствующая комплексная координата.

Доказательство. Доказательство получается прямым подсчетом, аналогичным приведенному в доказательстве утверждения 9.28, см. также дополнительный материал. \square

Определение 9.31. Верхняя полуплоскость $v > 0$ с метрикой $ds^2 = (du^2 + dv^2)/v^2$, где u, v — стандартные координаты на плоскости, называется *моделью Пуанкаре плоскости Лобачевского в верхней полуплоскости*.

9.6 Изометрии плоскости Лобачевского

Опишем дробно-линейные преобразования плоскости, являющиеся изометриями плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости. Для простоты в дальнейших вычислениях положим $R = 1$.

Определение 9.32. Дробно-линейное преобразование называется *вещественным*, если все коэффициенты a, b, c и d его матрицы вещественны.

Утверждение 9.33. *Вещественное дробно-линейное преобразование сохраняет верхнюю полуплоскость, если и только если матрица этого преобразования имеет положительный определитель.*

Доказательство. Действительно, вещественная ось переходит, очевидно, в вещественную ось, поэтому достаточно вычислить мнимую часть образа такого преобразования, чтобы понять, на какую именно полуплоскость отображается верхняя полуплоскость. Имеем

$$\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} \left(\frac{aw + b}{cw + d} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{ac|w|^2 + bd + adw + bc\bar{w}}{|cw + d|^2} \right) = \frac{(ad - bc) \operatorname{Im} w}{|cw + d|^2},$$

поэтому, для любого w , такого, что $\operatorname{Im} w > 0$, условие $\operatorname{Im} z > 0$ выполнено, если и только если $ad - bc > 0$, что и требовалось. \square

Замечание 9.34. На самом деле, не сложно показать, что любое дробно-линейное преобразование, сохраняющее верхнюю полуплоскость, может быть представлено в виде вещественного с положительным определителем. Обычно это утверждение доказывают в курсе теории функций комплексного переменного.

Утверждение 9.35. *Множество всех вещественных дробно-линейных преобразований с положительным определителем образует группу, изоморфную $SL(2, \mathbb{R})/\{\pm E\}$, где E — единичная матрица.*

Доказательство. Действительно, группа $SL(2, \mathbb{R})$ является подгруппой в $SL(2, \mathbb{C})$, образ ограничения ψ'' на нее гомоморфизма ψ' из утверждения 9.24 состоит из вещественных дробно-линейных преобразований с определителем 1. С другой стороны, если $z = \frac{aw + b}{cw + d}$ — вещественное преобразование с положительным определителем Δ , то поделив числитель и знаменатель на вещественное число $\sqrt{\Delta}$, мы не изменим наше преобразование, однако превратим матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ в вещественную матрицу с единичным определителем, поэтому образ ψ'' — это множество всех вещественных дробно-линейных преобразований с положительным определителем. Поэтому последнее образует группу, изоморфную фактор-группе по ядру $\{\pm E\}$ гомоморфизма ψ'' , что и требовалось. \square

Утверждение 9.36. *Вещественные дробно-линейные преобразования, сохраняющие верхнюю полуплоскость, являются движениями плоскости Лобачевского.*

Доказательство. Рассмотрим такое дробно-линейное преобразование $z = \frac{aw + b}{cw + d}$, т.е., в силу утверждения 9.35, преобразование с матрицей из $SL(2, \mathbb{R})$. Так как

$$ds^2 = -\frac{4dz d\bar{z}}{(z - \bar{z})^2},$$

то

$$ds^2 = -\frac{4\frac{a(cw + d) - c(aw + b)}{(cw + d)^2}dw \frac{a(c\bar{w} + d) - c(a\bar{w} + b)}{(c\bar{w} + d)^2}d\bar{w}}{\left(\frac{aw + b}{cw + d} - \frac{a\bar{w} + b}{c\bar{w} + d}\right)^2}.$$

Последнее выражение преобразуем к виду

$$-\frac{4\frac{ad - cb}{(cw + d)^2} \frac{ad - cb}{(c\bar{w} + d)^2}dw d\bar{w}}{\left(\frac{(aw + b)(c\bar{w} + d) - (cw + d)(a\bar{w} + b)}{(cw + d)(c\bar{w} + d)}\right)^2} = -\frac{4\frac{(ad - cb)^2}{|cw + d|^4}}{\left(\frac{(ad - bc)(w - \bar{w})}{|cw + d|^2}\right)^2}$$

и получим

$$ds^2 = -\frac{4dw d\bar{w}}{(w - \bar{w})^2},$$

что и требовалось доказать. \square

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 9.37. *Группа всех движений плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости содержит подгруппу, состоящую из вещественных дробно-линейных преобразований, сохраняющих верхнюю полуплоскость. Эта подгруппа изоморфна группе $SL(2, \mathbb{R})/\{E, -E\}$.*

Замечание 9.38. Чтобы получить полную группу движений плоскости Лобачевского в модели верхней полуплоскости, надо добавить еще композиции только что описанных вещественных дробно-линейных преобразований с осевой симметрией $z \mapsto -\bar{z}$.

9.7 Задачи

Задача 9.39. Доказать, что если $w = f(z)$ — дробно-линейное отображение, то для любых четырех точек z, z_1, z_2, z_3 и их образов w, w_1, w_2, w_3 выполняется следующее равенство:

$$\frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} = \frac{w - w_1}{w - w_3} : \frac{w_2 - w_1}{w_2 - w_3}.$$

Иными словами, двойное отношение

$$\frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}$$

сохраняется при дробно-линейных преобразованиях. Вывести отсюда, что любые три различные точки можно перевести в любые другие три различные точки с помощью некоторого дробно-линейного преобразования, причем такое преобразование единственно.

Задача 9.40. Задайте дробно-линейное преобразование $z \mapsto -z$ матрицей из $\text{SL}(2, \mathbb{C})$.

Задача 9.41. Сколько неподвижных точек может иметь в вещественное дробно-линейное преобразование с положительным определителем? Как они расположены?

Задача 9.42. Доказать, что отрезок прямой на плоскости Лобачевского между точками A и B есть кратчайшая кривая, соединяющая эти точки.

Задача 9.43. Расстояние между точками на плоскости Лобачевского — это длина отрезка прямой Лобачевского между этими точками. Найти расстояние между точками на плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре и в модели верхней полуплоскости.

Задача 9.44. Как выглядят окружности на плоскости Лобачевского? Вычислить длину окружности и площадь круга радиуса ρ на плоскости Лобачевского (радиус понимается в смысле метрики на плоскости Лобачевского).

Задача 9.45. Пусть ABC — треугольник на плоскости Лобачевского; α, β, γ — величины углов при вершинах A, B, C ; a, b, c — длины сторон BC, AC, AB . Доказать две теоремы косинусов:

$$\begin{aligned} \text{ch } c &= \text{ch } a \text{ ch } b - \text{sh } a \text{ sh } b \cos \gamma, \\ \cos \gamma &= -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \text{ch } c. \end{aligned}$$

Доказать теорему синусов на плоскости Лобачевского:

$$\frac{\text{sh } a}{\sin \alpha} = \frac{\text{sh } b}{\sin \beta} = \frac{\text{sh } c}{\sin \gamma}.$$

Задача 9.46. Во всякий ли треугольник на плоскости Лобачевского можно вписать окружность? Всякий ли треугольник на плоскости Лобачевского можно описать окружностью?

9.8 Дополнительный материал

9.8.1 Свойства стереографической проекции

Проверим, что стереографическая проекция $\sigma: L^2(R) \rightarrow \Pi$ переводит каждую прямую Лобачевского в дугу окружности, перпендикулярную абсолюту, или в диаметр диска $D^2(R)$, т.е. докажем утверждение 9.9.

Пусть ℓ — прямая на плоскости Лобачевского, полученная пересечением плоскости Лобачевского $L^2(R)$ с плоскостью \mathcal{L} , проходящей через начало координат. Если \mathcal{L} проходит через северный полюс $N = (0, 0, R)$, то южный полюс S и все прямые, соединяющие S и точки из ℓ , лежат в плоскости \mathcal{L} , поэтому стереографический образ прямой ℓ есть диаметр диска $D^2(R)$, полученный пересечением плоскости \mathcal{L} и $D^2(R)$, проходящей через центр круга $D^2(R)$.

Пусть теперь ℓ не проходит через северный полюс N . Пусть плоскость \mathcal{L} задается уравнением $ax + by + cz = 0$. Из сделанных выше предположений следует, что c отлично от нуля. Подставляя в это уравнение выражение для x , y и z через стереографические координаты u и v , получаем

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= a \frac{2R^2 u}{R^2 - u^2 - v^2} + b \frac{2R^2 v}{R^2 - u^2 - v^2} + cR \frac{R^2 + u^2 + v^2}{R^2 - u^2 - v^2} = \\ &= \frac{2aR^2 u + 2bR^2 v + cR(R^2 + u^2 + v^2)}{R^2 - u^2 - v^2} = 0, \end{aligned}$$

откуда, разделив на $cR \neq 0$, имеем

$$\begin{aligned} 2 \frac{aR}{c} u + 2 \frac{bR}{c} v + (R^2 + u^2 + v^2) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(u + \frac{aR}{c} \right)^2 + \left(v + \frac{bR}{c} \right)^2 &= R^2 \left(\frac{a^2 + b^2}{c^2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Последнее уравнение задает некоторую окружность \bar{S}^1 в плоскости Π . Радиус R абсолюта S^1 , радиус $R\sqrt{(a^2 + b^2)/c^2 - 1}$ окружности \bar{S}^1 и расстояние между центрами окружностей S^1 и \bar{S}^1 , т.е. $R\sqrt{(a^2 + b^2)/c^2}$, образуют пифагорову тройку: сумма квадратов радиусов равна квадрату расстояния между центрами. Поэтому рассматриваемые окружности ортогональны, что и требовалось доказать.

9.8.2 Метрика в модели верхней полуплоскости

Докажем утверждение 9.30. Напомним, что дробно-линейное преобразование, переводящее круг Пуанкаре в верхнюю полуплоскость, можно записать, как $w = -iR \frac{z + iR}{z - iR}$, а метрика Лобачевского в модели Пуанкаре

имеет (в комплексной форме) вид $ds^2 = \frac{4R^4 dz d\bar{z}}{(R^2 - |z|^2)^2}$.

Найдем обратное дробно-линейное преобразование, переводящее модель верхней полуплоскости в модель Пуанкаре. В силу утверждения 9.22, обратное преобразование задается обратной матрицей и поэтому имеет вид:

$$z = iR \frac{-R - iw}{R - iw} = iR \frac{w - iR}{w + iR}.$$

Отсюда получаем:

$$dz = -\frac{2R^2}{(w + iR)^2} dw, \quad d\bar{z} = -\frac{2R^2}{(\overline{w + iR})^2} d\bar{w}, \quad dz d\bar{z} = \frac{4R^4 dw d\bar{w}}{|w + iR|^4}.$$

Далее,

$$(R^2 - |z|^2)^2 = R^4 \left(1 - \frac{w - iR}{w + iR} \frac{\overline{w - iR}}{\overline{w + iR}} \right)^2 = -\frac{4R^6 (w - \bar{w})^2}{|w + iR|^4},$$

поэтому

$$ds^2 = \frac{4R^4 dz d\bar{z}}{(R^2 - |z|^2)^2} = -\frac{16R^8 dw d\bar{w}}{4R^6 (w - \bar{w})^2 |w + iR|^4} = -\frac{4R^2 dw d\bar{w}}{(w - \bar{w})^2} = R^2 \frac{du^2 + dv^2}{v^2}.$$

9.8.3 Геодезические на плоскости Лобачевского

В этом разделе опишем геодезические на плоскости Лобачевского. Так как отражение относительно вертикальной прямой является изометрией плоскости Лобачевского в модели верхней полуплоскости и соответствующий вертикальный луч состоит из неподвижных точек этой изометрии, то, в силу утверждения 6.36, каждый вертикальный луч является геодезической на плоскости Лобачевского в модели верхней полуплоскости. Далее, так как каждая прямая на плоскости Лобачевского может быть переведена изометрией в вертикальный луч, то каждая прямая на плоскости Лобачевского является геодезической. Сославшись на теорему существования и единственности геодезических, получаем следующий результат.

Предложение 9.47. *Геодезические на плоскости Лобачевского в модели верхней полуплоскости суть прямые Лобачевского в этой модели, и только они.*

Производя подходящую замену координат, получаем следствие.

Следствие 9.48. *Геодезические на плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре суть прямые Лобачевского в этой модели, и только они. Геодезические на псевдосфере чисто мнимого радиуса в метрике, индуцированной из объемлющего пространства Минковского, суть сечения двумерными плоскостями, проходящими через начало координат.*

Упражнение 9.49. Для каждой прямой Лобачевского в модели верхней полуплоскости найдите изометрию, оставляющую на месте все точки этой прямой.

9.8.4 Движения плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре в круге

Чтобы описать движения плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре, достаточно сделать замену координат. Приведем соответствующий результат.

Дробно-линейные преобразования, сохраняющие единичный круг, являются движениями метрики Лобачевского в модели Пуанкаре. Матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ таких преобразований удовлетворяют условиям

$$|a|^2 - |c|^2 = 1, \quad |b|^2 - |d|^2 = -1, \quad a\bar{b} - c\bar{d} = 0$$

и поэтому записываются в виде

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \text{где } |a|^2 - |b|^2 = 1.$$

Группа таких матриц обозначается через $SU(1, 1)$.

Другое удобное представление дробно-линейных преобразований, сохраняющих единичный круг, —

$$z \mapsto e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad |z_0| < 1.$$

Чтобы получить полную группу движений плоскости Лобачевского, необходимо добавить сопряжение $z \mapsto \bar{z}$.

Упражнение 9.50. Для каждой прямой Лобачевского в модели Пуанкаре найдите изометрию, оставляющую на месте все точки этой прямой.

9.8.5 Расстояние между точками на плоскости Лобачевского

Приведем ряд фактов, иллюстрирующих метрические соотношения на плоскости Лобачевского.

Упражнение 9.51. Рассмотрим модель Пуанкаре $D^2(R)$. Пусть O центр круга $D^2(R)$. Диаметры круга $D^2(R)$, по определению, являются прямыми в геометрии Лобачевского. Показать, что прямолинейный отрезок OA в метрике Лобачевского имеет длину

$$l_L = 2R \operatorname{arctanh} \frac{l_E}{R},$$

где $l_E = |OA|$ — евклидова длина отрезка OA .

Упражнение 9.52. Показать, что длина окружности радиуса ρ с центром в точке O на плоскости Лобачевского $L^2(R)$ равна $2\pi R \operatorname{sh}(\rho/R)$.

Упражнение 9.53. Рассмотрим модель верхней полуплоскости. Пусть P_1 и P_2 — точки на верхней полуплоскости, имеющие полярные координаты (r_0, φ_i) , $i = 1, 2$. Через P_1 и P_2 проходит единственная прямая на плоскости Лобачевского, которая совпадает с координатной линией $r = r_0$ полярных координат. Показать, что длина отрезка P_1P_2 прямой на плоскости Лобачевского может быть вычислена по формуле

$$|P_1P_2|_L = \log \left(\frac{\operatorname{th}(\varphi_2/2)}{\operatorname{th}(\varphi_1/2)} \right).$$

Упражнение 9.54. Пусть P_1 и P_2 — точки на верхней полуплоскости, лежащие на одной вертикальной прямой, и пусть (x_i, y_i) — их декартовы координаты. Показать, что длина отрезка P_1P_2 прямой на плоскости Лобачевского может быть вычислена по формуле

$$|P_1P_2|_L = \log \left(\frac{y_2}{y_1} \right).$$

Упражнение 9.55. Вычислить длину отрезка прямой на плоскости Лобачевского, соединяющего любые две точки P_1 и P_2 верхней полуплоскости.

9.8.6 Треугольники на плоскости Лобачевского

Соотношения между элементами треугольника на плоскости Лобачевского в целом аналогичны имеющимся на евклидовой плоскости, хотя вид конкретных формул довольно сильно отличается. Докажем здесь несколько характерных утверждений и приведем ряд задач, позволяющих получить более полное представление о геометрии Лобачевского. Всюду ниже длину единственного отрезка прямой на плоскости Лобачевского, соединяющего две фиксированных точки A и B , вычисленную в метрике Лобачевского, будем обозначать через $|AB|_L$. Отметим также, что при доказательстве разных утверждений удобно пользоваться разными моделями геометрии Лобачевского.

Предложение 9.56 (Неравенство треугольника). Пусть ABC — произвольный треугольник на плоскости Лобачевского. Тогда имеет место следующее неравенство:

$$|AB|_L + |BC|_L \geq |AC|_L.$$

Доказательство. Проведем доказательство непосредственно на псевдосфере S_1^2 радиуса iR в \mathbb{R}_1^3 . Прямым на плоскости Лобачевского, напомним, соответствуют плоские сечения половинки псевдосферы $S_1^2(x^1 > 0)$ плоскостями, проходящими через нуль. Пусть A и B — произвольные точки на этой половине псевдосферы. Обозначим через e_A и e_B соответствующие векторы в \mathbb{R}_1^3 . Рассмотрим плоскость Π_{AB} , проходящую через нуль и точки A и B .

Поскольку псевдоскалярный квадрат векторов e_A и e_B равен $-R^2$, псевдоскалярное произведение, индуцированное на Π_{AB} из \mathbb{R}_1^3 , — индефинитно и невырождено, поэтому Π_{AB} — это \mathbb{R}_1^2 . Ясно, что на Π_{AB} , как и на любой плоскости Минковского, можно сделать такую линейную замену координат, сохраняющую псевдоскалярное произведение, что в новых координатах, которые обозначим через (x, y) , псевдоскалярное произведение запишется в виде $-dx^2 + dy^2$. Пересечение плоскости Π_{AB} с псевдосферой чисто мнимого радиуса iR — это псевдо-окружность того же радиуса iR , которая в координатах (x, y) имеет вид $-x^2 + y^2 = -R^2$.

Пусть вектор e_A имеет координаты (x_A, y_A) , а вектор e_B — (x_B, y_B) . Вычислим длину дуги гиперболы между точками A и B . Для этого параметризуем гиперболу в виде $x(\chi) = R \operatorname{ch} \chi$, $y(\chi) = R \operatorname{sh} \chi$, положим $x_A = R \operatorname{ch} \chi_A$, $y_A = R \operatorname{sh} \chi_A$, $x_B = R \operatorname{ch} \chi_B$, $y_B = R \operatorname{sh} \chi_B$ и $\chi_B > \chi_A$. Тогда

$$\begin{aligned} |AB|_L &= \int_{\chi_A}^{\chi_B} \sqrt{-R^2(\operatorname{sh} \chi)^2 + R^2(\operatorname{ch} \chi)^2} d\chi = \\ &= R(\chi_B - \chi_A) = R(\operatorname{arcch}(x_B/R) - \operatorname{arcch}(x_A/R)). \end{aligned}$$

Теперь, воспользовавшись тем, что $\operatorname{ch}(\alpha - \beta) = \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta$, а также основным гиперболическим тождеством $\operatorname{sh} \alpha = \sqrt{(\operatorname{ch} \alpha)^2 - 1}$, получим:

$$\operatorname{ch} \left(\frac{|AB|_L}{R} \right) = \frac{x_A x_B}{R^2} - \frac{\sqrt{x_A^2 - R^2} \sqrt{x_B^2 - R^2}}{R^2} = \frac{x_A x_B - y_A y_B}{R^2} = \frac{-\langle e_A, e_B \rangle}{R^2},$$

где через $\langle e_A, e_B \rangle$ обозначено псевдоскалярное произведение векторов e_A и e_B . Поэтому

$$|AB|_L = R \operatorname{arcch} \left(\frac{-\langle e_A, e_B \rangle}{R^2} \right).$$

Полученный нами результат имеет и самостоятельный интерес. Напомним, что поскольку $\cos(x/i) = \operatorname{ch} x$, то предыдущее соотношение можно переписать в виде

$$\cos \left(\frac{|AB|_L}{iR} \right) = \frac{\langle e_A, e_B \rangle}{(iR)^2}.$$

Предложение 9.57. Косинус отношения длины дуги AB псевдо-окружности к ее радиусу равен псевдоскалярному произведению радиус-векторов точек A и B , деленному на квадрат радиуса окружности. В этом смысле отношение длины дуги окружности к радиусу может играть роль меры угла между радиус-векторами концевых точек этой дуги.

Вернемся к доказательству утверждения. Пусть A , B и C — произвольные точки на половине $S_1^2(x^1 > 0)$ псевдосферы и e_A , e_B и e_C — соответствующие векторы из \mathbb{R}_1^3 . Из только что полученной формулы следует, что неравенство треугольника эквивалентно соотношению

$$\operatorname{arcch}\left(\frac{-\langle e_A, e_B \rangle}{R^2}\right) + \operatorname{arcch}\left(\frac{-\langle e_B, e_C \rangle}{R^2}\right) \geq \operatorname{arcch}\left(\frac{-\langle e_A, e_C \rangle}{R^2}\right).$$

Отметим, что все попарные скалярные произведения временноподобных векторов e_A , e_B и e_C отрицательны, поэтому, применяя к последнему неравенству функцию ch и воспользовавшись формулой гиперболического косинуса суммы, получим следующее эквивалентное неравенство:

$$\langle e_A, e_B \rangle \langle e_B, e_C \rangle + \sqrt{\langle e_A, e_B \rangle^2 - R^4} \sqrt{\langle e_B, e_C \rangle^2 - R^4} \geq -R^2 \langle e_A, e_C \rangle,$$

которое можно переписать в виде

$$\sqrt{\langle e_A, e_B \rangle^2 - R^4} \sqrt{\langle e_B, e_C \rangle^2 - R^4} \geq -R^2 \langle e_A, e_C \rangle - \langle e_A, e_B \rangle \langle e_B, e_C \rangle.$$

Возводя обе части в квадрат, имеем

$$\begin{aligned} \langle e_A, e_B \rangle^2 \langle e_B, e_C \rangle^2 - R^4 \langle e_A, e_B \rangle^2 - R^4 \langle e_B, e_C \rangle^2 + R^8 \geq \\ \geq R^4 \langle e_A, e_C \rangle^2 + \langle e_A, e_B \rangle^2 \langle e_B, e_C \rangle^2 + 2R^2 \langle e_A, e_C \rangle \langle e_A, e_B \rangle \langle e_B, e_C \rangle \end{aligned}$$

или, приводя подобные, перенося все в одну сторону и сокращая на R^2 ,

$$0 \geq -R^6 + 2\langle e_A, e_C \rangle \langle e_A, e_B \rangle \langle e_B, e_C \rangle + R^2 \langle e_A, e_C \rangle^2 + R^2 \langle e_A, e_B \rangle^2 + R^2 \langle e_B, e_C \rangle^2.$$

Осталось заметить, что последнее выражение совпадает с определителем матрицы Грамма системы векторов (e_A, e_B, e_C) . Знак этого определителя не меняется при замене координат, поэтому он отрицателен. Тем самым неравенство треугольника доказано. \square

Упражнение 9.58. Показать, что длина прямолинейного отрезка, соединяющего две любые фиксированные точки на плоскости Лобачевского, меньше длины любой другой кривой, соединяющей эти точки.

Следующее утверждение, как несложно проверить, эквивалентно наличию бесконечного числа прямых, проходящих через фиксированную точку и параллельных данной прямой.

Предложение 9.59. Сумма углов произвольного треугольника ABC на плоскости Лобачевского строго меньше π .

Доказательство. Проще всего провести доказательство в модели Пуанкаре на круге. Действительно, сначала совместим с помощью движения плоскости Лобачевского одну из вершин треугольника с центром круга. Ясно, что сумма углов при этом не изменится. Теперь очевидно (рис. 9.2), что сумма углов треугольника на плоскости Лобачевского меньше, чем сумма углов евклидова треугольника с теми же вершинами (мы воспользовались тем, что углы в метрике Лобачевского совпадают с евклидовыми углами). Доказательство закончено.

Оказывается, на плоскости Лобачевского существует связь между суммой углов треугольника и его площадью. \square

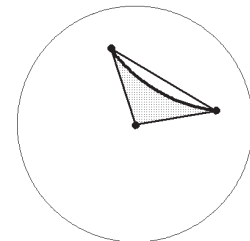


Рис. 9.2. Сумма углов треугольника на плоскости Лобачевского меньше π .

Предложение 9.60. Пусть ABC — произвольный треугольник на плоскости Лобачевского $L^2(R)$ и α , β , γ — его углы в вершинах A , B , C . Тогда, если S — площадь треугольника ABC , то $S = R^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma)$.

Доказательство. Воспользуемся теперь моделью на верхней полуплоскости. Напомним, что площадь области в римановой метрике — это интеграл по этой области от корня из определителя матрицы метрики. На верхней полуплоскости определитель метрики равен R^4/y^4 , поэтому следует интегрировать функцию R^2/y^2 .

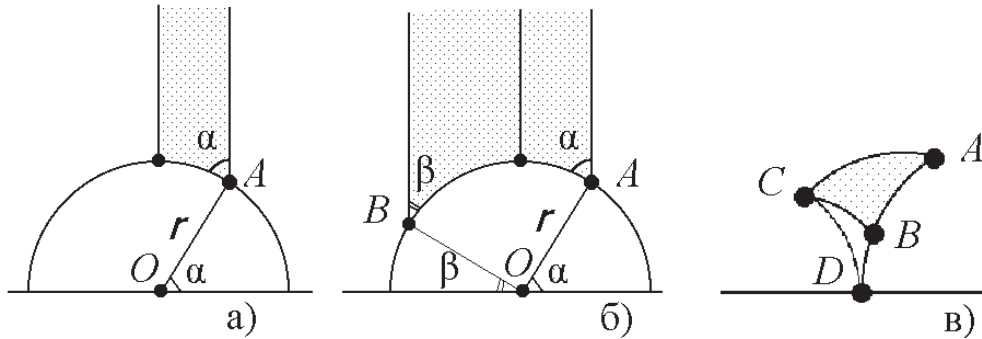


Рис. 9.3: Вычисление площади треугольников: с углами α , $\pi/2$, 0 (а), с углами α , β и 0 (б), с произвольными углами (в).

Докажем сначала требуемое равенство для треугольника с углами α , $\pi/2$ и 0. Для этого движением плоскости Лобачевского переведем параллельные стороны рассматриваемого треугольника в параллельные оси ординат лучи, причем будем предполагать, что один из этих лучей лежит на самой оси ординат (рис. 9.3). Обозначив через r евклидов радиус окружности и заметив, что угол между радиусом этой окружности, проходящим в вершину A , и осью ординат равен α , получим требуемое:

$$S = \int_0^{r \cos \alpha} dx \int_{\sqrt{r^2 - x^2}}^{\infty} \frac{R^2 dy}{y^2} = R^2 \int_0^{r \cos \alpha} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = R^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right).$$

Пусть теперь углы треугольника ABC — суть α , β и 0. Без ограничения общности можно предполагать, что стороны этого треугольника параллельны оси ординат. Пусть для определенности параллельные стороны AC и BC треугольника ABC лежат по разные стороны от вертикального луча, перпендикулярного соответствующей стороне AB окружности (см. рис. 9.3). Площадь этого треугольника складывается из площадей двух треугольников, углы которых равны соответственно α , $\pi/2$, 0 и β , $\pi/2$, 0. Поэтому для площади такого треугольника имеем:

$$S = R^2(\pi - \pi/2 - \alpha) + R^2(\pi - \pi/2 - \beta) = R^2(\pi - \alpha - \beta),$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что вершина треугольника с нулевым углом может лежать и на вещественной оси. Действительно, треугольник с вершиной на вещественной оси в точке a переводится в треугольник с вершиной на бесконечности изометрией плоскости Лобачевского вида $w(z) = -1/(z - a)$ (проверьте, что это изометрия).

Рассмотрим, наконец, треугольник общего вида. Продолжим одну из сторон треугольника, скажем AB , за точку B до пересечения с абсолютом в точке D и проведем луч CD (см. рис. 9.3). Тогда треугольники ACD и CBD имеют нулевой угол в точке D . Обозначим угол CBD через δ , а угол BCD — через ε . Искомая площадь S треугольника ABC может быть найдена, как разность площадей треугольников ACD и CBD :

$$S = R^2(\pi - \alpha - (\gamma + \varepsilon)) - R^2(\pi - \varepsilon - \delta) = R^2(\pi - \alpha - (\pi - \delta) - \gamma) = R^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma).$$

Таким образом, утверждение полностью доказано. \square

Тема 10

Топологические пространства и непрерывные отображения

В этой лекции мы начнем знакомство с общей топологии — части математики, которая изучает наиболее общие свойства геометрических объектов, не меняющиеся при непрерывных преобразованиях. Понятие непрерывности знакомо нам из математического анализа. В основе его лежит, на самом деле, некое представление об “окрестности” элемента рассматриваемого множества. В математическом анализе окрестность элемента (точки) определяется с помощью функции расстояния. В общей топологии понятие окрестности определяется наиболее общим образом с помощью специальной дополнительной структуры — так называемой топологии.

10.1 Топологические пространства

В данном разделе мы даем определения основных объектов, изучаемых в общей топологии, — топологических пространств, а также непрерывных отображений таких пространств.

10.1.1 Топология и топологическое пространство

Определение 10.1. Пусть X — произвольное множество и $\tau = \{U_\alpha\}$ — некоторое семейство подмножеств множества X . Семейство τ называется *топологией*, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

- (1) само пространство X и пустое множество принадлежат τ ;
- (2) объединение любого семейства множеств из τ принадлежит τ ;
- (3) пересечение любого конечного семейства множеств из τ также принадлежит τ .

Определение 10.2. Множество X с фиксированной топологией τ называется *топологическим пространством* и обозначается через (X, τ) . Элементы множества X

называются *точками*. Множества из τ называются *открытыми* в (X, τ) . Подмножество F топологического пространства называется *замкнутым*, если его дополнение $X \setminus F$ открыто.

Определение 10.3. *Окрестностью точки x* топологического пространства (X, τ) будем называть произвольное открытое подмножество U , т.е. $U \in \tau$, содержащее x .

Замечание 10.4. Ниже, там, где из контекста понятно, о какой именно топологии идет речь, мы часто будем обозначать топологическое пространство (X, τ) просто через X .

Пример 10.5. Пусть X — произвольное множество. Семейство τ_d , состоящее из всех подмножеств множества X , является, очевидно, топологией. Эта топология называется *дискретной*, а само пространство — *дискретным топологическим пространством*. Каждое подмножество дискретного топологического пространства является одновременно и открытым и замкнутым. Любое подмножество дискретного топологического пространства является окрестностью каждой своей точки. В частности, каждая точка является своей окрестностью.

Пример 10.6. Семейство $\tau_0 = \{X, \emptyset\}$ является топологией на X . Эта топология называется *тривиальной*. Каждая точка топологического пространства (X, τ_0) обладает единственной окрестностью — множеством X . Каждое собственное (т.е. не совпадающее со всем X и не пустое) подмножество в X не является ни открытым, ни замкнутым.

10.1.2 Метрические пространства

Метрические пространства являются важным частным случаем топологических пространств. Напомним соответствующие определения.

Определение 10.7. Пусть X — произвольное множество. *Метрикой*, или *функцией расстояния* на X , называется неотрицательная вещественная функция ρ , определенная на декартовом произведении $X \times X$ и обладающая следующими свойствами:

- (1) $\rho(x, y) = 0$, если и только если $x = y$ (невырожденность);
- (2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для любых x и y из X (симметричность);
- (3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ для любых точек x, y, z из X (неравенство треугольника).

Определение 10.8. Множество X вместе с введенной на нем метрикой ρ называется *метрическим пространством* и обозначается через (X, ρ) . Элементы метрического пространства называются *точками*. Значение $\rho(x, y)$ метрики ρ на паре точек x и y называется *расстоянием между точками*.

Замечание 10.9. Часто для краткости, там где вид функции расстояния понятен из контекста, мы будем обозначать метрическое пространство (X, ρ) просто через X .

Пример 10.10. Пусть $X = \mathbb{R}^n$. Положим

$$\rho_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x^i - y^i|^p},$$

где $x = (x^1, \dots, x^n)$ и $y = (y^1, \dots, y^n)$ — точки из \mathbb{R}^n , а $p \in (0, +\infty)$. Функция ρ_p удовлетворяет аксиомам метрики. При $p = 2$ она называется *евклидовой метрикой* на \mathbb{R}^n .

Пример 10.11. Пусть $X = C[a, b]$ — множество непрерывных функций на отрезке $[a, b]$. Положим

$$\rho^0(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|,$$

где f и g — произвольные элементы из $C[a, b]$. Несложно проверить, что ρ^0 удовлетворяет аксиомам метрики. Поэтому пара $(C[a, b], \rho^0)$ — метрическое пространство. Метрика ρ^0 называется *метрикой равномерной сходимости*.

Определение 10.12. Пусть x — произвольная точка метрического пространства (X, ρ) . *Открытым шаром с центром в x радиуса ε* называется множество всех точек y из X , таких, что $\rho(x, y) < \varepsilon$. Точка a множества $A \subset X$ называется *внутренней точкой для A* , если в A содержится некоторый открытый шар $O_\varepsilon(a)$. Множество всех внутренних точек множества A называется *внутренностью множества A* и обозначается через $\text{int } A$. Множество A называется *открытым в X* (как в метрическом пространстве), если его внутренность совпадает с ним самим: $A = \text{int } A$.

Утверждение 10.13. Пусть (X, ρ) — произвольное метрическое пространство. Объединение любого семейства множеств, открытых в X , открыто в X , и пересечение конечного числа множеств, открытых в X , также открыто в X .

Доказательство. Действительно, пусть $\{A_\alpha\}$ — произвольное семейство открытых подмножеств пространства X . Обозначим через A объединение всех множеств A_α , и пусть a — произвольная точка множества A . Тогда существует такое α_0 , что $a \in A_{\alpha_0}$, а множество A_{α_0} — открыто по условию. Поэтому существует открытый шар $O_\varepsilon(a)$, целиком лежащий в A_{α_0} . Но тогда $O_\varepsilon(a) \subset A$, и, значит, каждая точка множества A — внутренняя, т.е., по определению, A — открыто.

Пусть теперь α пробегает конечное число значений: $\alpha = 1, \dots, N$. Обозначим через A' пересечение всех множеств A_α , и пусть a — произвольная точка из A' . Тогда $a \in A_\alpha$ для каждого $\alpha = 1, \dots, n$. Поэтому для каждого α существует такое ε_α , что шар $O_{\varepsilon_\alpha}(a)$ целиком лежит в A_α . Положим $\varepsilon = \min_\alpha \varepsilon_\alpha$ и заметим, что $\varepsilon > 0$, так как набор множеств A_α конечен. Тогда $O_\varepsilon(a) \subset O_{\varepsilon_\alpha}(a)$ для любого α , и поэтому $O_\varepsilon(a) \subset A'$, т.е. каждая точка a из A' является внутренней для A' . Доказательство закончено. \square

Следствие 10.14. Семейство всех открытых подмножеств метрического пространства образуют топологию.

Определение 10.15. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Топология из следствия 10.14, т.е. топология, состоящая из всех открытых подмножеств множества X (открытых как в метрическом пространстве), называется *метрической* или *порожденной метрикой ρ* и обозначается через τ_ρ .

Пример 10.16. На произвольном не пустом множестве X рассмотрим функцию расстояния, равную 1 на любой паре различных элементов из X . Несложно проверить, что соответствующая метрическая топология совпадает с дискретной топологией на множестве X . Поэтому дискретная топология является метрической.

Упражнение 10.17. Сколько различных топологий можно ввести на множестве X , состоящем из двух элементов? Каждая ли из них является метрической?

Замечание 10.18. В метрическом пространстве понятие замкнутого множества можно естественно определить с помощью метрики. Напомним соответствующую конструкцию и покажем, что она эквивалентна топологической.

Конструкция 10.19. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $A \subset X$ — произвольное его подмножество. Точка $x \in X$ называется *точкой прикосновения множества A* , если любой открытый шар $O_\varepsilon(x)$ пересекается с A . В частности, каждая точка $a \in A$ является точкой прикосновения множества A , хотя обратное неверно.

Замыканием \bar{A} подмножества A называется множество всех точек прикосновения множества A . Ясно, что $A \subset \bar{A}$; обратное, вообще говоря, неверно. Если замыкание \bar{A} множества A совпадает с самим A , т.е. $\bar{A} = A$, то множество A называется *замкнутым в X* .

Пример 10.20. Пусть $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$. Множество всех точек прикосновения интервала (a, b) — это отрезок $[a, b]$. В частности, a и b — точки прикосновения множества (a, b) . Поэтому замыкание (a, b) совпадает с отрезком $[a, b]$.

Утверждение 10.21. Пусть (X, ρ) — некоторое метрическое пространство. Подмножество $A \subset X$ является открытым, если и только если его дополнение, т.е. множество $X \setminus A$, замкнуто.

Доказательство. Пусть сначала A — открыто. Рассмотрим произвольную точку $a \in A$. По определению, существует открытый шар $O_\varepsilon(a)$, целиком лежащий в A . Но тогда этот шар не пересекается с $X \setminus A$, поэтому a не является точкой прикосновения множества $X \setminus A$. Но тогда $\overline{X \setminus A} = X \setminus A$, т.е. дополнение до A замкнуто в X .

Обратно: пусть теперь множество $X \setminus A$ замкнуто в X . Это означает, что никакая точка из A не является точкой прикосновения для $X \setminus A$. Пусть a — произвольная точка из A . Тогда существует открытый шар $O_\varepsilon(a)$ не пересекающийся с $X \setminus A$ и, значит, этот шар целиком лежит в A . Последнее означает, что каждая точка из A является внутренней для A , т.е. A открыто. Доказательство закончено. \square

10.1.3 Топологическая внутренность и топологическое замыкание

Используя понятие окрестности точки, можно перенести понятие внутренности и замыкания со случая метрического пространства на общий случай топологического пространства.

Определение 10.22. Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Точка a множества $A \subset X$ называется *внутренней точкой для A* , если в A содержится некоторая окрестность U точки a . Множество всех внутренних точек множества A называется *внутренностью множества A* и обозначается через $\text{int } A$.

Точка $x \in X$ называется *точкой прикосновения множества $A \subset X$* , если любая окрестность точки x пересекается с A . *Замыканием \bar{A}* множества A называется множество всех его точек.

Утверждение 10.23. Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Множество $A \subset X$ является открытым, если и только если $\text{int } A = A$. Множество $A \subset X$ является замкнутым, если и только если $\bar{A} = A$.

Доказательство. Каждое открытое множество само является окрестностью каждой своей точки, поэтому совпадает со своей внутренностью. Обратно, если каждая точка множества A является внутренней, то для каждой точки $a \in A$ существует открытое множество $U(a) \subset A$, содержащее a . Возьмем объединение $U = \cup_{a \in A} U(a)$. По определению, U — открыто. Кроме того, так как каждое $U(a) \subset A$, то само множество U содержится в A . В то же время $A \subset U$, так как каждая точка $a \in U(a)$. Поэтому $U = A$ и, в частности, A — открыто.

Далее, множество A — замкнуто, если и только если $X \setminus A$ открыто. Последнее, как мы только что показали, равносильно тому, что каждая точка из $X \setminus A$ обладает окрестностью, не пересекающейся с A , что, в свою очередь, равносильно включению $\bar{A} \subset A$, т.е. $\bar{A} = A$. Доказательство закончено. \square

Следствие 10.24. Пусть A — произвольное подмножество топологического пространства (X, ρ) . Тогда внутренность $\text{int } A$ множества A открыта, а замыкание \bar{A} множества A — замкнуто.

10.2 Непрерывные отображения

Определение 10.25. Отображение $f: X \rightarrow Y$ топологического пространства (X, τ_X) в топологическое пространство (Y, τ_Y) называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любой окрестности $V(f(x_0)) \in \tau_Y$ точки $f(x_0)$ в пространстве Y существует такая окрестность $U(x_0) \in \tau_X$ точки x_0 в пространстве X , что $f(U(x_0)) \subset V(f(x_0))$. Отображение f называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Пример 10.26. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства. Превратим их в топологические пространства, наделив стандартными метрическими топологиями. Тогда определение непрерывности принимает следующий стандартный для метрических пространств вид. Отображение $f: X \rightarrow Y$ метрических пространств называется непрерывным в точке x_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что $f(U_\delta(x_0)) \subset V_\varepsilon(f(x_0))$, т.е. из $\rho_X(x_0, x) < \delta(\varepsilon)$ следует, что $\rho_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.

Пример 10.27. Еще один важный частный случай — это отображения топологического пространства X в числа. Такие отображения называют *функциями*. Функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая зависящая от ε окрестность $U(x_0)$ этой точки в пространстве X , что для любой точки x из $U(x_0)$ имеет место неравенство $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$.

Теорема 10.28. Отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно, если и только если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

- прообраз любого открытого множества $A \subset Y$ открыт в X ;
- прообраз любого замкнутого множества замкнут.

Доказательство. Пусть сначала f непрерывно. Рассмотрим произвольное открытое множество $A \subset Y$ и обозначим через $f^{-1}(A)$ его прообраз при отображении f . Пусть $x \in f^{-1}(A)$ — произвольная точка из прообраза; обозначим через $y = f(x)$ образ точки x при отображении f . Тогда y принадлежит открытому множеству A . Возьмем A в качестве окрестности точки y : $V(y) = A$. Так как отображение f непрерывно в точке x , то существует окрестность $U(x)$ точки x , такая, что $f(U(x)) \subset V(y) = A$, но тогда $U(x) \subset f^{-1}(A)$, и множество $f^{-1}(A)$ открыто по утверждению 10.23.

Обратно, пусть прообраз произвольного открытого подмножества из Y открыт в X . Фиксируем произвольную точку $x \in X$, и пусть, как и выше, $y = f(x)$. Рассмотрим произвольную окрестность $V(y)$ точки Y . По определению, $V(y)$ — открытое множество, значит, $f^{-1}(V(y))$ — открытое подмножество в X , причем $x \in f^{-1}(V(y))$. Выберем в качестве окрестности $U(x)$ точки x множество $f^{-1}(V(y))$. Тогда $f(U(x)) \subset V(y)$, поэтому отображение f непрерывно в произвольной точке x , что и требовалось доказать.

Для завершения доказательства утверждения осталось показать, что сформулированные в нем условия непрерывности эквивалентны. Это немедленно следует из соотношения $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$, справедливого для произвольного множества $A \subset Y$ и отображения f . Доказательство закончено. \square

Замечание 10.29. Вообще говоря, образ открытого (замкнутого) множества при непрерывном отображении не обязан быть открытым (замкнутым). Приведите соответствующие примеры.

Следствие 10.30. *Композиция непрерывных отображений непрерывна.*

Упражнение 10.31. Описать все непрерывные отображения из произвольного топологического пространства X в пространство с тривиальной топологией. Описать все непрерывные отображения из пространства с дискретной топологией в произвольное топологическое пространство.

Определение 10.32. Пусть (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) — топологические пространства. Взаимно-однозначное непрерывное отображение $\varphi: X_1 \rightarrow X_2$ называется *гомеоморфизмом* пространств X_1 и X_2 , если обратное отображение также непрерывно. Если существует гомеоморфизм пространств X_1 и X_2 , то сами пространства называются *гомеоморфными*. Отображение $\varphi: X_1 \rightarrow X_2$ называется *вложением* X_1 в X_2 , если оно задает гомеоморфизм между X_1 и $\varphi(X_1) \subset X_2$. Свойство пространства называется *топологическим*, если оно сохраняется при гомеоморфизме.

Упражнение 10.33. Показать, что следующие подпространства \mathbb{R}^1 попарно не гомеоморфны: интервал (a, b) , полуинтервал $(a, b]$, отрезок $[a, b]$.

Упражнение 10.34. Привести пример топологических пространств X и Y , таких, что существуют непрерывные взаимно-однозначные отображения f и g , где $f: X \rightarrow Y$, и $g: Y \rightarrow X$, однако пространства X и Y не гомеоморфны.

10.3 Стандартные конструкции

В данном разделе приводятся примеры стандартных конструкций, позволяющих строить новые примеры топологических пространств из уже имеющихся.

Конструкция 10.35. Пусть (X, τ) — топологическое пространство, и Y — произвольное его подмножество. Положим $\tau_Y = \{U \cap Y \mid U \in \tau\}$. Легко проверить, что τ_Y является топологией на множестве Y .

Определение 10.36. Топологическое пространство (Y, τ_Y) называется *подпространством* в (X, τ) , а топология τ_Y — *индуцированной (из пространства X) топологией*.

Пример 10.37. Рассмотрим плоскость \mathbb{R}^2 как топологическое пространство с топологией τ , порожденной евклидовой метрикой (именно такая топология рассматривается по умолчанию на евклидовых пространствах), фиксируем на плоскости стандартные декартовы координаты (x, y) . Подмножество S^1 , заданное уравнением $x^2 + y^2 = 1$, с индуцированной топологией называется *окружностью*.

Упражнение 10.38. Рассмотрим плоскость \mathbb{R}^2 и на ней — треугольник T (замкнутую ломаную из трех звеньев) с индуцированной топологией. Проверьте, что треугольник T гомеоморфен окружности S^1 .

Пример 10.39. Рассмотрим плоскость \mathbb{R}^2 , фиксируем на плоскости стандартные декартовы координаты, и пусть Y — объединение координатных осей. Тогда каждая окрестность начала координат в индуцированной топологии τ_Y содержит объединение двух открытых интервалов, каждый из которых — окрестность нуля на своей координатной оси.

Упражнение 10.40. Пусть (X, τ) — топологическое пространство, и $i: Y \rightarrow X$ тождественное вложение подмножества $Y \subset X$ в множество X . Покажите, что i — непрерывное отображение из (Y, τ_Y) в (X, τ) .

Конструкция 10.41. Пусть (X, τ) — топологическое пространство и $\varphi: X \rightarrow M$ — некоторое отображение X на множество M . Положим $\tau_\varphi = \{U \subset M \mid \varphi^{-1}(U) \in \tau\}$. Несложно показать, что τ_φ задает на M топологию.

Определение 10.42. Говорят, что топология τ_φ *порождена* отображением φ или *перенесена с X на M с помощью отображения φ* .

Упражнение 10.43. Показать, что отображение $\varphi: X \rightarrow M$ топологического пространства (X, τ) в пространство (M, τ_φ) непрерывно.

Определение 10.44. Пусть (X, τ_X) и (Y, τ_Y) — топологические пространства, причем X и Y не имеют общих точек. Множество $X \cup Y$ с топологией $\tau = \tau_X \cup \tau_Y$ называется *несвязной суммой топологических пространств X и Y* .

Конструкция 10.45. Рассмотрим два топологических пространства — (X, τ_X) и (Y, τ_Y) . Напомним, что *декартовым произведением множеств X и Y* называется множество всевозможных упорядоченных пар (x, y) , где $x \in X$ и $y \in Y$. Превратим множество $X \times Y$ в топологическое пространство. Множество $U \subset X \times Y$ назовем *открытым*, если и только если оно представимо в виде объединения некоторого семейства множеств вида $U \times V$, где $U \in \tau_X$, а $V \in \tau_Y$. Легко проверить, что определенное нами семейство открытых множеств удовлетворяет аксиомам топологии.

Определение 10.46. Построенная только что топология обозначается через $\tau_X \times \tau_Y$ и называется *топологией прямого произведения*.

Замечание 10.47. Это определение легко обобщается на случай декартова произведения любого конечного семейства топологических пространств.

Упражнение 10.48. Пусть $\pi: X \times Y \rightarrow X$ — стандартная проекция декартова произведения на сомножитель, т.е. $\pi: (x, y) \mapsto x$. Показать, что отображение X — непрерывно.

Упражнение 10.49. Рассмотрим два экземпляра X и Y вещественной прямой со стандартной метрической топологией. Поверьте, что в этом случае топология прямого произведения совпадает с обычной метрической топологией на плоскости.

Конструкция 10.50. Пусть X — топологическое пространство с топологией τ , на котором задано некоторое отношение эквивалентности \sim . Обозначим через X/\sim множество классов эквивалентности, и пусть $\pi: X \rightarrow X/\sim$ — стандартная проекция, переводящая элемент $x \in X$ в содержащий его класс эквивалентности. Тогда проекция π порождает на X/\sim некоторую топологию τ_π (см. конструкцию 10.41).

Определение 10.51. Топология τ_π называется *фактор-топологией*, а пространство $(X/\sim, \tau_\pi)$ — *фактор-пространством*.

Упражнение 10.52. Показать, что стандартная проекция π пространства на фактор-пространство непрерывна.

Пример 10.53. Пусть $X = [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$ — отрезок с топологией индуцированной топологией вещественной прямой. Зададим на X отношение эквивалентности σ , объявив эквивалентными точки 0 и 2π (все остальные точки отрезка эквивалентны только сами себе). Тогда топологическое пространство $[0, 2\pi]/\sigma$ естественным образом отождествляется с окружностью S^1 из примера 10.37.

10.4 Задачи

Задача 10.54. Перечислите все топологии на множестве из двух элементов. Приведите пример топологии на множестве из трех элементов, отличной от дискретной и антидискретной. Приведите пример такого семейства подмножеств множества X из трех элементов, которое содержит пустое множество, все X , но не является топологией.

Задача 10.55. Пусть топологическое пространство X представлено в виде объединения двух своих замкнутых подмножеств F_1 и F_2 . Показать, что отображение f пространства X в произвольное топологическое пространство Y непрерывно, если и только если ограничение f на каждое из F_i , $i = 1, 2$, непрерывно.

Задача 10.56. Докажите, что если M и N — два подмножества топологического пространства, то:

- (1) $M \subset N$ влечет $\overline{M} \subset \overline{N}$;
- (2) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$;
- (3) $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$;
- (4) приведите пример, когда $\overline{M \cap N} \neq \overline{M} \cap \overline{N}$;
- (5) $M \subset N$ влечет $\text{int } M \subset \text{int } N$;
- (6) $\text{int}(\text{int } M) = \text{int } M$;
- (7) $\text{int}(M \cap N) = \text{int } M \cap \text{int } N$;
- (8) приведите пример, когда $\text{int}(M \cup N) \neq \text{int } M \cup \text{int } N$;
- (9) докажите, что

$$\partial M = (\overline{M} \setminus M) \cup (M \setminus \text{int } M) = (\overline{M} \setminus M) \cup (M \cap \overline{CM}),$$

где через CM обозначено дополнение множества M .

Задача 10.57. Привести пример непрерывного взаимно-однозначного соответствия, не являющегося гомеоморфизмом со своим образом.

Задача 10.58. Положим $\partial X = \overline{X} \setminus \text{int } X$. Показать, что $\partial(X \times Y) = (\partial X \times Y) \cup (X \times \partial Y)$.

Задача 10.59. Доказать, что отрезок и буква “Г” (как подмножество плоскости, на которой она нарисована) не гомеоморфны.

Задача 10.60. Гомеоморфны ли буквы “Г” и “X” (как подмножества плоскости)?

10.5 Дополнительный материал

10.5.1 Примеры метрических пространств

Приведем ряд стандартных примеров метрических пространств.

Пример 10.61. Пусть $X = \mathbb{R}^n$. Расстояние между точками

$$x = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{и} \quad y = (y_1, \dots, y_n)$$

из \mathbb{R}^n может быть определено многими способами. Приведем два из них, отличающиеся от стандартного евклидова расстояния:

$$\rho_\infty(x, y) = \max_i \{|x_i - y_i|\};$$

$$\rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad \text{— манхеттенское расстояние.}$$

Нетрудно показать, что функции ρ_1 и ρ_∞ являются метриками на \mathbb{R}^n , поэтому и (\mathbb{R}^n, ρ_1) , и $(\mathbb{R}^n, \rho_\infty)$ — метрические пространства.

Пример 10.62. Пусть $X = C^k[a, b]$, $0 \leq k \leq \infty$, — множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$. Положим

$$\rho^k(f, g) = \max_{0 \leq n \leq k} \max_{t \in [a, b]} |f^{(n)}(t) - g^{(n)}(t)|,$$

где f и g — произвольные элементы из $C^k[a, b]$ и $f^{(n)}$ — производная n -го порядка. Определенная так функция ρ^k удовлетворяет аксиомам метрики. Поэтому пара $(C^k[a, b], \rho^k)$ — метрическое пространство.

Пример 10.63. Пусть A — произвольное непустое подмножество метрического пространства X с метрикой ρ . Обозначим через ρ_A ограничение функции $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ на множество $A \times A$. Ясно, что ρ_A удовлетворяет аксиомам метрики. Метрическое пространство (A, ρ_A) называется *подпространством* пространства X , а метрика ρ_A — *индуцированной* метрикой.

10.5.2 Свойства метрических пространств

Докажем следующий результат.

Предложение 10.64. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда шаровая окрестность $O_\varepsilon(x)$ произвольной точки $x \in X$ является открытым множеством.

Доказательство. Пусть y — произвольная точка из $O_\varepsilon(x)$. Тогда, по определению, $\rho(x, y) < \varepsilon$, поэтому существует такое число $\delta > 0$, что $\rho(x, y) + \delta < \varepsilon$. Для доказательства утверждения достаточно проверить, что шаровая окрестность $O_\delta(y)$ точки y целиком содержится в $O_\varepsilon(x)$. Действительно, пусть z — произвольная точка из $O_\delta(y)$. Тогда в силу неравенства треугольника

$$\rho(z, x) \leq \rho(z, y) + \rho(y, x) < \delta + \rho(x, y) < \varepsilon,$$

т.е. $z \in O_\varepsilon(x)$, что и требовалось доказать. \square

Наконец, оказывается, что операции замыкания и взятия внутренности, определенные выше на подмножествах метрического пространства, естественным образом согласованы с понятиями открытых и замкнутых множеств.

Предложение 10.65. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и A — его произвольное подмножество. Тогда множество \bar{A} замкнуто, а множество $\text{int } A$ — открыто.

Доказательство. Покажем сначала, что $\text{int } A$ — открыто. Каждая точка a из $\text{int } A$ обладает окрестностью $O_\varepsilon(a)$, целиком лежащей в A . Но тогда $\text{int}(O_\varepsilon(a)) \subset \text{int } A$, а в силу утверждения 10.64 $\text{int}(O_\varepsilon(a)) = O_\varepsilon(a)$, поэтому множество $\text{int}(A)$ содержит шаровую окрестность своей точки a и, следовательно, открыто.

Далее, точка x из X не принадлежит замыканию \bar{A} множества A , если и только если $\rho(x, A) = \varepsilon > 0$, поэтому $X \setminus \bar{A} = \text{int}(X \setminus A)$, а последнее множество открыто. Тогда, в силу утверждения 10.21, множество \bar{A} — замкнуто. Доказательство закончено. \square

10.5.3 Примеры топологических пространств

Приведем еще несколько стандартных конструкций топологических пространств.

Пример 10.66. Пусть $X \cup Y$ — несвязная сумма топологических пространств X и Y . Предположим, что фиксированы точки x_0 в X и y_0 в Y . Зададим на множестве $X \cup Y$ отношение эквивалентности, положив $x_0 \sim y_0$. Тогда фактор-пространство X/\sim называется *связной суммой*, или *букетом пространств X и Y* по точкам $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$. Это пространство обозначают через $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$, или просто $X \vee Y$.

Пример 10.67. Пусть Y — подпространство топологического пространства X . Зададим на X отношение эквивалентности, положив $x_1 \sim x_2$, если и только если $x_i \in Y$. Говорят, что фактор-пространство X/\sim получено из X *факторизацией по множеству Y* . Это пространство часто обозначают через X/Y . Например, если D^n — стандартный замкнутый диск в \mathbb{R}^n , а S^{n-1} — его граничная сфера, то $D^n/\partial D^n$ — стандартная n -мерная сфера S^n .

Пример 10.68. Пусть $K = [-1, 1] \times [-1, 1]$ — квадрат. Отождествляя граничные точки разными способами, получим хорошо известные пространства, а именно отождествляя точки вида:

- $(-1, t)$ и $(1, t)$, получаем цилиндр;
- $(-1, t)$ и $(1, -t)$, получаем лист Мебиуса;
- $(-1, t)$ и $(1, t)$, а также $(s, -1)$ и $(s, 1)$, получаем тор;
- $(-1, t)$ и $(1, t)$, а также $(s, -1)$ и $(-s, 1)$, получаем бутылку Клейна;
- $(-1, t)$ и $(1, -t)$, а также $(s, -1)$ и $(-s, 1)$, получаем проективную плоскость.

Напомним, что проективная плоскость определяется как множество всех прямых в \mathbb{R}^3 , проходящих через 0. Так как каждая такая прямая пересекает стандартную сферу S^2 в точности по двум точкам вида x и $-x$, проективную плоскость можно рассматривать как фактор-пространство, полученное из сферы S^2 отождествлением точек x и $-x$. Последнее эквивалентно фактор-пространству, полученному из замкнутой полусферы отождествлением диаметрально противоположных точек экватора. Осталось применить естественный гомеоморфизм квадрата K на замкнутую полусферу, переводящий симметричные относительно начала координат точки в симметричные.

Тема 11

Классы топологических пространств

Среди огромного разнообразия топологических пространств естественно выделить некоторые классы, обладающие специальными топологически инвариантными свойствами. В данной лекции рассматриваются некоторые из таких классов.

11.1 Связность

Определение 11.1. Топологическое пространство X называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся непустых подмножеств A_1 и A_2 , каждое из которых является открытым в X . Если такое представление возможно, пространство X называется *несвязным*.

Замечание 11.2. Если $X = A_1 \cup A_2$, где A_i — открытые подмножества в X , и $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, то каждое A_i является дополнением открытого множества A_j , $j \neq i$, и поэтому замкнуто в X . Такие одновременно открытые и замкнутые подмножества топологического пространства иногда называют *открыто-замкнутыми*.

Определение 11.3. Подмножество A топологического пространства X называется *связным*, если связным является топологическое пространство A с топологией, индуцированной из X .

Утверждение 11.4. Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ — *связен*.

Доказательство. Предположим противное, и пусть $[a, b] = A \cup B$, где множества A и B открыты, непусты и не пересекаются. Предположим для определенности, что $a \in A$. Рассмотрим множество всех таких ε , что полуинтервал $[a, a + \varepsilon)$ содержится в A , и пусть ε_0 — точная верхняя грань этого множества. Тогда, так как A — открыто, $\varepsilon_0 > 0$. Поскольку множество A замкнуто, точка $a + \varepsilon_0$ принадлежит A . Но тогда, если только $a + \varepsilon_0 \neq b$, существует открытый интервал $(a + \varepsilon_0 - \delta, a + \varepsilon_0 + \delta)$, целиком лежащий в A , и поэтому полуинтервал $[a, a + (\varepsilon_0 + \delta))$ содержится в A , что противоречит выбору ε_0 .

Поэтому $a + \varepsilon_0 = b$. Но тогда $A = [a, b]$ и множество B пусто. Полученное противоречие завершает доказательство. \square

Упражнение 11.5. Показать, что интервал (a, b) связан.

Упражнение 11.6. Пусть $X \cup Y$ — несвязная сумма произвольных топологических пространств. Показать, что пространство $X \cup Y$ несвязно.

Упражнение 11.7. Показать, что букет (см. пример 10.66) связанных топологических пространств по любой паре точек является связным.

Приведем несколько утверждений, позволяющих проверять связность топологического пространства.

Утверждение 11.8. Пусть некоторое топологическое пространство X представлено в виде объединения своих подмножеств X_α , каждое из которых связно. Предположим, что пересечение $\bigcap_\alpha X_\alpha$ непусто. Тогда пространство X связно.

Доказательство. Предположим противное, т.е. $X = A \cup B$, где A и B — открыты, непусты, причем $A \cap B = \emptyset$. Тогда каждое X_α можно представить в виде $X_\alpha = (X_\alpha \cap A) \cup (X_\alpha \cap B)$. Однако, так как по условию X_α связно, то или $X_\alpha \cap A = \emptyset$, или $X_\alpha \cap B = \emptyset$, т.е. каждое из X_α целиком лежит или в A , или в B . В то же время, так как A и B не пусты, существуют $X_{\alpha_0} \subset A$ и $X_{\alpha_1} \subset B$. Однако $A \cap B = \emptyset$, поэтому и $X_{\alpha_0} \cap X_{\alpha_1} = \emptyset$, что противоречит условию. Утверждение доказано. \square

Определение 11.9. Максимальное по включению связное подпространство пространства X называется его *связной компонентой* или *компонентой связности*.

Упражнение 11.10. Покажите, что связные компоненты пространства X попарно не пересекаются и являются замкнутыми подмножествами пространства X .

Замечание 11.11. Связные компоненты не обязаны быть открытыми подмножествами. В качестве примера достаточно рассмотреть подмножество X вещественной прямой, полученное из отрезка $[0, 1]$ выбрасыванием последовательности $\{1/n\}$. Тогда $\{0\} \subset X$ — связная компонента пространства X .

Упражнение 11.12. Показать, что пространство X связно, если и только если каждое его открыто-замкнутое подмножество или пусто, или совпадает со всем X .

Упражнение 11.13. Сколько компонент связности имеет пространство X , наделенное дискретной топологией?

Утверждение 11.14. Предположим, что в топологическом пространстве X для каждой пары его различных точек (x, y) найдется связное подмножество C_{xy} , содержащее x и y . Тогда пространство X связно.

Доказательство. Предположим противное, и пусть $X = A \cup B$, где A и B — открыты, непусты, причем $A \cap B = \emptyset$. Выберем точки $a \in A$, $b \in B$ и рассмотрим связное множество C_{ab} , содержащее a и b . Однако множество C_{ab} разлагается в объединение двух своих непустых, открытых и непересекающихся подмножеств $C_{ab} \cap A$ и $C_{ab} \cap B$, что противоречит связности C_{ab} . Доказательство закончено. \square

Утверждение 11.15. *Образ связного подмножества топологического пространства при непрерывном отображении связан.*

Доказательство. В самом деле, если образ $Y = f(X)$ связного множества X при непрерывном отображении f несвязен, то, по определению, $Y = A \cup B$, где A и B — открыты, непусты и не пересекаются. Но тогда $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, причем множества $f^{-1}(A)$ и $f^{-1}(B)$ непусты, открыты и не пересекаются, т.е. X несвязно. Полученное противоречие и завершает доказательство. \square

Следствие 11.16. *Связность топологического пространства — топологический инвариант, т.е. сохраняется при гомеоморфизмах.*

Следствие 11.17 (Теорема Вейерштрасса). *Непрерывная функция, заданная на связном топологическом пространстве X , принимает все промежуточные значения.*

Доказательство. Действительно, если, скажем, значение y_0 не принимается непрерывной функцией $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, но принимаются некоторые значения больше и меньше y_0 , то образ $f(X)$ распадается в объединение двух открытых, непустых, непересекающихся подмножеств $f(X) \cap (y_0, +\infty)$ и $f(X) \cap (-\infty, y_0)$. Последнее противоречит утверждению 11.15. Следствие доказано. \square

Часто удобно пользоваться другим, более сильным понятием связности.

Определение 11.18. Топологическое пространство X называется *линейно связным*, если любые две точки из X можно соединить непрерывной кривой, т.е. для любых x и y из X существует непрерывное отображение $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$, такое, что $\gamma(0) = x$ и $\gamma(1) = y$.

В силу утверждения 11.14 каждое линейно связное пространство является связным. Обратное, вообще говоря, неверно.

Упражнение 11.19. Рассмотрим замыкание X в плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$ графика функции $y = \sin(1/x)$. Ясно, что X состоит из графика функции $y = \sin(1/x)$ и вертикального отрезка, соединяющего точки $(0, -1)$ и $(0, 1)$. Показать, что пространство X (топология индуцирована из \mathbb{R}^2) связно, но не линейно связно.

11.2 Аксиомы отделимости

Определение 11.20. Две различные точки топологического пространства X называются *отделимыми*, если у них существуют непересекающиеся окрестности. Более общо, два произвольных подмножества A_1 и A_2 топологического пространства называются *отделимыми*, если у них существуют непересекающиеся окрестности, т.е. непересекающиеся открытые множества U_1 и U_2 , такие, что $A_i \subset U_i$, $i = 1, 2$.

Определение 11.21. Топологическое пространство X называется *хаусдорфовым*, если любые его две различные точки отделимы.

Пример 11.22. Рассмотрим множество X , состоящее из двух элементов x и y , и зададим на X топологию, положив $\tau = \{\emptyset, X, \{x\}\}$. Очевидно, точки x и y из X неотделимы, так как точка y обладает единственной окрестностью X .

Конструкция 11.23. Пусть X — произвольное бесконечное множество. Зададим на X топологию, объявив замкнутыми все возможные конечные подмножества из X и само множество X . Полученная топология называется *топологией Зарисского*.

Упражнение 11.24. Проверьте, что топология Зарисского — действительно топология. Докажите, что полученное топологическое пространство не является хаусдорфовым.

Пример 11.25. Топологическое пространство X , наделенное дискретной топологией, хаусдорфово.

Утверждение 11.26. *Каждая точка хаусдорфова пространства является его замкнутым подмножеством.*

Доказательство. Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство и x — произвольная точка из X . Так как любая точка $y \in X \setminus \{x\}$ отделима от x , т.е. существует открытое множество U_y , содержащее y и не содержащее x , то множество $X \setminus \{x\}$ представимо в виде $\cup_{y \neq x} U_y$ и поэтому открыто в X . Следовательно, $\{x\}$ — замкнуто. Доказательство закончено. \square

Упражнение 11.27. Пусть X и Y — хаусдорфовы топологические пространства. Показать, что их декартово произведение, несвязная сумма и букет также являются хаусдорфовыми.

Упражнение 11.28. Является ли хаусдорфовость топологическим инвариантом?

Определение 11.29. Топологическое пространство называется *нормальным*, если оно хаусдорфово, и, более того, любые его два непересекающихся замкнутых подмножества отделимы.

Класс нормальных пространств достаточно широк.

Утверждение 11.30. *Каждое метрическое пространство нормально.*

Доказательство. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Покажем сначала, что топологическое пространство (X, τ_ρ) , где τ_ρ — соответствующая метрическая топология, хаусдорфово. Действительно, для произвольных различных точек x и y пространства X рассмотрим открытые шары $O_\varepsilon(x)$ и $O_\varepsilon(y)$, где $\varepsilon = \rho(x, y)/3$. Из неравенства треугольника следует, что эти шары не пересекаются, что и доказывает хаусдорфовость пространства X .

Пусть теперь A_1, A_2 — два произвольных непересекающихся замкнутых подмножества в X . Для каждой точки x из множества A_1 выберем число $\varepsilon(x) > 0$, положив $\varepsilon(x) = (1/3)\rho(x, A_2)$. Аналогично для каждой точки y из A_2 определим число $\varepsilon'(y) = (1/3)\rho(y, A_1)$. Построим открытые множества U_1 и U_2 , положив

$$U_1 = \cup_{x \in A_1} O_{\varepsilon(x)}(x), \quad U_2 = \cup_{y \in A_2} O_{\varepsilon'(y)}(y).$$

Очевидно, $U_i \supset A_i, i = 1, 2$. Покажем, что U_1 и U_2 не пересекаются. Действительно, пусть существует $z \in U_1 \cap U_2$. Тогда имеются такие $x \in A_1$ и $y \in A_2$, что $z \in O_{\varepsilon(x)}(x)$ и $z \in O_{\varepsilon'(y)}(y)$. Но тогда

$$\rho(z, x) < (1/3)\rho(x, A_2) \leq (1/3)\rho(x, y),$$

$$\rho(z, y) < (1/3)\rho(y, A_1) \leq (1/3)\rho(y, x).$$

Складывая последние два неравенства, получаем

$$\rho(y, z) + \rho(z, x) < (2/3)\rho(y, x),$$

что противоречит неравенству треугольника. Утверждение доказано. \square

Упражнение 11.31. Является ли нормальность топологическим инвариантом?

11.3 Компактность

Определение 11.32. Система открытых множеств $\{U_\alpha\}$ топологического пространства X называется *открытым покрытием пространства X* , если $\cup_\alpha U_\alpha = X$.

Определение 11.33. Топологическое пространство называется *компактным* или *компактом*, если всякое его открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ содержит конечное покрытие $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^N$ этого пространства. Подмножество Y топологического пространства называется *компактным*, если подпространство Y — компактное пространство.

Пример 11.34. Отрезок $[a, b]$ в топологии, индуцированной из \mathbb{R}^1 , компактен, а интервал (a, b) — нет.

Пример 11.35. Каждое замкнутое ограниченное подмножество метрического пространства \mathbb{R}^n компактно (теорема Бореля).

Приведем несколько полезных свойств компактных пространств.

Утверждение 11.36. *Замкнутое подмножество компактного топологического пространства компактно.*

Доказательство. Действительно, пусть $\{V_\alpha\}$ — произвольное открытое покрытие замкнутого подмножества A компактного топологического пространства X . Тогда каждое V_α — это пересечение некоторого открытого в X множества U_α со множеством A . Набор открытых множеств $\{U_\alpha\} \cup \{X \setminus A\}$ образует открытое покрытие пространства X , из которого можно выбрать конечное подпокрытие $\{U_{\alpha_k}\} \cup \{X \setminus A\}$. Но тогда конечная система множеств $\{V_{\alpha_k}\}$ образует конечное подпокрытие множества A . Утверждение доказано. \square

Утверждение 11.37. *Каждое хаусдорфово компактное топологическое пространство нормально.*

Доказательство. Пусть X — хаусдорфово компактное пространство, A — произвольное замкнутое подмножество в X и x — точка из X , не лежащая в A . Покажем, что $\{x\}$ и A отделимы в X . Действительно, в силу хаусдорфовости пространства X , для каждой точки $a \in A$ существуют окрестности $U(a)$ точки a и $V(x, a)$ точки x (вообще говоря, зависящая от a), такие, что $U(a) \cap V(x, a) = \emptyset$. Семейство $U(a)$ образует

открытое покрытие множества A , в котором, в силу утверждения 11.36, можно выбрать конечное подпокрытие $\{U(a_k)\}_{k=1}^N$. Поэтому окрестность $\bigcap_{k=1}^N V(x, a_k)$ точки x определена и не пересекается с содержащим A открытым множеством $\bigcup_{k=1}^N U(a_k)$.

Рассмотрим теперь два произвольных непересекающихся замкнутых множества A_1 и A_2 в компактном пространстве X . Как мы только что доказали, для любой точки $a \in A_1$ существуют открытая окрестность $U(a)$ точки a и содержащее множество A_2 открытое множество V_a , такие, что $U(a) \cap V_a = \emptyset$. Семейство $\{U(a)\}$ образует открытое покрытие замкнутого множества A_1 , в котором, в силу утверждения 11.36, можно выделить конечное подпокрытие $\{U(a_k)\}_{k=1}^N$. Поэтому определено открытое множество $\bigcap_{k=1}^N V_{a_k}$, содержащее множество A_2 и не пересекающееся с содержащим множеством A_1 открытым множеством $\bigcup_{k=1}^N U(a_k)$. Утверждение доказано. \square

Вообще говоря, компактное подпространство топологического пространства не является замкнутым (сравните с утверждением 11.36). Однако имеет место следующий результат.

Утверждение 11.38. Пусть A — компактное подпространство в хаусдорфовом пространстве X . Тогда A — замкнуто.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку x из $X \setminus A$. Достаточно показать, что x не является точкой прикосновения для A . В силу хаусдорфовости пространства X , для каждой точки a из A существуют окрестности $U(a)$ точки a и $V(x, a)$ точки x , такие, что $U(a) \cap V(x, a) = \emptyset$. Семейство $\{U(a)\}$ образует открытое покрытие компакта A , поэтому в нем можно выделить конечное подпокрытие $\{U(a_k)\}_{k=1}^N$. Следовательно, определена открытая окрестность $\bigcap_{k=1}^N V(x, a_k)$ точки x , которая не пересекается со множеством A , т.е. $x \notin \bar{A}$. Утверждение доказано. \square

Компактность пространства является топологическим инвариантом. А именно, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 11.39. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение компактного топологического пространства X в произвольное топологическое пространство Y . Тогда образ $f(X)$ компактен в Y .

Доказательство. Действительно, рассмотрим произвольное открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ множества $f(X)$. Тогда система множеств $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ образует открытое покрытие пространства X . В силу компактности X в ней можно выделить конечное подпокрытие, образ которого и даст искомое конечное покрытие для $f(X)$. Доказательство закончено. \square

Непрерывные функции на компактных пространствах обладают теми же свойствами, что и непрерывные функции на отрезке.

Следствие 11.40 (Теорема Вейерштрасса–Коши). Функция, непрерывная на компактном топологическом пространстве X , ограничена и принимает наибольшее и наименьшее значения.

Доказательство. В силу утверждения 11.39 образ $f(X)$ функции f компактен, а в силу утверждения 11.38 — замкнут. Если бы образ $f(X)$ не был бы ограничен, то система открытых интервалов $U_n = (-n, n)$ покрывала бы $f(X)$, но не содержала бы конечного подпокрытия, поэтому множество $f(X)$ ограничено. Далее, очевидно, что точки $\sup_{x \in X} f(x)$ и $\inf_{x \in X} f(x)$ являются точками прикосновения замкнутого множества $f(X)$ и поэтому принадлежат $f(X)$. Утверждение доказано. \square

Следующий результат полезен при доказательстве гомеоморфности топологических пространств.

Следствие 11.41. *Непрерывное взаимно-однозначное отображение f компактного пространства X в хаусдорфово пространство Y является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Достаточно показать непрерывность обратного отображения, что, в силу теоремы 10.28, равносильно замкнутости прообраза произвольного замкнутого подмножества $F \subset X$ при отображении f^{-1} , т.е. замкнутости $f(F) \subset Y$. Но замкнутое подмножество компакта — компакт (см. утверждение 11.36). Далее, образ компакта F при непрерывном отображении f — тоже компакт (см. утверждение 11.39). Наконец, компактное подмножество хаусдорфова пространства Y замкнуто в силу утверждения 11.38. Доказательство закончено. \square

Упражнение 11.42. Проверить следующие свойства компактов:

- если пространство X представимо в виде конечного объединения своих компактных подмножеств, то X компактно;
- декартово произведение компактных пространств компактно.

В заключение сформулируем несколько специфических свойств компактных метрических пространств (отметим, что в общем случае эти свойства не имеют места).

Упражнение 11.43. Пусть X — метрическое пространство. Показать, что следующие свойства эквивалентны:

- пространство X компактно;
- всякая последовательность $\{x_n\}$ элементов из X содержит сходящуюся подпоследовательность;
- всякая последовательность непустых замкнутых подмножеств A_n , таких, что $A_{n+1} \subset A_n$, имеет непустое пересечение.

Упражнение 11.44. Привести пример метрического пространства X и замкнутого ограниченного некомпактного подмножества в нем (другими словами, в общем случае теорема Бореля неверна).

В следующей лекции с помощью топологических пространств определяются основные объекты дифференциальной геометрии — гладкие многообразия.

11.4 Задачи

Задача 11.45. Доказать, что замыкание связного множества связно.

Задача 11.46. Доказать, что:

- (1) при непрерывном отображении образ связного (линейно связного, компактного) пространства связан (линейно связан, компактен);
- (2) прообраз хаусдорфова пространства при непрерывном отображении, взаимно-однозначном с образом, также является хаусдорфовым пространством.

Задача 11.47. Привести пример непрерывного отображения, для которого:

- (1) прообраз связного (линейно связного, компактного) пространства не является связным (линейно связным, компактным);
- (2) образ хаусдорфова пространства не является хаусдорфовым пространством.

Задача 11.48. Доказать, что подмножество плоскости, состоящее из графика функции $y = \sin 1/x$, $x \neq 0$, и отрезка $[-1, 1]$ оси ординат, наделенное индуцированной топологией, является связным, но не линейно связным.

Задача 11.49. Топологией Зарисского на множестве X называется система множеств, состоящая из пустого множества, а также из всех подмножеств множества X , дополнения до которых конечны.

- (1) Проверьте, что эта система удовлетворяет аксиомам топологии.
- (2) Докажите, что если X бесконечно, то с топологией Зарисского оно не является хаусдорфовым.
- (3) Опишите все непрерывные отображения из пространства с топологией Зарисского в прямую со стандартной топологией, заданной функцией расстояния между точками.

Задача 11.50. Выяснить, какие из следующих матричных групп связны, какие компактны: $O(n)$, $SO(n)$, $GL(n)$, $SL(n)$.

Задача 11.51. Говорят, что последовательность точек x_n топологического пространства X *сходится* к точке $x \in X$, называемой *пределом последовательности* x_n , если для любой окрестности U точки x существует такое N , что при каждом $n > N$ выполняется $x_n \in U$. Докажите, что:

- (1) в хаусдорфовом пространстве предел сходящейся последовательности определен однозначно;
- (2) в антидискретном пространстве X (пространстве с топологией, состоящей лишь из пустого множества и всего X) любая последовательность точек сходится к любой точке.

Опишите все сходящиеся последовательности в пространстве с топологией Зарисского.

11.5 Дополнительный материал

11.5.1 Функциональная отделимость

Рассматриваемая в данном пункте версия аксиомы отделимости очень полезна с технической точки зрения.

Нам понадобится следующая терминология. Открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства X называется *эффективным*, если из него нельзя выбросить ни одного элемента U_α так, чтобы в результате снова получилось открытое покрытие. Пусть заданы два открытых покрытия пространства X : $U = \{U_\alpha\}$ и $V = \{V_\alpha\}$. Говорят, что покрытие V *измельчает покрытие U* , или *вписано в покрытие U* , если каждое множество V_β лежит в некотором множестве U_α .

Начнем со следующего важного свойства нормальных пространств.

Предложение 11.52. Пусть X — нормальное топологическое пространство и $U = \{U_i\}$, $i = 1, \dots, N$, — некоторое его конечное открытое покрытие. Тогда существует вписанное в U покрытие $V = \{V_i\}$, $i = 1, \dots, N$, причем $\bar{V}_i \subset U_i$ для каждого i .

Доказательство. Если $N = 1$, то можно взять $V = U$.

Пусть теперь $N \geq 2$. Предположим сначала, что покрытие U эффективно. Рассмотрим замкнутые множества $X \setminus U_1$ и $X \setminus \cup_{i=2}^N U_i$. В силу эффективности покрытия U оба эти множества непусты. Кроме того, они замкнуты и не пересекаются. Поэтому, в силу нормальности пространства X , существует открытое множество V_1 , такое, что

$$X \setminus \cup_{i=2}^N U_i \subset V_1 \subset \bar{V}_1 \subset U_1.$$

Система множеств $\{V_1, U_2, \dots, U_N\}$ снова образует эффективное покрытие пространства X , поэтому к ней можно применить аналогичную процедуру, построив множество $V_2 \subset \bar{V}_2 \subset U_2$, такое, что $\{V_1, V_2, \dots, U_N\}$ — эффективное покрытие. Продолжим эту процедуру до тех пор, пока не построим требуемое измельчение V покрытия U . Для эффективных покрытий утверждение доказано.

Если же покрытие U неэффективно, то его можно представить в виде объединения конечного числа эффективных покрытий, для каждого из которых можно построить покрытие V . Объединение соответствующих покрытий V и даст искомого покрытие. Утверждение доказано. \square

Два подмножества A_1 и A_2 топологического пространства X называются *функционально отделимыми*, если существует непрерывная функция $f: X \rightarrow [a, b]$, $a < b$, такая, что $f|_{A_1} = a$, и $f|_{A_2} = b$. Если два замкнутых множества A_1 и A_2 функционально отделимы в X , то они отделимы и в обычном смысле. Действительно, достаточно взять число $c \in (a, b)$ и рассмотреть два открытых множества $f^{-1}([a, c])$ и $f^{-1}((c, b])$. Эти множества не пересекаются, причем первое из них содержит A_1 , а второе — A_2 . Оказывается, для “хороших” пространств имеет место и обратное утверждение.

Предложение 11.53 (Лемма Урысона). Пусть X — нормальное топологическое пространство и A_0, A_1 — два его замкнутых непересекающихся подмножества. Тогда существует непрерывная функция $f: X \rightarrow [0, 1]$, такая, что $f|_{A_0} \equiv 0$ и $f|_{A_1} \equiv 1$, т.е. множества A_0 и A_1 функционально отделимы.

Доказательство. Пусть построена такая система открытых множеств U_r , занумерованных всеми двоично-рациональными (т.е. вида $p/2^n$) числами $r \in [0, 1]$, что:

- (1) множество A_0 содержится в U_0 ;
- (2) замыкание \bar{U}_1 множества U_1 содержится в $X \setminus A_1$;
- (3) множества U_r последовательно вложены, т.е. если $r < r'$, то $\bar{U}_r \subset U_{r'}$.

Тогда систему открытых множеств $\{U_r\}$ можно расширить, добавив множества $U_t = \cup_{r < t} U_r$, где t — произвольное вещественное число из $[0, 1]$. Система множеств $\{U_t\}$ удовлетворяет свойству 3. Действительно, для любых чисел t и t' из $[0, 1]$, где $t < t'$, найдутся рациональные числа r и r' , такие, что $t < r < r' < t'$. Тогда $U_t \subset U_r$ и $U_{r'} \subset U_{t'}$. Но при этом $\bar{U}_t \subset \bar{U}_r$, а $\bar{U}_r \subset U_{r'}$, откуда получаем, что $\bar{U}_t \subset U_{t'}$.

Определим функцию $f: X \rightarrow [0, 1]$, положив $f(x) = \sup\{t \mid x \notin U_t\}$. Покажем, что функция f непрерывна на X . Фиксируем произвольную точку x_0 и число $\varepsilon > 0$ и положим $t_0 = f(x_0)$. По определению функции f имеем: $x_0 \notin \bar{U}_{t_0 - \varepsilon/2}$ и $x_0 \in U_{t_0 + \varepsilon/2}$. Рассмотрим окрестность $V = U_{t_0 + \varepsilon/2} \setminus \bar{U}_{t_0 - \varepsilon/2}$ точки x_0 . Тогда, так как любая точка x из V принадлежит $U_{t_0 + \varepsilon/2}$ и не принадлежит $\bar{U}_{t_0 - \varepsilon/2}$, имеет место неравенство $t_0 - \varepsilon/2 < f(x) \leq t_0 + \varepsilon/2$, т.е. $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$, что и доказывает непрерывность функции f . Наконец, функция f равна тождественно нулю на множестве A_0 и единице на A_1 .

Для доказательства утверждения осталось построить систему открытых множеств U_r , удовлетворяющую требованиям 1–3. В силу нормальности пространства X для любого замкнутого множества A и его окрестности U найдется такая другая окрестность V множества A , что $A \subset V \subset \bar{V} \subset U$. Для краткости будем обозначать через $V \Subset U$ тот факт, что $V \subset \bar{V} \subset U$.

Итак, $A_0 = \bar{A}_0 \subset X \setminus A_1$, поэтому существует открытое множество U_0 , такое, что $A_0 \subset U_0 \Subset X \setminus A_1$. Точно так же \bar{U}_0 — замкнутое множество, содержащееся в открытом $X \setminus A_1$, поэтому найдется открытое множество U_1 , такое, что $U_0 \Subset U_1$. Предположим теперь, что для всех двоично-рациональных чисел вида $r = p/2^n$,

где $0 \leq p \leq 2^n$, уже построены открытые множества U_r , для которых выполнено включение $U_{p/2^n} \subseteq U_{(p+1)/2^n}$. Тогда, так как $\bar{U}_{p/2^n}$ — замкнутое множество, содержащееся в открытом множестве $U_{(p+1)/2^n}$, то найдется открытое множество $U_{(2p+1)/2^{n+1}}$, такое, что $U_{p/2^n} \subseteq U_{(2p+1)/2^{n+1}} \subseteq U_{(p+1)/2^n}$. Таким образом, по индукции мы построили требуемое семейство множеств $\{U_r\}$ для всех двоично-рациональных чисел r из отрезка $[0, 1]$. Утверждение доказано. \square

Из леммы Урысона следует важное утверждение о продолжении непрерывной функции, заданной на замкнутом подмножестве нормального топологического пространства.

Предложение 11.54. Пусть X — некоторое нормальное топологическое пространство, F — его произвольное замкнутое подмножество и $f: F \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывная функция на F . Тогда функция f продолжается до непрерывной функции $g: X \rightarrow \mathbb{R}^1$, где $g|_F \equiv f$. Если при этом функция f ограничена некоторой константой c , т.е. $|f(x)| < c$, то и функция g может быть выбрана ограниченной той же константой c .

Доказательство. Предположим сначала, что функция f ограничена: существует константа c , такая, что $|f(x)| < c$. Положим $\varphi_0(x) = f(x)$ и рассмотрим два замкнутых подмножества A_0 и B_0 множества F , положив

$$A_0 = \{x \mid \varphi_0(x) \leq -c/3\} \quad \text{и} \quad B_0 = \{x \mid \varphi_0(x) \geq c/3\}.$$

Множества A_0 и B_0 не пересекаются и замкнуты в пространстве X (так как F замкнуто), поэтому, в силу утверждения 11.53, существует непрерывная функция $f_0: X \rightarrow [-c/3, c/3]$, такая, что $f_0|_{A_0} \equiv -c/3$, а $f_0|_{B_0} \equiv c/3$. В частности, $|f_0(x)| \leq c/3$ для всех $x \in X$ и $|\varphi_0(x) - f_0(x)| \leq 2c/3$.

Определим на F новую функцию $\varphi_1(x) = \varphi_0(x) - f_0(x)$. Эта непрерывная функция ограничена на F константой $2c/3$. Поэтому, повторяя конструкцию предыдущего абзаца, можно построить два непересекающихся замкнутых множества

$$A_1 = \{x \mid \varphi_1(x) \leq -2c/9\} \quad \text{и} \quad B_1 = \{x \mid \varphi_1(x) \geq 2c/9\}$$

и непрерывную функцию $f_1: X \rightarrow [-2c/9, 2c/9]$, такую, что

$$f_1|_{A_1} \equiv -2c/9 \quad \text{и} \quad f_1|_{B_1} \equiv 2c/9.$$

В частности, $|f_1(x)| \leq 2c/9$ и $|\varphi_1(x) - f_1(x)| \leq 4c/9$.

Повторяя этот процесс бесконечное число раз, построим две последовательности функций $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}^1$ и $\varphi_n: F \rightarrow \mathbb{R}^1$, такие, что $\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) - f_n(x)$ и выполнены оценки

$$|f_n(x)| \leq (2/3)^n(c/3), \quad |\varphi_{n+1}(x)| \leq (2/3)^{n+1}c.$$

Далее, при всех x из F имеем

$$\begin{aligned} f(x) = \varphi_0(x) = f_0(x) + \varphi_1(x) = f_0(x) + f_1(x) + \varphi_2(x) \cdots = \cdots = \\ = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) + \varphi_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Так как $|f_n(x)| \leq (2/3)^n(c/3)$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на всем пространстве X и, поэтому, функция $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ непрерывна на всем X . Так как $|\varphi_{n+1}(x)| \leq (2/3)^{n+1}c$, функция $g(x)$ совпадает с $f(x)$ на всем множестве F . Наконец,

$$|g(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leq (c/3) \sum_{n=1}^{\infty} (2/3)^n = c,$$

что и завершает доказательство утверждения для случая ограниченной функции.

Пусть теперь функция f неограничена. Рассмотрим произвольный гомеоморфизм $h: \mathbb{R}^1 \rightarrow (-1, 1)$. Тогда композиция $h \circ f$ — это непрерывная ограниченная функция на пространстве X , и для нее, как мы уже доказали, существует продолжение $g: X \rightarrow [-1, 1]$. Значения ± 1 функция g принимает на некотором замкнутом множестве F_1 , причем F_1 не пересекается с F . Согласно утверждению 11.53 существует непрерывная функция $\xi: X \rightarrow [0, 1]$, равная нулю на множестве F_1 и единице на F . Тогда функция $u(x) = g(x)\xi(x)$ совпадает с функцией $h \circ f$ на множестве F и переводит все пространство X в открытый интервал $(-1, 1)$. Положим, наконец, $w(x) = h^{-1} \circ u(x)$. На множестве F функции w и f совпадают, поэтому w — это искомое продолжение. Утверждение доказано. \square

11.5.2 Разбиение единицы

Разовьем полезную для дальнейшего технику, позволяющую работать с непрерывными функциями на топологических пространствах в целом.

Пусть f — непрерывная функция на топологическом пространстве X . *Носителем функции f* называется замыкание множества всех точек x из X , в которых функция f отлична от нуля. Будем обозначать носитель функции f через $\text{supp } f$. По определению, вне своего носителя функция тождественно равна нулю. Полезным техническим приемом в топологии является разложение непрерывной функции в сумму непрерывных функций, носители которых в определенном смысле малы.

Пусть $U = \{U_\alpha\}$ — некоторое открытое покрытие пространства X . Покрытие U называется *локально конечным*, если каждая точка x пространства X имеет такую окрестность $O(x)$, которая пересекается лишь с конечным набором элементов покрытия U .

Пусть $U = \{U_\alpha\}$ — локально конечное покрытие пространства X . Система функций $\varphi_\alpha: X \rightarrow \mathbb{R}^1$, удовлетворяющая условиям:

- для каждого α и $x \in X$ имеет место неравенство $0 \leq \varphi_\alpha(x) \leq 1$;
- для каждого α носитель функции φ_α содержится в соответствующем элементе покрытия: $\text{supp } \varphi_\alpha \subset U_\alpha$;
- $\sum_\alpha \varphi_\alpha(x) \equiv 1$,

называется *разбиением единицы, подчиненным покрытию U* . Отметим, что сумма из определения разбиения единицы имеет смысл, так как в каждой точке x лишь конечное число слагаемых отлично от нуля.

Оказывается, что для любого локально конечного покрытия нормального пространства X существует подчиненное ему разбиение единицы. Докажем здесь этот факт только для конечных покрытий.

Предложение 11.55. Пусть X — нормальное пространство и $\{U_\alpha\}$ — его конечное покрытие. Тогда существует подчиненное этому покрытию разбиение единицы.

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha\}$ — конечное покрытие. В силу утверждения 11.52 существует измельчение $\{V_\alpha\}$ покрытия $\{U_\alpha\}$, причем $V_\alpha \Subset U_\alpha$. Воспользовавшись утверждением 11.53, построим на пространстве X непрерывную функцию ψ_α , такую, что $\psi_\alpha|_{V_\alpha} \equiv 1$, $\psi_\alpha|_{X \setminus U_\alpha} \equiv 0$ и $0 \leq \psi_\alpha(x) \leq 1$. Это означает, что носитель $\text{supp } \psi_\alpha$ содержится в U_α и $\psi_\alpha(x) > 0$ при $x \in V_\alpha$. Положим $\psi(x) = \sum_\alpha \psi_\alpha(x)$. Эта функция непрерывна. Покажем теперь, что $\psi(x) > 0$ на всем пространстве X . Действительно, для любой точки x из X существует окрестность V_{α_0} , такая, что $x \in V_{\alpha_0}$, и, в частности, $\psi_{\alpha_0}(x) > 0$. Но тогда и $\psi(x) \geq \psi_{\alpha_0} > 0$. Определим, наконец, непрерывные функции $\varphi_\alpha(x)$, положив $\varphi_\alpha(x) = \psi_\alpha(x)/\psi(x)$. Очевидно, $\text{supp } \varphi_\alpha = \text{supp } \psi_\alpha \subset U_\alpha$ и, кроме того, $0 \leq \varphi_\alpha \leq 1$, а

$$\sum_\alpha \varphi_\alpha(x) = \sum_\alpha \psi_\alpha(x)/\psi(x) = \psi(x)/\psi(x) = 1.$$

Итак, мы построили разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$. Утверждение доказано. \square

Замечание 11.56. Для перенесения доказательства утверждения 11.55 на локально конечное покрытие нужно получить обобщение утверждения 11.52 на случай такого покрытия.

Упражнение 11.57. Пусть X — евклидово пространство \mathbb{R}^n . Показать, что в этом случае можно построить разбиение единицы с гладкими функциями φ_α .

Тема 12

Многообразия

Идея, лежащая в основе понятия многообразия, впервые, по-видимому, возникла при построении географических карт земной поверхности. Такие построения сводятся к отображению сферической поверхности Земли на плоскость. Естественно требовать, чтобы используемые отображения были взаимно-однозначны и непрерывны, т.е. являлись гомеоморфизмами. Однако можно показать, что сфера не гомеоморфна никакой части плоскости, иными словами, нельзя построить карту всей Земли. Кроме того, при попытке построения карт достаточно больших кусков земной поверхности неизбежно возникают искажения (напомним, что сфера и плоскость локально не изометричны, так как имеют разные гауссовы кривизны). Поэтому картографы разбивают поверхность Земли, т.е. сферу, на несколько достаточно маленьких перекрывающихся кусочков и отдельно проецируют каждый из них на плоскость, получая тем самым атлас карт. Исходная сфера — Земля — получается при обратной склейке этих кусочков. Неформально говоря, многообразие размерности n — это топологическое пространство, склеенное из областей пространства \mathbb{R}^n , как поверхность Земли из карт атласа.

Отметим, что с многообразиями мы уже не раз сталкивались в нашем курсе, а именно, регулярные кривые и поверхности — все это многообразия. Перейдем теперь к формальным определениям.

12.1 Топологические многообразия

Определение 12.1. *Атласом размерности n на топологическом пространстве X называется семейство $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, где $\{U_\alpha\}$ — покрытие пространства X его открытыми связными подмножествами, каждое из которых гомеоморфно некоторой области V_α в \mathbb{R}^n , а $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ — соответствующие гомеоморфизмы. Пара $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ называется *картой*, гомеоморфизм φ_α — *координатным гомеоморфизмом*. Если в \mathbb{R}^n фиксированы некоторые координаты, то говорят, что карта $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ задает в окрестности U_α *координаты*, сопоставляя каждой точке $P \in U_\alpha$ координаты вектора $\varphi_\alpha(P) \in \mathbb{R}^n$. Если $U_\alpha \cap U_\beta$ непусто, то возникает гомеоморфизм*

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n,$$

который называется *отображением склейки*, или *функцией перехода* (от одной карты к другой или от одних координат к другим).

Замечание 12.2. Выбор карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ в окрестности данной точки P на многообразии задает в окрестности этой точки координаты (считаем, что в открытом подмножестве V_α пространства \mathbb{R}^n заданы некоторые криволинейные координаты (x^1, \dots, x^n)), т.е. каждой точке $P \in U_\alpha$ ставится в соответствие набор чисел $\varphi_\alpha(P) = (x_0^1, \dots, x_0^n)$.

Замечание 12.3. Пусть точка P принадлежит двум разным картам U_α, U_β и пусть (x^1, \dots, x^n) — координаты в V_α , а (y^1, \dots, y^n) — координаты в V_β . Тогда в окрестности $U_\alpha \cap U_\beta$ заданы две системы координат, определенные картами $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ и (U_β, φ_β) : каждой точке $P \in U_\alpha \cap U_\beta$ ставятся в соответствие два набора чисел $\varphi_\alpha(P) = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ и $\varphi_\beta(P) = (y_0^1, \dots, y_0^n)$. При этом отображение склейки может быть записано в виде $x^i = x^i(y^1, \dots, y^n)$ или $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$, т.е. отображение склейки задает формулы пересчета одних координат через другие. Поэтому отображение склейки иногда называется просто *заменой координат*.

Определение 12.4. Хаусдорфово топологическое пространство называется *топологическим многообразием размерности n* , если на нем существует не более чем счетный атлас размерности n .

Пример 12.5. Простейший пример многообразия — это открытое связное подмножество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. На нем можно выбрать атлас, состоящий из одной карты $(\Omega, \text{id}: \Omega \rightarrow \Omega)$, где id — тождественное отображение.

Пример 12.6. Следующий тривиальный пример многообразия — это график непрерывной функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, т.е. подмножество $M \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ следующего вида

$$M = \left\{ (x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Атлас на M состоит из одной карты

$$\left(M, \varphi: (x^1, \dots, x^n, f(x^1, \dots, x^n)) \mapsto (x^1, \dots, x^n) \right).$$

Пример 12.7. Стандартная сфера $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, заданная в евклидовых координатах (x^1, \dots, x^{n+1}) как множество вида $\{\sum_i (x^i)^2 = 1\}$, с топологией, индуцированной из объемлющего пространства, превращается в многообразие, если в качестве атласа выбрать $2n + 2$ карты вида

$$\begin{aligned} (U_i^+ = \{x^i > 0\}, \varphi_i^+ : (x^1, \dots, x^{n+1}) &\mapsto (x^1, \dots, \widehat{x^i}, \dots, x^{n+1})), \\ (U_i^- = \{x^i < 0\}, \varphi_i^- : (x^1, \dots, x^{n+1}) &\mapsto (x^1, \dots, \widehat{x^i}, \dots, x^{n+1})), \end{aligned}$$

где $\widehat{x^i}$ означает, что координата x^i пропущена, а $i = 1, \dots, n + 1$.

Пример 12.8. Другой пример атласа на сфере можно получить с помощью стереографических проекций. Пусть $N = (0, 0, \dots, 1) \in S^n$ — северный полюс, а $S = (0, 0, \dots, -1)$ — южный полюс сферы S^n . Обозначим через φ_N и φ_S стереографические проекции из северного и южного полюсов соответственно на координатную гиперплоскость

$\Pi = \{x^{n+1} = 0\}$. Так как стереографические проекции являются гомеоморфизмами, $(S^n \setminus \{N\}, \varphi_N)$ и $(S^n \setminus \{S\}, \varphi_S)$ задают на S^n структуру n -мерного многообразия. Таким образом, на сфере можно выбрать атлас, состоящий из двух карт.

Упражнение 12.9. Выпишите функции перехода для атласов из примеров 12.7 и 12.8

Упражнение 12.10. Показать, что если X — топологическое многообразие размерности n , то на X существует не более чем счетный атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, где каждый координатный гомеоморфизм имеет вид $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$, т.е. без ограничения общности можно предполагать, что координатные гомеоморфизмы отображают карты на все \mathbb{R}^n .

Упражнение 12.11. Показать, что если X — топологическое многообразие размерности n , то на X существует не более чем счетный атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, где каждый координатный гомеоморфизм имеет вид $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow D^n$, где $D^n \subset \mathbb{R}^n$ — открытый шар в пространстве \mathbb{R}^n .

12.2 Функции и отображения

Конструкция 12.12. Пусть M^n — некоторое топологическое многообразие, $f: M \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывная функция на M . Рассмотрим произвольную карту (U, φ) многообразия M , т.е. гомеоморфизм $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда определена функция $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$, отображающая \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^1 . Обозначим через (x^1, \dots, x^n) координаты в \mathbb{R}^n , которые, напомним, предполагаются фиксированными. Тогда \tilde{f} может быть записана в этих координатах в виде $\tilde{f}(x^1, \dots, x^n)$.

Определение 12.13. Функцию $\tilde{f}(x^1, \dots, x^n)$ будем называть *координатным представлением функции f в карте (U, φ)* , или *координатным представлением функции f в координатах (x^1, \dots, x^n)* . При этом часто, допуская некоторую вольность речи, будем отождествлять разные функции f и \tilde{f} и записывать координатное представление \tilde{f} функции f в виде $f(x^1, \dots, x^n)$.

Конструкция 12.14. Пусть имеются два многообразия M^m, N^n и пусть задано непрерывное отображение $F: M \rightarrow N$ из многообразия M в многообразие N . Фиксируем в многообразии M точку P , и пусть $Q = F(P)$. Рассмотрим карту (W, ξ) многообразия N , такую, что $Q \in W$. Тогда, в силу непрерывности отображения F , существует открытое в M связное множество $U \subset M$, содержащее точку P , такое, что $F(U) \subset W$. При этом множество U можно выбрать целиком лежащим в некоторой карте многообразия M . Ограничение отображения φ на U также является картой, которую без ограничения общности можно считать входящей в наш атлас.

Итак, существует карта (U, φ) многообразия M , такая, что $P \in U$ и $F(U) \subset W$. Отображение F порождает отображение $\tilde{F} = \xi \circ F \circ \varphi^{-1}$, заданное на области $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ и переводящее ее в область $\xi(W) \subset \mathbb{R}^n$.

Обозначим через (x^1, \dots, x^m) координаты на M , порожденные картой (U, φ) , а через (y^1, \dots, y^n) — координаты на N , порожденные картой (W, ξ) . Отображение \tilde{F} в этих координатах может быть записано в виде

$$y^i = \tilde{F}^i(x^1, \dots, x^m), \quad i = 1, \dots, n.$$

Определение 12.15. Отображение называется *координатным представлением отображения* F в картах (U, φ) и (W, ξ) , или *координатным представлением отображения* F в координатах (x^1, \dots, x^m) и (y^1, \dots, y^n) . При этом часто, допуская некоторую вольность речи, будем отождествлять *разные* отображения F и \tilde{F} и записывать координатное представление \tilde{F} отображения F как $F^i(x^1, \dots, x^m)$.

12.3 Гладкие многообразия

Пусть M^n — некоторое топологическое многообразие, $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция на M^n и P — произвольная точка из M^n . Как определить дифференцируемость f в точке P ? Естественно было бы воспользоваться координатным представлением функции f в каких-нибудь координатах в окрестности точки P , которое, напомним, является *обычной* функцией на области в \mathbb{R}^n , и определить дифференцируемость f в $P \in M^n$ как *обычную* дифференцируемость ее координатного представления в точке $\varphi^{-1}(P)$. Собственно, для этого и нужна карта, т.е. система координат. Однако, как мы уже отмечали, точка P может принадлежать нескольким картам, и, тем самым, в окрестности точки P может быть определено несколько систем координат. Тогда естественно требовать, чтобы определение дифференцируемости функции в точке P не зависело от выбора карты, или, другими словами, чтобы все системы координат на многообразии были бы равноправны. Ясно, что это “равноправие” есть в точности условие на функции перехода. Оно приводит к следующему определению.

Определение 12.16. Топологическое многообразие с атласом $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ называется *гладким*, если все отображения склейки атласа \mathcal{A} — гладкие. Атлас \mathcal{A} в этом случае тоже называется *гладким*.

Замечание 12.17. Напомним, что в дифференциальной геометрии под словом “гладкий” понимают непрерывную дифференцируемость столько раз, сколько нужно, хотя, конечно, можно определить *многообразие класса* C^r , $0 \leq r \leq \infty$ (случай $r = 0$ соответствует топологическим многообразиям), а также *вещественно-аналитические* и, для четных n , *комплексно-аналитические многообразия*.

Ниже, как правило, мы будем иметь дело с бесконечно гладкими многообразиями (если противное не оговорено специально).

Замечание 12.18. Если структура топологического многообразия задана атласом, состоящим из одной карты, то оно автоматически является гладким. (Функций перехода нет вообще, гладкость проверять не у чего.)

Замечание 12.19. Существуют примеры топологических многообразий, на которых нельзя ввести структуру гладкого многообразия.

Определение 12.20. Пусть на топологическом многообразии M заданы два гладких атласа: $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ и $\mathcal{A}' = \{(U'_\alpha, \varphi'_\alpha)\}$. Атласы \mathcal{A} и \mathcal{A}' называются *эквивалентными*, если их объединение $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ также является гладким атласом (т.е. все функции перехода между всеми картами атласов \mathcal{A} и \mathcal{A}' — гладкие).

Упражнение 12.21. Эквивалентны ли следующие два атласа на вещественной прямой: $\mathcal{A} = \{(U = \mathbb{R}^1(x), \varphi(x) = x)\}$ и $\mathcal{A}' = \{(U' = \mathbb{R}^1(x), \varphi'(x) = x^3)\}$?

Конструкция 12.22. Пусть \mathcal{A} — некоторый гладкий атлас на M . Обозначим через \mathcal{A}_{\max} максимальный по включению гладкий атлас на M , эквивалентный \mathcal{A} . Другими словами, если \mathcal{A}' — произвольный эквивалентный \mathcal{A} атлас на M , то \mathcal{A}' , по определению, содержится в \mathcal{A}_{\max} . Ясно, что два атласа на M эквивалентны, если и только если они содержатся в одном и том же максимальном атласе.

Определение 12.23. Максимальные гладкие атласы на многообразии M называют *гладкими структурами* многообразия M . В дальнейшем, говоря о гладком многообразии, будем всегда предполагать фиксированной некоторую его гладкую структуру.

12.4 Примеры гладких многообразий

Пример 12.24. Рассмотренные выше многообразия, т.е. область Ω , график непрерывной функции и сфера S^n , являются гладкими. (В первых двух случаях это очевидно, в третьем — следует из явного вида функций перехода.)

Упражнение 12.25. Выше на сфере S^n было построено два атласа (атлас из $2n + 2$ “координатных” полусфер, которые проецируются на соответствующие координатные плоскости, и атлас из двух проколотых сфер со стереографическими координатами). Проверьте, являются ли эти атласы эквивалентными.

Пример 12.26. Важным примером гладкого многообразия является проективное пространство $\mathbb{R}P^n$. Напомним, что проективным пространством $\mathbb{R}P^n$ размерности n называется множество всех прямых в \mathbb{R}^{n+1} , проходящих через начало координат. Введем на $\mathbb{R}P^n$ функцию расстояния $\rho(P, Q)$, равную углу между прямыми P и Q (проверьте, что функция ρ удовлетворяет всем аксиомам расстояния). Функция расстояния ρ превращает $\mathbb{R}P^n$ в метрическое, а значит и в топологическое, пространство. Зададим теперь на $\mathbb{R}P^n$ карты следующим образом.

Обозначим через U_i множество всех проходящих через начало координат прямых в \mathbb{R}^{n+1} , не перпендикулярных i -му координатному вектору. Иными словами, прямая ℓ с направляющим вектором $e = (x^1, \dots, x^{n+1})$ входит в U_i , если и только если $x^i \neq 0$. Отображение $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ определим по формуле

$$\varphi_i: \ell \mapsto \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right).$$

(Проверьте, что φ_i — гомеоморфизмы.)

Выпишем в явном виде отображения склейки. Рассмотрим две карты (U_i, φ_i) и (U_j, φ_j) . Пусть $\varphi_{ij}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ — отображение склейки. Если $e = (x^1, \dots, x^{n+1})$ — направляющий вектор прямой $\ell \in U_i \cap U_j$, то

$$\begin{aligned} \varphi_i(\ell) &= \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right) = (\alpha^1, \dots, \alpha^{i-1}, \alpha^{i+1}, \dots, \alpha^{n+1}), \\ \varphi_j(\ell) &= \left(\frac{x^1}{x^j}, \dots, \frac{x^{j-1}}{x^j}, \frac{x^{j+1}}{x^j}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^j} \right) = (\beta^1, \dots, \beta^{j-1}, \beta^{j+1}, \dots, \beta^{n+1}), \end{aligned}$$

поэтому

$$\beta^k = \frac{x^i}{x^j} \alpha^k = \frac{\alpha^k}{\alpha^j} \quad \text{при } k \neq i, \quad \text{и} \quad \beta^i = \frac{x^i}{x^j} = \frac{1}{\alpha^j}.$$

Таким образом, отображения склейки являются гладкими, и, значит, $\mathbb{R}P^n$ с построенным атласом — гладкое n -мерное многообразие.

Пример 12.27. Пусть M_1 и M_2 — два гладких многообразия. Введем на прямом произведении $M_1 \times M_2$ топологических пространств M_1, M_2 структуру гладкого многообразия. А именно, пусть $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ и $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}$ — атласы на многообразиях M_1 и M_2 соответственно. Тогда система карт $\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}$ образует на $M_1 \times M_2$ гладкий атлас (проверьте!).

12.5 Гладкие функции, гладкие отображения, диффеоморфизмы

Пусть M — гладкое многообразие (напомним, на M , по определению, фиксирован некоторый гладкий атлас \mathcal{A}) и $f: M \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывная функция на M .

Определение 12.28. Функция f называется *гладкой в точке* $P \in M$, если для некоторой карты $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, такой, что $P \in U$, координатное представление функции f является гладким в точке $\varphi(P)$. Функция f называется *гладкой на многообразии* M , если она гладкая во всех точках многообразия M .

Далее, пусть M и N — два гладких многообразия и $F: M \rightarrow N$ — непрерывное отображение из M в N .

Определение 12.29. Отображение F называется *гладким в точке* $P \in M$, если для некоторых карт (U, φ) на M и (W, ξ) на N , таких, что $P \in U$ и $F(U) \subset W$ (напомним, что такие карты существуют для любой точки $P \in M$), соответствующее координатное представление отображения F является гладким в точке $\varphi(P)$. Отображение F называется *гладким*, если оно является гладким в каждой точке $P \in M$.

Замечание 12.30. Гладкая функция — это просто частный случай гладкого отображения многообразий: многообразие M отображается в многообразие \mathbb{R}^1 со стандартной гладкой структурой.

Утверждение 12.31. *Определения гладкой функции и гладкого отображения зависят только от гладких структур рассматриваемых гладких многообразий и не зависят от выбора координат (в фиксированных гладких структурах).*

Доказательство. Действительно, если (U, φ) и (U', φ') — две карты на M , содержащие точку P , и f — непрерывная функция на M , то координатные представления $f \circ \varphi^{-1}$ и $f \circ (\varphi')^{-1}$ функции f в этих разных картах одновременно являются гладкими в точках $\varphi(P)$ и $\varphi'(P)$ соответственно, поскольку отличаются друг от друга на гладкую функцию перехода $\varphi' \circ \varphi^{-1}$. Аналогично, если $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий, то при заменах координат в окрестности точки $P \in M$ и точки $F(P) \in N$ координатные представления функции F отличаются на гладкие функции перехода. \square

Замечание 12.32. Аналогично можно определить функции и отображения класса C^r , а также вещественно-аналитические и комплексно-аналитические функции (отображения). Отметим, что класс гладкости многообразия должен быть не ниже определяемого класса гладкости отображения.

Конструкция 12.33. Пусть $F: M^m \rightarrow N^n$ — гладкое отображение гладких многообразий, P — произвольная точка из M и $Q = F(P)$. Рассмотрим координатное представление функции F в координатах (x^1, \dots, x^m) в окрестности $P \in M$ и (y^1, \dots, y^n) в окрестности Q , которое запишем в виде

$$y^i = f^i(x^1, \dots, x^m), \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда определена матрица Якоби этого координатного представления, т.е. матрица

$$J(P) = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(P) \right).$$

Определение 12.34. Матрица $J(P)$, построенная выше, называется *матрицей Якоби отображения F в точке P* в координатах (x^1, \dots, x^m) и (y^1, \dots, y^n) .

Упражнение 12.35. Проверить, что при замене координат матрица Якоби изменяется, как матрица линейного отображения, где в качестве матриц перехода выступают матрицы Якоби соответствующих функций перехода.

Пример 12.36. Пусть M — гладкое многообразие. *Гладкой кривой γ на многообразии M* называется гладкое отображение интервала I (со стандартной гладкой структурой) в многообразие M . Если точка P из M лежит в образе отображения γ , т.е. $P = \gamma(t_0)$, $t_0 \in I$, то будем говорить, что кривая γ *проходит через точку P* . Матрица Якоби отображения γ в точке t_0 состоит из одного столбца и называется *вектором скорости кривой γ в точке P* (в соответствующих координатах). Далее, если $\gamma: I \rightarrow M$ — гладкая кривая на M и $\tau: I' \rightarrow I$ — взаимно-однозначное гладкое в обе стороны отображение интервала I' в интервал I , то отображение $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau: I' \rightarrow M$ — снова гладкая кривая. Будем говорить, что кривая $\tilde{\gamma}$ получена из кривой γ *заменой параметризации*. С точностью до параметризации всегда можно считать, что кривая параметризована, скажем, интервалом $(-1, 1)$.

Напомним, что на классе топологических пространств мы определили отношение эквивалентности с помощью понятия гомеоморфизма. Однако гомеоморфизмы не сохраняют структуру гладкого многообразия (хотя карта по-прежнему переходит в карту, гладкость функций перехода разрушается). Поэтому требуется усилить определение гомеоморфизма так, чтобы гладкая структура сохранялась.

Определение 12.37. Пусть F — гомеоморфизм гладкого многообразия M в гладкое многообразие N . Если отображение F является гладким и, более того, обратное отображение F^{-1} также является гладким, то отображение F называется *диффеоморфизмом*. Если существует диффеоморфизм M в N , то говорят, что многообразия M и N *диффеоморфны*.

Упражнение 12.38. Выше, см. задачу 12.21, мы уже видели пример двух неэквивалентных гладких атласов на прямой \mathbb{R}^1 . Обозначим через M_1 и M_2 соответствующие гладкие многообразия, а именно, M_1 — это прямая \mathbb{R}^1 с картой $(U = \mathbb{R}^1, \varphi_1: x \mapsto x)$, а M_2 — это прямая с картой $(U = \mathbb{R}^1, \varphi_2: x \mapsto x^3)$. Показать, что M_1 и M_2 диффеоморфны.

Замечание 12.39. Две гладкие структуры на одном и том же топологическом многообразии называются *эквивалентными*, если соответствующие гладкие многообразия диффеоморфны. Например, гладкие структуры на прямой, описанные в задаче 12.21, эквивалентны. Оказывается, в размерности $n = 4$, и только в ней, на \mathbb{R}^n существуют гладкие структуры, не эквивалентные стандартной гладкой структуре на \mathbb{R}^n .

Замечание 12.40. Отношение диффеоморфности является отношением эквивалентности на классе гладких многообразий, и мы, как правило, не будем различать диффеоморфные многообразия.

Свойства многообразий, сохраняющиеся при диффеоморфизмах, называются *дифференциальными инвариантами*. Такие свойства являются важными характеристиками многообразий. Одним из таких инвариантов является размерность многообразия.

Теорема 12.41. Если гладкие многообразия M и N диффеоморфны, то их размерности совпадают.

Доказательство. Пусть $F: M \rightarrow N$ — диффеоморфизм. Обозначим через m и n размерности многообразий M и N соответственно. Фиксируем произвольную точку P на многообразии M , обозначим через Q ее образ при отображении F и рассмотрим координатные представления отображений F и F^{-1} в координатах (x^1, \dots, x^m) в окрестности точки P на M и (y^1, \dots, y^n) в окрестности точки Q на N . Эти координатные представления — суть векторзначные функции

$$(y^1, \dots, y^n) = F(x^1, \dots, x^m), \quad (x^1, \dots, x^m) = F^{-1}(y^1, \dots, y^n),$$

причем эти функции взаимно-обратны:

$$F(F^{-1}(y^1, \dots, y^n)) = (y^1, \dots, y^n), \quad F^{-1}(F(x^1, \dots, x^m)) = (x^1, \dots, x^m).$$

Обозначим через $dF(P)$ и $dF^{-1}(Q)$ матрицы Якоби координатных представлений отображений F и F^{-1} в точках P и Q соответственно¹. Напомним стандартную теорему о дифференцировании сложной функции.

Лемма 12.42. Пусть U_i , $i = 1, 2, 3$, — область в евклидовом пространстве \mathbb{R}^{n_i} . Пусть заданы гладкие отображения $F: U_1 \rightarrow U_2$, $G: U_2 \rightarrow U_3$ и $H = G \circ F$ — композиция отображений F и G . Тогда отображение H также является гладким, и если P — точка из U_1 , то для матриц Якоби выполнено следующее соотношение:

$$dH(P) = dG(F(P)) \cdot dF(P).$$

¹Здесь мы, избегая громоздких формул, допускаем определенную вольность, отождествляя отображение с его координатным представлением, а точку многообразия — с ее образом при координатном гомеоморфизме. Формально следует писать $d\tilde{F}(\varphi(P))$.

Применим этот результат к композициям $F \circ F^{-1}$ и $F^{-1} \circ F$. Получим:

$$E_m = dF^{-1}(Q) \cdot dF(P), \quad E_n = dF(P) \cdot dF^{-1}(Q),$$

где E_k — единичная матрица размера $k \times k$, так как матрица Якоби тождественного отображения — единичная матрица.

Поскольку матрицы $dF(P)$ и $dF^{-1}(Q)$ — прямоугольные, $(n \times m)$ и $(m \times n)$ соответственно, имеем

$$\text{rank } dF(P) \leq \min(m, n) \quad \text{и} \quad \text{rank } dF^{-1}(Q) \leq \min(m, n).$$

Вспомним, что ранг произведения матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей. Получаем: $m \leq \min(m, n)$ и $n \leq \min(m, n)$, поэтому $\max(m, n) \leq \min(m, n)$, т.е. $m = n$, что и требовалось доказать. \square

Замечание 12.43. Отметим, что аналогичный результат для гомеоморфных топологических многообразий — весьма нетривиален и находится поэтому за рамками настоящего курса.

Конструкция 12.44. Пусть X — топологическое пространство, M — гладкое многообразие и F — гомеоморфизм из X в M . Тогда на X можно ввести структуру гладкого многообразия так, чтобы отображение F стало диффеоморфизмом. Для этого достаточно построить на X следующий атлас: для каждой карты (U, φ) на M рассмотрим карту $(F^{-1}(U), \varphi \circ F)$. Очевидно, что полученный в результате атлас задает на X гладкую структуру, которая называется *перенесенной на X с M с помощью отображения F* .

12.6 Задание многообразий уравнениями — геометрический смысл теоремы о неявной функции

Один из наиболее часто встречающихся в приложениях объектов — это подмножество евклидова пространства \mathbb{R}^n , заданное системой уравнений.

Конструкция 12.45. Пусть задана система уравнений

$$f^i(x^1, \dots, x^n) = c^i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Множество решений этой системы уравнений удобно представлять как множество уровня векторнозначной функции $F = (f^1, \dots, f^k)$:

$$M_c = \{(x^1, \dots, x^n) \mid F(x^1, \dots, x^n) = c\},$$

где $c = (c^1, \dots, c^k)$ — постоянный вектор.

Теорема 12.46. Если множество M_c не пусто и матрица Якоби отображения F имеет в каждой точке из M_c максимальный ранг, равный k , то M_c является гладким многообразием размерности $n - k$. При этом, в подходящей окрестности U произвольной точки из M_c в качестве координат можно выбрать некоторые $n - k$ декартовых координат объемлющего пространства \mathbb{R}^n . Другими словами, в качестве координатного гомеоморфизма можно выбрать проекцию окрестности U на подходящую $(n - k)$ -мерную координатную плоскость.

Доказательство. Пусть P — произвольная точка из M_c . По условию, ранг матрицы Якоби $dF(P)$ отображения F в точке P равен k . Это означает, что имеется набор из k столбцов матрицы Якоби такой, что определитель соответствующего $(k \times k)$ -минора матрицы $dF(P)$ отличен от нуля. Без ограничения общности предположим, что это столбцы с номерами $1, \dots, k$. Обозначим через \tilde{P} образ точки P при стандартной проекции на координатную плоскость \mathbb{R}^{n-k} , определенную соотношениями $x^1 = \dots = x^k = 0$. Тогда по теореме о неявной функции, известной из математического анализа, в некоторой окрестности W точки \tilde{P} в координатной плоскости \mathbb{R}^{n-k} существуют гладкие функции

$$x^i(x^{k+1}, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, k,$$

разрешающие нашу систему уравнений $F(x^1, \dots, x^n) = c$, т.е.

$$F(x^1(x^{k+1}, \dots, x^n), \dots, x^k(x^{k+1}, \dots, x^n), x^{k+1}, \dots, x^n) = c$$

для всех (x^{k+1}, \dots, x^n) из W .

Обозначим через U окрестность точки P в M_c , проектирующуюся на W . В качестве карты в окрестности точки P на M_c возьмем пару (U, π) , где π — стандартная проекция на координатную плоскость \mathbb{R}^{n-k} . Обратное отображение π^{-1} задается в виде

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(x^{k+1}, \dots, x^n) &= \\ &= (x^1(x^{k+1}, \dots, x^n), \dots, x^k(x^{k+1}, \dots, x^n), x^{k+1}, \dots, x^n). \end{aligned}$$

По построению, для каждой точки (x^{k+1}, \dots, x^n) из $W \subset \mathbb{R}^{n-k}$ точка $\pi^{-1}(x^{k+1}, \dots, x^n)$ принадлежит множеству уровня M_c . Отображения π и π^{-1} непрерывны и взаимнообратны. Итак, для каждой точки $P \in M_c$ мы построили карту. Тем самым доказано, что M_c — топологическое многообразие размерности $n - k$.

Осталось проверить гладкость многообразия M_c . Предположим, что точка P содержится как в построенной выше карте (U, π) , так и в другой карте (U', π') . Напомним, что во всех картах в качестве координат выступают некоторые $n - k$ декартовых координат объемлющего пространства. В карте (U, π) координаты — это (x^{k+1}, \dots, x^n) , а в карте (U', π') — $(x^{i_1}, \dots, x^{i_{n-k}})$. Тогда функции перехода имеют вид

$$x^{i_p} = \begin{cases} x^{i_p}(x^{k+1}, \dots, x^n), & \text{если } i_p \leq k \\ x^{i_p}, & \text{если } i_p > k. \end{cases}$$

Но, по построению, функции x^{i_p} , $p = 1, \dots, k$, являются гладкими, что и доказывает гладкость многообразия M_c . \square

Упражнение 12.47. Доказательство теоремы 12.46, приведенное выше, содержит неточность. Найдите и устраните ее.

Следующие два утверждения являются важными частными случаями теоремы 12.46.

Следствие 12.48. Пусть f — гладкая функция на \mathbb{R}^n . Рассмотрим множество уровня $M_c = \{(x^1, \dots, x^n) \mid f(x^1, \dots, x^n) = c\}$ функции f . Если дифференциал df отличен от нуля во всех точках множества M_c , то M_c является многообразием размерности $n - 1$.

Следствие 12.49. *Регулярные поверхности в евклидовом пространстве, изученные нами в классическом случае, являются гладкими многообразиями.*

Пример 12.50. Сфера S^n , заданная в \mathbb{R}^{n+1} уравнением $\sum_k (x^k)^2 = 1$, является гладким многообразием, так как дифференциал уравнения обращается в нуль только в начале координат, которое не принадлежит сфере.

Пример 12.51. Рассмотрим *специальную линейную группу* $SL(n, \mathbb{R})$ вещественных матриц размера $n \times n$. Напомним, что по определению $SL(n, \mathbb{R})$ — множество всех квадратных вещественных матриц с определителем 1. Множество всех вещественных матриц размера $n \times n$ естественным образом отождествляется с линейным пространством \mathbb{R}^{n^2} (для этого достаточно записать квадратную матрицу X в виде одной длинной строки). Покажем, что $SL(n, \mathbb{R})$ является гладким многообразием размерности $n^2 - 1$. Действительно, $SL(n, \mathbb{R})$ может быть задано как множество уровня функции $\det X$, определенной на пространстве \mathbb{R}^{n^2} всех квадратных матриц:

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n^2} \mid \det X = 1\}.$$

Поэтому, в силу следствия 12.48, достаточно проверить, что $d(\det)$ не обращается в нуль в точках $X \in SL(n, \mathbb{R})$. Вычислим дифференциал функции $\det(X)$ в декартовых координатах (x_{ij}) , $1 \leq i, j \leq n$, пространства \mathbb{R}^{n^2} . Для этого заметим, что

$$\frac{\partial \det(X)}{\partial x_{ij}} = (-1)^{i+j} X_{ij},$$

где через X_{ij} обозначен минор матрицы X , соответствующий ее элементу x_{ij} (это следует из формулы разложения определителя по строке или столбцу). Осталось заметить, что одновременно все миноры X_{ij} не могут равняться нулю (иначе $\det X = 0$), поэтому $d(\det(X))$ не равен нулю, если $X \in SL(n, \mathbb{R})$. Таким образом, мы находимся в условиях следствия 12.48, из которого вытекает, что $SL(n, \mathbb{R})$ — гладкое многообразие размерности $n^2 - 1$.

12.7 Задачи

Задача 12.52. Показать, что объединение двух координатных осей не является многообразием.

Задача 12.53. Задать на двумерном торе $T^2 = S^1 \times S^1$ структуру двумерного топологического многообразия.

Задача 12.54. Привести пример различных гладких структур на прямой \mathbb{R}^1 .

Задача 12.55. Проверить эквивалентность двух описанных выше атласов на стандартной сфере.

Задача 12.56. Рассмотрим на прямой \mathbb{R} атлас, состоящий из двух карт $(\mathbb{R}, \varphi: x \mapsto x)$, $(\mathbb{R}, \psi: x \mapsto x^3)$ и задающий на \mathbb{R} структуру топологического многообразия. Показать, что оно не является гладким. Модифицировать предыдущий пример так, чтобы получилось многообразие класса C^2 , но не C^3 .

Задача 12.57. Показать, что комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ является комплексно-аналитическим многообразием комплексной размерности n .

Задача 12.58. Показать, что гладкие многообразия $\mathbb{R}^1(x)$ с картой $(\mathbb{R}^1, \varphi(x) = x)$ и $\mathbb{R}^1(y)$ с картой $(\mathbb{R}^1, \varphi(y) = y^3)$ диффеоморфны.

Задача 12.59. Показать, что любое некомпактное связное одномерное многообразие диффеоморфно \mathbb{R}^1 , а любое компактное связное одномерное многообразие диффеоморфно окружности S^1 .

Задача 12.60. Рассмотрим в \mathbb{R}^4 поверхность, заданную системой уравнений

$$\begin{cases} (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1, \\ (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1. \end{cases}$$

Показать, что эта поверхность в \mathbb{R}^4 является гладким многообразием размерности 2 и это многообразие диффеоморфно двумерному тору $T^2 = S^1 \times S^1$.

Задача 12.61. Показать, что следующие матричные группы являются гладкими многообразиями, и определить их размерность:

$$\begin{aligned} GL(n, \mathbb{R}) &= \{X \in \mathbb{R}^{n^2} \mid \det X \neq 0\}, \\ O(n, \mathbb{R}) &= \{X \in \mathbb{R}^{n^2} \mid XX^T = E\}, \\ SO(n, \mathbb{R}) &= \{X \in \mathbb{R}^{n^2} \mid XX^T = E, \det X = 1\}, \\ U(n, \mathbb{R}) &= \{X \in \mathbb{C}^{n^2} = \mathbb{R}^{2n^2} \mid X\bar{X}^T = E\}, \\ SU(n, \mathbb{R}) &= \{X \in \mathbb{C}^{n^2} = \mathbb{R}^{2n^2} \mid X\bar{X}^T = E, \det X = 1\}. \end{aligned}$$

Исследовать эти матричные группы на компактность и линейную связность.

Задача 12.62. Показать, что многообразие $O(2)$ гомеоморфно объединению двух окружностей. Чему равны радиусы этих окружностей? Как расположены эти окружности в \mathbb{R}^4 (зацеплены ли они)?

Задача 12.63. Доказать, что отображение $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$, сопоставляющее точке p на сфере S^2 прямую, проходящую через начало координат и точку p , является гладким отображением гладких многообразий.

Задача 12.64. Доказать, что при $n \neq m$ пространства \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m не диффеоморфны.

Задача 12.65. Какому многообразию гомеоморфно множество всех ориентированных (неориентированных) прямых на плоскости?

Задача 12.66. Докажите, что $O(n)$ и $SL(n, \mathbb{R})$ являются гладкими подмногообразиями в \mathbb{R}^{n^2} .

12.8 Дополнительный материал

12.8.1 Патологические примеры

Приводимые здесь примеры иллюстрируют важность всех требований из определения многообразия.

Пример 12.67. Приведем пример топологического пространства, для которого выполняются все условия из определения многообразия, кроме хаусдорфовости. Для этого возьмем два экземпляра прямой \mathbb{R} и отождествим все точки с одинаковыми координатами, за исключением точек 0. Полученное топологическое пространство, наделенное фактор-топологией, называется *прямой Александры*. Докажите, что это пространство не является хаусдорфовым (точки 0 не отделимы), хотя все остальные условия из определения многообразия выполняются.

Пример 12.68. Приведем пример топологического пространства, для которого выполняются все условия из определения многообразия, кроме существования счетной системы карт. Представим двумерную плоскость \mathbb{R}^2 как дизъюнктивное объединение параллельных прямых (с топологией дизъюнктивного объединения). Каждая прямая гомеоморфна \mathbb{R}^1 , однако в построенном пространстве X нельзя выбрать никакого счетного атласа.

12.8.2 Задание структуры гладкого многообразия на множестве

По определению структура гладкого многообразия задается на некотором хаусдорфовом топологическом пространстве. Предположим теперь, что у нас есть произвольное множество X (без какой бы то ни было топологии) и фиксирована не более чем счетная система его подмножеств $\{U_\alpha\}$, такая, что:

- подмножества U_α покрывают X ;
- для каждого U_α фиксировано взаимно-однозначное отображение $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$;
- если функции перехода, т.е. композиции вида $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$, определена, то она является гладкой.

Тогда на множестве X можно ввести структуру хаусдорфова топологического пространства, и относительно этой структуры X будет гладким многообразием.

Действительно, достаточно объявить открытыми в X те и только те подмножества, образы пересечений которых с любым из U_α открыты в \mathbb{R}^n .

Упражнение 12.69. Проверить, что в результате действительно получится некоторая топология на X . Показать, что X — хаусдорфово. Показать, что семейство $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ задает на X структуру гладкого многообразия.

Замечание 12.70. Отметим, что если проделать описанную только что процедуру для гладкого многообразия M , то в результате получим на M топологию, эквивалентную исходной. В этом смысле гладкая структура многообразия определяет его топологию (как, скажем, метрика определяет топологию метрического пространства).

12.8.3 Гомеоморфизм $\mathbb{R}P(3)$ и $SO(3)$

Многие из рассмотренных нами многообразий “устроены одинаково” с точки зрения топологии, т.е. гомеоморфны друг другу. Приведем пример.

Теорема 12.71. *Трехмерное проективное пространство $\mathbb{R}P(3)$ гомеоморфно группе $SO(3)$ матриц специальных (т.е. с определителем 1) ортогональных преобразований трехмерного евклидова пространства \mathbb{R}^3 .*

Доказательство. Напомним, что каждое преобразование $A \in SO(3)$, $A \neq E$ представляет собой вращение вокруг некоторой оси ℓ на некоторый угол φ , $0 < \varphi \leq \pi$. Рассмотрим замкнутый шар D^3 радиуса π с центром в начале координат O и определим отображение $\nu: D^3 \rightarrow SO(3)$. Для этого поставим в соответствие точке $O \in D^3$ тождественное преобразование E ; отличной от O точке $P \in D^3$, не лежащей на границе шара D^3 , вращение A вокруг прямой OP на угол $\varphi = |P|$, причем из двух возможных преобразований этого типа выберем то, которое удовлетворяет следующему условию: если Π — плоскость, ортогональная к ℓ , и $v \in \Pi$ — произвольный ненулевой вектор, то потребуем, чтобы репер (v, Av, OP) был положительно ориентирован. Наконец, каждой граничной точке P шара D^3 поставим в соответствие вращение вокруг прямой OP на угол π (такое вращение определено однозначно). Образ отображения ν совпадает с $SO(3)$; отображение ν взаимно-однозначно на внутренности шара D^3 ; каждой паре диаметрально противоположных точек из границы шара D^3 ставится в соответствие одно и то же вращение, причем разным парам таких точек сопоставляются разные вращения, отличные от тех, которые соответствуют точкам внутренности шара D^3 . Так как ось вращения и

угол поворота непрерывно зависят от коэффициентов матрицы поворота, то $SO(3)$ гомеоморфно диску D^3 , у которого отождествлены диаметрально противоположные точки границы.

В то же время каждая точка проективного пространства $\mathbb{R}P^3$ — это некоторая проходящая через начало координат прямая ℓ в \mathbb{R}^4 , где фиксированы координаты (x^1, \dots, x^4) . Рассмотрим стандартную сферу S^3 , и пусть $S_+^3 = S^3 \cap \{x^4 \geq 0\}$ — замкнутая полусфера. Ясно, что S_+^3 гомеоморфна замкнутому трехмерному диску (гомеоморфизм задается проекцией на трехмерное пространство $\{x^4 = 0\}$). Если ℓ не лежит в $\{x^4 = 0\}$, то она пересекает полусферу S_+^3 в единственной точке. Если же ℓ лежит в $\{x^4 = 0\}$, то она пересекает полусферу в двух диаметрально противоположных точках. Таким образом, $\mathbb{R}P^3$ гомеоморфно диску S_+^3 , у которого отождествляются противоположные точки границы. Доказательство закончено. \square

Тема 13

Касательное пространство к многообразию, дифференциал

Напомним, что касательными векторами к поверхности M в данной точке $P \in M$ называются вычисленные в точке P векторы скоростей гладких кривых, лежащих на поверхности M и проходящих через точку P . В этом определении использовано то обстоятельство, что поверхность рассматривалась как подмножество векторного пространства.

В случае абстрактных многообразий дело обстоит несколько сложнее (абстрактное гладкое многообразие нигде, вообще говоря, не лежит). Тем не менее, имеется естественное определение касательного вектора в точке к гладкому многообразию M , использующее возможность ввести в окрестности каждой точки многообразия локальные координаты. Мы приведем три эквивалентных определения касательного вектора (в разных задачах оказывается удобным использовать разные определения).

13.1 Определения касательного вектора

Итак, пусть M — гладкое многообразие размерности n и $P \in M$ — некоторая точка. Мы начнем с так называемого “алгебраического” или тензорного определения.

Определение 13.1. *Касательный вектор V в точке P — это соответствие, сопоставляющее каждой системе координат (x^1, \dots, x^n) в P набор из n чисел (v^1, \dots, v^n) , которые называются компонентами касательного вектора V в координатах (x^1, \dots, x^n) , причем, если (x^1, \dots, x^n) и (y^1, \dots, y^n) — две системы координат в окрестности точки P и*

$$V: (x^1, \dots, x^n) \mapsto (v^1, \dots, v^n), \quad \text{и} \quad V: (y^1, \dots, y^n) \mapsto (w^1, \dots, w^n),$$

то $w^i = \sum_j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} v^j$, где $J = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)$ — матрица Якоби функции перехода из координат x в координаты y , вычисленная в точке P (сравните с законом изменения касательного к поверхности вектора при замене криволинейных координат).

Конструкция 13.2. Пусть в окрестности точки $P \in M$ фиксированы некоторые координаты (x^1, \dots, x^n) . Сопоставим им произвольный набор чисел (v^1, \dots, v^n) . С помощью правила пересчета компонент касательного вектора, приведенного в определении 13.1, вычислим набор чисел (w^1, \dots, w^n) в каждой другой системе координат (y^1, \dots, y^n) . Тем самым, мы продолжим соответствие $V: (x^1, \dots, x^n) \mapsto (v^1, \dots, v^n)$, положив

$$V: (y^1, \dots, y^n) \mapsto (w^1, \dots, w^n), \quad \text{где} \quad w^i = \sum_j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(P)v^j.$$

Построенное соответствие V сопоставляет каждой системе координат в окрестности точки P свой набор чисел.

Лемма 13.3. Построенное выше соответствие V задает касательный вектор к многообразию M в точке P .

Доказательство. Для доказательства достаточно проверить, что для двух произвольных систем координат (y^1, \dots, y^n) и (z^1, \dots, z^n) в точке P соответствующие им наборы чисел связаны между собой так, как предписано определением 13.1.

Положим

$$V: (y^1, \dots, y^n) \mapsto (w^1, \dots, w^n), \quad \text{и} \quad V: (z^1, \dots, z^n) \mapsto (u^1, \dots, u^n).$$

По определению отображения V , числа u^i и w^i выражаются через исходный набор чисел (v^1, \dots, v^n) так:

$$w^i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^k}(P)v^k \quad \text{и} \quad u^i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial z^i}{\partial x^k}(P)v^k, \quad i = 1, \dots, n.$$

Отсюда, в силу обратимости матрицы Якоби функции перехода, легко находим, что

$$v^k = \sum_{p=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial z^p}(P)u^p, \quad k = 1, \dots, n,$$

и окончательно

$$w^i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \left(\sum_{p=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial z^p} u^p \right) = \sum_{p=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial z^p} \right) u^p = \sum_{p=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial z^p} u^p,$$

т.е. построенные наборы чисел связаны так, как и предписано определением. Лемма доказана. \square

Утверждение 13.4. Множество $T_P M$ всех касательных векторов в произвольной точке P гладкого многообразия M образует n -мерное векторное пространство, называемое касательным пространством к многообразию M в точке P .

Доказательство. В силу леммы 13.3 любой набор чисел (v^1, \dots, v^n) , заданный в фиксированной системе координат (x^1, \dots, x^n) (в окрестности точки P), можно единственным образом превратить в касательный вектор v , и обратно: касательный вектор v однозначно определяет набор чисел (v^1, \dots, v^n) — своих компонент в выбранной системе

координат. Определив сложение и умножение касательных векторов на числа как соответствующие покомпонентные операции на этих наборах, мы введем на множестве $T_P M$ всех касательных векторов структуру n -мерного векторного пространства. Осталось заметить, что эти операции не зависят от выбора системы координат (x^1, \dots, x^n) . Утверждение доказано. \square

Конструкция 13.5. Пусть (x^1, \dots, x^n) — фиксированная система координат в окрестности точки P многообразия M . Из доказательства утверждения 13.4 вытекает, что следующий набор касательных векторов, заданных в соответствии с леммой 13.3, образует базис в линейном пространстве $T_P M$:

$$E_i: (x^1, \dots, x^n) \mapsto (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad i = 1, \dots, n,$$

где единица расположена на i -ом месте. Если $V \in T_P M$ — произвольный касательный вектор и $V: (x^1, \dots, x^n) \mapsto (v^1, \dots, v^n)$, то $V = \sum_i v_i E_i$.

Определение 13.6. Базис $\{E_1, \dots, E_n\}$ называется *каноническим* базисом в $T_P M$, соответствующим координатам x^1, \dots, x^n .

Замечание 13.7. Чтобы подчеркнуть, каким именно координатам соответствует канонический базис, для векторов E_i часто используют обозначения ∂_{x^i} . Смысл этих обозначений будет объяснен ниже, см. замечание 13.25.

Конструкция 13.8. Пусть $\gamma: I \rightarrow M$ — гладкая кривая на многообразии M , проходящая через точку $P = \gamma(t_0)$. Сопоставим локальным координатам (x^1, \dots, x^n) набор компонент вектора скорости кривой γ в точке P в этих координатах. Более точно, если $x^i(t)$, $i = 1, \dots, n$, — координатные функции кривой γ , то

$$\dot{\gamma}: (x^1, \dots, x^n) \mapsto (\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n).$$

Лемма 13.9. Построенное выше соответствие $\dot{\gamma}$ является касательным вектором к многообразию M в точке P .

Доказательство. Действительно, пусть как и выше $x^i(t)$ — координатное представление кривой γ в координатах (x^1, \dots, x^n) . Рассмотрим в окрестности точки P еще одну систему координат (y^1, \dots, y^n) , и пусть $y^i(t)$ — координатное представление кривой γ в них. Тогда, по теореме о производной сложной функции,

$$\dot{y}^i(t_0) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^k}(P) \dot{x}^k(t_0),$$

т.е. наборы чисел

$$(\dot{x}^1(t_0), \dots, \dot{x}^n(t_0)), \quad (\dot{y}^1(t_0), \dots, \dot{y}^n(t_0))$$

действительно связаны между собой как компоненты касательного вектора. \square

Определение 13.10. Касательный вектор $\dot{\gamma}$ называется *вектором скорости кривой γ в точке P* .

Дадим теперь “геометрическое” определение касательного вектора.

Конструкция 13.11. Пусть γ_1 и γ_2 — две гладкие кривые на гладком многообразии M , такие, что $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P$. Фиксируем произвольную систему координат в окрестности P . Заметим, что если векторы скоростей кривых γ_i в точке P в этой системе координат, т.е. векторы $\dot{\gamma}_1(0)$ и $\dot{\gamma}_2(0)$, равны, то они равны и в любой другой системе координат (как мы уже видели в доказательстве леммы 13.9, при замене координат компоненты вектора скорости пересчитываются с помощью матрицы Якоби). Таким образом, корректно определено следующее отношение эквивалентности: проходящие через точку P кривые γ_1 и γ_2 эквивалентны в P , если их векторы скоростей в P равны в некоторой (а, значит, и в любой) системе координат.

Определение 13.12. Класс эквивалентности кривых, проходящих через точку P , называется *касательным вектором в точке P* .

Утверждение 13.13. “Алгебраическое” и “геометрическое” определения касательного вектора эквивалентны. Более формально, по каждому касательному вектору в смысле одного определения, можно взаимно однозначно построить касательный вектор в смысле второго определения.

Доказательство. В соответствие с конструкцией 13.8, каждой гладкой кривой, проходящей через точку P , соответствует касательный вектор в смысле “алгебраического” определения. При этом, из конструкции 13.11 вытекает, что этот вектор одинаков для эквивалентных кривых, т.е. он строится по классу эквивалентности или, другими словами, по касательному вектору в смысле “геометрического” определения. Более того, для разных классов эквивалентности получаются, очевидно, разные касательные векторы.

Остается заметить, что так может быть получен произвольный касательный вектор $V: (x^1, \dots, x^n) \mapsto (v^1, \dots, v^n)$. Действительно, пусть $P = (P^1, \dots, P^n)$ в координатах (x^1, \dots, x^n) , и γ — гладкая кривая, заданная в этих координатах так: $(P^1 + v^1 t, \dots, P^n + v^n t)$. Тогда V совпадает с вектором скорости кривой γ в точке P в смысле определения 13.10. Утверждение доказано. \square

Замечание 13.14. Соответствие, построенное в доказательстве утверждения 13.13, переносит структуру n -мерного векторного пространства $T_P M$ на множество классов эквивалентности кривых, проходящих через точку P .

Замечание 13.15. Пусть (x^1, \dots, x^n) — некоторые координаты в окрестности точки $P = (x_0^1, \dots, x_0^n)$. Тогда проходящая через P кривая γ_i , координатные функции которой имеют вид

$$x^j(t) = x_0^j, \quad j \neq i, \quad x^i(t) = x_0^i + t,$$

называется *i -й координатной линией*. Вектор скорости координатной линии γ_i в точке P совпадает с вектором E_i канонического базиса касательного пространства $T_P M$, соответствующего (x^1, \dots, x^n) . Поэтому, с точки зрения “геометрического” определения, векторы канонического базиса — это классы $[\gamma_i]$ эквивалентности координатных линий, проходящих через точку P

Перейдем, наконец, к третьему, так называемому “дифференциальному”, определению касательного вектора.

Определение 13.16. Операция ψ , сопоставляющая каждой гладкой функции, определенной в окрестности точки P , число $\psi(f)$, такая, что

$$\psi(\alpha f + \beta g) = \alpha\psi(f) + \beta\psi(g), \quad \psi(fg) = \psi(f)g(P) + f(P)\psi(g),$$

называется *дифференцированием в точке P* . Последнее соотношение называется *правилем Лейбница*.

Пример 13.17. Пусть f — некоторая гладкая функция, определенная в окрестности точки P , и γ — произвольная гладкая кривая, проходящая через точку P , $\gamma(t_0) = P$. Тогда естественным образом определяется производная функции f вдоль кривой γ (в точке P):

$$\dot{\gamma}(f) = \left. \frac{df(\gamma(t))}{dt} \right|_{t=t_0}.$$

Эта операция, как легко проверить, линейна и удовлетворяет правилу Лейбница и поэтому является дифференцированием в точке P .

Пример 13.18. Пусть в окрестности точки P фиксированы координаты (x^1, \dots, x^n) , и γ_i — это i -ая координатная линия. Тогда

$$\dot{\gamma}_i(f) = \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_{t=t_0}$$

для произвольной гладкой функции f . Таким образом, операция взятия частной производной в точке — это дифференцирование в точке в смысле определения 13.16.

Следующее утверждение непосредственно следует из определений.

Утверждение 13.19. Если φ и ψ — два дифференцирования в точке P , то их линейная комбинация с вещественными коэффициентами α и β , определенная формулой

$$(\alpha\varphi + \beta\psi)(f) = \alpha\varphi(f) + \beta\psi(f),$$

где f — произвольная гладкая функция, также является дифференцированием в точке P . Множество всех дифференцирований в точке P образует векторное пространство.

Определение 13.20. Касательным вектором в точке P называется произвольное дифференцирование в этой точке, имеющее в некоторых координатах x^i вид

$$f \mapsto \sum_i v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(P),$$

где v^i — некоторый набор чисел.

Замечание 13.21. Операция из определения 13.20 действительно является дифференцированием в силу утверждения 13.19 и примера 13.18, так как представляет собой линейную комбинацию дифференцирований (частных производных) с вещественными коэффициентами.

Замечание 13.22. На самом деле можно показать, что любое дифференцирование представляет собой линейную комбинацию частных производных с вещественными коэффициентами (см. дополнительный материал).

Утверждение 13.23. Пусть в координатах (x^1, \dots, x^n) в окрестности точки $P \in M$ операция дифференцирования ψ имеет вид

$$\psi: f \mapsto \sum_i v^i \frac{\partial f}{\partial x_i}(P),$$

где v^i — некоторый набор чисел. Тогда, если (y^1, \dots, y^n) — другие координаты в окрестности точки P , то

$$\psi: f \mapsto \sum_j w^j \frac{\partial f}{\partial y_j}(P), \quad \text{где } w^j = \sum_i v^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(P).$$

Доказательство. Действительно, по теореме о производной сложной функции, имеем:

$$\sum_i v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \sum_i v^i \left[\sum_j \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial y^j} \right] = \sum_j \left[\sum_i v^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right] \frac{\partial f}{\partial y^j} = \sum_j w^j \frac{\partial f}{\partial y^j},$$

что и требовалось. □

Теорема 13.24. Три приведенные выше определения касательного вектора эквивалентны.

Доказательство. Эквивалентность первых двух определений уже доказана в утверждении 13.13. Эквивалентность первого и третьего определений немедленно вытекает из утверждения 13.23. Действительно, (x^1, \dots, x^n) — координаты в окрестности точки P , и V — касательный вектор из $T_P M$ в смысле первого определения,

$$V: (x^1, \dots, x^n) \mapsto (v^1, \dots, v^n),$$

то ему соответствует дифференцирование

$$\partial_V: f \mapsto \sum_i v^i \frac{\partial f}{\partial x_i}(P),$$

и наоборот. Построенное соответствие определено корректно, так как в силу утверждения 13.23 компоненты вектора V меняются при замене координат по тому же правилу, что и коэффициенты, стоящие при частных производных в формуле для дифференцирования ∂_V . Теорема доказана. □

Замечание 13.25. Пусть (x^1, \dots, x^n) — координаты в окрестности точки P . Тогда из замечания 13.15 и примера 13.18 вытекает, что с точки зрения “дифференциального” определения векторы канонического базиса пространства $T_P M$, соответствующего координатам (x^1, \dots, x^n) , — это дифференцирования, представляющие собой частные производные вдоль соответствующих координат, $E_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Поэтому векторы канонического базиса часто обозначаются через $\frac{\partial}{\partial x^i}$ или, кратко, через ∂_{x^i} .

13.2 Касательное расслоение

В этом разделе мы построим еще один важный пример многообразия — *касательное расслоение*.

Конструкция 13.26. Пусть M — произвольное гладкое многообразие и $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — его атлас. Рассмотрим множество $T(M)$ всех касательных пространств к многообразию M

$$T(M) = \cup_{P \in M} T_P M$$

и превратим данное множество в гладкое многообразие. Отметим, что элементы множества $T(M)$ — это все касательные векторы во всех точках многообразия M .

Определим отображение $\pi: T(M) \rightarrow M$, сопоставив каждому вектору V из $T(M)$ ту единственную точку $P \in M$, для которой выполнено $V \in T_P M$. Пусть теперь (x^1, \dots, x^n) — координаты, определенные на карте U многообразия M . Рассмотрим множество $TU = \pi^{-1}(U)$ и определим отображение $\Phi_U: TU \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ так:

$$\Phi_U: V \mapsto (x_0^1, \dots, x_0^n, v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^{2n},$$

где V — элемент из $T_P M$, (x_0^1, \dots, x_0^n) и (v^1, \dots, v^n) — координаты точки P и компоненты касательного вектора V в координатах (x^1, \dots, x^n) соответственно. Поскольку касательный вектор однозначно определяется своими компонентами, отображение Φ_U взаимно-однозначно с образом.

Введем на $T(M)$ топологию так, чтобы для каждой карты U на M соответствующее отображение Φ_U было бы гомеоморфизмом. Подмножество $X \subset T(M)$ назовем открытым в $T(M)$, если и только если Φ_U -образ пересечения X с произвольным множеством вида TU открыт в \mathbb{R}^{2n} для каждой карты U на M . Тогда прообраз любого открытого подмножества из \mathbb{R}^{2n} при отображении Φ_U открыт в $T(M)$, поэтому Φ_U непрерывно, и Φ_U -образ каждого открытого подмножества из $T(M)$ открыт в \mathbb{R}^{2n} , поэтому Φ_U^{-1} тоже непрерывно.

Итак, мы ввели на $T(M)$ топологию и построили атлас $\{(TU_\alpha, \Phi_\alpha)\}$, где $\Phi_\alpha = \Phi_{U_\alpha}$, т.е. $T(M)$ — топологическое многообразие размерности $2n$.

Утверждение 13.27. Построенный атлас $\{(TU_\alpha, \Phi_\alpha)\}$ — гладкий, тем самым, $T(M)$ — гладкое $2n$ -мерное многообразие.

Доказательство. Возьмем на $T(M)$ любые две карты $\mathcal{U}_\alpha = (TU_\alpha, \Phi_\alpha)$ и $\mathcal{U}_\beta = (TU_\beta, \Phi_\beta)$ такие, что $U_\alpha \cap U_\beta$ не пусто (только такие карты из построенного атласа пересекаются). Пусть $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n, v_\alpha^1, \dots, v_\alpha^n)$ и $(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n, v_\beta^1, \dots, v_\beta^n)$ — соответствующие координаты. Тогда функция перехода между этими двумя картами имеет вид

$$\begin{aligned} x_\beta^k &= x_\alpha^k(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n), \quad k = 1, \dots, n; \\ v_\beta^k &= \sum_{p=1}^n \frac{\partial x_\beta^k}{\partial x_\alpha^p}(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n) v_\alpha^p, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Эти функции гладкие, так как первые — это функции перехода между картами атласа многообразия M , а вторые — многочлены от компонент матрицы Якоби замены координат на многообразии M (которые, конечно, гладко зависят от точки) и координат v_α^p на $T(M)$. Утверждение доказано. \square

Определение 13.28. Гладкое многообразие $T(M)$, построенное выше, называется *касательным расслоением* многообразия M .

Замечание 13.29. Термин “расслоение” не является случайным. Многообразие $T(M)$ представляет собой объединение одинаковых подмножеств — *слоев*. В данном случае это прообразы точек $x \in M$ при проекции π , построенной выше. Каждый такой прообраз $\pi^{-1}(x)$ совпадает с касательным пространством $T_x M$, т.е. изоморфен линейному пространству \mathbb{R}^n .

Замечание 13.30. Касательные расслоения возникают при описании механических систем. Напомним, что множество всевозможных положений элементов механической системы в механике называют *конфигурационным пространством*. Выше отмечалось, что в реальных задачах конфигурационное пространство обычно представляет собой гладкое многообразие. В механике часто бывает необходимо учитывать не только расположение элементов системы, но и их скорости, т.е. рассматривать большее пространство — *фазовое пространство*, элементами которого являются пары (положение, скорость). Фазовое пространство механической системы естественно отождествляется с касательным расслоением к ее конфигурационному пространству.

Замечание 13.31. Аналогично определяется *кокасательное расслоение* T^*M к многообразию M . Слоями этого расслоения являются *кокасательные пространства* T_P^*M к точкам многообразия, т.е. пространства линейных функций на соответствующих касательных пространствах $T_P M$. Кокасательные расслоения возникают в гамильтоновой модели классической механики (при инвариантной интерпретации импульсы — суть линейные функции на векторах).

13.3 Определение дифференциала

Перейдем к построению основ дифференциального исчисления гладких отображений многообразий. Это даст возможность изучать локальные свойства таких отображений, пользуясь техническими средствами математического анализа. Фактически, мы просто “пересадим” соответствующие понятия с областей в \mathbb{R}^n на гладкие многообразия, воспользовавшись имеющейся на них гладкой структурой.

Конструкция 13.32. Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение m -мерного гладкого многообразия M в n -мерное гладкое многообразие N и $v \in T_P M$ — произвольный касательный вектор. Пусть γ — кривая, такая, что $\gamma(0) = P$ и $\dot{\gamma}(0) = v$. Рассмотрим образ кривой γ при отображении F . Если кривая γ задается гладким отображением $\gamma: (-1, 1) \rightarrow M$, то ее образ — это гладкая кривая в N , заданная отображением $F \circ \gamma$. Кривая $F \circ \gamma$ проходит через образ $F(P)$ точки P . Обозначим через w вектор скорости кривой $F \circ \gamma$ в точке $F(P)$. По определению, $w \in T_{F(P)} N$.

Определение 13.33. Дифференциал dF_P отображения F в точке P — это отображение $dF_P: T_P M \rightarrow T_{F(P)} N$ касательных пространств, заданное так: $dF_P(v) = w$.

Утверждение 13.34. Дифференциал отображения F — это линейное отображение касательных пространств. Если $F(P) = Q$, и в окрестностях точек P и Q фиксированы системы координат, то, в соответствующих канонических базисах, матрица дифференциала dF_P — это матрица Якоби отображения F в этих координатах.

Доказательство. Пусть (x^1, \dots, x^m) — координаты на M в окрестности точки P и (y^1, \dots, y^n) — координаты на N в окрестности точки Q , а $y^i = y^i(x^1, \dots, x^m)$ — координатное представление отображения F . Пусть $x^i = x^i(t)$ — координатное представление кривой γ . Тогда координатное представление кривой $F \circ \gamma$ имеет вид $y^i = y^i(x^1(t), \dots, x^m(t))$. В результате получаем

$$dF_P(v) = \frac{d(F \circ \gamma)}{dt}(0) = \left(\sum_j \frac{\partial y^1}{\partial x^j}(P)v^j, \dots, \sum_j \frac{\partial y^n}{\partial x^j}(P)v^j \right) = Jv,$$

где J — матрица Якоби отображения F в точке P в локальных координатах (x^1, \dots, x^m) и (y^1, \dots, y^n) . Утверждение доказано. \square

Упражнение 13.35. Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий. Проверить, что для произвольной гладкой функции h на N и произвольного вектора $v \in T_P M$ имеет место равенство

$$dF_P(v)(h) = v(h \circ F).$$

Пример 13.36. В частном случае гладкой функции $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, заданной на гладком многообразии M , в каждой точке $P \in M$ имеем линейный функционал $df_P: T_P M \equiv \mathbb{R}^m \rightarrow T_{f(P)}\mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}^1$. Матрица этого функционала в локальных координатах (x^1, \dots, x^m) на M — это строка, состоящая из частных производных $\partial f / \partial x^i$. Этот функционал называют *дифференциалом функции f в точке P* и обозначают $df|_P$. Подчеркнем, что строка, состоящая из частных производных функции, задает линейный функционал, а не вектор, как иногда учат в математическом анализе.

Упражнение 13.37. Пусть $f: M_1 \rightarrow M_2$ и $g: M_2 \rightarrow M_3$ — гладкие отображения гладких многообразий, $g \circ f$ — их композиция. Показать, что $d(g \circ f) = dg \circ df$.

13.4 Локальные свойства отображений

Рассмотрим локальные свойства гладких отображений, дифференциалы которых в некотором смысле невырождены, или так называемые свойства “*общего положения*”. Начнем с аналога теоремы о неявной функции.

Определение 13.38. Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий. Точка $P \in M$ называется *регулярной точкой отображения F* , если дифференциал dF_P отображения F в точке P является эпиморфизмом, т.е. образ дифференциала dF_P совпадает со всем пространством $T_{F(P)}N$. Точка $Q \in N$ называется *регулярной точкой отображения F* , или *регулярным значением отображения F* , если всякая точка из прообраза $F^{-1}(Q)$ этой точки является регулярной для отображения F .

Замечание 13.39. Если прообраз точки Q при отображении F пуст, то, по определению, точка Q является регулярным значением отображения F .

Замечание 13.40. Отметим, что регулярность отображения в точке $P \in M$ влечет следующее соотношение на размерности многообразий:

$$m = \dim M \geq \dim N = n = \text{rank } dF_P.$$

Определение 13.41. Точка P многообразия M называется *критической точкой* отображения M , если дифференциал dF_P не является эпиморфизмом, т.е. если P не является регулярной точкой отображения F . Точка Q называется *критическим значением* отображения F , если существует критическая точка $P \in M$ отображения F , такая, что $F(P) = Q$.

Замечание 13.42. Если $\dim M < \dim N$, то любая точка многообразия M является критической точкой отображения F . Поэтому множество критических значений отображения F в этом случае совпадает с $F(M)$.

Определение 13.43. Если все точки многообразия M являются регулярными для отображения F , то отображение F называется *субмерсией*.

Теорема 13.44. Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий, $Q \in N$ — регулярное значение отображения F , и прообраз точки Q не пуст. Тогда прообраз $W = F^{-1}(Q)$ точки Q является гладким многообразием размерности $\dim M - \dim N$. При этом в качестве координат в окрестности каждой точки из W можно взять некоторые координаты объемлющего многообразия.

Доказательство. Переформулируем условие регулярности точки Q в координатах. Обозначим через P какую-нибудь точку из $F^{-1}(Q)$. Пусть (x^1, \dots, x^m) и (y^1, \dots, y^n) — координаты в окрестности точек P и Q соответственно и пусть $y^i = f^i(x^1, \dots, x^m)$, $i = 1, \dots, n$, — координатное представление отображения F . Рассмотрим множество $W = F^{-1}(Q)$ и с помощью координатного гомеоморфизма отождествим некоторую окрестность точки P в W с подмножеством \tilde{W} пространства \mathbb{R}^m . Тогда \tilde{W} задается в \mathbb{R}^m набором уравнений

$$f^i(x^1, \dots, x^m) = y^i(Q), \quad i = 1, \dots, n.$$

Дифференциал dF_P отображения F в точке P матрицей Якоби отображения F в точке P , поэтому условие эпиморфности дифференциала — это условие равенства ранга этой матрицы Якоби размерности многообразия N , т.е. $\text{rank } dF_P = n$. Но тогда применима теорема 12.46, и множество \tilde{W} является гладким многообразием размерности $m - n$, причем в качестве координат в нем могут быть выбраны некоторые координаты из (x^1, \dots, x^m) . Поэтому и W является гладким многообразием, так как для получения атласа на W достаточно рассмотреть композицию координатных гомеоморфизмов, построенных нами для \tilde{W} , и гомеоморфизма, отождествляющего W и \tilde{W} . Доказательство закончено. \square

Таким образом, эпиморфность дифференциала отвечает за то, что прообраз соответствующей точки “устроен хорошо”. Оказывается, мономорфность дифференциала отвечает за “хорошие” свойства образа.

Определение 13.45. Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий. Отображение F назовем *погружением*, или *иммерсией*, если в каждой точке P из M дифференциал dF_P отображения F в точке P является мономорфизмом, т.е. отображение dF_P взаимно-однозначно с образом.

Замечание 13.46. Если дифференциал отображения $F: M \rightarrow N$ — мономорфизм, то выполнено следующее соотношение на размерности многообразий:

$$\text{rank } dF_P = m = \dim M \leq \dim N = n.$$

Определение 13.47. Погружение F называется *вложением*, если оно задает гомеоморфизм многообразия M с образом $F(M)$ (на $F(M)$ рассматривается топология, индуцированная из N).

Замечание 13.48. Если $F: M \rightarrow N$ — произвольное погружение, то, по теореме о неявной функции, у каждой точки $P \in M$ существует такая окрестность U , что ограничение отображения F на U — гомеоморфизм с образом. Поэтому каждое погружение *локально* является вложением.

Пример 13.49. Рассмотрим семейство F_a отображений прямой $\mathbb{R}^1(x)$ в плоскость $\mathbb{R}^2(y^1, y^2)$, заданное в виде $F_a: x \mapsto (x^2, x^3 + ax)$. Матрица Якоби этого отображения имеет вид $(2x, 3x^2 + a)$. Поэтому, если $a \neq 0$, отображение F_a является погружением. Если же $a = 0$, то в точке $x = 0$ ранг матрицы Якоби равен нулю и наше отображение — не погружение. Далее, как легко проверить, отображение F_a является вложением, если и только если $a > 0$. Если же $a < 0$, то кривая $F_a(x)$ имеет самопересечение. Вид кривой $F_a(x)$ при разных значениях параметра a приведен на рис. 13.1.

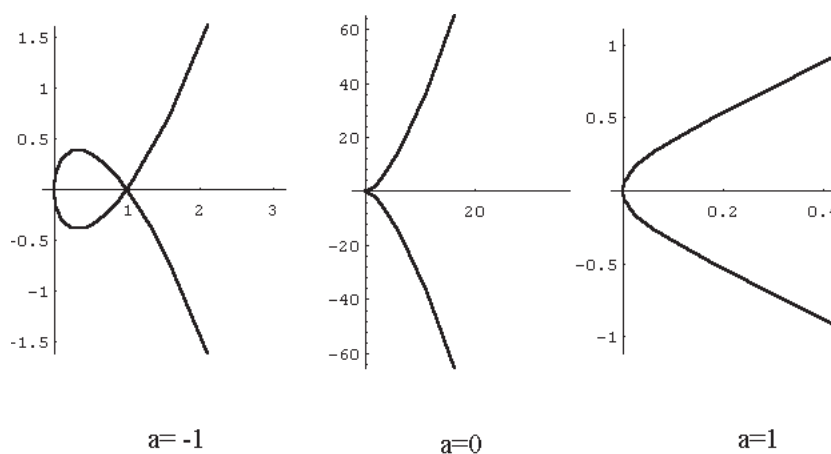


Рис. 13.1: Семейство кривых $F_a(x)$.

Образ многообразия при погружении может и не быть многообразием: например, кривая $F_a(x)$ при $a < 0$ не является многообразием (в топологии, индуцированной из \mathbb{R}^2).

Определение 13.50. Подмножество M гладкого многообразия N размерности n называется *гладким подмногообразием размерности m* , если для каждой точки $P \in M$ существует такая карта (U, φ) многообразия N , $P \in U$, что множество $\varphi(M \cap U)$ является m -мерной регулярной поверхностью в \mathbb{R}^n .

Легко проверить, что справедливо следующее утверждение.

Предложение 13.51. Произвольное m -мерное гладкое подмногообразие $M \subset N$ является m -мерным гладким многообразием. Отображение включения $M \hookrightarrow N$ является вложением. Обратное, образ $F(M)$ произвольного вложения $F: M \rightarrow N$ является подмногообразием.

Замечание 13.52. Образ погружения называется иногда *погруженным подмногообразием*, хотя подмногообразием он, вообще говоря, не является.

Пример 13.53. Пусть $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — взаимно-однозначное погружение, заданное так, как показано на рис. 13.2. Каждая окрестность точки $f(a)$ в индуцированной из \mathbb{R}^2 топологии содержит, кроме интервала вида $(f(b), f(c))$, еще и некоторый интервал, прообраз которого является лучом. Поэтому отображение f^{-1} не является непрерывным, так как, например, прообраз интервала (b, c) , равный интервалу $(f(b), f(c))$, не есть открытое множество. Значит, отображение f не является вложением. Отметим, что подмножество $f(\mathbb{R}^1)$ плоскости \mathbb{R}^2 не является подмногообразием.

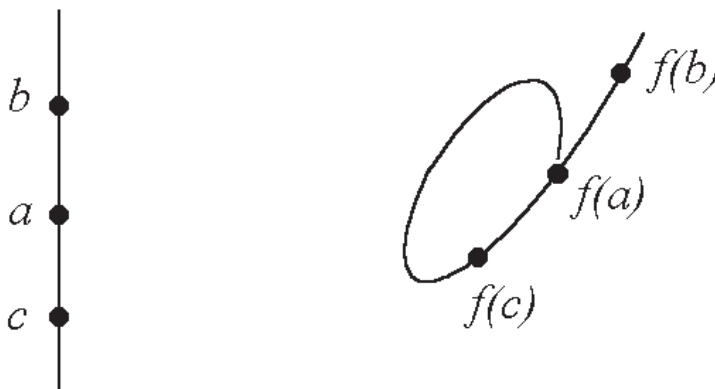


Рис. 13.2: Взаимно-однозначное погружение прямой в плоскость.

Упражнение 13.54. Показать, что в предположениях теоремы 13.44 многообразие $W = F^{-1}(Q)$ является подмногообразием в M .

Упражнение 13.55. Показать, что взаимно-однозначное с образом погружение компактного многообразия в произвольное многообразие является вложением.

В дальнейшем нам понадобятся следующие полезные примеры подмногообразий.

Пример 13.56. Пусть M — произвольное гладкое многообразие и $T(M)$ — касательное расслоение к M . Тогда определено подмножество M_0 касательного расслоения, состоящее из всех нулевых касательных векторов к многообразию M . Легко проверить, что M_0 — гладкое подмногообразие в $T(M)$, причем M_0 диффеоморфно M . Для этого достаточно рассмотреть отображение $i: M \rightarrow T_P M$, ставящее в соответствие точке $P \in M$ нулевой касательный вектор из $T_P M$, и убедиться, что это отображение — вложение. Многообразие M_0 обычно называют *нулевым сечением касательного расслоения*. Поскольку M_0 — замкнутое подмножество в $T(M)$, то непустое дополнение $T(M) \setminus M_0$ является открытым $2n$ -мерным гладким многообразием.

Пример 13.57. Пусть M — гладкое многообразие и $M \times M$ — прямое произведение M на себя. Рассмотрим в этом $2n$ -мерном многообразии подмножество $\Delta = \{(x, x) \mid x \in M\}$, называемое *диагональю*. Можно проверить, что Δ — гладкое подмногообразие в $M \times M$ размерности n , причем Δ диффеоморфно M . Для этого достаточно рассмотреть отображение $i: M \rightarrow M \times M$, переводящее точку $P \in M$ в точку $(P \times P)$, и убедиться, что i — вложение. Дополнение $M \times M \setminus \Delta$ является открытым $2n$ -мерным гладким многообразием.

Большинство известных нам примеров многообразий — это подмногообразия некоторого евклидова пространства \mathbb{R}^N достаточно большой размерности. Оказывается, это неслучайно. В следующей лекции будет показано, что произвольное многообразие может быть вложено в евклидово пространство, причем размерность этого пространства можно оценить.

13.5 Задачи

Задача 13.58. Вычислить образ горизонтального единичного вектора, касательного к двумерной сфере, при действии дифференциала стереографической проекции из северного полюса.

Задача 13.59. Доказать, что дифференциалы dx^i координатных функций x^i , вычисленные в точке P гладкого многообразия M , образуют базис векторного пространства T_P^*M , двойственного $T_P M$. Пространство T_P^*M называется *кокасательным*. Проверить, что базисы dx^1, \dots, dx^n и $\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}$ двойственны друг другу, т.е. $dx^i(\partial_{x^j}) = \delta_j^i$.

Задача 13.60. Перенести на случай гладкой функции на гладком многообразии понятие локального экстремума. Доказать, что в точках локального экстремума дифференциал гладкой функции равен нулю.

Задача 13.61. Построить пример функции на плоскости, у которой дифференциал нигде не равен нулю. Показать, что дифференциал произвольной гладкой функции на сфере S^2 обращается в нуль по крайней мере 2 раза. Что будет в случае тора $T^2 = S^1 \times S^1$, а также в случае проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$?

Задача 13.62. Построить вложение проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ в \mathbb{R}^5 и погружение в \mathbb{R}^3 (написать формулы).

Задача 13.63. Построить вложение тора T^n , т.е. прямого произведения n экземпляров окружности, в пространство \mathbb{R}^{n+1} .

Задача 13.64. Построить вложение $S^2 \times S^2$ в \mathbb{R}^5 .

Задача 13.65. Какому многообразию гомеоморфно касательное расслоение к окружности?

Задача 13.66. Гомеоморфно ли касательное расслоение к двумерной сфере прямому произведению сферы на плоскость?

13.6 Дополнительный материал

13.6.1 Пространство всех дифференцирований

Начнем с нескольких простейших свойств операции дифференцирования.

Предложение 13.67. Пусть \mathcal{D} — некоторая операция дифференцирования в точке P многообразия M . Тогда:

- (1) результат применения операции \mathcal{D} к постоянной функции равен нулю;
- (2) если f и g — гладкие функции на многообразии, обращающиеся в нуль в точке P , то $\mathcal{D}(fg) = 0$.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения заметим, что, в силу правила Лейбница, можно записать:

$$\mathcal{D}(1) = \mathcal{D}(1 \cdot 1) = 1 \mathcal{D}(1) + 1 \mathcal{D}(1) = 2 \mathcal{D}(1),$$

откуда $\mathcal{D}(1) = 0$. Поскольку любая постоянная c представляется в виде $c \cdot 1$, первое утверждение следует теперь из линейности дифференцирования.

Второе утверждение получается из формулы Лейбница:

$$\mathcal{D}(fg) = g(P) \mathcal{D}(f) + f(P) \mathcal{D}(g) = 0.$$

Утверждение доказано. □

Ясно, что операция взятия производной по направлению касательного вектора является операцией дифференцирования в смысле только что данного определения. Оказывается, что верно и обратное, а именно, имеет место следующий результат.

Предложение 13.68. Пусть M — гладкое многообразие, $P \in M$ — некоторая точка из M и \mathcal{D} — операция дифференцирования в точке P . Тогда существует единственный касательный вектор V к многообразию M в точке P , такой, что $\mathcal{D}(f) = V(f)(P)$ для любой гладкой функции f на M .

Доказательство. Доказательство утверждения проведем в локальных координатах. Нам понадобится следующее удобное представление произвольной гладкой функции, позволяющее записать её в виде квадратичной формы с переменными коэффициентами (это утверждение часто называют *леммой Морса*).

Лемма 13.69. Пусть (x^1, \dots, x^n) — локальная система координат на многообразии M в окрестности точки $P = (x_0^1, \dots, x_0^n)$. Всякая гладкая функция f на M может быть представлена в карте (x^1, \dots, x^n) в виде

$$f(x^1, \dots, x^n) = f(P) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k}(P)(x^k - x_0^k) + \sum_{k,p=1}^n h_{kp}(x^1, \dots, x^n)(x^k - x_0^k)(x^p - x_0^p),$$

где h_{kp} — некоторые гладкие функции на многообразии M , определенные в карте (x^1, \dots, x^n) .

Доказательство. Воспользуемся стандартным тождеством

$$f(x^1, \dots, x^n) = f(P) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x_0^1 + t(x^1 - x_0^1), \dots, x_0^n + t(x^n - x_0^n)) dt$$

и выполним дифференцирование под знаком интеграла. Получим:

$$\begin{aligned} f(x^1, \dots, x^n) &= f(P) + \\ &+ \int_0^1 \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k}(x_0^1 + t(x^1 - x_0^1), \dots, x_0^n + t(x^n - x_0^n))(x^k - x_0^k) dt = \\ &= f(P) + \sum_{k=1}^n h_k(x^1, \dots, x^n)(x^k - x_0^k), \end{aligned}$$

где $h_k(x^1, \dots, x^n)$ — это гладкие функции вида

$$h_k(x^1, \dots, x^n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^k}(x_0^1 + t(x^1 - x_0^1), \dots, x_0^n + t(x^n - x_0^n)) dt.$$

Отметим, что

$$h_k(P) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^k}(P) dt = \frac{\partial f}{\partial x^k}(P).$$

Применим теперь полученное только что разложение к функциям h_k . Тогда

$$h_k(x^1, \dots, x^n) = h_k(P) + \sum_{p=1}^n (x^p - x_0^p) h_{kp}(x^1, \dots, x^n),$$

где $h_{kp}(x^1, \dots, x^n)$ — снова некоторые гладкие функции. Окончательно для функции f можно записать:

$$\begin{aligned} f(x^1, \dots, x^n) &= f(P) + \sum_{k=1}^n (x^k - x_0^k) h_k(x^1, \dots, x^n) = \\ &= f(P) + \sum_{k=1}^n (x^k - x_0^k) h_k(P) + \\ &\quad + \sum_{k,p=1}^n (x^k - x_0^k)(x^p - x_0^p) h_{kp}(x^1, \dots, x^n) = \\ &= f(P) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k}(P)(x^k - x_0^k) + \\ &\quad + \sum_{k,p=1}^n (x^k - x_0^k)(x^p - x_0^p) h_{kp}(x^1, \dots, x^n). \end{aligned}$$

Лемма доказана. \square

Вернемся к доказательству утверждения. Воспользуемся леммой 13.69 для вычисления $\mathcal{D}(f)$. В силу свойств операции дифференцирования имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(f) &= \mathcal{D}(f(P)) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k}(P) \mathcal{D}((x^k - x_0^k)) + \\ &\quad + \sum_{k,p=1}^n \mathcal{D}((x^k - x_0^k)(x^p - x_0^p) h_{kp}(x^1, \dots, x^n)). \end{aligned}$$

Однако первое и последнее слагаемые в этой сумме равны нулю согласно утверждению 13.67. Поэтому

$$\mathcal{D}(f) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k}(P) \mathcal{D}((x^k - x_0^k)).$$

Определим касательный вектор V , положив его компоненты (v^1, \dots, v^n) в координатах (x^1, \dots, x^n) равными $v^k = \mathcal{D}((x^k - x_0^k))$. Тогда

$$\mathcal{D}(f) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k}(P) v^k = V(f).$$

Таким образом, мы установили существование искомого касательного вектора V .

Для доказательства единственности вектора V достаточно заметить, что если таких векторов два, то их разность Δ — тоже касательный вектор, причем $\Delta(f) = 0$ для любой функции f . Но отсюда следует, что $\Delta = 0$, т.е. векторы одинаковы. Утверждение доказано. \square

13.6.2 Локальное устройство субмерсий и иммерсий

Оказывается, локально все субмерсии и все иммерсии устроены одинаково.

Предложение 13.70. Пусть $P \in M$ — регулярная точка гладкого отображения $F: M \rightarrow N$. Тогда существуют локальные координаты (x^1, \dots, x^m) в окрестности $U \subset M$ точки P и (y^1, \dots, y^n) в окрестности $V \subset N$ точки $F(P)$, такие, что $F(U) \subset V$, и отображение F записывается в этих координатах в виде

$$y^i(x^1, \dots, x^m) = x^i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Доказательство. Действительно, пусть $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m)$ и $(\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^n)$ — произвольные координаты в U и V соответственно и $\tilde{y}^i = f^i(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m)$ — координатные функции отображения F . По определению ранг матрицы Якоби отображения F в точке P равен n , поэтому после перенумерации координат можно считать, что первые n столбцов матрицы Якоби линейно независимы. Тогда отображение

$$x^i = \begin{cases} f^i(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m), & i = 1, \dots, n, \\ \tilde{x}^i, & i = n + 1, \dots, m \end{cases}$$

задает замену координат в окрестности точки P . В этих координатах отображение F имеет вид

$$\tilde{y}^i = x^i, \quad i = 1, \dots, n,$$

что и требовалось доказать. \square

Из утверждения 13.70 следует, что локально все субмерсии устроены одинаково, а именно — это проекция \mathbb{R}^m на \mathbb{R}^n , переводящая точку (x^1, \dots, x^m) из \mathbb{R}^m в точку (x^1, \dots, x^n) из \mathbb{R}^n .

Все иммерсии локально устроены одинаково в следующем смысле.

Предложение 13.71. Пусть $F: M \rightarrow N$ — произвольное погружение и P — некоторая точка из M . Тогда существуют локальные координаты (x^1, \dots, x^m) в окрестности $U \subset M$ точки P и (y^1, \dots, y^n) в окрестности $V \subset N$ точки $F(P)$, такие, что $F(U) \subset V$, и отображение F записывается в этих координатах в виде

$$y^i(x^1, \dots, x^m) = x^i, \quad 1 \leq i \leq m, \quad y^i(x^1, \dots, x^m) = 0, \quad m + 1 \leq i \leq n.$$

Доказательство. Действительно, пусть $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m)$ и $(\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^n)$ — произвольные координаты в окрестностях $U \ni P$ и $V \ni F(P)$ и пусть $\tilde{y}^i = f^i(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m)$, $i = 1, \dots, n$, — координатное представление погружения F . По определению ранг матрицы Якоби отображения F в точке P равен m , поэтому после перенумерации координат на V можно предположить, что первые m строк этой матрицы линейно независимы. По теореме о неявной функции существуют гладкие функции $\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^m)$, $j = 1, \dots, m$, такие, что множество $F(U)$ задается в координатах $(\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^n)$ уравнениями

$$\tilde{y}^i = f^i(\tilde{x}^1(\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^m), \dots, \tilde{x}^m(\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^m)), \quad m + 1 \leq i \leq n.$$

Для завершения доказательства осталось сделать замены координат:

$$y^j = \begin{cases} \tilde{y}^j, & j = 1, \dots, m, \\ \tilde{y}^j - f^j(\tilde{x}^1(\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^m), \dots, \tilde{x}^m(\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^m)), & j = m + 1, \dots, n, \end{cases}$$

и

$$x^j = \tilde{y}^j(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m), \quad j = 1, \dots, m.$$

Утверждение доказано. \square

Утверждение 13.71 означает, что локально каждое погружение устроено как стандартное вложение пространства \mathbb{R}^m в пространство \mathbb{R}^n в виде координатного подпространства, т.е. как вложение, переводящее точку (x^1, \dots, x^m) пространства \mathbb{R}^m в точку $(x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0)$ из \mathbb{R}^n .

Тема 14

Вложения многообразий в евклидово пространство

В данной лекции будет показано, что произвольное компактное многообразие может быть вложено в евклидово пространство подходящей размерности. Сначала мы построим вложение в пространство очень большой, но конечной размерности, а затем докажем так называемую слабую теорему Уитни, позволяющую понизить размерность объемлющего пространства до удвоенной размерности многообразия плюс один.

Замечание 14.1. Теорема остается верной и для некомпактных многообразий, но доказательство для этого случая более громоздко.

Замечание 14.2. Результаты данной лекции означают, что любое многообразие можно рассматривать как подмногообразие в подходящем пространстве \mathbb{R}^N . Однако во многих задачах, например при описании конфигурационных или фазовых пространств физических систем, структура многообразия возникает естественно, в то время как вложение в евклидово пространство не имеет явного физического смысла. Кроме того, если нас, скажем, интересует топологическое устройство рассматриваемого многообразия, то для его описания часто достаточно знать его внутренние свойства, т.е. свойства, не зависящие от вложения в объемлющее пространство. Тем не менее, возможность реализации многообразий в виде подмногообразий в \mathbb{R}^N позволяет достаточно легко доказать многие важные факты о самих многообразиях.

14.1 Существование вложения

Напомним, что *носителем* $\text{supp } f$ функции $f: M \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется замыкание множества всех точек x из M , в которых функция f отлична от нуля. Нам понадобится следующая техническая лемма, известная из математического анализа.

Лемма 14.3. Пусть D_r^n — открытый шар в \mathbb{R}^n с центром в начале координат O и радиуса r . Для каждого $\varepsilon > 0$ существует гладкая функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, такая, что носитель $\text{supp } f$ функции f лежит в D_r^n , функция f тождественно равна 1 на шаре $D_{r-\varepsilon}^n$ и $0 \leq f \leq 1$.

Замечание 14.4. Чтобы построить такую функцию, достаточно, например, воспользоваться хорошо известной гладкой функцией f , равной 0 на отрицательной полуоси, монотонно возрастающей от 0 до 1 на отрезке $[0, 1]$, и равной 1 на луче $[1, \infty)$. Эта функция может быть задана, например, в виде

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \exp\left[-\frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)\right], & 0 < x < 1; \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

График функции f приведен на рис. 14.1.

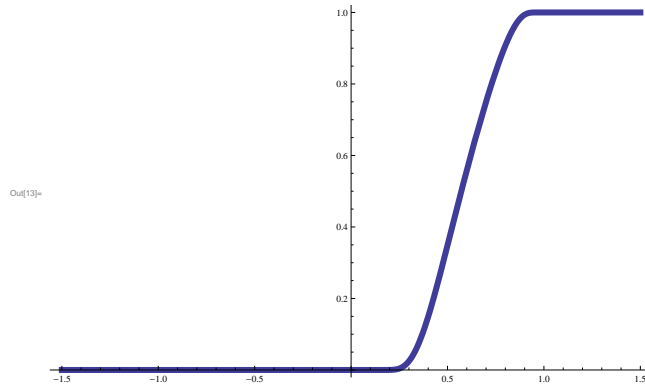


Рис. 14.1: Одномерная гладкая “ступенька”.

Теорема 14.5. Пусть M — произвольное компактное гладкое многообразие. Тогда существует вложение $\Phi: M \rightarrow \mathbb{R}^N$ многообразия M в евклидово пространство подходящей размерности.

Доказательство. В силу компактности многообразия M на нем можно выбрать конечный атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha=1}^K$, причем можно считать без ограничения общности, что каждый координатный гомеоморфизм φ_α переводит U_α в открытый шар D_α .

Конструкция 14.6. Итак, пусть $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha=1}^K$ — атлас, карты которого гомеоморфны шарам D_α . Рассмотрим систему меньших открытых шаров $D'_\alpha \subset D_\alpha$ с теми же центрами, таких, что система открытых множеств $U'_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(D'_\alpha)$ по-прежнему покрывает M . Обозначим через h_α гладкую функцию на \mathbb{R}^n с носителем внутри D_α , тождественно равную 1 на D'_α , и строго меньшую 1 на $D_\alpha \setminus D'_\alpha$ (такая функция существует в силу леммы 14.3). Построим гладкое отображение $\psi_\alpha: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, положив

$$\psi_\alpha(P) = \begin{cases} h_\alpha(\varphi_\alpha(P))\varphi_\alpha(P), & P \in U_\alpha, \\ 0, & P \in M \setminus U_\alpha. \end{cases}$$

Очевидно, $\psi_\alpha(P) = \varphi_\alpha(P)$, если $P \in U'_\alpha$. Мы построили K гладких отображений $\{\psi_\alpha\}_{\alpha=1}^K$ из M в \mathbb{R}^n . Зададим теперь гладкое отображение $\bar{\Phi}: M \rightarrow \mathbb{R}^{nK}$, положив

$$\bar{\Phi}(P) = (\psi_1(P), \dots, \psi_K(P)) \in \mathbb{R}^{nK}.$$

Лемма 14.7. *Отображение $\bar{\Phi}$ является погружением.*

Доказательство. Пусть P — произвольная точка из M . Тогда P содержится в некотором множестве $U'_\alpha \subset U_\alpha$. Пусть $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ локальные координаты в карте U_α , порожденные φ_α , а координаты в \mathbb{R}^{nK} обозначим через

$$(y_1^1, \dots, y_1^n, \dots, y_\alpha^1, \dots, y_\alpha^n, \dots, y_K^1, \dots, y_K^n).$$

Матрица Якоби отображения $\bar{\Phi}$ в точке P в локальных координатах (x_α^j) и (y_β^i) — это прямоугольная матрица вида $\left(\frac{\partial y_\beta^i}{\partial x_\alpha^j}\right)$ (здесь индекс α фиксирован, а остальные пробегают значения от 1 до n). В частности, матрица Якоби отображения $\bar{\Phi}$ содержит блок $\left(\frac{\partial y_\alpha^i}{\partial x_\alpha^j}\right)$. Но так как на множестве U'_α отображение ψ_α совпадает с φ_α , координатное представление отображения ψ_α в координатах $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ и $(y_\alpha^1, \dots, y_\alpha^n)$ имеет вид

$$y_\alpha^i(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n) = x_\alpha^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Поэтому $\left(\frac{\partial y_\alpha^i}{\partial x_\alpha^j}\right)$ — единичная матрица размера $n \times n$. Таким образом, ранг матрицы Якоби отображения $\bar{\Phi}$ равен n во всех точках многообразия M , следовательно $\bar{\Phi}$ — погружение. Лемма доказана. \square

Теперь подправим отображение $\bar{\Phi}$ так, чтобы получить вложение.

Конструкция 14.8. Определим функции $\hat{h}_\alpha: M \rightarrow \mathbb{R}^1$, положив

$$\hat{h}_\alpha(P) = \begin{cases} h_\alpha(\varphi_\alpha(P)), & P \in U_\alpha, \\ 0, & P \in M \setminus U_\alpha. \end{cases}$$

Построим новое отображение $\Phi: M \rightarrow \mathbb{R}^N$, где $N = Kn + K$, положив

$$\Phi(P) = (\bar{\Phi}(P), \hat{h}_1(P), \dots, \hat{h}_K(P)),$$

т.е. мы просто приписали к $\bar{\Phi}(P)$ вектор длины K , составленный из чисел $\hat{h}_\alpha(P)$.

Лемма 14.9. *Отображение Φ является вложением.*

Доказательство. Очевидно, что Φ — снова погружение, так как ранг матрицы Якоби отображения Φ не меньше, чем у матрицы Якоби для $\bar{\Phi}$.

Покажем теперь, что Φ взаимно-однозначно. Пусть P и Q — произвольные различные точки из M . Поскольку система открытых множеств $\{U'_\alpha\}$ покрывает многообразие M , то найдется такое U'_α , которое содержит P , поэтому $\hat{h}_\alpha(P) = 1$. Если $\hat{h}_\alpha(Q) = 1$, то это означает, что Q также лежит в U'_α и, следовательно, $\psi_\alpha(P) \neq \psi_\alpha(Q)$ (отображение ψ_α на U'_α совпадает с гомеоморфизмом φ_α и не может склеивать различные точки). Поэтому в рассмотренном случае $\Phi(P) \neq \Phi(Q)$. Если же $\hat{h}_\alpha(Q) \neq 1$, то и подавно $\Phi(P) \neq \Phi(Q)$, так как они различаются координатой, соответствующей \hat{h}_α . Таким образом, Φ взаимно-однозначно с образом.

Наконец, многообразие M компактно, отображение Φ — взаимно-однозначное погружение, значит, Φ — вложение в силу следствия 11.41. \square

Теорема доказана. □

Замечание 14.10. На самом деле размерность объемлющего многообразия может быть оценена сверху существенно более эффективно. Соответствующие результаты называются теоремами Уитни. В следующем разделе мы докажем так называемый слабый вариант теоремы Уитни, для чего используем теорему Сарда из математического анализа.

14.2 Теорема Сарда

Говоря неформально, теорема Сарда утверждает, что у любого гладкого отображения регулярных значений “гораздо больше” чем сингулярных. В этом разделе мы напомним необходимые определения и результаты из математического анализа и переформулируем их для интересующего нас случая гладких многообразий.

Определение 14.11. Подмножество A евклидова пространства \mathbb{R}^n называется *множеством меры нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное или счетное покрытие множества A открытыми шарами в \mathbb{R}^n , что сумма их n -мерных объемов меньше ε .

Замечание 14.12. Шары в этом определении можно заменить на кубы или параллелепипеды со сторонами, параллельными осям координат. В результате, как легко проверить, получится эквивалентное определение.

Предложение 14.13. *Множества меры нуль обладают следующими свойствами:*

- (1) *объединение конечного, или счетного, семейства множеств $\{A_i\}$ меры нуль является множеством меры нуль;*
- (2) *для любого гладкого отображения $F: U \rightarrow V$, где U и V — открытые подмножества в \mathbb{R}^n , и любого множества $A \subset U$ меры нуль множество $F(A)$ тоже является множеством меры нуль;*
- (3) *множество меры нуль не имеет внутренних точек.*

Доказательство. Первое свойство очевидно: покрыв каждое из множеств A_i набором шаров, сумма объемов которых меньше $\varepsilon/2^i$, получим покрытие множества $\cup_i A_i$ набором шаров, суммарный объем которых меньше ε .

В силу первого свойства, второе свойство достаточно доказать в предположении, что множество A содержится в некотором замкнутом кубе $Q \subset U$. Тогда, согласно теореме Лагранжа, существует некоторая постоянная M , такая, что

$$\|F(x) - F(y)\| \leq M\|x - y\|.$$

Поэтому образ шара радиуса r , содержащегося в кубе Q , отображается во множество, содержащееся в шаре радиуса $r \cdot M$. Следовательно, если покрыть множество A шарами, суммарный объем которых меньше ε/M^n , то множество $F(A)$ может быть покрыто шарами суммарного объема меньше ε .

Для доказательства свойства 3 достаточно установить, что если конечное семейство кубов $\{Q_i\}$ в \mathbb{R}^n со сторонами, параллельными осям координат, покрывает куб Q , то сумма объемов кубов Q_i не меньше объема куба Q (и, значит, ограничена снизу положительной константой, не зависящей от покрытия, откуда Q не может иметь меру нуль). Доказательство этого утверждения оставим в качестве упражнения. \square

Определение 14.14. Подмножество A гладкого многообразия M называется *множеством меры нуль*, если существует такое конечное или счетное семейство карт $\{(U_i, \varphi_i)\}$ на M , покрывающих множество A , что каждое множество $\varphi_i(A \cap U_i)$ имеет меру нуль в пространстве \mathbb{R}^n .

Упражнение 14.15. Покажите, что утверждение 14.13 остается справедливым для случая многообразий.

Определение 14.16. Подмножество A топологического пространства называется *нигде не плотным*, если его замыкание \bar{A} не имеет внутренних точек. Подмножество, являющееся объединением конечного, или счетного, семейства нигде не плотных множеств называется *тощим*.

Упражнение 14.17. Приведите пример топологического пространства, которое само является тощим множеством.

Следующее утверждение непосредственно следует из определений.

Утверждение 14.18. Любое замкнутое множество меры нуль нигде не плотно. Если множество меры нуль представимо в виде конечного или счетного объединения замкнутых множеств, то оно является тощим.

Определение 14.19. Множество меры нуль, представимое в виде конечного или счетного объединения замкнутых множеств будем называть¹ *нуль-тощими*.

Теперь сформулируем теорему Сарда².

Теорема 14.20 (Сард). Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий. Тогда множество $C(F)$ его критических значений является нуль-тощим множеством, т.е. представимо в виде не более чем счетного объединения замкнутых множеств меры нуль. Если многообразие M — компактно, то множество $C(F)$ замкнуто и нигде не плотно.

Теорема Сарда — это, фактически, результат математического анализа, поэтому не будем здесь ее доказывать полностью. В Дополнительном материале к этой лекции выполнена лишь вся “геометрическая” работа, а здесь разобран единственный нужный нам для доказательства теоремы Уитни случай, когда $\dim M < \dim N$.

Следствие 14.21. Если $\dim M < \dim N$, то для любого гладкого отображения $F: M \rightarrow N$ множество $N \setminus F(M)$ не пусто.

¹Эта терминология предложена М. М. Постниковым в его замечательной книге “Гладкие многообразия”.

²Заметим, что до Сарда эта теорема была доказана Брауном. Кроме того, независимо от Сарда её доказал Дубовицкий.

Доказательство следствия. Это очевидно, так как в условиях следствия множество $F(M)$ представляет собой множество критических значений отображения F и, следовательно, по теореме Сарда, является нуль-тощим. В частности, $F(M)$ имеет меру нуль, а потому даже не содержит внутренних точек. Доказательство закончено. \square

14.3 “Слабая” теорема Уитни

Напомним, что размерность пространства \mathbb{R}^N , в которое нам удалось вложить многообразие M при доказательстве теоремы 14.5, была очень велика (она равнялась количеству карт в атласе многообразия, умноженному на $\dim M + 1$).

Теорема 14.22 (Уитни). Пусть M — гладкое компактное многообразие размерности n . Тогда существует вложение $F: M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 14.5 и построим вложение Φ многообразия M в евклидово пространство \mathbb{R}^N . Рассмотрим произвольную, проходящую через начало координат прямую ℓ в пространстве \mathbb{R}^N и обозначим через π_ℓ ортогональную проекцию пространства \mathbb{R}^N вдоль прямой ℓ на ортогональное подпространство размерности на единицу меньше: $\pi_\ell: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N-1}$. Попробуем понизить размерность, для чего рассмотрим композицию $\pi_\ell \circ \Phi: M \rightarrow \mathbb{R}^{N-1}$. Нужно выбрать прямую ℓ так, чтобы композиция $\pi_\ell \circ \Phi$ по-прежнему являлась бы вложением (этот способ называется *методом проекций*). Для этого достаточно проверить выполнение двух условий:

- (1) мономорфность дифференциала композиции $\pi_\ell \circ \Phi$ (тогда эта композиция является погружением);
- (2) биективность композиции $\pi_\ell \circ \Phi$ (взаимно однозначное погружение $\pi_\ell \circ \Phi$ компактного многообразия M является вложением).

Наша цель — показать, что прямую ℓ можно выбрать так, чтобы оба условия были выполнены.

Рассмотрим первое условие. Пусть P — произвольная точка из M . Обозначим через Π_P образ $d\Phi(T_P M)$ касательного пространства $T_P M$ в точке P к многообразию M под действием дифференциала $d\Phi$ отображения Φ в точке P . Так как Φ — вложение, то Π_P — это n -мерное подпространство в $\mathbb{R}^N \cong T_{\Phi(P)}\mathbb{R}^N$. Для того чтобы дифференциал отображения $\pi_\ell \circ \Phi$ был мономорфизмом в точке P , необходимо и достаточно, чтобы прямая ℓ не принадлежала бы подпространству Π_P (напомним, что и прямая, и подпространство проходят через нуль).

Конструкция 14.23. Обозначим через W_1 многообразие размерности $2n$, полученное из касательного расслоения $T(M)$ к многообразию M выбрасыванием нулевого сечения M_0 . Построим гладкое отображение h_1 многообразия W_1 в проективное пространство $\mathbb{R}P^{N-1}$, ставя в соответствие ненулевому касательному вектору $V \in T_P M$ проходящую через нуль прямую в \mathbb{R}^N с направляющим вектором $d\Phi(V) \in \mathbb{R}^N$. Ясно, что прямая ℓ не содержится в образе никакой плоскости Π_P и, значит, удовлетворяет первому условию, если и только если она не лежит в образе отображения h_1 .

Лемма 14.24. Отображение $h_1: W_1 \rightarrow \mathbb{R}P^{N-1}$ является гладким.

Доказательство. Запишем отображение h_1 в локальных координатах. Пусть (x^1, \dots, x^n) — локальные координаты на M в окрестности P , $(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n)$ — соответствующие координаты на $W_1 \subset T(M)$ в окрестности V и (y^1, \dots, y^N) — стандартные координаты в \mathbb{R}^N , а $(y^1 : \dots : y^N)$ — соответствующие однородные координаты в $\mathbb{R}P^{N-1}$. Если $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$, $i = 1, \dots, n$, — координатное представление вложения Φ , то отображение h_1 имеет вид

$$h_1: (x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) \mapsto \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial y^1}{\partial x^k} v^k : \dots : \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^N}{\partial x^k} v^k \right) \in \mathbb{R}P^{N-1},$$

где все производные вычисляются в точке P . Это отображение очевидно является гладким. \square

Рассмотрим теперь второе условие. Отсутствие взаимной однозначности композиции $\pi_\ell \circ \Phi$ эквивалентно существованию в пространстве \mathbb{R}^N прямой, параллельной ℓ и проходящей через две различные точки: $\Phi(P)$ и $\Phi(Q)$. Отметим, что так как Φ — вложение, условие $\Phi(P) \neq \Phi(Q)$ равносильно $P \neq Q$.

Конструкция 14.25. Построим гладкое отображение h_2 из $2n$ -мерного многообразия $W_2 = (M \times M) \setminus \Delta$, где через Δ , как обычно, обозначена диагональ, в проективное пространство $\mathbb{R}P^{N-1}$, сопоставив каждой паре различных точек (P, Q) многообразия M прямую в $\mathbb{R}P^{N-1}$, параллельную прямой $\Phi(P)\Phi(Q)$ в \mathbb{R}^N . Ясно, что для взаимной однозначности проекции вдоль прямой ℓ , необходимо и достаточно, чтобы ℓ не лежала в образе отображения h_2 .

Лемма 14.26. *Отображение $h_2: W_2 \rightarrow \mathbb{R}P^{N-1}$ является гладким.*

Доказательство. Запишем отображение h_2 в локальных координатах. Обозначим через (x^1, \dots, x^n) , $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ локальные координаты в окрестностях точек P и Q на многообразии M , порождающие локальные координаты в окрестности точки $(P, Q) \in \tilde{W}_2$. Пусть, далее, (y^1, \dots, y^N) — стандартные координаты в пространстве \mathbb{R}^N , а $(y^1 : \dots : y^N)$ — соответствующие однородные координаты в $\mathbb{R}P^{N-1}$. Тогда, если $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$, $i = 1, \dots, N$, — координатное представление отображения Φ , отображение h_2 имеет вид

$$h_2: (P, Q) = (x^1(P), \dots, x^n(P), \bar{x}^1(Q), \dots, \bar{x}^n(Q)) \mapsto \left(y^1(x(P)) - y^1(\bar{x}(Q)) : \dots : y^N(x(P)) - y^N(\bar{x}(Q)) \right).$$

Поэтому отображение h_2 — гладкое. \square

Конструкция 14.27. Рассмотрим многообразие $X = W_1 \sqcup W_2$, являющееся дизъюнктивным объединением многообразий W_1 и W_2 . Заметим, что X — гладкое многообразие размерности $2n$. Определим отображение H из X в $\mathbb{R}P^{N-1}$, положив

$$H(x) = \begin{cases} h_1(x), & x \in W_1, \\ h_2(x), & x \in W_2. \end{cases}$$

Из лемм 14.24 и 14.26 вытекает, что H — гладкое отображение. Образ $H(X)$ совпадает с объединением образов $h_1(W_1)$ и $h_2(W_2)$. Из конструкций 14.23 и 14.25 следует, что если $H(X)$ не покрывает всего пространства $\mathbb{R}P^{N-1}$, то можно так выбрать прямую ℓ в \mathbb{R}^N , что композиция $\pi_\ell \circ \Phi$ будет вложением. Однако, в силу следствия 14.21, это заведомо можно сделать, если

$$2n = \dim X < \dim \mathbb{R}P^{N-1} = N - 1.$$

Таким образом, доказано следующее ключевое утверждение.

Лемма 14.28. *Если $\Phi: M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ — вложение и $N > 2n + 1$, то методом проекций можно построить вложение многообразия M в евклидово пространство \mathbb{R}^{N-1} на единицу меньшей размерности.*

Таким образом, с помощью метода проекций можно понижать размерность N объемлющего пространства до тех пор, пока она не станет равной $2n + 1$, что и завершает доказательство теоремы Уитни. \square

Упражнение 14.29. Показать, что методом проекций нельзя, вообще говоря, получить вложение в пространство меньшей размерности.

Замечание 14.30. Оказывается, “слабую” теорему Уитни можно усилить: существует вложение n -мерного многообразия в пространство размерности $2n$ (так называемая “сильная” теорема Уитни). Эта оценка уже в общем случае не улучшаема (пример: $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$).

14.4 Задачи

Задача 14.31. Прodelать предложенную в доказательстве теоремы о существовании вложения конструкцию для случая стандартной окружности (атлас из двух карт). Применить к полученному вложению метод проекций.

Задача 14.32. Докажите утверждение 14.18.

Задача 14.33. Показать с помощью метода проекций, что каждое компактное гладкое многообразие размерности n можно погрузить в евклидово пространство размерности $2n$.

Задача 14.34. Построить вложение проективного пространства $\mathbb{R}P^n$ в подходящее евклидово пространство.

Задача 14.35. Показать, что двумерное компактное многообразие нельзя вложить в \mathbb{R}^3 так, чтобы в каждой точке полученной поверхности гауссова кривизна была: (1) отрицательной; (2) неположительной.

14.5 Дополнительный материал

14.5.1 К доказательству теоремы Сарда

Теорема Сарда может быть выведена из следующего утверждения, которое в математическом анализе тоже часто называют теоремой Сарда.

Предложение 14.36. Пусть $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение открытого множества $U \subset \mathbb{R}^m$ в пространство \mathbb{R}^n и пусть $K \subset U$ — произвольное компактное подмножество множества критических точек отображения F . Тогда множество $F(K)$ имеет меру нуль.

Покажем, как теорема Сарда получается из утверждения 14.36.

Доказательство. Рассмотрим произвольное открытое подмножество O многообразия M . Пересечение множества критических точек отображения F со множеством O совпадает со множеством критических точек ограничения $F|_O$ отображения F на множество O . Поэтому если $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — произвольный атлас многообразия M , то множество $C(F)$ критических значений отображения F может быть представлено в виде

$$C(F) = \cup_\alpha C(F|_{U_\alpha}).$$

Пусть (V_α, ψ_α) — такая карта на многообразии N , что $F(U_\alpha) \subset V_\alpha$. Тогда множество $C(F|_{U_\alpha})$ — это образ при гомеоморфизме ψ_α^{-1} множества $C(g_\alpha)$ критических значений сквозного отображения

$$g_\alpha = \psi_\alpha \circ F|_{U_\alpha} \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

В то же время множество критических точек отображения g_α , как подмножество в $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$, задается набором уравнений (равенство нулю соответствующих миноров) и, следовательно, является замкнутым. Как и всякое замкнутое подмножество в \mathbb{R}^m , множество критических точек отображения g_α представимо в виде не более чем счетного объединения компактных множеств. Поэтому каждое множество

$$C(F|_{U_\alpha}) = \psi_\alpha^{-1}(C(g_\alpha))$$

является, в силу утверждения 14.36, утверждения 14.13 и хаусдорфовости многообразия N , объединением не более чем счетного семейства замкнутых множеств меры нуль. Значит, таким будет и все множество $C(F)$. Итак, мы показали, что $C(F)$ — нуль-тощее множество.

Если же многообразие M компактно, то на нем можно выбрать конечный атлас, что позволяет представить множество всех критических точек отображения F в виде конечного объединения компактных множеств K_i (по числу карт). Все множества $F(K_i)$ замкнуты и нуль-тощие, поэтому они нигде не плотны, а значит, конечное объединение $C(F)$ этих множеств тоже нигде не плотно. Доказательство закончено. \square

Итак, для завершения доказательства теоремы Сарда осталось доказать утверждение 14.36. Мы этого делать не будем, сославшись на любой стандартный курс математического анализа. Однако для целостности изложения разберем тривиальный случай $m < n$.

Доказательство утверждения 14.36 при $m < n$. Представим пространство \mathbb{R}^n в виде прямого произведения $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$. Построим открытое подмножество $U \times \mathbb{R}^{n-m} \subset \mathbb{R}^n$ и новое отображение $\Phi = F \circ \pi_1: U \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$, где π_1 — проекция на первый сомножитель. Тогда для каждого компакта $K \subset U$ его образ $F(K)$ при отображении F совпадает с образом $\Phi(K \times 0)$ множества $K \times 0 \subset U \times \mathbb{R}^{n-m}$ при отображении Φ . Но множество $K \times 0$ имеет меру нуль в пространстве \mathbb{R}^n (его можно покрыть конечным множеством кубиков сколь угодно малой высоты). Поэтому, в силу утверждения 14.13, множество $F(K) = \Phi(K \times 0)$ тоже имеет меру нуль, что и требовалось доказать. \square

Отметим, что следствие 14.21 нами полностью доказано. Именно им мы воспользовались при доказательстве теоремы Уитни.

14.5.2 Примеры погружений

Приведем некоторые известные примеры погружений. На рис. 14.2 изображено погружение бутылки Клейна в трехмерное пространство, а на рис. 14.3 — погружение проективной плоскости, известное как “скрещенный колпак”. Оба эти многообразия компактны и неориентируемы, поэтому построить их вложение в трехмерное пространство нельзя (проверьте).

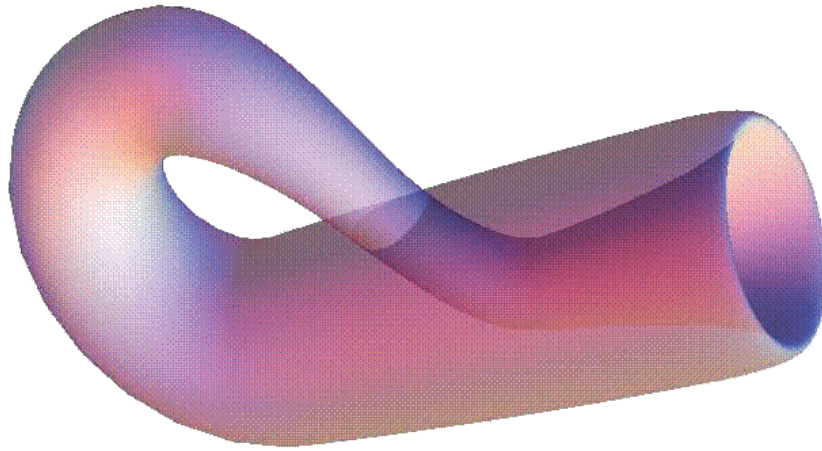


Рис. 14.2: Погружение бутылки Клейна в \mathbb{R}^3 .

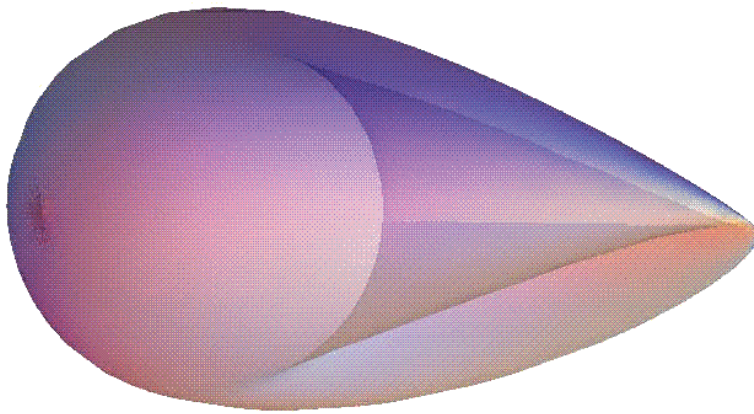


Рис. 14.3: Погружение проективной плоскости в \mathbb{R}^3 .

Тема 15

Дополнительные структуры: риманова метрика, ориентируемость

Лекция посвящена дополнительным структурам, которые вводятся на гладких многообразиях для расширения возможностей при работе с ними. Например, на абстрактном топологическом пространстве понятие расстояния между его точками не определено. В случае гладких многообразий имеется естественный способ задать расстояние, используя в качестве дополнительной структуры аналог первой квадратичной формы поверхности — так называемую риманову метрику. Другие примеры дополнительных структур — это ориентация, симплектическая структура, аффинная связность.

15.1 Риманова метрика, римановы многообразия

Как мы уже отмечали, риманова метрика является аналогом первой фундаментальной формы поверхности или римановой метрики в области евклидова пространства.

Конструкция 15.1. Пусть M — произвольное гладкое многообразие размерности m . Предположим, что в каждой точке $P \in M$ в касательном пространстве $T_P M$ фиксирована некоторая билинейная форма $b(P)$. Рассмотрим произвольные координаты (x^1, \dots, x^m) , определенные на M в некоторой окрестности U . Тогда для каждой точки $P \in U$ в касательном пространстве $T_P M$ имеется канонический базис ∂_i . В этом базисе форма $b(P)$ задается матрицей $B(P) = (b_{ij}(P))$, где $b_{ij}(P) = b(P)(\partial_i, \partial_j)$. Компоненты $b_{ij}(P)$ являются функциями от координат точки $P \in U$, т.е. функциями от (x^1, \dots, x^m) .

Определение 15.2. Если в каждой точке P многообразия M задана билинейная форма $b(P): T_P M \times T_P M \rightarrow \mathbb{R}$, то говорят, что на многообразии задана билинейная форма b . Величины $b_{ij}(P) = b(P)(\partial_i, \partial_j)$ называются компонентами формы b в координатах (x^1, \dots, x^m) .

Утверждение 15.3. Пусть (x^1, \dots, x^m) и (y^1, \dots, y^m) — две системы координат, а b_{ij} и c_{ij} — компоненты билинейной формы b в первой и второй системах координат соответственно. Тогда во всех точках многообразия, где эти координаты определены одновременно, функции b_{ij} и c_{ij} связаны так:

$$b_{ij} = \sum_{\alpha, \beta=1}^m \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} c_{\alpha\beta}.$$

Доказательство. Пусть $P \in M$ — точка, в которой определены обе системы координат, ∂_{x^i} — векторы канонического базиса первой из этих систем, а ∂_{y^i} — второй. Тогда $\partial_{x^i} = \sum_{\alpha} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \partial_{y^\alpha}$, поэтому

$$\begin{aligned} b_{ij} &= b(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) = b\left(\sum_{\alpha} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \partial_{y^\alpha}, \sum_{\beta} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \partial_{y^\beta}\right) = \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} b(\partial_{y^\alpha}, \partial_{y^\beta}) = \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} c_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

□

Следствие 15.4. Если компоненты билинейной формы b в координатах (x^1, \dots, x^m) гладко зависят от (x^1, \dots, x^m) , то для любой другой системы координат (y^1, \dots, y^m) , имеющей с (x^1, \dots, x^m) общую область определения, компоненты b в (y^1, \dots, y^m) также будут гладко зависеть от (y^1, \dots, y^m) .

Определение 15.5. Будем говорить, что на многообразии M задана риманова метрика, если на M задано скалярное произведение (т.е. невырожденная положительно определенная симметричная билинейная форма), которое гладко зависит от точки в том смысле, что в каждой системе координат (x^1, \dots, x^m) на M компоненты этого скалярного произведения являются гладкими функциями от (x^1, \dots, x^m) .

Многообразие, на котором задана риманова метрика называется *римановым многообразием*.

Замечание 15.6. Из следствия 15.4 вытекает, что достаточно проверить гладкость компонент римановой метрики в каждой точке в одной системе координат.

Замечание 15.7. Пусть (U, φ) — карта на римановом многообразии M . Отождествляя U и $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ с помощью координатного гомоморфизма, мы получаем на области $\varphi(U)$ риманову метрику в смысле лекции 8. С этой точки зрения, риманова метрика на многообразии “сшита” из метрик, заданных в координатных областях.

Имеется альтернативный способ определения римановой метрики, не использующий напрямую касательные векторы и билинейные формы.

Определение 15.8. Говорят, что на гладком многообразии M задана риманова метрика, если в каждой системе координат (x^1, \dots, x^m) на M в области определения этих координат задан набор величин $g_{ij}(x^1, \dots, x^m)$, $i, j = 1, \dots, m$, которые гладко зависят от (x^1, \dots, x^m) и называются *компонентами римановой метрики* в этих координатах, и выполнены следующие два условия:

- (1) матрицы (g_{ij}) являются симметричными и положительно определенными в каждой точке области определения;
- (2) компоненты римановой метрики в разных системах координат, связаны друг с другом по формуле из утверждения 15.3 во всех точкам многообразия, где эти координаты определены одновременно.

Утверждение 15.9. *Два определения римановой метрики эквивалентны.*

Доказательство. Если дана риманова метрика в смысле определения 15.5, то наборы величин $g_{ij}(x^1, \dots, x^m)$ из определения 15.8 — это компоненты скалярного произведения в координатах (x^1, \dots, x^m) . Требуемые свойства вытекают из определения и утверждения 15.3.

Обратно, пусть задана риманова метрика в смысле определения 15.8. Определим на M скалярное произведение так. Пусть (x^1, \dots, x^m) — некоторые координаты на M , и P — произвольная точка из соответствующей карты U . Сопоставим паре векторов v и w из $T_P M$ число $\langle v, w \rangle_P = \sum_{i,j=1}^m g_{ij} v^i w^j$, где g_{ij} компоненты римановой метрики, а v^i и w^j — компоненты касательных векторов v и w в координатах (x^1, \dots, x^m) соответственно. Заметим, что мы определили билинейную форму на $T_P M$, которая, в силу свойств матрицы (g_{ij}) , является скалярным произведением, причем $\langle \partial_{x^i}, \partial_{x^j} \rangle_P = g_{ij}(P)$, поэтому это скалярное произведение гладко зависит от точки (в силу гладкости g_{ij}). Таким образом, мы построили в U риманову метрику в смысле первого определения, причем g_{ij} представляют собой компоненты этой римановой метрики в координатах (x^1, \dots, x^m) .

Остается проверить, что построенная нами риманова метрика не зависит от выбора координат (x^1, \dots, x^m) и, значит, корректно определена на всем многообразии M . Пусть в окрестности точки $P \in M$ заданы две системы координат (x^1, \dots, x^m) и (y^1, \dots, y^m) , и пусть g_{ij} и h_{ij} компоненты римановой метрики из определения 15.8 в этих координатах соответственно. Тогда для произвольных касательных векторов $v, w \in T_P M$, имеющих в (x^1, \dots, x^m) компоненты v^i и w^i , а в (y^1, \dots, y^m) — компоненты ξ^i и η^i соответственно, числа $\sum_{i,j=1}^m g_{ij} v^i w^j$ и $\sum_{i,j=1}^m h_{ij} \xi^i \eta^j$ равны. Действительно, так как

$$v^i = \sum_{p=1}^m \frac{\partial x^i}{\partial y^p} \xi^p \quad \text{и} \quad w^i = \sum_{p=1}^m \frac{\partial x^i}{\partial y^p} \eta^p,$$

имеем

$$\sum_{i,j} g_{ij} v^i w^j = \sum_{i,j,\alpha,\beta,p,q} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} h_{\alpha\beta} \frac{\partial x^i}{\partial y^p} \xi^p \frac{\partial x^j}{\partial y^q} \eta^q = \sum_{\alpha,\beta,p,q} h_{\alpha\beta} \delta_p^\alpha \delta_q^\beta \xi^p \eta^q = \sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta} \xi^\alpha \eta^\beta.$$

□

Пример 15.10. Рассмотрим многообразие \mathbb{R}^m , на котором фиксированы стандартные декартовы координаты (x^1, \dots, x^m) . Зададим в каждой точке $P \in \mathbb{R}^m$ риманову метрику, положив в координатах (x^1, \dots, x^m) компоненты g_{ij} равными символам Кронекера δ_{ij} , а в любых других координатах (y^1, \dots, y^m) — выражениям

$$\sum_{p,q} \delta_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial y^i} \frac{\partial x^q}{\partial y^j} = \sum_p \frac{\partial x^p}{\partial y^i} \frac{\partial x^p}{\partial y^j}.$$

В результате получится риманова метрика на \mathbb{R}^m (проверьте), которая называется *евклидовой*.

Пример 15.11. Рассмотрим область Ω с заданной на ней римановой метрикой (см. лекцию 8). Это — еще один пример риманова многообразия. В частности, модель Пуанкаре и модель верхней полуплоскости геометрии Лобачевского — это тоже примеры римановых многообразий.

Замечание 15.12. Риманову метрику в координатах (x^1, \dots, x^m) можно, как и в теории поверхностей, записывать в дифференциальном виде:

$$ds^2 = \sum_{p,q=1}^m g_{pq} dx^p dx^q.$$

Смысл этой записи мы обсуждали в теории поверхностей. Напомним, что одним из преимуществ дифференциальной записи является возможность делать формально замену координат в ней по правилам математического анализа.

Конструкция 15.13. Пусть M — подмногообразие размерности m в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n и $i: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ — соответствующее вложение. Рассмотрим произвольную точку P из M . Тогда, по определению вложения, дифференциал $di: T_P M \rightarrow T_{i(P)} \mathbb{R}^n$ отображения i является мономорфизмом, т.е. имеет нулевое ядро. Для каждого двух касательных векторов v и w из $T_P M$ положим

$$\langle v, w \rangle_P = \langle di(v), di(w) \rangle_{i(P)},$$

где справа стоит скалярное произведение в евклидовой метрике (см. выше).

Лемма 15.14. Семейство функций $\langle \cdot, \cdot \rangle_P: T_P M \times T_P M \rightarrow \mathbb{R}$, $P \in M$, задает риманову метрику на многообразии M . Если (x^1, \dots, x^m) — некоторые координаты на M в окрестности U , а (y^1, \dots, y^n) — декартовы координаты в \mathbb{R}^n , то компоненты этой римановой метрики в координатах (x^1, \dots, x^m) имеют вид

$$g_{pq} = \sum_j \frac{\partial y^j}{\partial x^p} \frac{\partial y^j}{\partial x^q},$$

где $y^j(x^1, \dots, x^m)$ — координатное представление вложения i .

Доказательство. Из свойств евклидова скалярного произведения и мономорфности di немедленно следует, что функция $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ тоже является скалярным произведением на $T_P M$, т.е. она билинейна, симметрична и положительно определена.

Остается проверить, что это скалярное произведение гладко зависит от точки. Пусть (x^1, \dots, x^m) — локальные координаты на M в окрестности U точки P , а (y^1, \dots, y^n) — декартовы координаты в \mathbb{R}^n . Обозначим через v^i и w^i компоненты касательных векторов v и w соответственно в координатах x^j . Пусть также $y^j = y^j(x^1, \dots, x^m)$, $j = 1, \dots, n$, — запись вложения i в координатах x^j и y^k . Тогда координаты векторов $di(v)$ и $di(w)$ имеют вид

$$di(v)^j = \sum_p \frac{\partial y^j}{\partial x^p} v^p \quad \text{и} \quad di(w)^j = \sum_p \frac{\partial y^j}{\partial x^p} w^p,$$

поэтому

$$\langle v, w \rangle_P = \sum_j \left(\sum_p \frac{\partial y^j}{\partial x^p} v^p \sum_q \frac{\partial y^j}{\partial x^q} w^q \right) = \sum_{j,p,q} \frac{\partial y^j}{\partial x^p} \frac{\partial y^j}{\partial x^q} v^p w^q.$$

Если ∂_p обозначают векторы канонического базиса системы координат (x^1, \dots, x^m) , то α -ая координата такого вектора в этом базисе равна δ_p^α , поэтому

$$g_{pq} = \langle \partial_p, \partial_q \rangle_P = \sum_{j,\alpha,\beta} \frac{\partial y^j}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} \delta_p^\alpha \delta_q^\beta = \sum_j \frac{\partial y^j}{\partial x^p} \frac{\partial y^j}{\partial x^q},$$

так что функции g_{pq} гладкие, поэтому $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ является римановой метрикой, а g_{pq} — ее компонентами. \square

Определение 15.15. Метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ на подмногообразии M называется *индуцированной из \mathbb{R}^n* .

Пример 15.16. Первая квадратичная форма регулярной поверхности в евклидовом пространстве — это частный случай индуцированной римановой метрики.

Имеет место важное утверждение, следующее из теоремы Уитни.

Теорема 15.17. *На произвольном (компактном) гладком многообразии существует, по крайней мере, одна риманова метрика.*

Доказательство. Действительно, в силу теоремы Уитни каждое такое многообразие можно вложить в \mathbb{R}^N , т.е. реализовать в виде подмногообразия \mathbb{R}^N . Но тогда индуцированная из \mathbb{R}^N метрика и является искомой. Доказательство закончено. \square

Как и первая квадратичная форма поверхности, риманова метрика может быть использована для вычисления длин, углов и т.д.

Определение 15.18. Пусть M — риманово многообразие. *Длиной касательного вектора $v \in T_P M$ называется число $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle_P}$, где через $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ обозначается скалярное произведение на $T_P M$ в римановой метрике.*

Далее, если $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ — произвольная гладкая кривая на римановом многообразии M , то в каждой точке $\gamma(t)$ кривой γ определен ее вектор скорости $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)} M$. Длина $\|\gamma'(t)\|$ этого вектора в рассматриваемой римановой метрике является непрерывной функцией параметра t , поэтому следующее определение корректно.

Определение 15.19. Величина

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt,$$

называется *длиной гладкой кривой γ на римановом многообразии M* .

Замечание 15.20. Это определение легко обобщается на случай кусочно гладкой кривой γ на римановом многообразии. Для этого достаточно разбить γ на участки гладкости и определить *длину кусочно гладкой кривой* как сумму длин всех ее гладких участков.

Определение 15.21. Пусть $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(s)$ — гладкие кривые на римановом многообразии M , пересекающиеся в некоторой точке P из M . Пусть $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(s_0) = P$, тогда угол α между γ_1 и γ_2 в точке P определяется из соотношений

$$\cos \alpha = \frac{\langle \gamma_1'(t_0), \gamma_2'(s_0) \rangle_P}{\|\gamma_1'(t_0)\| \|\gamma_2'(s_0)\|}, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi.$$

Понятие индуцированной метрики (конструкция 15.13) обобщается на случай произвольного погружения в риманово многообразие.

Конструкция 15.22. Пусть $f: M \rightarrow W$ — погружение гладкого многообразия M в риманово многообразие W , и v, w — произвольные касательные векторы из $T_P M$. Положим

$$\langle v, w \rangle_P = \langle df(v), df(w) \rangle_{f(P)}.$$

Следующая лемма доказывается точно также как лемма 15.14.

Лемма 15.23. Пусть $f: M \rightarrow W$ — погружение гладкого многообразия M в риманово многообразие W . Семейство функций $\langle \cdot, \cdot \rangle_P: T_P M \times T_P M \rightarrow \mathbb{R}$, $P \in M$, задает риманову метрику на многообразии M . Если (x^1, \dots, x^m) — некоторые координаты на M в окрестности U , а (y^1, \dots, y^n) — координаты на W в окрестности $f(P)$ и h_{ij} — компоненты римановой метрики на W в координатах (y^1, \dots, y^n) , то компоненты g_{pq} римановой метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ на M в координатах (x^1, \dots, x^m) имеют вид

$$g_{pq} = \sum_{i,j} \frac{\partial y^i}{\partial x^p} \frac{\partial y^j}{\partial x^q} h_{ij},$$

где $y^j(x^1, \dots, x^m)$ — координатное представление погружения f .

Определение 15.24. Метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ на многообразии M называется индуцированной из W погружением f .

Упражнение 15.25. Докажите лемму 15.23.

Конструкция 15.26. Если риманово многообразие M связное, то риманова метрика определяет функцию расстояния на M следующим образом. Пусть P и Q — произвольные точки из M . Обозначим через $\Omega(P, Q)$ множество всевозможных кусочно гладких кривых на M , соединяющих P и Q , и для каждой $\gamma \in \Omega(P, Q)$ пусть $\ell(\gamma)$ обозначает длину кривой γ . Тогда положим

$$\rho(P, Q) = \inf \{ \ell(\gamma) \mid \gamma \in \Omega(P, Q) \}.$$

Полученная метрика называется *внутренней метрикой*.

Упражнение 15.27. Докажите, что ρ является метрикой на M .

15.2 Изометрии

На классе римановых многообразий определяется более сильное отношение эквивалентности, чем просто диффеоморфность. Это отношение эквивалентности “уважает” риманову метрику.

Определение 15.28. Пусть M и N — произвольные римановы многообразия. Гладкое отображение $f: M \rightarrow N$ называется *изометричным*, если в каждой точке $P \in M$ дифференциал $df: T_P M \rightarrow T_{f(P)} N$ сохраняет скалярные произведения, т.е. для любых $v, w \in T_P M$ выполняется

$$\langle v, w \rangle_P = \langle df(v), df(w) \rangle_{f(P)}.$$

Изометричный диффеоморфизм называется *изометрией*. Два римановых многообразия называются *изометричными*, если существует изометрия, переводящее одно из них в другое.

Утверждение 15.29. *Изометрии сохраняют длины кривых и углы между ними.*

Компоненты римановых метрик изометричных многообразий отличаются друг от друга на замену координат в следующем смысле. Пусть $f: M \rightarrow N$ — изометрия, (x^1, \dots, x^n) — координаты в окрестности точки P , а (y^1, \dots, y^n) — координаты в окрестности точки $f(P)$, и $y^i(x^1, \dots, x^n)$ — координатное представление изометрии f . Кроме того, пусть g_{ij} — компоненты римановой метрики на M в координатах (x^1, \dots, x^n) , а h_{pq} — компоненты римановой метрики на N в координатах (y^1, \dots, y^n) . Тогда

$$g_{ij} = \sum_{\alpha, \beta} h_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}.$$

Отображение, обратное к изометрии также является изометрией.

Доказательство. Первая часть утверждения немедленно вытекает из определений изометрии, длины и угла.

Проверим формулу из второй части. Если ∂_{x^i} — векторы канонического базиса в $T_P M$ для координат x^i , то координаты вектора ∂_{x^i} в этом базисе равны δ_i^α , поэтому $df(\partial_{x^i})^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}$. Тогда

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle_P = \langle df(\partial_i), df(\partial_j) \rangle_{f(P)} = \sum_{\alpha, \beta} h_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j},$$

что и требовалось.

Наконец, обратное отображение к изометрии существует и является диффеоморфизмом, так как изометрия — диффеоморфизм. Остается заметить, что формулы, доказанные только что, обратимы, а именно, в сделанных обозначениях,

$$h_{pq} = \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^p} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^q},$$

причем, по теореме о производной обратного отображения, матрица $\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^p}$ — это матрица дифференциала отображения f^{-1} . Отсюда для любых $v, w \in T_Q N$ выполняется

$$\langle v, w \rangle_Q = \langle df^{-1}(v), df^{-1}(w) \rangle_{f^{-1}(Q)},$$

что и требовалось. □

Точно также, как в теории поверхностей (лекция 3) доказывается следующее утверждение.

Утверждение 15.30. *Диффеоморфизм римановых многообразий является изометрией, тогда и только тогда, когда он сохраняет длины всех гладких кривых.*

15.3 Ориентируемость многообразия

Рассмотрим еще одну важную характеристику многообразий, позволяющую, в частности, различать двусторонние поверхности (такие, скажем, как цилиндр) и односторонние (такие, как, например, лист Мёбиуса). Мы приведем здесь три эквивалентных определения ориентируемости.

Конструкция 15.31. Пусть L — конечномерное линейное пространство. Напомним, что множество всех базисов в L разбивается на два класса так: два базиса отнесем к одному классу, если и только если определитель матрицы перехода от одного из них к другому положителен. Легко проверяется, что в результате действительно получается разбиение на два класса.

Определение 15.32. Каждый из построенных классов называется *ориентацией* векторного пространства L . *Задать ориентацию на L или ориентировать пространство L* означает выбрать один из двух этих классов. Каждый базис, принадлежащий выбранному классу называется *положительно ориентированным*, а остальные базисы — *отрицательно ориентированными*.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 15.33. *Для задания ориентации линейного пространства L достаточно фиксировать в нем один произвольный базис и объявить выбранной ориентацией ту, в которую он входит. При этом выбранный базис будет положительно ориентированным.*

Пример 15.34. Напомним, что *стандартным базисом* арифметического пространства \mathbb{R}^n называется семейство векторов (e_1, \dots, e_n) , где все компоненты вектора e_i равны 0, кроме i -ой, которая равна 1. *Стандартная ориентация* пространства \mathbb{R}^n задается базисом (e_1, \dots, e_n) .

Определение 15.35. Пусть M гладкое многообразие. *Ориентацией многообразия M* называется семейство ориентаций всех его касательных пространств $T_P M$, $P \in M$, непрерывно зависящее от точки многообразия в следующем смысле. Для произвольной системы координат (x^1, \dots, x^m) на M канонические базисы $(\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^m})$ во всех

касательных пространствах $T_P M$, где P — произвольная точка из области определения координат, имеют одну и ту же ориентацию. Если ориентация существует, то многообразии M называется *ориентируемым*, иначе — *неориентируемым*. Если ориентация фиксирована, то многообразии называется *ориентированным*.

Пример 15.36. Пусть Ω — произвольное открытое подмножество \mathbb{R}^n . Рассмотрим в \mathbb{R}^n стандартные евклидовы координаты и соответствующие канонические базисы $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ касательных пространств $T_P \Omega$, $P \in \Omega$. Ориентируем все $T_P M$ с помощью базиса $(\partial_1, \dots, \partial_n)$. Тогда, по определению, семейство таких ориентаций будет непрерывно зависеть от точки из Ω , так что Ω — ориентируемое многообразие. В частности, само \mathbb{R}^n является ориентируемым многообразием.

Утверждение 15.37. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — гладкое k -мерное многообразие, $1 \leq k < n$, являющееся решением системы

$$\{F_1(x^1, \dots, x^n) = 0, \dots, F_{n-k}(x^1, \dots, x^n) = 0\},$$

удовлетворяющей условию теоремы о неявной функции: функции F_i — гладкие, и в каждой точке из M матрица Якоби $(\partial F_i / \partial x^j)$ имеет максимально возможный ранг $n - k$. Тогда многообразие M ориентируемо.

Доказательство. Напомним, что в каждой точке $P \in M$ градиенты

$$\nabla F_i = (\partial F_i / \partial x^1, \dots, \partial F_i / \partial x^n)$$

функций F_i линейно независимы и ортогональны касательному пространству $T_P M$. Зададим в каждом $T_P M$ ориентацию, назвав базис (f_1, \dots, f_k) пространства $T_P M$ положительно ориентированным, если и только если построенный с помощью него базис $(f_1, \dots, f_k, \nabla F_1, \dots, \nabla F_{n-k})$ пространства \mathbb{R}^n положительно ориентирован по отношению к стандартной ориентации пространства \mathbb{R}^n . Покажем, что так заданное семейство ориентаций касательных пространств $T_P M$ многообразия M непрерывно зависит от точки. Выберем произвольную точку $P \in M$ и в некоторой ее связной окрестности $U \subset M$ рассмотрим локальные координаты (y^1, \dots, y^k) и соответствующие канонические базисы $(\partial_1, \dots, \partial_k)$ касательных пространств $T_P M$, $P \in U$, тогда векторы базисов

$$B = (\partial_1, \dots, \partial_k, \nabla F_1, \dots, \nabla F_{n-k})$$

пространства \mathbb{R}^n непрерывно меняются при изменении точки $P \in U$, так что если $C(P)$ обозначает матрицу перехода от стандартного базиса (e_1, \dots, e_n) пространства \mathbb{R}^n к базису B в точке P , то $\det C(P)$ является нигде не обращающейся в ноль непрерывной функцией, определенной на связном множестве, поэтому эта функция имеет везде один и тот же знак. Но тогда, по определению заданной выше ориентации касательных пространств $T_P M$, все канонические базисы $(\partial_1, \dots, \partial_k)$ имеют одну и ту же ориентацию. Итак, заданное семейство ориентаций непрерывно зависит от точки, поэтому задает ориентацию многообразия M , так что M — ориентируемо. \square

Следствие 15.38. Сфера $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, ортогональная группа $O(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$, группа $SL(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ матриц с определителем 1 являются ориентируемыми гладкими многообразиями.

Иногда бывает проще доказать ориентируемость гладкого многообразия, выбрав на нем некоторый специальный атлас. Мы приведем еще одно определение ориентируемости и докажем его эквивалентность предыдущему.

Напомним, что для каждого гладкого n -мерного многообразия M пара (U, φ) , состоящая из связного открытого множества $U \subset M$ и гомеоморфизма φ между U и некоторой областью из \mathbb{R}^n , называется *гладкой картой*, если функции перехода между ней и картами атласа многообразия M являются гладкими. *Максимальный атлас на M* — это семейство всех гладких карт на M . Как мы уже уславливались, все рассматриваемые карты на гладком многообразии M являются элементами, а все рассматриваемые атласы — подмножествами из максимального атласа. Более того, говоря про карты и атласы на гладком многообразии, мы будем опускать прилагательное “гладкий”.

Определение 15.39. Атлас на гладком многообразии M называется *ориентированным*, если якобианы всех его функции перехода положительны. Гладкое многообразие, на котором задан ориентированный атлас, называется *ориентированным*. Если на гладком многообразии существует ориентированный атлас, то многообразие называется *ориентируемым*.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые технические результаты, к формулировке и доказательству которых мы и переходим.

Лемма 15.40. Пусть (U, φ) — произвольная гладкая карта на ориентированном в смысле определения 15.35 гладком многообразии M . Обозначим через $x = (x^1, \dots, x^n)$ порожденные картой (U, φ) координаты на $U \subset M$, а через $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_n)$ — канонические базисы, соответствующие этим координатам. Тогда для любых точек P и Q из U ориентации канонических базисов ∂ в $T_P M$ и $T_Q M$ одинаковы.

Доказательство. Так как U — связное открытое подмножество многообразия, оно также является линейно связным, так что точки P и Q соединяются некоторой непрерывной кривой $\gamma(t)$, лежащей в U . Определим функцию $n(t)$ параметра t , положим ее равной 1, если базис ∂ в точке $\gamma(t)$ имеет положительную ориентацию, и -1 в противном случае. Так как выбранное семейство ориентаций непрерывно зависит от точки, для каждого t_0 существует связная окрестность $V \subset U$ точки $\gamma(t_0)$ и такие локальные координаты $y = (y^1, \dots, y^n)$ в V , что ориентации всех канонических базисов $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, соответствующих координатам y , одинаковы. Обозначим через C матрицу перехода от базиса ε к базису ∂ , тогда $\det C$ всюду в V отличен от нуля. В силу связности V , функция $\det C$ имеет везде в V один и тот же знак, так что и все базисы ∂ имеют одну и ту же ориентацию в V , поэтому для всех t таких, что $\gamma(t) \in V$, функция $n(t)$ постоянна. Так как кривая γ непрерывна, последнее имеет место в некоторой окрестности точки t_0 . Итак, функция $n(t)$ является локально постоянной, поэтому $n(t)$ — постоянна на всей области определения и, значит, ориентации канонических базисов ∂ в P и Q одинаковы. \square

Определение 15.41. Пусть M — ориентированное в смысле определения 15.35 гладкое многообразие и (U, φ) — некоторая карта на нем. Карту (U, φ) назовем *положительной*, если определенные ей канонические базисы во всех точках из U положительно ориентированы. Если же все такие базисы отрицательно ориентированы, то карту (U, φ) назовем *отрицательной*.

Из леммы 15.40 вытекает следующий результат.

Следствие 15.42. *У ориентированного в смысле определения 15.35 гладкого многообразия каждая карта из максимального атласа или положительная, или отрицательная.*

Лемма 15.43. *Пусть (U, φ) и (U', φ') — две карты на гладком многообразии M , для которых $U \cap U' \neq \emptyset$, а $x = (x^1, \dots, x^n)$ и $y = (y^1, \dots, y^n)$ — координаты, порожденные этими картами. Выберем произвольную точку $P \in U \cap U'$ и обозначим через $\partial_x = (\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n})$ и $\partial_y = (\partial_{y^1}, \dots, \partial_{y^n})$ канонические базисы в $T_P M$, соответствующие этим локальным координатам. Тогда якобиан функции перехода $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ в точке $\varphi(P)$ положителен тогда и только тогда, когда базисы ∂_x и ∂_y одинаково ориентированы.*

Доказательство. Компоненты касательного вектора ∂_{x^i} в базисе $\{\partial_{y^j}\}$ имеют вид $(\partial y^1 / \partial x^i, \dots, \partial y^n / \partial x^i)$, так что матрица Якоби функции перехода от координат x к координатам y представляет собой матрицу перехода от базиса ∂_x к базису ∂_y . \square

Конструкция 15.44. Пусть $x = (x^1, \dots, x^n)$ — координаты, заданные картой (U, φ) . Рассмотрим новые координаты $y = (y^1, \dots, y^n)$ в U , положив $y^1 = -x^1$ и $y^i = x^i$ при всех $i > 1$. Тем самым, мы получим новую карту (U, φ') .

Лемма 15.45. *В сделанных обозначениях, канонические базисы, соответствующие координатам x и y имеют противоположные ориентации.*

Будем говорить, что карта (U, φ') получается из (U, φ) заменой ориентации. Из леммы 15.40 вытекает следующий результат.

Следствие 15.46. *Пусть \mathcal{A} — произвольный атлас на гладком ориентируемом в смысле определения 15.35 многообразии M , тогда, изменив ориентации всех его отрицательных карт, мы получим ориентированный атлас \mathcal{A}' в смысле определения 15.39.*

Доказательство. Так как в атласе \mathcal{A}' все карты положительны, то, по лемме 15.43, все якобианы функций перехода также положительны, поэтому \mathcal{A}' — ориентированный атлас. \square

Утверждение 15.47. *Определения 15.35 и 15.39 эквивалентны, т.е. гладкое многообразие, ориентируемое в смысле одного из этих определений, является также ориентируемым и в смысле другого.*

Доказательство. Предположим сначала, что гладкое многообразие M является ориентируемым в смысле определения 15.35, т.е. M допускает такой выбор ориентаций всех его касательных пространств, при котором эти ориентации непрерывно зависят от точки многообразия. Тогда, по следствию 15.46, на M существует ориентированный атлас, так что M ориентируемо и в смысле определения 15.39.

Обратно, пусть M ориентируемо в смысле определения 15.39, т.е. на нем существует ориентированный атлас \mathcal{A} . Выберем произвольную точку $P \in M$, тогда, по лемме 15.43, канонические базисы локальных координат, порожденных всеми содержащими P картами из атласа \mathcal{A} , имеют одну и ту же ориентацию. Эту ориентацию пространства $T_P M$ выберем в качестве положительной. Тогда все канонические базисы,

порожденные каждой картой из \mathcal{A} , будут иметь положительную ориентацию, в частности, выбранное семейство ориентаций касательных пространств $T_P M$ непрерывно зависит от точки, так что многообразии M ориентируемо в смысле определения 15.35. Утверждение доказано. \square

Следующий результат оказывается полезным при доказательстве неориентируемости.

Следствие 15.48. Пусть M — произвольное гладкое многообразие и \mathcal{A} — произвольный его атлас. Тогда M ориентируемо, если и только если атлас \mathcal{A} можно ориентировать заменами ориентации в некоторых его картах.

Доказательство. Пусть многообразие M ориентируемо, тогда возможность ориентировать атлас \mathcal{A} заменами ориентаций некоторых его карт фактически составляет результат следствия 15.46. Обратно, если нам удалось ориентировать атлас \mathcal{A} , то многообразии M ориентируемо по определению 15.39. \square

Пример 15.49. Покажем, как работаем следствие 15.48. Рассмотрим лист Мёбиуса M , склеенный из квадрата $\{(x, y) : |x| \leq 1, |y| < 1\}$ посредством отождествления каждой пары точек $(-1, -y)$ и $(1, y)$. Введем на M атлас из двух карт (U_i, φ_i) , $i = 1, 2$, положив $U_1 = \{(x, y) \in M : |x| < 2/3\}$, $\varphi_1 = \text{id}$, $U_2 = \{(x, y) \in M : |x| > 1/3\}$, $\varphi_2 = \text{id}$ при $x > 0$ и $\varphi_2(x, y) = (x + 2, -y)$ при $x < 0$. Тогда $U_1 \cap U_2$ состоит из двух полосок $V_1 = \{(x, y) \in M : -2/3 < x < -1/3\}$ и $V_2 = \{(x, y) \in M : 1/3 < x < 2/3\}$. Рассмотрим функции перехода $\varphi_{21} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$. Тогда $\varphi_{21}(x, y) = (x, y)$ на $\varphi_1(V_2)$ и $\varphi_{21}(x, y) = (x + 2, -y)$ на $\varphi_1(V_1)$. Но тогда на $\varphi_1(V_2)$ якобианы этой замены положительны, а на $\varphi_1(V_1)$ — отрицательны, так что построенный атлас ориентированным не является. Ясно, что делая замены ориентации в этих двух картах, мы получим еще три атласа. Отметим, что замены ориентации, выполненные одновременно во всех картах, не меняют свойства атласа быть ориентированным или нет. Таким образом, достаточно рассмотреть еще ровно один атлас, получающийся заменой ориентации в одной из построенных карт. Заменяем ориентацию в карте (U_2, φ_2) , в результате получим карту (U_2, φ'_2) , для которой $\varphi'_2(x, y) = (-x, y)$ при $x > 0$ и $\varphi'_2(x, y) = (-x - 2, -y)$ при $x < 0$. Тогда функция перехода $\varphi'_{21} = \varphi'_2 \circ \varphi_1^{-1}$ действует так: $\varphi'_{21}(x, y) = (-x, y)$ на $\varphi_1(V_2)$ и $\varphi'_{21}(x, y) = (-x - 2, -y)$ на $\varphi_1(V_1)$. Поэтому теперь на $\varphi_1(V_2)$ якобиан функции перехода отрицателен, а на $\varphi_1(V_1)$ — положителен, так что построенный атлас снова не является ориентированным. Применяя следствие 15.48, заключаем, что лист Мёбиуса неориентируем.

Наконец, чтобы дать третье определение ориентируемости, нам понадобится сначала определить непрерывное семейство базисов вдоль непрерывной кривой на гладком многообразии.

Определение 15.50. Пусть $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$, — непрерывная кривая на гладком многообразии M . При каждом t выберем в $T_{\gamma(t)} M$ некоторый базис $E(t) = (e_1(t), \dots, e_n(t))$. Будем говорить, что семейство базисов $E(t)$ непрерывно вдоль γ , если при каждом t_0 существуют некоторые координаты в окрестности точки $\gamma(t_0)$, в которых компоненты $e_i(t)^\alpha$ векторов $e_i(t)$ являются непрерывными функциями параметра t в некоторой окрестности точки t_0 .

Лемма 15.51. *Для каждой непрерывной кривой $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$, на гладком многообразии M существует семейство базисов $E(t)$ касательных пространств $T_{\gamma(t)}M$, непрерывно зависящее от t .*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — произвольный атлас на M , тогда каждая точка $\gamma(t)$ кривой γ лежит в некотором U_α . В силу непрерывности кривой, для каждого $t_0 \in [a, b]$ существует такая его связная окрестность $V(t_0) \subset [a, b]$, что точки $\gamma(t)$ при всех $t \in V(t_0)$ содержатся в одном и том же U_α . Семейство $\{V(t_0)\}_{t_0 \in [a, b]}$ является открытым покрытием отрезка $[a, b]$, поэтому в нем существует конечное подпокрытие $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_k\}$ (в силу компактности отрезка $[a, b]$). Выкинем из этого конечного подпокрытия все V_p , содержащиеся в других V_q этого же подпокрытия. Без ограничения общности, будем считать, что мы сразу выбрали такое подпокрытие \mathcal{V} . Раз так, то у любых двух различных интервалов V_p и V_q не могут совпадать как левые концы, так и правые; более того, если левый конец интервала V_p меньше левого конца интервала V_q , то и правый конец V_p меньше правого конца V_q . Упорядочим элементы покрытия \mathcal{V} по возрастанию их левых концов. Без ограничения общности, сразу будем считать, что элементы V_p расположены именно в таком порядке в списке $\{V_1, \dots, V_k\}$. Тогда каждое множество $W_p = V_p \cap V_{p+1}$ — непустой интервал (иначе \mathcal{V} не покрывает отрезок). Отметим, что левый конец w_p интервала W_p совпадает с левым концом интервала V_{p+1} , поэтому w_p также монотонно возрастают с ростом p . Легко видеть, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ каждая точка $t_p = w_p + \varepsilon$ лежит в W_p . Кроме того, t_p также монотонно возрастают с ростом p .

Будем теперь строить семейство $E(t)$. Для этого обозначим через $\partial_p = (\partial_{x_p^1}, \dots, \partial_{x_p^n})$ канонические базисы, порожденные картой (V_p, φ_p) . В каждой точке $t \in [a, t_1]$ положим $E(t)$ равным базису ∂_1 касательного пространства $T_{\gamma(t)}M$. Далее, в касательном пространстве $T_{\gamma(t_1)}M$ имеется два базиса: ∂_1 и ∂_2 . Пусть C_1 — матрица перехода от первого из этих базисов ко второму, т.е. $\partial_1 = \partial_2 C_1$. В каждой точке $t \in [t_1, t_2]$ положим $E(t)$ равным “подправленному” базису ∂_2 касательного пространства $T_{\gamma(t)}M$, а именно, базису $\partial_2 C_1$. В силу выбора матрицы C_1 , в точке t_1 выбранный базис совпадает с уже построенным на предыдущем шаге. В касательном пространстве $T_{\gamma(t_1)}M$ имеется два базиса: ∂_2 и ∂_3 . Пусть C_2 — матрица перехода от первого из этих базисов ко второму, т.е. $\partial_2 = \partial_3 C_2$. В каждой точке $t \in [t_2, t_3]$ положим $E(t)$ равным “подправленному” базису ∂_3 касательного пространства $T_{\gamma(t)}M$, а именно, базису $\partial_3 C_2 C_1$. В силу выбора матриц C_1 и C_2 , в точке t_2 выбранный базис совпадает с уже построенным на предыдущем шаге. Продолжая этот процесс, мы за конечное число шагов построим семейство $E(t)$, компоненты каждого вектора которого постоянны в каждой карте V_i . \square

Конструкция 15.52. Пусть P и Q — две произвольные точки гладкого многообразия M , соединенные непрерывной кривой $\gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, $P = \gamma(a)$, $Q = \gamma(b)$. Ориентируем касательное пространство $T_P M$. Рассмотрим непрерывное вдоль γ семейство $E(t)$ базисов касательных пространств $T_{\gamma(t)}M$. Ориентируем пространство $T_Q M$ так, чтобы ориентации базисов $E(a)$ и $E(b)$ были одинаковы.

Лемма 15.53. *Полученная в $T_Q M$ ориентация не зависит от выбора семейства $E(t)$.*

Доказательство. Пусть $E'(t)$ — другое непрерывное вдоль γ семейство базисов касательных пространств $T_{\gamma(t)}M$. Тогда при каждом t определена матрица $C(t)$ перехода

от $E(t)$ к $E'(t)$, поэтому функция $\det C(t)$ всюду отлична от нуля. С другой стороны, в силу непрерывности семейств $E(t)$ и $E'(t)$, эта функция также непрерывна и, значит, она или всюду положительна, или всюду отрицательна, так что ориентация базисов $E(a)$ и $E'(a)$ одинакова тогда и только тогда, когда одинакова ориентация базисов $E(b)$ и $E'(b)$. Последнее доказывает, что ориентация пространства $T_Q M$, полученная с помощью семейства $E'(t)$, такая же, как и полученная с помощью $E(t)$. \square

Замечание 15.54. Вообще говоря, полученная в $T_Q M$ ориентация может зависеть от выбора кривой γ .

Лемма 15.53 обосновывает корректность следующего определения.

Определение 15.55. Во введенных выше обозначениях, будем говорить, что полученная на $T_Q M$ ориентация получена в результате *переноса ориентации пространства $T_P M$ вдоль кривой γ* .

Определение 15.56. Гладкое многообразие M назовем *ориентируемым*, если перенос ориентации вдоль непрерывных кривых, соединяющих одну и ту же пару точек из M , не зависит от выбора таких кривых.

Утверждение 15.57. *Определение 15.56 эквивалентно двум предыдущим определениям ориентируемости.*

Доказательство. Пусть гладкое многообразие M является ориентированным в смысле определения 15.56. Тогда выберем в каждой компоненте связности M_i многообразия M по одной точке P_i , зафиксируем некоторую ориентацию для каждого пространства $T_{P_i} M$ и соединим точку P_i непрерывными кривыми со всеми остальными точками компоненты M_i . По лемме 15.51, вдоль каждой из построенных кривых мы можем перенести выбранную ориентацию пространства $T_{P_i} M$ в концевую точку этой кривой, что мы и сделаем. Тем самым, мы ориентировали все касательные пространства к многообразию M . Покажем, что построенное семейство ориентаций непрерывно зависит от точки.

Пусть $P \in M_i$ — произвольная точка и (U, φ) — некоторая карта, содержащая P . Обозначим через $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_n)$ заданное картой (U, φ) семейство канонических базисов касательных пространств в точках области U . Для каждой точки $Q \in U$ обозначим через γ_Q некоторую непрерывную кривую в U , соединяющую P и Q , а через E_Q — семейство базисов пространств $T_{\gamma_Q(t)}$, представляющее собой ограничение семейства ∂ на кривую γ_Q . Тогда E_Q — непрерывное вдоль γ_Q семейство базисов, причем ориентации, полученные перенесением из P во все точки Q , непрерывны в P , так как все базисы ∂ имеют одну и ту же ориентацию. В силу независимости переноса ориентации от выбранной кривой, ориентацию пространства $T_{P_i} M$ можно перенести в точки Q так: сначала перенести эту ориентацию из P_i в P вдоль некоторой непрерывной кривой γ , а затем перенести полученную в $T_P M$ ориентацию в точки Q с помощью кривых γ_Q . В результате получится тот же самый перенос ориентации из P_i , что и перенос ориентации из P , полученный после переноса в P ориентации из P_i вдоль кривой γ . Таким образом, мы доказали непрерывность построенного семейства ориентаций в точке P и, в силу произвольности точки P , — на всем M .

Обратно, пусть многообразие M ориентируемо в смысле первых двух определений. Выберем на M семейство ориентаций, непрерывно зависящих от точки. Пусть $\gamma(t)$ — произвольная непрерывная кривая на M , соединяющая точки $P = \gamma(a)$ и $Q = \gamma(b)$. Выберем в $T_P M$ произвольную ориентацию и перенесем ее в $T_Q M$ с помощью непрерывного вдоль γ семейства базисов $E(t)$. Из непрерывности семейств $E(t)$ и непрерывной зависимости ориентации от точки вытекает, что у каждого $t_0 \in [a, b]$ существует такая окрестность, что для любого t из этой окрестности все $E(t)$ имеют одну и ту же ориентацию. Отсюда вытекает, что базис $E(b)$ имеет ту же ориентацию, что и базис $E(a)$ (доказательство такое же, как и в лемме 15.40). Таким образом, при переносе ориентации из $T_P M$ в $T_Q M$ вдоль любой непрерывной кривой эта ориентация сохраняется, так что перенос ориентации между любыми точками из одной компоненты связности не зависит от выбора кривых, соединяющих эти точки. \square

Упражнение 15.58. Докажите, что третье определение ориентируемости гладкого многообразия M эквивалентно следующему: для любой точки $P \in M$ и любой непрерывной петли γ , выходящей из P , т.е. непрерывной кривой $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$, для которой $\gamma(a) = \gamma(b) = P$, ориентация касательного пространства $T_P M$ остается неизменной при переносе вдоль γ .

Приведем несколько примеров.

Упражнение 15.59. Показать, что атлас стереографической проекции на сфере является ориентированным. Тем самым, атлас стереографической проекции является ориентируемым, и ориентируемость стандартной сферы доказана с помощью определения 15.39.

Упражнение 15.60. Показать, что если атлас многообразия состоит из одной карты, то многообразие ориентируемо. Если атлас многообразия состоит из двух карт, пересечение которых связно, то многообразие ориентируемо.

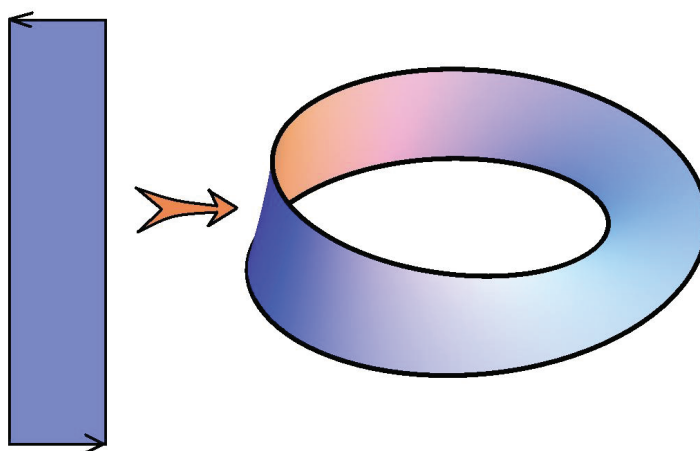


Рис. 15.1: Склейка листа Мебиуса из прямоугольника.

Пример 15.61. Простейший пример неориентируемого многообразия — это лист Мебиуса. Напомним, что лист Мебиуса получается склейкой двух противоположных сторон $a \times (0, 1)$ и $b \times (0, 1)$ прямоугольника $[a, b] \times (0, 1)$ по эквивалентности $(a, y) \sim (b, 1 - y)$,

$y \in (0, 1)$. На рис. 15.1 эта склейка условно изображена стрелками. Стороны, помеченные стрелками, следует склеивать так, чтобы направления стрелок совмещались при склеивании.

Покажем, что лист Мебиуса неориентируем с помощью определения 15.56. Для этого рассмотрим центральную окружность $[a, b] \times 1/2$, зададим в ее точке $P = (x, 1/2)$ базис (e_1, e_2) , где e_1 направлен по касательной к окружности, а e_2 — ортогонален e_1 (рис. 15.2). При переносе ориентации из точки P по окружности в ту же точку P , мы получим базис $(e_1, -e_2)$, что и требовалось доказать.

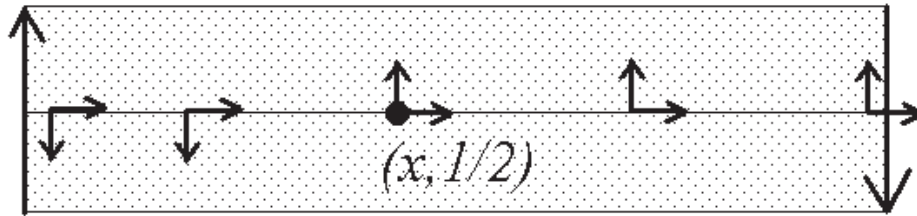


Рис. 15.2: Перенос базиса по центральной окружности листа Мебиуса.

15.4 Задачи

Задача 15.62. Пусть M — связное риманово многообразие. Зададим на нем функцию расстояния ρ , положив $\rho(P, Q) = \inf\{\ell(\gamma)\}$, где точная нижняя грань берется по всевозможным кусочно-гладким кривым, соединяющим P и Q .

Показать, что пара (M, ρ) — метрическое пространство. Проверить, что метрическая топология, порожденная M , эквивалентна топологии многообразия.

Задача 15.63. Пусть $i: M \rightarrow W$ — вложение многообразия M в риманово многообразие W и $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ — гладкая кривая на M . Показать, что длина кривой γ , вычисленная в индуцированной вложением i метрике на M , совпадает с длиной кривой $i \circ \gamma$ на W (в римановой метрике на W).

Задача 15.64. Докажите, что катеноид $(\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, u)$ локально изометричен геликоиду $(\operatorname{sh} u \sin v, -\operatorname{sh} u \cos v, v)$.

Задача 15.65. Докажите, что: 1) декартово произведение ориентируемых многообразий ориентируемо; 2) многообразие размерности n , содержащее неориентируемое подмногообразие размерности n , неориентируемо; 3) регулярная поверхность в \mathbb{R}^n , заданная системой неявных функций, — ориентируемое многообразие; 4) сфера S^n , тор $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$, группы $\operatorname{GL}(n)$, $\operatorname{O}(n)$, $\operatorname{SO}(n)$, $\operatorname{SL}(n)$ ориентируемы, а бутылка Клейна K^2 и проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$ — нет; 5) проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ ориентируемо тогда и только тогда, когда n — нечетно.

Задача 15.66. Показать, что касательное расслоение к произвольному многообразию ориентируемо.

15.5 Дополнительный материал

15.5.1 Примеры: бутылка Клейна

Бутылкой Клейна, напомним, называется многообразие, полученное склейкой противоположных сторон квадрата, изображенной схематически на рис. 15.3. Две противоположных стороны, помеченные буквой a , склеиваются без переворачивания, а две другие, помеченные буквой b , — с переворачиванием.

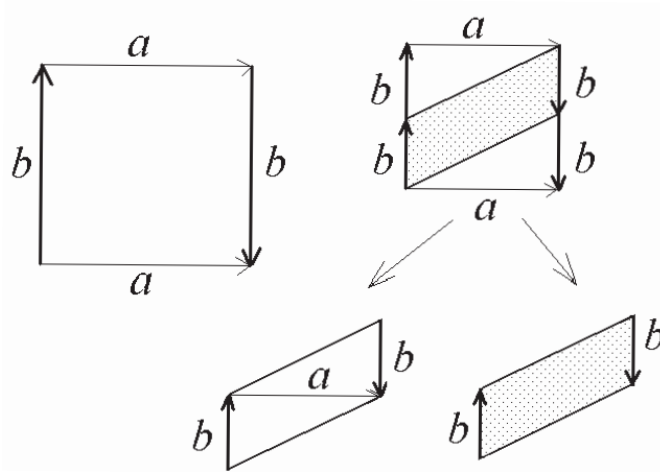


Рис. 15.3: Склейка бутылки Клейна из квадрата (слева сверху) и из двух листов Мебиуса.

Заметим, что бутылка Клейна может быть получена склейкой двух листов Мебиуса. Действительно, разрезав квадрат по двум параллельным отрезкам, соединяющим середины сторон b с соответствующими вершинами квадрата (см. рис. 15.3) и склеив затем по стороне a , получим два листа Мебиуса. В частности, отсюда следует, что бутылка Клейна — это неориентируемое многообразие.

15.5.2 Примеры: проективное пространство \mathbb{RP}^3

Проверим ориентируемость проективного пространства \mathbb{RP}^3 . Напомним, что на этом многообразии имеется стандартный атлас из четырех карт, который в терминах однородных координат $(x^1 : x^2 : x^3 : x^4)$ задается в виде

$$\begin{aligned} U_1(x^1 \neq 0), & \quad (x^1 : x^2 : x^3 : x^4) \mapsto \left(\frac{x^2}{x^1}, \frac{x^3}{x^1}, \frac{x^4}{x^1} \right), \\ U_2(x^2 \neq 0), & \quad (x^1 : x^2 : x^3 : x^4) \mapsto \left(\frac{x^1}{x^2}, \frac{x^3}{x^2}, \frac{x^4}{x^2} \right), \\ U_3(x^3 \neq 0), & \quad (x^1 : x^2 : x^3 : x^4) \mapsto \left(\frac{x^1}{x^3}, \frac{x^2}{x^3}, \frac{x^4}{x^3} \right), \\ U_4(x^4 \neq 0), & \quad (x^1 : x^2 : x^3 : x^4) \mapsto \left(\frac{x^1}{x^4}, \frac{x^2}{x^4}, \frac{x^3}{x^4} \right). \end{aligned}$$

Однако, как легко проверить, этот атлас не является ориентированным (скажем, определитель матрицы перехода от U_1 к U_4 всюду отрицателен). Поэтому, чтобы превратить атлас в ориентированный, следует переменить порядок координат в некоторых картах. Например, это можно сделать так:

$$\begin{aligned} U_1(x^1 \neq 0), & \quad (x^1 : x^2 : x^3 : x^4) \mapsto \left(\frac{x^2}{x^1}, \frac{x^3}{x^1}, \frac{x^4}{x^1} \right), \\ U_2(x^2 \neq 0), & \quad (x^1 : x^2 : x^3 : x^4) \mapsto \left(\frac{x^4}{x^2}, \frac{x^3}{x^2}, \frac{x^1}{x^2} \right), \\ U_3(x^3 \neq 0), & \quad (x^1 : x^2 : x^3 : x^4) \mapsto \left(\frac{x^1}{x^3}, \frac{x^2}{x^3}, \frac{x^4}{x^3} \right), \\ U_4(x^4 \neq 0), & \quad (x^1 : x^2 : x^3 : x^4) \mapsto \left(\frac{x^2}{x^4}, \frac{x^1}{x^4}, \frac{x^3}{x^4} \right) \end{aligned}$$

(мы переставили пару координат во второй и четвертой картах). Теперь все матрицы перехода имеют положительный якобиан. Например, обозначив координаты в карте U_1 через (a^1, a^2, a^3) , запишем функции перехода к карте U_4 в виде

$$(a^1, a^2, a^3) \mapsto \left(\frac{a^1}{a^3}, \frac{1}{a^3}, \frac{a^2}{a^3} \right).$$

Тогда определитель матрицы Якоби равен $1/(a^3)^2 > 0$.

Тема 16

Классификация связных компактных двумерных многообразий

Полное доказательство теоремы классификации (с точностью до гомеоморфизма) связных компактных двумерных многообразий¹ мы приводить не будем и ограничимся демонстрацией основных идей.² Отметим, что одномерных компактных многообразий совсем мало: все они гомеоморфны окружности. В двумерном случае ситуация существенно богаче и поддается классификации. Для более высоких размерностей полное эффективное описание неизвестно.

16.1 Склейки многоугольников

Начнем с уже известных нам примеров двумерных многообразий.

Пример 16.1. Напомним, что выше мы получили бутылку Клейна из квадрата, отождествив его стороны по определенному правилу. Аналогично можно получить три других многообразия, а именно, сферу, тор и проективную плоскость, см. рис. 16.1).

¹Обычно в формулировку этой теоремы включают условие замкнутости, т.е. отсутствия края. Однако мы пока не рассматривали многообразий с краем, поэтому все компактные многообразия замкнуты автоматически.

²Наш подход отличается от “метода приклейки ленточек,” использованного в курсе наглядной геометрии и топологии, см. [10]

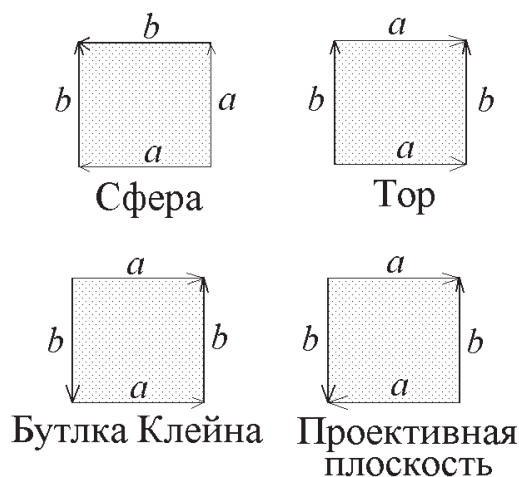


Рис. 16.1: Склейки квадрата.

Попробуем взглянуть на эти четыре примера с единой точки зрения.

Конструкция 16.2. Пусть P — произвольный плоский многоугольник с $2k$ сторонами. Разобьем множество его сторон на k непересекающихся пар и пометим стороны, попавшие в одну и ту же пару, одинаковыми буквами. В итоге, у нас будет k различных букв a_1, \dots, a_k , расставленных на $2k$ сторонах. Превратим многоугольник P в двумерное (топологическое) многообразие, отождествив стороны, помеченные одинаковыми буквами. Напомним, однако, что существуют два различных гомеоморфизма отрезка на себя. Чтобы различать эти два разных способа отождествления сторон, поступим так. Фиксируем направление обхода многоугольника по периметру, например по часовой стрелке. Начиная с произвольной стороны, будем последовательно перебирать стороны многоугольника, расставляя на них стрелки (или, если угодно, ± 1) по следующему правилу. Если сторона, помеченная буквой a_i , встречается первый раз, то ставим на ней стрелку, сонаправленную с выбранным направлением обхода многоугольника (припишем $+1$). Если же сторона встречается второй раз, то имеются две возможности:

- стороны склеиваются “без переворота”, т.е. концевая, в смысле направления обхода, точка первой встретившейся стороны склеивается с первой точкой второй встретившейся стороны (как противоположные стороны квадрата при склейке его в тор);
- стороны склеиваются “с переворотом”, т.е. концевая точка первой встретившейся стороны склеивается с концевой точкой второй встретившейся стороны (как противоположные стороны квадрата при склейке проективной плоскости).

В первом случае пометим сторону стрелкой, направленной против движения вокруг многоугольника (припишем -1), а во втором — стрелкой, сонаправленной с движением вокруг многоугольника (припишем $+1$). Отметим, что после такой разметки при склеивании стрелок их направления совмещаются. В результате получаем разметку сторон нашего многоугольника буквами и стрелками (или ± 1). Ясно, что эта разметка однозначно задает склейку двумерного многообразия.

Каждой такой разметке мы сопоставим некоторое слово, выписав последовательно буквы, стоящие на сторонах нашего многоугольника, и приписав каждой букве степень -1 , если соответствующая сторона помечена -1 .

Определение 16.3. Построенное слово W будем называть *словом склейки*, а о полученном в результате склейки многоугольника P в соответствии со словом W компактном двумерном многообразии M будем говорить, что оно *склеено из P по слову W* . Будем обозначать это многообразие $P(W)$.

Упражнение 16.4. Докажите, что полученное в результате описанной склейки многоугольника (т.е. факторизации по соответствующему отношению эквивалентности) топологическое пространство (с фактор топологией) действительно является топологическим многообразием. Для этого укажите гомеоморфные кругу окрестности всех его точек.

Конструкция 16.5. Если задано произвольное слово W , составленное из k пар различных букв, каждая из которых может встречаться в степени ± 1 , то по слову W можно восстановить двумерное компактное многообразие, склеенное из некоторого $2k$ -угольника P . А именно, возьмем произвольный $2k$ -угольник P и, начав с произвольной его стороны, припишем последовательным сторонам многоугольника P последовательные буквы слова W в соответствующих степенях ± 1 . Склеим стороны, помеченные одинаковыми буквами. При этом если обе стороны помечены буквой в одинаковой степени, то выполним склейку “с переворотом”, а если степени разные — то “без переворота”.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из построений.

Предложение 16.6. Пусть фиксировано произвольное разбиение множества сторон $2k$ -угольника P на непересекающиеся пары и задано некоторое отождествление этих пар сторон. Тогда эта склейка многоугольника однозначно определяется некоторым словом W .

Обратно: каждое слово W , состоящее из k пар различных букв, каждая из которых может встречаться в степени ± 1 , задает некоторую склейку многоугольника P в двумерное компактное многообразие.

Пример 16.7. Пусть Q — это уже знакомый нам квадрат. Тогда, как видно из рис. 16.1, $Q(abb^{-1}a^{-1})$ — это сфера, $Q(bab^{-1}a^{-1})$ — тор, $Q(baba^{-1})$ — бутылка Клейна, $Q(ab^{-1}ab^{-1})$ — проективная плоскость.

Замечание 16.8. Заметим, что разным словам могут отвечать одни и те же многообразия. Например, $Q(abab)$ — тоже проективная плоскость, а $P(aa^{-1})$ — сфера.

16.2 Заклеивание сферы

Рассмотрим еще один способ получения двумерных компактных многообразий.

Конструкция 16.9. Возьмем стандартную двумерную сферу и вырежем из нее два открытых непересекающихся диска. Полученное топологическое пространство — сфера с двумя дырками — гомеоморфно цилиндру $S^1 \times [0, 1]$, а его граница — объединению

двух окружностей. Рассмотрим еще один экземпляр цилиндра $[0, 1] \times S^1$. Склеим цилиндр и сферу с двумя дырками, отождествив их граничные окружности.



Рис. 16.2: Разные способы приклейки цилиндра–ручки к сфере с дырками.

Заметим, что имеется, вообще говоря, четыре способа приклеить цилиндр к сфере с дырками (рис. 16.2). При этом если цилиндр целиком лежит снаружи или целиком внутри исходной сферы, то получается компактное двумерное многообразие, гомеоморфное тору (фактически мы склеили два цилиндра), а в двух других случаях — гомеоморфное бутылке Клейна.

Определение 16.10. Операцию приклейки цилиндра по двум граничным окружностям назовем *приклейкой ручки*. Если цилиндр-ручка при этом целиком лежит по одну сторону от поверхности, то будем называть такую ручку *ориентированной*. В противном случае будем говорить о *неориентируемой ручке*.

Следующая лемма вытекает непосредственно из определений.

Лемма 16.11. *Двумерный тор гомеоморфен сфере с одной ориентированной ручкой. Бутылка Клейна гомеоморфна сфере с одной неориентируемой ручкой.*

Конструкция 16.12. Рассмотрим проективную плоскость, склеенную из квадрата: $\mathbb{RP}^2 = Q(abab)$, и вырежем из нее диск, центр которого, для удобства, поместим на сторону квадрата (рис. 16.3). То, что осталось, гомеоморфно листу Мебиуса. Таким образом, проективная плоскость может быть получена так: нужно вырезать из сферы диск и заклеить образовавшуюся дырку листом Мебиуса, отождествив граничные окружности.

Определение 16.13. Операция приклейки листа Мебиуса по граничной окружности называется *приклейкой пленки Мебиуса*.

Лемма 16.14. *Проективная плоскость гомеоморфна сфере с одной приклеенной пленкой Мебиуса.*

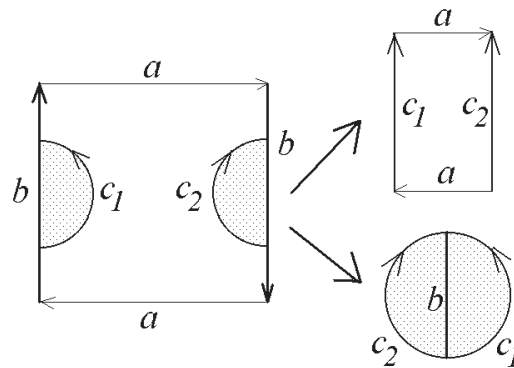


Рис. 16.3: Проективная плоскость — склейка диска и листа Мебиуса.

Упражнение 16.15. С помощью рис. 15.3 показать, что бутылка Клейна гомеоморфна сфере, заклеенной двумя пленками Мебиуса. Сравнить с доказательством леммы 16.11, нарисовать приклеиваемую в этой лемме ручку на квадрате. Таким образом, приклеивание неориентируемой ручки эквивалентно приклеиванию двух пленок Мебиуса.

Конструкция 16.16. Мы определили две операции: приклейка ориентированной ручки и приклейка пленки Мебиуса, и у нас естественно возникают две серии двумерных компактных многообразий:

- многообразие M_g^2 , $g \geq 0$, получающееся из сферы с $2g$ дырками приклеиванием g штук ориентированных ручек и называемое *сферой с g ручками*;
- многообразие N_μ^2 , $\mu \geq 1$, получающееся из сферы с μ дырками приклейкой μ пленок Мебиуса.

Замечание 16.17. Очевидно, что любое двумерное многообразие, в которое вклеена пленка Мебиуса, неориентируемо, так как, перенеся репер вдоль центральной окружности листа Мебиуса, мы получим репер противоположной ориентации. Напротив, многообразие, полученное приклейкой к сфере любого числа ориентированных ручек, разбивает объемлющее пространство на две части и поэтому ориентируемо.

Упражнение 16.18. Показать, что сфера, к которой приклеено k ручек и t пленок Мебиуса, гомеоморфна сфере с $2k + t$ пленками Мебиуса.

Упражнение 16.19. Докажите, что для любых g и μ многообразие M_g^2 может быть вложено в \mathbb{R}^3 , а многообразие M_μ^2 — погружено в \mathbb{R}^3 .

16.3 Теорема классификации

Основным результатом данного раздела является следующая классификационная теорема.

Теорема 16.20. Любое гладкое связное компактное (замкнутое) двумерное многообразие гомеоморфно или сфере с g ручками, $g \geq 0$, или сфере с μ пленками Мебиуса,

$\mu \geq 1$. Сферы с ручками (при разных g) и сферы с пленками Мебиуса (при разных μ) попарно негомеоморфны.

Мы не будем приводить полное доказательство этой теоремы, а лишь поясним основные идеи.

16.3.1 Триангуляции

Обсуждаемое в данном разделе понятие триангуляции является мощным инструментом современной топологии, позволяющим сводить многие топологические задачи к комбинаторным. Фактически идея состоит в том, что многообразие можно заменить гомеоморфным многогранником с треугольными гранями.

Определение 16.21. Пусть M — связное компактное двумерное многообразие. Будем говорить, что на M задана некоторая *триангуляция*, если на M задан конечный набор отрезков гладких вложенных кривых $\gamma_i: [0, 1] \rightarrow M$ — *ребер триангуляции*, пересекающихся между собой только по концевым точкам $\gamma_i(0)$, $\gamma_i(1)$ — *вершинам триангуляции*, и при этом выполнены следующие условия:

- концы каждого ребра триангуляции различны, т.е. $\gamma_i(0) \neq \gamma_i(1)$ (отсутствие петель);
- множество $M \setminus (\cup \gamma_i([0, 1]))$, полученное в результате выбрасывания из многообразия M всех ребер триангуляции, представляет собой несвязное объединение открытых дисков (замыкания которых называются *треугольниками триангуляции*), причем граница каждого такого диска состоит из трех ребер триангуляции;
- любые два треугольника триангуляции или не пересекаются, или их пересечение совпадает с некоторой их общей вершиной или с некоторым общим ребром триангуляции.

Упражнение 16.22. Постройте триангуляции сферы, тора, бутылки Клейна и проективной плоскости. Из какого минимального числа треугольников могут состоять триангуляции этих поверхностей?

Имеет место следующий результат, который приводится без доказательства.

Предложение 16.23. Любое двумерное гладкое компактное связное (замкнутое) многообразие допускает триангуляцию.

Конструкция 16.24. Пусть M — гладкое связное компактное (замкнутое) двумерное многообразие и пусть задана некоторая его триангуляция, существующая в силу утверждения 16.23. Ориентируем все ребра триангуляции, т.е. расставим на них стрелки, и пометим ребра триангуляции буквами, приписывая разным ребрам различные буквы. Разрежем многообразие M по всем ребрам триангуляции. Получим конечный набор треугольников — замкнутых топологических дисков, все стороны которых помечены буквами и стрелками, причем каждая буква встречается ровно два раза (при разрезании вдоль стороны триангуляции мы сохраняем стрелку и букву на обоих берегах разреза).

Будем теперь склеивать треугольники триангуляции, на каждом следующем шаге приклеивая в точности один треугольник в точности по одной стороне. Из построения, определения триангуляции и связности многообразия M следует, что последовательно будут приклеены все треугольники и в результате получится множество P , гомеоморфное двумерному диску. Граница этого множества разбита на четное количество $2k$ ребер триангуляции. Эти ребра некоторым образом разбиты на пары ребер, помеченных одинаковыми буквами, и, кроме того, каждое ребро снабжено стрелкой.

Лемма 16.25. *Каждое гладкое связное компактное (замкнутое) двумерное многообразие может быть получено из некоторого $2k$ -угольника некоторой склейкой пар его сторон.*

Доказательство. Из конструкции 16.24 ясно, что множество P гомеоморфно плоскому $2k$ -угольнику, на границе которого определена некоторое слово склейки. Склеивая многоугольник P по этому слову, получим исходное многообразие. Лемма доказана. \square

16.3.2 Канонические склейки многоугольников

Напомним, что каждая склейка многоугольника задается некоторым словом, хотя разные слова могут приводить к одному и тому же многообразию.

Утверждение 16.26. *Имеют место следующие гомеоморфизмы:*

- (1) *многообразию $P(aa^{-1})$ гомеоморфно сфере;*
- (2) *многообразию $P(a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \cdots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1})$ гомеоморфно сфере с n ручками;*
- (3) *многообразию $P(a_1a_1 \cdots a_na_n)$, гомеоморфно сфере с n пленками Мебиуса.*

Определение 16.27. *Склейки, описанные в утверждении 16.26, называются каноническими.*

Лемма 16.28. *Произвольное многообразие, полученное склейкой из $2k$ угольника, гомеоморфно или сфере с g ручками, или сфере с μ пленками Мебиуса.*

Доказательство леммы 16.28 можно провести с помощью набора нескольких гомеоморфизмов, которые перестраивают многоугольник P и слово склейки. Эти гомеоморфизмы описываются в терминах разрезания многоугольника P по некоторой диагонали, помеченной буквой и стрелкой, и склейки двух полученных многоугольников с размеченными сторонами по паре сторон. При этом меняется слово склейки, но не многообразие. Можно показать, что с помощью таких операций произвольное слово склейки можно преобразовать к одному из трех канонических видов, приведенных в утверждении 16.26. Мы не будем здесь приводить эту конструкцию, отсылая заинтересованных к книге Мищенко А. С. и Фоменко А. Т. “Курс дифференциальной геометрии и топологии”, где соответствующий алгоритм подробно изложен и снабжен замечательными рисунками.

16.3.3 Последний шаг, эйлерова характеристика

Чтобы завершить доказательство классификационной теоремы, следует установить, что многообразия M_g^2 , $g \geq 0$, и N_μ^2 попарно негомеоморфны. Для этого нам понадобится понятие эйлеровой характеристики.

Определение 16.29. Пусть τ — произвольная триангуляция двумерного многообразия M . Назовем *эйлеровой характеристикой* $\chi(\tau)$ *триангуляции* τ следующее целое число:

$$\chi(\tau) = F - E + V,$$

где F , E и V — количества треугольников (граней), ребер и вершин триангуляции соответственно.

Имеет место следующее утверждение, доказательство которого полностью аналогично доказательству для частного случая $M = S^2$, которое приводится в курсе наглядной геометрии и топологии.

Утверждение 16.30. *Эйлерова характеристика триангуляции многообразия M не зависит от триангуляции и определяется только многообразием M .*

Определение 16.31. Назовем *эйлеровой характеристикой* *двумерного многообразия* M эйлерову характеристику любой его триангуляции.

Предложение 16.32. *Эйлерова характеристика многообразия является его топологическим инвариантом, т.е. если два многообразия гомеоморфны, их эйлеровы характеристики совпадают.*

Замечание 16.33. Можно теперь вычислить эйлеровы характеристики всех двумерных компактных связных многообразий, построив подходящие триангуляции. Если получатся разные числа, то тем самым будет доказана негомеоморфность соответствующих многообразий. Однако построение триангуляций — дело сложное и трудоемкое. Мы поступим иначе.

Конструкция 16.34. Пусть M_1 и M_2 — два двумерных многообразия и P_i — точка на многообразии M_i . Пусть U_i — малая круговая окрестность точки P_i . Выбросим из многообразия M_i диск U_i . В результате получится топологическое пространство, граница которого гомеоморфна окружности. Склеим два этих пространства по граничной окружности.

Определение 16.35. Построенное компактное многообразие назовем *связной суммой* многообразий M_1 и M_2 и обозначим через $M_1 \# M_2$.

Утверждение 16.36. *Пусть M_1 и M_2 — двумерные компактные связные многообразия. Тогда*

$$\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2.$$

Доказательство. Рассмотрим достаточно мелкие триангуляции многообразий M_i . Тогда при построении их связной суммы в качестве дисков можно взять треугольники триангуляций. Отождествляя эти треугольники, склеим их по сторонам. В итоге получим некоторую триангуляцию τ связной суммы.

Пусть V_i , E_i и F_i — соответственно количества вершин, ребер и треугольников триангуляций многообразий M_i , а V , E и F — соответствующие числа для триангуляции τ . Тогда

$$V = V_1 + V_2 - 3, \quad E = E_1 + E_2 - 3, \quad F = F_1 + F_2 - 2,$$

откуда и получаем требуемое соотношение. \square

Лемма 16.37. *Эйлерова характеристика сферы равна 2.*

Доказательство. Ясно, что $S^2 \# S^2 = S^2$, откуда $\chi(S^2) = 2\chi(S^2) - 2$, поэтому $\chi(S^2) = 2$. \square

Лемма 16.38. *Эйлерова характеристика тора равна 0.*

Доказательство. Тор можно получить из сферы выбрасыванием двух дисков и последующей склейкой друг с другом двух граничных окружностей. Если сфера уже была триангулирована, а вместо дисков мы возьмем треугольники триангуляции, то получим некоторую триангуляцию τ тора. Рассуждая так же, как при доказательстве утверждения 16.36, получим

$$V = V_1 - 3, \quad E = E_1 - 3, \quad F = F_1 - 2,$$

где V , E и F — количества вершин, ребер и треугольников триангуляции τ , а V_1 , E_1 и F_1 — соответствующие числа для исходной триангуляции сферы. Поэтому

$$\chi(T^2) = F - E + V = (F_1 - 2) - (E_1 - 3) + (V_1 - 3) = \chi(S^2) - 2 = 0.$$

\square

Лемма 16.39. *Эйлерова характеристика сферы с g ручками равна $2 - 2g$.*

Доказательство. Если M_g^2 — это сфера с g ручками, то

$$M_g^2 = \underbrace{T^2 \# \dots \# T^2}_g,$$

и

$$\chi(M_g^2) = \underbrace{\chi(T^2) + \dots + \chi(T^2)}_g - 2(g - 1) = 2 - 2g.$$

\square

Лемма 16.40. *Эйлерова характеристика сферы с μ пленкам Мебиуса равна $2 - \mu$.*

Доказательство. Заметим сначала, что если M_μ^2 — сфера с μ пленками Мебиуса, то

$$M_\mu^2 = \underbrace{\mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2}_\mu.$$

Но так как $\mathbb{RP}^2 \# T^2 = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$, то

$$\chi(\mathbb{RP}^2) + \chi(T^2) - 2 = 3\chi(\mathbb{RP}^2) - 4,$$

т.е. $\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$. Поэтому

$$\chi(M_\mu^2) = \underbrace{\chi(\mathbb{R}P^2) + \cdots + \chi(\mathbb{R}P^2)}_\mu - 2(\mu - 1) = 2 - \mu.$$

□

Следствие 16.41. *Сферы с g ручками и сферы с μ пленками Мебиуса попарно недиффеоморфны.*

Доказательство. Осталось заметить, что диффеоморфизм сохраняет свойство ориентируемости, поэтому никакая сфера с $g \geq 0$ ручками недиффеоморфна сфере с $\mu \geq 1$ пленками Мебиуса. □

Следствием 16.41 завершается доказательство теоремы классификации.

Вместо послесловия

Следующий семестр будет посвящен тензорному анализу на многообразиях. Заметим, что лекции — живой и постоянно меняющийся объект. С текущей версией конспектов наших лекций можно познакомиться на сайте

<http://dfgm.math.msu.su>

кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ.

Литература

- [1] *Мищенко А.С., Фоменко А.Т.* Курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Факториал Пресс, 2000.
- [2] *Мищенко А.С., Фоменко А.Т.* Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Физматлит, 2004.
- [3] *Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Элементы дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Наука, 1987.
- [4] *Постников М.М.* Лекции по геометрии. Семестр 2: Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1979; Семестр 3: Гладкие многообразия. — М.: Наука, 1987.
- [5] *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия: в 2 т. — М.: Наука, 1979, 1984.
- [6] *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. — М.: Гостехиздат, 1956.
- [7] *Трофимов В.В.* Введение в геометрию многообразий с симметриями. — М.: Изд-во МГУ, 1989.
- [8] *Васильев А.М., Соловьев Ю.П.* Дифференциальная геометрия. — М.: Изд-во МГУ, 1988.
- [9] *Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т.*, Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Физматлит, 2004.
- [10] *Ошемков А.А., Попеленский Ф.Ю., Тужилин А.А., Фоменко А.Т., Шафаревич А.И.*, Наглядная геометрия и топология. — М.: URSS, 2014.