Лекция 12

Модель Вальраса и конкурентное равновесие

1 Введение

Следующий раздел наших лекций посвящен теоремам о неподвижных точках однозначных и многозначных отображений и применением этих теорем в экономической теории. Поясним, где в математической экономике возникают проблемы, которые можно решить с применением этих теорем.

Рассмотрим общую модель экономики с производством и частной собственностью, берущую свое начало от Вальраса, и получившую развитие в более поздних исследованиях. Мы уже обращались к этой модели в предыдущих лекциях, поэтому вкратце напомним основные понятия, возникающие в ее рамках.

Экономическая структура общества предполагается состоящей из двух секторов: производственного сектора и сектора потребления. *Сектор потребления* можно представлять себе как совокупность всех индивидуумов, составляющих общество, а также учреждений, не участвующих непосредственно в производстве. *Производственный сектор* состоит из отдельных отраслей, выступающих в качестве производителей. Один и тот же объект может фигурировать и как производитель, и как потребитель.

Товары также имеют двоякий характер. Одна группа товаров, ко-

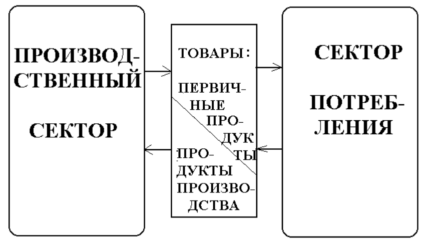

Рис. 12.1:

торые мы будем называть *продуктами производства*, характеризуется тем, что каждый из них может быть произведен в производственном секторе: металл, машины, электроэнергия и т.д. Другая группа товаров, называемая *первичными факторами*, состоит из таких товаров, которые производственным сектором не выпускаются: труд, земля и т.п.

Первичные факторы являются собственностью потребителей, которые их продают с целью приобретения продуктов производства.

Потребитель, находясь в рамках бюджетных ограничений, старается получить максимальное удовлетворение от выбираемого им ассортимента товаров.

Поведение производителей характеризуется стремлением максимизировать прибыль от производства, являющуюся разностью дохода от продажи произведенных продуктов и затрат на приобретение первичных факторов и других продуктов на осуществление производства. Описанная структура схематично представлена на рис. 12.1.

Итак, мы предполагаем, что каждый из участников экономики максимизирует некоторую величину при определенных ограничениях, причем и целевая функция и ограничения зависят от цен на товары и первичные факторы в нашей системе. Более того, предполагается, что каждый участник экономики пассивно приемлет существующую систему цен, не пытаясь на нее влиять (что, вообще говоря, не выполняется при наличии, например, монополий).

Цены на продукты и первичные факторы называются *равновесными*, если производители и потребители, действующие наилучшим для себя образом, сообразуясь при этом с бюджетными ограничениями, обеспечивают такое положение вещей, когда спрос на каждый продукт и фактор не превосходит его предложения.

Основной вопрос в общей модели экономики — существуют ли равновесные цены — ждал своего решения более полувека, и ответ на него был получен лишь в последние 40 лет. Ниже мы изложим на формальном языке модель Вальраса и рассмотрим две ее разновидности при различных ограничениях на составные компоненты модели. Первая из них, предложенная Касселем, близка к модели, рассмотренной Вальдом. Вторая, наиболее известная в настоящее время, — это модель Эрроу–Дебре. Для них мы докажем существование равновесия.

Отметим, что при доказательстве существования равновесия существенно используется теорема Какутани, обобщающая теорему Брауэра о неподвижной точке однозначного отображения на случай многозначных отображений. Поэтому план наших ближайших лекций таков.

Сначала мы дадим формальное описание модели Вальраса и равновесных цен, тем самым сформулировав основную задачу, затем мы коснемся основ теории неподвижных точек однозначных функций и, в частности, сформулируем теорему Брауэра, которую докажем в простейшем случае. После мы напомним определение многозначных отображений и сформулируем теорему Какутани, и, наконец, применим разработанную технику к доказательству существования равновесия в моделях Вальда–Касселя и Эрроу–Дебре.

2 Модель Вальраса

Напомним, что для описания экономической деятельности участников экономики мы определили пространство товаров $\mathbb{R}^n$, в котором по i-ой оси откладывается количество i-ого из имеющихся товаров (предполагается, что для каждого товара выбрана некоторая единица измерения его количества). Элементы пространства товаров мы называли *потребительскими наборами.*

Далее, напомним, что для каждого потребителя мы рассматриваем множество $X \subset \mathbb{R}^n$ всех потребительских наборов, доступных данному потребителю и пригодных для него. Это множество X мы называли *множеством потребления* или *потребительским множеством.* На потребительском множестве мы определяли *функцию полезности*, выражающую предпочтение потребителя одного потребительского набора перед другим: чем больше значение функции полезности, тем выше предпочтение потребителя данного потребительского набора. Кроме того, у каждого потребителя предполагался некоторый доход, выражающийся в наличии у потребителя капитала $K(p)$, зависящего, вообще говоря, от сложившейся системы цен. Мы будем предполагать, что *функция дохода* складывается из двух компонент: от продажи потребителем начального запаса товаров b, стоимость которого равна

$\langle p, b\rangle$ (при ценах p), и некоторого дохода $I(p)$, возникающего, скажем, в результате участия потребителя в доходах производственного сектора. Таким образом, имеем: $K(p) = \langle b, p\rangle + I(p)$;

По потребительскому множеству $X \subset \mathbb{R}^n$, функции полезности $u(x)$ и функции дохода $K(p)$ мы строили многозначное отображение, называемое *функцией спроса* $\Phi(p)$, следующим образом. Обозначим через $B(p)$ бюджетное множество $\{x \in X \mid \langle p, x\rangle \leq K(p)\}$, т.е. множество всевозможных наборов товаров, доступных потребителю при ценах p. Тогда

$$\Phi(p) = \{x \in B(p) \mid u(x) = \max_{x' \in B(p)} u(x')\}.$$

Иными словами, $\Phi(p)$ — это подмножество потребительского множества X, состоящее из всех товарных наборов, которые наиболее подходят потребителю при заданных бюджетных ограничениях.

Итак, будем считать, что в нашей модели имеется l потребителей, причем i-ый потребитель характеризуется:

- своим потребительским множеством $X_i \subset \mathbb{R}^n$;

- функцией дохода $K_i(p) = \langle b_i, p\rangle + I_i(p)$, зависящей от системы цен $p \in \mathbb{R}^n$ на имеющиеся товары и складывающейся из доходов от продажи начального запаса товаров b_i, и дохода $I_i(p)$ от участия в доходах производственного сектора;

- функцией спроса $\Phi_i(p)$, также зависящей от системы цен p.

Рассмотрим теперь структуру производства. Прежде всего, каждое производство характеризуется свои *технологическим множеством* $Y \subset \mathbb{R}^n$, т.е. множеством тех товаров, которые оно может произвести (множеством производственных планов). Далее, построим по множеству Y многозначное отображение, называемое *функцией предложения* $\Psi(p)$, из пространства цен в пространство товаров:

$$\Psi(p) = \{y \in Y \mid \langle p, y\rangle = \max_{y' \in Y} \langle p, y'\rangle\}.$$

Иными словами, $\Psi(p)$ является подмножеством технологического множества, состоящим из тех товарных наборов, которые при ценах p наиболее выгодно производить (их можно продать по максимальной цене).

Итак, будем предполагать, что имеется m производств, причем i-ое производство характеризуется технологическим множеством $Y_i \subset \mathbb{R}^l$ и функцией предложения $\Psi_i(p)$.

Чтобы описать систему в целом, мы введем следующие объекты.

Определение. *Совокупным технологическим множеством* Y мы называем множество

$$\sum_{i=1}^{m} Y_i = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = \sum_{i=1}^{m} y_i,\ y_i \in Y_i\},$$

а *функцией* $\Psi_0(p)$ *совокупного предложения производственного сектора* — функцию $\sum_{i=1}^m \Psi_i(p)$.

Чтобы обосновать корректность перехода к совокупным объектам, докажем следующее предложение.

Предложение 12.1 *Пусть* $\Psi_0^*(p)$ *— множество планов, оптимальных с точки зрения всего производственного сектора, т.е.*

$$\Psi_0^*(p) = \{y \in Y \mid \langle p, y\rangle = \max_{y' \in Y} \langle p, y'\rangle\}.$$

Тогда $\Psi_0^*(p) = \sum_{i=1}^m \Psi_i(p) = \Psi_0(p)$. *Другими словами, планы, оптимальные с точки зрения всего производственного сектора, оптимальны и с точки зрения отдельного производителя.*

Доказательство. Действительно, пусть $y \in \Psi_0^*(p)$, тогда $y = \sum_{i=1}^m y_i$, где $y_i \in Y_i$. Покажем, что $y_i \in \Psi_i(p)$, т.е. $\Psi_0^*(p) \subset \sum_{i=1}^m \Psi_i(p)$.

Для каждого $i = 1, \ldots, m$ выберем произвольное $y_i' \in \Psi_i(p)$. Имеем:

$$\langle p, y\rangle = \langle p, \sum_{i=1}^{m} y_i\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle p, y_i\rangle \le \sum_{i=1}^{m} \langle p, y_i'\rangle = \langle p, \sum_{i=1}^{m} y_i'\rangle \le \langle p, y\rangle,$$

поэтому $\sum_{i=1}^m \langle p, y_i\rangle = \sum_{i=1}^m \langle p, y_i'\rangle$, и так как для каждого $i = 1, \ldots, m$ выполняется $\langle p, y_i\rangle \le \langle p, y_i'\rangle$, имеем: $\langle p, y_i\rangle = \langle p, y_i'\rangle$, т.е. $y_i \in \Psi_i(p)$.

Обратно, выберем произвольные $y_i \in \Psi_i(p)$, и положим $y = \sum_{i=1}^m y_i$. Тогда для любого $y' \in Y$, $y' = \sum_{i=1}^m y_i'$, где $y_i' \in Y_i$, выполняется

$$\langle p, y'\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle p, y_i'\rangle \le \sum_{i=1}^{n} \langle p, y_i\rangle = \langle p, y\rangle,$$

поэтому $y \in \Psi_0^*(p)$, и, значит, $\sum_{i=1}^m \Psi_i(p) \subset \Psi_0^*(p)$. Предложение полностью доказано.

Таким образом, мы можем характеризовать весь производственный сектор совокупным технологическим множеством Y и функцией совокупного предложения $\Psi_0(p)$, забыв об отдельных производителях.

Далее, мы будем считать, что весь доход производственного сектора, т.е. величина $\langle p, y\rangle$ для любого $y \in \Psi_0(p)$, делится между потребителями:

$$\langle p, y\rangle = \sum_{j=1}^{l} I_j(p), \quad y \in \Psi_0(p).$$

Определение. Набор $(y_1^*, \dots, y_m^*, x_1^*, \dots, x_1^*, p^*)$ неотрицательных векторов называется *конкурентным равновесием*, если

$$y_k^* \in \Psi_k(p^*), \quad k = 1, \dots, m, \tag{12.1}$$

(действия производителя оптимальны)

$$x_i^* \in \Phi_i(p^*), \quad i = 1, \dots, l, \tag{12.2}$$

(действия потребителя оптимальны)

а также выполняются *соотношения баланса спроса и предложения*:

$$\sum_{i=1}^{l} x_i^* \le \sum_{k=1}^{m} y_k^* + \sum_{i=1}^{l} b_i, \tag{12.3}$$

(спрос не превышает предложения)

$$\left\langle p^*, \sum_{i=1}^{l} x_i^*, \right\rangle = \left\langle p^*, \sum_{k=1}^{m} y_k^* + \sum_{i=1}^{l} b_i \right\rangle. \tag{12.4}$$

(стоимости купленных и проданных товаров равны)

Определение. Вектор p^* — компонента конкурентного равновесия — называется *вектором равновесных цен.*

Учитывая, что в нашей системе продают товары не только производители, но и потребители (i-ый потребитель продает товарный набор b_i, см. выше), определим *функцию совокупного предложения* $\Psi(p)$ как сумму функции $\Psi_0(p)$ совокупного предложения производственного сектора и вектора $b = \sum_{i=1}^{l} b_i$, учитывающего совокупную продажу товарных запасов всеми потребителями:

$$\Psi(p) = b + \sum_{k=1}^{m} \Psi_k(p), \quad b = \sum_{i=1}^{l} b_i.$$

Кроме того, определим *функцию* $\Phi(p)$ *совокупного спроса* как сумму функций спроса отдельных потребителей:

$$\Phi(p) = \sum_{i=1}^{l} \Phi_i(p).$$

Ясно, что множеством значений многозначного отображения $\Psi(p)$ является *совокупное потребительское множество* $X = \sum_{i=1}^{l} X_i$.

Отметим, что функции $\Phi(p)$ и $\Psi(p)$ связаны естественным соотношением.

Предложение 12.2 *Для любых $x \in \Phi(p)$ и $y \in \Psi(p)$ имеем:*

$$\langle p, x\rangle \leq \langle p, y\rangle. \tag{12.5}$$

Иными словами, в стоимостном выражении, спрос не превышает предложения.

Доказательство. В самом деле, выберем произвольный $x \in \Phi(p)$ и представим его в виде $x = \sum_{i=1}^{l} x_i$, где $x_i \in \Phi_i(p)$. По определению функции $\Phi_i(p)$, имеем: $x_i \in B_i(p) = \{x' \in X_i \mid \langle p, x'\rangle \leq K_i(p)\}$, где $K_i(p) = b_i + I_i(p)$, поэтому $\langle p, x_i\rangle \leq \langle p, b_i\rangle + I_i(p)$. Суммируя по i, получаем

$$\langle p, x\rangle \leq \langle p, b\rangle + \sum_{i=1}^{l} I_i(p).$$

С другой стороны, если $y \in \Psi(p)$, то, по определению, $y = b + \sum_{k=1}^{m} y_k$, где $y_k \in \Psi_k(p)$. Обозначим через y_0 сумму $\sum_{k=1}^{m} y_k$. По предложению 12.1, $y_0 \in \Psi_0(p)$, и, в силу нашего предположения, что весь доход производственного сектора делится между потребителями, имеем: $\sum_{i=1}^{l} I_i(p) = \langle p, y_0\rangle$. Отсюда заключаем, что $\langle p, y\rangle = \langle p, b\rangle + \sum_{i=1}^{l} I_i(p)$. Предложение доказано.

Определение. Соотношение (12.5) называется *законом Вальраса в широком смысле слова*. Если в соотношении (12.5) заменить неравенство на равенство, то мы получим *закон Вальраса в узком смысле слова*.

Сформулируем теперь определение конкурентного равновесия в терминах функций совокупного спроса и предложения.

Определение. Набор (y^*, x^*, p^*) называется *конкурентным равновесием*, если

$$y^* \in \Psi(p), \tag{12.6}$$

$$x^* \in \Phi(p), \tag{12.7}$$

$$x^* \leq y^*, \tag{12.8}$$

$$\langle p^*, x^*\rangle = \langle p^*, y^*\rangle. \tag{12.9}$$

Далее, мы рассмотрим случай однозначных отображений, сформулируем и докажем теорему Брауэра, затем перейдем к многозначным отображениям и теореме Какутани, и, наконец, расскажем, как применяются эти теоремы в экономике.

Лекция 13

Неподвижные точки однозначных и многозначных отображений

1 Неподвижные точки

В настоящем разделе мы рассмотрим основные понятия теории неподвижных точек отображений и проиллюстрируем на примерах некоторые приложения этих этих понятий.

Пусть X — произвольное множество, и $f : X \to X$ — некоторое отображения множества X в себя.

Определение. Точка $x_0 \in X$ называется *неподвижной точкой для отображения* f, если $f(x_0) = x_0$.

Пример (Задача, связанная с решением уравнений). Пусть $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — некоторое отображение. Рассмотрим уравнение $F(x) = 0$. Решение этого уравнения можно свести к нахождению неподвижной точки, если заменить отображение F на отображение G, такое что $G(x) = F(x) + x$.

Действительно, если x_0 — решение уравнения $F(x) = 0$, т.е. $F(x_0) = 0$, то x_0 — неподвижная точка отображения G, так как $G(x_0) = F(x_0) + x_0 = x_0$. Рассуждения в обратную сторону полностью аналогичны.

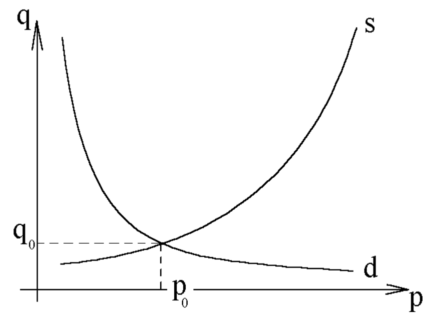

Рис. 13.1: Поиск равновесной цены

Пример (Задача нахождения равновесных цен). Пусть на рынке имеется товар, q — количество этого товара, и p — его цена. Обозначим через $p = s(q)$ функцию предложения, а через $p = d(q)$ — функцию спроса. Требуется найти такое количество товара q_0, при котором цена, которую готов платить потребитель, т.е. $d(q_0)$, совпадала бы с ценой, которую назначает производитель, т.е. с $s(q_0)$. Иными словами, требуется найти точки пересечения графиков функций s и d. Характерные графики приведены на рис. 13.1.

Эта задача естественно сводится к решению уравнения $s(q) - d(q) = 0$. Как и в примере 1, сводим решение этого уравнения к нахождению неподвижной точки функции $g(q) = d(q) - s(q) + q$. Итак, мы можем строить разные модели для нахождения равновесного состояний рынка и, используя показанный выше метод, разрешать их.

Пример (Задача решения систем дифференциальных уравнений). Пусть дана система дифференциальных уравнений с заданным начальным условием:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{13.1}$$

Рассмотрим оператор

$$A : x(t) \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)\, ds,$$

действующий на пространстве всех непрерывных $\mathbb{R}^n$-значных функций $C[a,b]$, определенных на отрезке $[a,b]$. Этот оператор называется *оператором Пикара.*

Функция $x(t)$ является решением системы 13.1 тогда и только тогда, когда $x(t)$ является неподвижной точкой оператора Пикара. Действительно, если $x(t)$ — неподвижная точка для оператора Пикара, то выполняется

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)\, ds. \tag{13.2}$$

Поэтому $x(t_0) = x_0$ и, дифференцируя уравнение 13.2 по t, получаем $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$, что и требовалось. Доказательство в обратную сторону получается аналогично.

Обобщим определение неподвижной точки. Пусть X — произвольное множество, и $f : X \to X$ — отображение множества X в себя. Рассмотрим n-ую итерацию f^n отображения f:

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\cdots f}_{n \text{ раз}}(x)\cdots)))$$

Определение. Точка $x_0 \in X$ называется *циклической для отображения* f, если для некоторого целого $n > 0$ имеем: $f^n(x_0) = x_0$. Каждое такое n называется *периодом.*

Пример. Пусть $f : S^1 \to S^1$ является поворотом стандартной окружности S^1 на угол $\pi/4$. Тогда любая точка $x_0 \in S^1$ является циклической, а наименьший период равен 8.

Определение. Подмножество $Y \subset X$ называется *инвариантным подмножеством отображения* f, если $f(Y) \subset Y$, т.е. для любого $y \in Y$ выполняется $f(y) \in Y$.

Тривиальным примером инвариантного подмножества является все множество X.

Пример. Рассмотрим отображение $f : S^1 \to S^1$, являющееся поворотом на угол π/α, где α — произвольное иррациональное число. Тогда для любой точки $x_0 \in S^1$ множество точек вида $f^n(x_0)$ по всем возможным n образует всюду плотное инвариантное подмножество, не совпадающее со всей окружностью S^1. Отсюда заключаем, что отображение f, обладая инвариантными подмножествами, не имеет ни одной неподвижной точки.

Пример. Пусть на области $U \subset \mathbb{R}^n$ задано векторное поле v. Рассмотрим дифференциальное уравнение $\dot{x} = v(x)$, и пусть $x(t)$ — решение этого уравнения с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Спрашивается, когда x_0 является неподвижной точкой, т.е. когда $x(t) = x_0$ для любого t из области определения решения $x(t)$.

Продифференцировав $x(t)$ по t, получим, что x_0 неподвижная точка если и только если $\dot{x} = 0$, откуда $v(x_0) = 0$.

Определение. Точка $x_0 \in U$ называется *неподвижной* или *особой* точкой векторного поля v, если векторное поле v обращается в этой точке в ноль: $v(x_0) = 0$.

Рассмотрим далее некоторые условия, гарантирующие существование у данного отображения неподвижной точки, а также единственность такой точки. Для этого введем важный класс отображений — так называемые сжимающие отображения.

2 Сжимающие отображения

Пусть X — метрическое пространство. Напомним, что *метрическим пространством* называется множество X вместе с заданной на парах точек из X вещественной функцией $\rho(x, y)$, удовлетворяющей следующим аксиомам:

1) $\rho(x, y) \geq 0$, причем $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (положительная определенность);

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность);

3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника).

Далее, последовательность точек $x_1, x_2, \ldots$ из метрического пространства X называется *фундаментальной* или *последовательностью Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что при любых $m, n > N$ выполняется следующее условие: $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$. Метрическое пространство называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Определение. Отображение $f : X \to Y$ метрического пространства (X, ρ_X) в метрическое пространство (Y, ρ_Y) называется *сжимающим*, если существует такое неотрицательное число $k < 1$, что

$$\rho_Y(f(x), f(y)) \leq k\, \rho_X(x, y).$$

Предложение 13.1 *Сжимающее отображение непрерывно.*

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$ — произвольное сжимающее отображение, x — произвольная точка из X, и $y = f(x)$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, и покажем, что существует $\delta > 0$, для которого f-образ δ-окрестности U точки x лежит в ε-окрестности V точки y.

Положим $\delta = \varepsilon$. Тогда для любой точки $x' \in U$, по определению, имеем $\rho_X(x, x') < \delta = \varepsilon$. Так как отображение f сжимающее, то для некоторого $0 \le k < 1$ имеем $\rho_Y(f(x), f(x')) = \rho_Y(y, f(x')) \le k\,\rho_X(x, x') < \varepsilon$, поэтому $f(x')$ лежит в V, что и требовалось.

Теорема 13.1 *Пусть (X, ρ) — произвольное метрическое пространство.*

1) Пусть $f : X \to X$ — сжимающее отображение. Тогда у отображения f имеется не более одной неподвижной точки.

2) Пусть $f : X \to X$ — сжимающее отображение, и X — полное метрическое пространство. Тогда у f имеется неподвижная точка.

3) Пусть $f : X \to X$ — сжимающее отображение, и X — полное метрическое пространство. Тогда существует и единственна такая точка x_0, что для любой точки $x \in X$ имеем $f^n(x) \to x_0$. Эта точка x_0 и есть неподвижная точка отображения x_0.

Доказательство. 1. Пусть существует две разные неподвижные точки x_0 и x_0^*, тогда

$$\rho(x_0, x_0^*) = \rho(f(x_0), f(x_0^*)) \le k\,\rho(x_0, x_0^*) < \rho(x_0, x_0^*),$$

противоречие.

2 и 3. Выберем произвольную точку $x \in X$, и обозначим через x_n точку $f^n(x)$. Пусть $\rho(x, f(x)) = d$, тогда

$$\rho(f(x), f^2(x)) \le k\,\rho(x, f(x)) = kd,$$

откуда, по индукции, получаем

$$\rho(f^n(x), f^{n+1}(x)) \le k^n d,$$

следовательно

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_{n+j}) &= \rho(f^n(x), f^{n+j}(x)) \le \\ &\rho(f^n(x), f^{n+1}(x)) + \cdots + \rho(f^{n+j-1}(x), f^{n+j}(x)) \le \\ &k^n d + \cdots + k^{n+j-1} d \le k^n \frac{d}{1-k}.\end{aligned}$$

Так как $0 \leq k < 1$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для любого $n > N$ имеем $k^n \frac{d}{1-k} < \varepsilon$, и, в частности, $\rho(x_n, x_{n+j}) < \varepsilon$ для любого j. Поэтому последовательность $f^n(x)$ является фундаментальной, и, в силу полноты пространства X, эта последовательность сходится к некоторой точке x^*. Иными словами, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x^*.$$

Далее, по предложению 13.1, отображение f непрерывно, поэтому f и $\lim$ "можно менять местами". Имеем:

$$f(x^*) = f(\lim_{n\to\infty} f^n(x)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = x^*,$$

т.е. x^* — неподвижная точка. Теорема полностью доказана.

3 Теоремы о неподвижных точках однозначных отображений

Теорема 13.2 (Брауэр) *Пусть $f : D^n \to D^n$ — непрерывное отображение стандартного n-мерного диска $D^n = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\right\}$ в себя. Тогда у отображения f имеется неподвижная точка x_0: $f(x_0) = x_0$.*

Доказательство. Мы докажем эту теорему для случая $n = 1$, т.е. когда D^n — это отрезок $[0, 1]$ (доказательство в общем случае достаточно сложно, и может быть найдено в стандартном курсе дифференциальной геометрии для гладкого отображения f, и в курсе общей топологии для непрерывного f).

Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - x$. Так как -1 и 1 не являются неподвижными точками функции f, и f отображает отрезок $[-1, 1]$ в себя, имеем: $f(-1) > -1$ и $f(1) < 1$, поэтому $g(-1) = f(-1) + 1 > 0$ и $g(1) = f(1) - 1 < 0$. Так как функция f непрерывна, то и g также непрерывна, поэтому, по теореме Коши, функция g принимает на отрезке $[-1, 1]$ нулевое значение. Иными словами, существует $x_0 \in [-1, 1]$, такое что $g(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0$, откуда $f(x_0) = x_0$. Случай $n = 1$ полностью разобран.

Приведем некоторые варианты теоремы Брауэра. Предположим, что непрерывное отображение $f : D^n \to D^n$ не имеет неподвижных точек. Определим отображение $g : D^n \to \partial D^n = S^{n-1}$ по следующему правилу: для каждой точки $x \in D^n$ рассмотрим луч, начинающийся в

$f(x)$ и проходящий через x. Последнюю точку пересечения этого луча с границей $\partial D^n = S^{n-1}$ диска D^n обозначим через $g(x)$. Тем самым мы определили непрерывное отображение $g : D^n \to S^{n-1}$, неподвижное на S^{n-1}: для любой точки $x \in S^{n-1}$ имеем $g(x) = x$.

Определение. Непрерывное отображение $g : D^n \to \partial D^n$ называется *ретракцией*, если для любой точки $x \in \partial D^n$ имеем: $g(x) = x$.

Теорема 13.3 (Переформулировка теоремы Брауэра) *Не существует ретракции $g : D^n \to \partial D^n = S^{n-1}$.*

Распространим теорему Брауэра на множества более общего вида. Напомним, что подмножество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется *компактным*, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие. Подмножество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками оно содержит и отрезок, их соединяющий. Пересечение всех выпуклых множеств, содержащих данное подмножество K пространства $\mathbb{R}^n$, называется *выпуклой оболочкой множества* K и обозначается через $\mathrm{conv}(K)$. Два подмножества A и B в $\mathbb{R}^n$ называются *гомеоморфными*, если существует взаимно-однозначное отображение $f : A \to B$ одного из них на другое, такое что как f, так и f^{-1} — непрерывны.

Далее, мы говорим, что точки $v_0, \ldots, v_n$ в $\mathbb{R}^n$ *аффинно независимы*, если вектора $v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0$ образуют базис пространства $\mathbb{R}^n$. Выпуклая оболочка аффинно независимого множества точек $\{v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ называется *n-мерным симплексом*. *Стандартным n-мерным симплексом* Δ^n называется подмножество в $\mathbb{R}^{n+1}$, заданное следующим образом:

$$\Delta^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1\}.$$

Предложение 13.2 *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт. Тогда K гомеоморфен диску D^m размерности $m \leq n$.*

Доказательство. Рассмотрим все аффинные подпространства в $\mathbb{R}^n$, содержащие K, и пусть L равно пересечению таких подпространств. Ясно, что L — наименьшее аффинное подпространство, содержащее K. Размерность пространства L обозначим через m.

Рассмотрим в K произвольные $m+1$ точку $v_0, \ldots, v_m$, тогда, в силу выпуклости K, выпуклая оболочка множества $\{x_k\}$ содержится в K.

Лемма 13.1 *Точки v_k можно выбрать таким образом, чтобы они были аффинно независимы.*

Из леммы 13.1 вытекает, что наш компакт K содержит некоторую внутреннюю (в подпространстве L) точку v (в качестве такой точки можно выбрать любую внутреннюю точку полученного симплекса $\mathrm{conv}(\{v_i\})$).

Перенесем начало координат в точку v, иными словами, будем считать, что начало координат является внутренней точкой компакта K. Рассмотрим в L стандартную единичную сферу S^{m-1} и построим функцию $\varphi : S^{m-1} \to \mathbb{R}$, ставящую каждой точке $\nu \in S^{m-1}$ число $\varphi(\nu)$ следующим образом:

$$\varphi(\nu) = \max_{\alpha \geq 0}\{\alpha \mid \alpha\nu \in K\}.$$

Так как v — внутренняя точка, а множество K, в силу компактности, ограничено, то функция φ строго положительна и нигде не обращается в бесконечность. Если D^m — стандартный единичный диск в L с границей S^{m-1}, то построим отображение $a : D^n \to K$, оставляющее центр диска D^m на месте, и каждой нецентральной точке $x \in D^m$ ставим в соответствие точку $\varphi(x/\|x\|)\,x$. Легко проверяется, что это отображение является гомеоморфизмом (докажите). Тем самым, мы показали, что выпуклый компакт K гомеоморфен диску D^m. Что и требовалось.

Теорема 13.4 (Теорема Брауэра для выпуклых компактов) *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт, и $f : K \to K$ произвольное отображение компакта K в себя. Тогда отображение f имеет неподвижную точку.*

Доказательство. По предложению 13.2, существует диск D^m, гомеоморфный компакту K. Пусть $a : D^m \to K$ — гомеоморфизм. Рассмотрим непрерывное отображение $g = a^{-1} \circ f \circ a$, переводящее диск D^m в себя. По теореме 13.2, отображение g имеет некоторую неподвижную точку x_0, т.е. $g(x_0) = x_0$. Рассмотрим точку $y_0 = a(x_0)$ из компакта K. Имеем:

$$f(y_0) = f(a(x_0)) = a \circ g \circ a^{-1} \circ a(x_0) = a(g(x_0)) = a(x_0) = y_0,$$

поэтому y_0 — неподвижная точка отображения f, что и требовалось.

4 Теоремы о неподвижных точках многозначных отображений

Пусть X и Y — два произвольных множества, и 2^Y — множество всех подмножеств множества Y. Каждое отображение $f : X \to 2^Y$ называется *многозначным отображением* и обозначается через $f : X \rightrightarrows Y$.

Иными словами, многозначное отображение f множества X во множество Y ставит в соответствие каждой точке $x \in X$ подмножество $f(x)$ множества Y. Напомним, что *графиком* $\mathrm{Gr}(f)$ (многозначного) отображение называется подмножество в $X \times Y$, состоящее их всех пар (x, y), таких что $y \in f(x)$. Ясно, что график многозначного отображения является, по определению, отношением, что позволяет дать эквивалентное определение: многозначное отображение — это произвольное отношение (т.е. произвольное подмножество в $X \times Y$). Если дополнительно потребовать, чтобы образ произвольной точки $x \in X$, т.е. $f(x)$, был непустым подмножеством в Y, то, в терминах отношений, это требование равносильно условию равенства области определения отношения, задающего многозначное отображение, всему множеству X. Напомним, что область определения $D(R)$ отношения $R \subset X \times Y$ — это множество всех $x \in X$, для каждого из которых существует $y \in Y$, такой что $(x, y) \in R$.

Определение. Пусть $f : X \Rightarrow X$ — многозначное отображение множества X в себя. Тогда точка $x \in X$ называется *неподвижной для* f, если $x \in f(x)$.

4.1 Полунепрерывность многозначных отображений

В данном разделе мы напомним определение полунепрерывности обычных функций и обобщим его на случай многозначных отображений. Отметим, что предположения полунепрерывности являются одним из условий теоремы Какутани.

Пусть теперь X и Y — метрические пространства, и $f : X \Rightarrow Y$ — многозначное отображение. Хотя многие определения и результаты имеют место и в более общем случае, а именно, когда X и Y — топологические пространства, мы, для простоты, ограничимся случаем метрических пространств.

Многозначное отображение f называется *открытым*, если его график $\mathrm{Gr}(f)$ — открытое подмножество в $X \times Y$; f называется *замкнутым*, если его график $\mathrm{Gr}(f)$ — замкнутое подмножество в $X \times Y$.

Прежде чем дать определение полунепрерывности и непрерывности многозначных отображений, напомним соответствующие понятия для случая функций. Для каждой точки x метрического пространства (X, ρ) и каждого вещественного числа $r > 0$ обозначим через $B(x, r)$ шар с центром в x радиуса r:

$$B(x, r) = \{x' \in X \mid \rho(x, x') \leq r\}.$$

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — вещественная функция на метрическом пространстве X. Функция f называется *непрерывной в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такие что для любого $x \in B(x_0, \delta)$ выполняются следующие два неравенства:

$$f(x_0) - \varepsilon \le f(x) \text{ и } f(x) \le f(x_0) + \varepsilon.$$

Если потребовать выполнение лишь одного из этих двух неравенств, то мы получим определение полунепрерывности.

А именно, функция f называется *полунепрерывной снизу в точке* x_0, если для любого $\lambda < f(x_0)$ существует $\delta > 0$, такое что для любого $x \in B(x_0, \delta)$ имеем $\lambda \le f(x)$. Функция f называется *полунепрерывной сверху в точке* x_0, если функция $-f$ полунепрерывна снизу в x_0.

Замечание. Функция f непрерывна в точке x_0 если и только если она полунепрерывна в x_0 и снизу, и сверху (докажите).

Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *полунепрерывной снизу* (*полунепрерывной сверху, непрерывной*), если f полунепрерывна снизу (полунепрерывна сверху, непрерывна) в каждой точке $x_0 \in X$.

Перейдем теперь к случаю многозначных отображений. Пусть K — произвольное подмножество метрического пространства (X, ρ). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ определим *ε-окрестность* $B(K, \varepsilon)$ *множества* K как множество всех таких $x \in X$, что $\inf_{x' \in K} \rho(x, x') \le \varepsilon$.

Определение. Многозначное отображение $f : X \rightrightarrows Y$ метрического пространства X в метрическое пространство Y называется *полунепрерывным сверху в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для любого $x \in U(x_0)$ выполняется:

$$f(x) \subset B\big(f(x_0), \varepsilon\big).$$

Иными словами, для любой ε-окрестности множества $f(x_0)$ образы всех достаточно близких к x_0 точек лежат в этой ε-окрестности.

Многозначное отображение, полунепрерывное сверху во всех точках из области определения, называется *полунепрерывным сверху*.

Хотя в дальнейшем нам понадобятся лишь многозначные отображений, полунепрерывные сверху, мы, для полноты изложения, приведем определение полунепрерывных снизу и непрерывных многозначных отображений.

Определение. Многозначное отображение $f : X \rightrightarrows Y$ метрического пространства X в метрическое пространство Y называется *полунепрерывным снизу в точке* $x_0 \in X$, если для любой последовательности

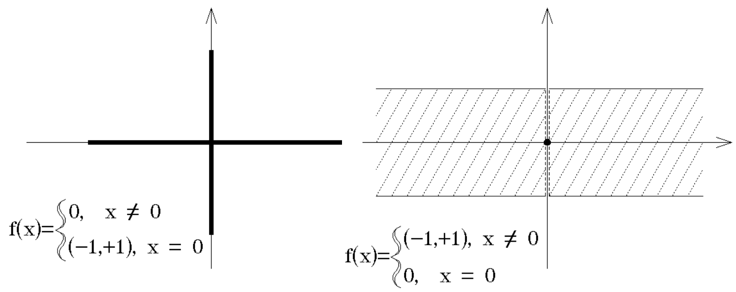

Рис. 13.2: Многозначное отображение, приведенное на рисунке слева, полунепрерывно сверху в точке 0, но не полунепрерывно снизу; многозначное отображение, приведенное на рисунке справа, полунепрерывно снизу в точке 0, но не полунепрерывно сверху

$x_1, x_2 \ldots$ точек из X, сходящейся к некоторой точке $x_0 \in X$, и любой точки $y_0 \in f(x_0)$, существует сходящаяся к y_0 последовательность точек $y_1, y_2, \ldots$ из Y, таких что $y_k \in f(x_k)$.

Многозначное отображение, полунепрерывное снизу во всех точках из области определения, называется *полунепрерывным снизу*.

Замечание. Если отображение f однозначно, то определения полунепрерывности сверху и снизу, данные для многозначных отображений, эквивалентны между собой, а также эквивалентны определению непрерывного отображения (докажите). Для многозначных отображений они, вообще говоря, различаются, что видно из примеров, приведенных на рис. 13.2.

Теорема 13.5 (Какутани) *Пусть X — компактное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, и $f : X \rightrightarrows X$ — многозначное отображение, полунепрерывное сверху и такое, что для любого $x \in X$ множество $f(x)$ непусто, замкнуто и выпукло. Тогда у отображения f существует неподвижная точка $x_0 \in X$, т.е. такая точка, что $x_0 \in f(x_0)$.*

Доказательство. План доказательства теоремы Какутани таков. Сначала мы “аппроксимируем” многозначное отображение f стандартными однозначными отображениями $\varphi^\varepsilon : X \to X$, где $\varepsilon > 0$ — некоторые вещественные числа; для каждого φ^ε применим теорему Брауэра для выпуклых компактов и найдем неподвижную точку x^ε; устремим ε к нулю и выберем некоторую предельную точку x_0; и, наконец, покажем, что полученная точка и является неподвижной для многозначного отображения f.

Напомним, что для $\varepsilon > 0$ подмножество E метрического пространства (M, ρ) называется *ε-сетью*, если для любой точки $m \in M$ существует такая точка $e \in E$, что $\rho(m, e) < \varepsilon$. Далее, ε-сеть E называется *конечной*, если множество E состоит из конечного числа точек.

Лемма 13.2 *Если метрическое пространство (M, ρ) компактно, то для любого $\varepsilon > 0$ оно обладает конечной ε-сетью E.*

Доказательство. Действительно, рассмотрим открытое покрытие пространства M, построив с центром в каждой точке из M открытый шар радиуса ε. В силу компактности M, из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. Центры шаров этого подпокрытия и образуют конечную ε-сеть E. Действительно, каждая точка $m \in M$ лежит в одном из шаров выбранного подпокрытия, поэтому m находится на расстоянии меньше чем ε от центра этого шара, т.е. от одной из точек множества E. Что и требовалось.

Для каждого $\varepsilon > 0$ выберем, в соответствие с леммой 13.2, конечную ε-сеть E^ε в нашем компакте X. Точки из E^ε обозначим через $x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon, \ldots$. Рассмотрим f-образы $f(x_i^\varepsilon)$ точек x_i^ε, и в каждом из этих образов выберем произвольную точку y_i^ε.

Далее, по каждой точке x_i^ε построим функцию $\varphi_i^\varepsilon(x)$, определенную на всем пространстве X, следующим образом:

$$\varphi_i^\varepsilon(x) = \max\bigl(0, \varepsilon - \|x_i^\varepsilon - x\|\bigr).$$

Эта функция равна ε в точке x_i^ε, равна нулю вне открытого шара радиуса ε с центром в x_i^ε, и линейно вдоль радиусов этого шара убывает от значения ε в центре до нуля на границе.

Определим теперь искомую аппроксимацию $\varphi^\varepsilon(x)$ так:

$$\varphi^\varepsilon(x) = \frac{\sum_i \varphi_i^\varepsilon(x)\, y_i^\varepsilon}{\sum_k \varphi_k^\varepsilon(x)} = \sum_i \frac{\varphi_i^\varepsilon(x)}{\sum_k \varphi_k^\varepsilon(x)} y_i^\varepsilon = \sum_i \alpha_i^\varepsilon(x) y_i^\varepsilon,$$

где мы положили $\alpha_i^\varepsilon(x) = \varphi_i^\varepsilon(x) / \sum_k \varphi_k^\varepsilon(x)$.

Легко видеть, что $\alpha_i^\varepsilon(x) \geq 0$, причем равенство имеет место если и только если точка x находится от точки x_i^ε на расстоянии, больше или равном ε. Поэтому, в частности, $\alpha_i^\varepsilon(x) \neq 0$ для тех и только тех i, при которых точки x_i^ε лежат в открытой ε-окрестности точки x. Более того, $\sum_i \alpha_i^\varepsilon(x) = 1$ для любого x.

Лемма 13.3 *Для любого x точка $\varphi^\varepsilon(x)$ лежит в выпуклой оболочке точек y_i^ε, для которых $\alpha_i^\varepsilon(x) \neq 0$.*

Доказательство. Ясно, что те точки y_i^ε, в которых $\alpha_i^\varepsilon(x) = 0$, не дают вклада в сумму, определяющую точку $\varphi^\varepsilon(x)$, поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать лишь те y_i^ε, для которых $\alpha_i^\varepsilon(x) \neq 0$, не оговаривая этого каждый раз.

Так как множество, состоящее из конечного числа точек, компактно, достаточно показать, что точка $\varphi^\varepsilon(x)$ лежит в пересечении замкнутых полупространств, каждое из которых содержит все точки y_i^ε (для которых $\alpha_i^\varepsilon(x) \neq 0$). Это утверждение имеет место в силу следующей несложной леммы.

Лемма 13.4 *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$. Тогда выпуклая оболочка множества K совпадает пересечением всех замкнутых полупространств, содержащих K.*

Пусть Π — произвольное полупространство, содержащее все точки y_i^ε (для которых $\alpha_i^\varepsilon(x) \neq 0$). Обозначим через $\ell(x) = d$ — линейное уравнение гиперплоскости, ограничивающей Π. Так как все точки y_i^ε лежат в Π, то все числа $\ell(y_i^\varepsilon)$ или одновременно не меньше d, или одновременно не больше d. Предположим, для определенности, что $\ell(y_i^\varepsilon) \geq d$ при каждом i. Тогда

$$\ell\big(\varphi^\varepsilon(x)\big) = \ell\Big(\sum_i \alpha_i^\varepsilon(x)\, y_i^\varepsilon\Big) = \sum_i \alpha_i^\varepsilon(x)\, \ell(y_i^\varepsilon) \geq \sum_i \alpha_i^\varepsilon(x)\, d = d,$$

где предпоследнее соотношение (неравенство) выполняется, так как $\alpha_i^\varepsilon(x) \geq 0$, а последнее соотношение (равенство) верно, так как $\sum_i \alpha_i^\varepsilon(x) = 1$. Значит, $\varphi^\varepsilon(x) \in \Pi$, что и требовалось.

Далее, так как X — выпуклый компакт, то в силу теоремы 13.4, отображение φ^ε имеет неподвижную точку x^ε. Рассмотрим убывающую последовательность ε_j, стремящуюся к 0. Так как X — компактно, то из последовательности точек x^{ε_j} можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Поэтому сразу будем предполагать, что последовательность точек x^{ε_j} сходится к некоторой точке x_0. Для завершения доказательства мы докажем следующую лемму.

Лемма 13.5 *Точка x_0, построенная выше, является неподвижной точкой отображения f, т.е. $x_0 \in f(x_0)$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. $x_0 \notin f(x_0)$. По условию теоремы, множество $f(x_0)$ — замкнуто, поэтому расстояние $r = \|x_0, f(x_0)\|$ от точки x_0 до множества $f(x_0)$, т.е. величина

$$r = \inf_{x \in f(x_0)} \|x_0 - x\|,$$

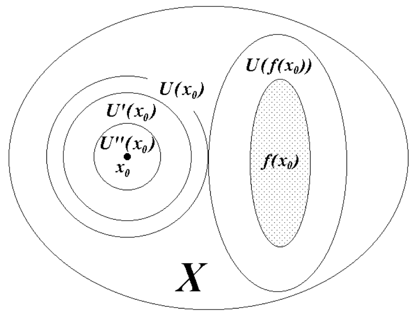

Рис. 13.3: Иллюстрация к доказательству теоремы Какутани

строго больше нуля.

Пусть $U(f(x_0))$ обозначает $(r/2)$-окрестность множества $f(x_0)$:

$$U(f(x_0)) = \{x \in X \mid \|x, f(x_0)\| < r/2\},$$

и пусть $U(x_0)$ будет $(r/2)$-окрестностью точки x_0. Ясно, что окрестности $U(f(x_0))$ и $U(x_0)$ не пересекаются.

Так как, по предположению теоремы, множество $f(x_0)$ — выпукло, имеет место следующая простая лемма.

Лемма 13.6 *Окрестность $U(f(x_0))$ выпукла.*

Так как отображение f полунепрерывно сверху, у точки x_0 имеется такая шаровая окрестность $V(x_0)$, что для любой точки $x \in V(x_0)$ ее образ $f(x)$ содержится в $U(f(x_0))$. Обозначим через $U'(x_0)$ пересечение окрестностей $U(x_0)$ и $V(x_0)$, и пусть r' — радиус окрестности $U'(x_0)$.

Наконец, обозначим через $U''(x_0)$ шаровую окрестность точки x_0 радиуса $r'' = r'/2$. Рис. 13.3 иллюстрирует введенные обозначения.

Так как $x^{\varepsilon_j} \to x_0$ при $j \to \infty$, то, начиная с некоторого номера j_0, все точки x^{ε_j} при $j \geq j_0$ лежат в $U''(x_0)$. Рассмотрим произвольную такую точку x^{ε^j}, причем дополнительно будем предполагать, что $\varepsilon_j < r''$.

Точка x^{ε_j} — неподвижная точка отображения φ^{ε_j}, поэтому $\varphi^{\varepsilon_j}(x^{\varepsilon_j}) = x^{\varepsilon_j}$. По лемме 13.3, точка $\varphi^{\varepsilon_j}(x^{\varepsilon_j})$ лежит в выпуклой оболочке точек $y_i^{\varepsilon_j}$, для которых $\alpha_i^{\varepsilon_j}(x^{\varepsilon_j}) \neq 0$. Напомним, что точка $y_i^{\varepsilon_j}$ принадлежит множеству $f(x_i^{\varepsilon_j})$.

Лемма 13.7 *В сделанных выше предположениях, точка $x_i^{\varepsilon_j}$ лежит в $U'(x_0)$.*

Доказательство. Действительно, так как $\varepsilon_j < r'' = r'/2$, и $\alpha_i^{\varepsilon_j}(x^{\varepsilon_j}) \neq 0$, имеем $\|x^{\varepsilon_j} - x_i^{\varepsilon_j}\| < \varepsilon_j < r'/2$. С другой стороны, точка x^{ε_j} лежит в $U''(x_0)$, поэтому $\|x_0 - x^{\varepsilon_j}\| < r'' = r'/2$, откуда

$$\|x_0 - x_i^{\varepsilon_j}\| \leq \|x_0 - x^{\varepsilon_j}\| + \|x^{\varepsilon_j} - x_i^{\varepsilon_j}\| < r'/2 + r'/2 = r',$$

поэтому $x_i^{\varepsilon_j}$ лежит в $U'(x_0)$, что и требовалось.

Далее, в силу выбора окрестности $U'(x_0)$, образы всех точек $x_i^{\varepsilon_j}$ из этой окрестности при отображении f содержатся в $U(f(x_0))$. Поэтому все рассматриваемые $y_i^{\varepsilon_j}$ лежат в $U(f(x_0))$. По лемме 13.6, окрестность $U(f(x_0))$ выпукла, поэтому точка $\varphi^{\varepsilon_j}(x^{\varepsilon_j})$, лежащая, как было отмечено выше, в выпуклой оболочке точек $y_i^{\varepsilon_j}$, лежит в $U(f(x_0))$.

Таким образом, точка $x^{\varepsilon_j} = \varphi^{\varepsilon_j}(x^{\varepsilon_j})$ лежит одновременно в $U(f(x_0))$ и в $U(x_0)$, чего не может быть, так как эти окрестности не пересекаются. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Теорема полностью доказана.

Лекция 14

Конкурентное равновесие в модели Эрроу–Дебре

В настоящем параграфе мы разберем частный случай модели Вальраса, наложив дополнительные ограничения на вид функций дохода потребителей $I(p)$ и сделав дополнительные предположения о начальной собственности и характере поведения потребителей. Рассматриваемая модель называется *модель Эрроу–Дебре*. Отметим, что частным случаем модели Эрроу–Дебре является модель чистого обмена, т.е. случай, когда производство отсутствует. Последнюю модель можно применять при исследовании международной торговли.

Опишем сначала ограничения, вводимые на **сектор потребления**. Везде ниже мы будем пользоваться обозначениями, введенными при описании модели Вальраса, см. параграф 2 лекции 12.

Первое условие касается устройства каждого потребительского множества X_i. А именно, мы считаем, что для каждого i выполняется

(1a) $X_i \subset \mathbb{R}^n_+$;

(1b) множество X_i выпукло, замкнуто и неограничено;

(1c) для любой последовательности $x_1, x_2, \ldots$ точек из X_i, такой что k-ая координата этих точек стремится к бесконечности, вытекает, что все прочие координаты также стремятся к бесконечности.

Замечание. Из условия $(1a)$ вытекает, что совокупное потребительское множество $X = \sum_{i=1}^{l} X_i$ лежит в $\mathbb{R}^n_+$.

Из условия $(1b)$ вытекает замкнутость и выпуклость совокупного потребительского множества $X = \sum_{i=1}^{l} X_i$ (проверьте это).

Условие $(1c)$ хоть и не выглядит достаточно естественно, но может быть объяснено с житейской позиции так: если потребитель требует все больше и больше какого-либо товара, то ему обязательно требуются и все товары во все больших количествах.

Второе условие мы накладываем на функцию полезности $u_i(x)$, определенную на X_i и выражающую приоритеты i-ого потребителя. А именно, мы предполагаем, что при каждом $i = 1, \dots, l$ функция $u_i(x)$

(2a) непрерывна;

(2b) вогнута;

(2c) потребитель ненасыщаем.

Замечание. Условие $(2b)$ на $u_i(x)$ означает, что для любых точек x и x' из X_i и любого $\alpha \in [0,1]$ имеем:

$$u_i\big((1-\alpha)x + \alpha x'\big) \geq (1-\alpha)\, u_i(x) + \alpha\, u_i(x').$$

В сделанных предположениях относительно множеств X_i, условие вогнутости равносильно выпуклости каждого множества

$$\{x \in X_i \mid u_i(x) \geq c\},$$

где c — произвольная константа (докажите).

Условие $(2c)$ на $u_i(x)$ означает, что для любого $x \in X_i$ существует такой $x' \in X_i$, что $u_i(x') > u_i(x)$, иными словами, функция $u_i(x)$ не достигает максимального значения. Последнее может быть интерпретировано так: для любого набора $x \in X_i$ существует "более привлекательный" набор $x' \in X_i$.

Третье условие **(3)** характеризует начальный запас товаров b_i каждого потребителя: для всякого $i = 1, \dots, l$ существует вектор $\bar{x}_i \in X_i$, такой что $\bar{x}_i \gg b_i$. Это условие техническое, и одним из полезных следствий этого условия является тот факт, что $b_i > 0$, т.е. каждый потребитель имеет ненулевой начальный запас всякого товара.

Четвертое условие **(4)** описывает функцию дохода $K_i(p)$: функции дохода $K_i(p)$ каждого i-ого из l потребителей имеют следующий вид:

$$K_i(p) = \langle p, b_i \rangle + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \langle p, y_j \rangle,$$

где b_i — начальный запас товаров i-ого потребителя, а α_{ij} — доля доходов j-ого производителя, которую получает i-ый потребитель. При этом предполагается, что $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} = 1$ (доход каждого j-ого из m производителей полностью делится между всеми потребителями; это может быть, например, в случае, когда все производства акционированы, и все доходы производств полностью распределяются между акционерами).

Приведем теперь ограничения на **производственный сектор**.

Первое ограничение **(1)**: каждое технологическое множество Y_k компактно и содержит начало координат 0. Последнее условие может быть интерпретировано следующим образом: производство устроено так, что его можно остановить.

Второе ограничение **(2)**: совокупное технологическое множество $Y = \sum_{i=1}^{m} Y_k$ выпукло.

И, наконец, будем предполагать, что **цены** p неотрицательны, т.е. $p \in \mathbb{R}_{+}^{n}$, и вектор p не равен нулю. В силу сделанных предположений на функцию дохода, эта функция линейно зависит от системы цен p, поэтому бюджетные ограничения $\langle x, p \rangle \leq K(p)$ не зависят от длины вектора p, а зависят лишь от его направления. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что система цен $p = (p_1, \ldots, p_n)$ удовлетворяет условию нормировки:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

или, что то же самое, вектор p принадлежит стандартному симплексу Δ размерности $n-1$:

$$\Delta = \{p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}.$$

Основная цель данной лекции — доказать следующую теорему.

Теорема 14.1 *В модели Эрроу–Дебре существует конкурентное равновесие.*

Доказательство. Идея доказательства состоит в следующем. Сначала мы покажем, что функции совокупного спроса и предложения полунепрерывны сверху. Затем, с помощью этих функций, мы построим полунепрерывное сверху многозначное отображение $\varphi(p)$, называемое *функцией избыточного предложения*, так:

$$\varphi(p) = \Psi(p) - \Phi(p).$$

Далее, мы докажем лемму Гейла (формулировку этой леммы см. ниже), из которой вытекает, что существуют такие цены p^*, для которых множество $\varphi(p^*)$ содержит неотрицательный вектор u^*. Иными словами, при ценах p^* имеется такой коллективный спрос $x^* \in \Phi(p^*)$ и такое коллективное предложение $y^* \in \Psi(p^*)$, что $y^* \geq x^*$, т.е. спрос не превышает предложения. Это, напомним, одно из условий определения конкурентного равновесия. Для завершения доказательства мы покажем, что условие ненасыщаемости влечет выполнение закона Вальраса в узком смысле: $\langle p^*, x^* \rangle = \langle p^*, y^* \rangle$. Тем самым мы проверим для тройки (x^*, y^*, p^*) выполнение всех условий конкурентного равновесия.

Отметим, что теорема Какутани будет существенно использована при доказательстве леммы Гейла. Перейдем к подробностям.

Для реализации нашего плана нам, прежде всего, потребуется перейти от некомпактного совокупного потребительского множества $X = \sum_{i=1}^{l} X_i$ к некоторой компактной его части. Для этого докажем следующую лемму.

Лемма 14.1 *Пусть $B_i(p)$ обозначает вальрасово бюджетное множество i-ого потребителя. Тогда существует выпуклое компактное подмножество $X_i^c \subset X_i$, такое что для любого $p \in \Delta$ имеем $B_i(p) \subset X_i^c$, и, поэтому, $\Phi_i(p) \subset X^c$.*

Доказательство. Обозначим через B_i объединение $\cup_{p\in\Delta} B_i(p)$. Мы покажем, что множество B_i ограничено, откуда вытекает, что все множества $B_i(p)$ лежат внутри некоторого шара, а, значит, и внутри выпуклого компакта, полученного при пересечении множества X_i с этим шаром. Этот выпуклый компакт и является искомым компактом X_i^c.

Итак, покажем ограниченность множества B_i. Так как Δ — компакт, то функция дохода $K_i(p)$ для i-ого потребителя ограничена некоторым значением K_i. Обозначим через $\bar{B}_i(p)$ множества

$$\bar{B}_i(p) = \{x \in X_i \mid \langle x, p \rangle \leq K_i\}.$$

Так как $B_i(p) \subset \bar{B}_i(p)$, то достаточно показать, что множество $\bar{B}_i = \cup_{p\in\Delta} \bar{B}_i(p)$ — замкнуто.

Предположим противное, т.е. существует такая последовательность (x_s, p_s), что $x_s \in \bar{B}_i(p_s)$, $p_s \in \Delta$, и $|x_s| \to \infty$ при $s \to \infty$. Так как Δ — компакт, то в последовательности p_s можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, поэтому, без ограничения общности, будем сразу предполагать, что последовательность p_s сходится к некоторой точке $p_0 \in \Delta$. По определению симплекса Δ, одна из координат точки p_0, скажем, j-ая координата, строго больше нуля, поэтому, начиная с некоторого номера s, j-ые координаты всех точек p_s больше некоторого

$\delta > 0$. С другой стороны, по условию (1c) на множество X_i, все координаты точек x_s стремятся к бесконечности. Поэтому, учитывая, что все координаты точек p_s и x_s неотрицательны, получаем: $\langle p_s, x_s \rangle \to \infty$ при $s \to \infty$. Однако $\langle x_s, p_s \rangle \leq K_i$ для любого s, и мы получаем противоречие, завершающее доказательство леммы.

Следствие 14.1 *Существует выпуклое компактное подмножество $X^c \subset X$, такое что для любого $p \in \Delta$ имеем: $\Phi(p) \subset X^c$.*

Доказательство. По лемме 14.1, каждое множество $\Phi_i(p)$ лежит в некотором выпуклом компакте X_i^c. Поэтому каждое множество $\Phi(p) = \sum_{i=1}^{l} \Phi_i(p)$ лежит в выпуклом компакте $X^c = \sum_{i=1}^{l} X_i^c$, что и требовалось.

Далее, доказательство полунепрерывности сверху многозначного отображения $\Phi(p)$ мы проведем следующим образом. Сначала мы покажем, что линейная комбинация полунепрерывных сверху многозначных отображения также является полунепрерывным сверху. Таким образом, мы сведем задачу к доказательству полунепрерывности сверху для каждого $\Phi_i(p)$. Затем мы покажем, что многозначное отображение $B_i(p)$, ставящее в соответствие каждому $p \in \Delta$ вальрасово бюджетное множество, является непрерывным, т.е. одновременно полунепрерывным сверху и снизу. И, наконец, замечая, что при каждом p множество $\Phi_i(p)$ является подмножеством в $B_i(p)$, на котором вогнутая функция $u_i(p)$ достигает своих наибольших значений, мы покажем, что $\Phi_i(p)$ полунепрерывно сверху.

Определение. Пусть $a(x)$ и $b(x)$ — два многозначных отображения из метрического пространства X в $\mathbb{R}^n$, и пусть α и β — произвольные вещественные числа. Тогда *линейной комбинацией* $\alpha a(x) + \beta b(x)$ называется многозначное отображение, определенное так:

$$\alpha a(x) + \beta b(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = \alpha y' + \beta y'',\ y' \in a(x),\ y'' \in b(x)\}.$$

Лемма 14.2 *Пусть $a(x)$ и $b(x)$ — два полунепрерывных сверху многозначных отображения из метрического пространства X в $\mathbb{R}^n$, и пусть α и β — произвольные вещественные числа. Тогда линейная комбинация $\alpha a(x) + \beta b(x)$ является полунепрерывным сверху многозначным отображением.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ многозначные отображения $\alpha a(x)$ и $a(x) + b(x)$ — полунепрерывны сверху.

Положим $c(x) = \alpha a(x)$. Если $\alpha = 0$, то все очевидно. Пусть $\alpha \neq 0$. Будем рассматривать α как отображение $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, являющееся растяжением, переводящим вектор y в αy. Ясно, что каждое такое растяжение α преобразует ε-окрестность произвольного подмножества $Y \subset \mathbb{R}^n$ в ε'-окрестность множества $\alpha(Y)$, где $\varepsilon' = |\alpha|\,\varepsilon$. Так как $c(x) = \alpha\big(a(x)\big)$, то если U — это ε-окрестность множества $c(x)$, а $\varepsilon' = \varepsilon/|\alpha|$, мы заключаем, что ε'-окрестность U' множества $a(x)$ перейдет при отображении α в U. В силу полунепрерывности сверху отображения $a(x)$, существует окрестность V точки x, такая что для любой точки $x' \in V$ выполняется $a(x') \subset U'$, и, значит,

$$c(x') = \alpha\big(a(x')\big) \subset \alpha(U') = U,$$

что и доказывает полунепрерывность сверху многозначного отображения $c(x)$ в силу произвольности числа ε и точки x.

Пусть теперь $c(x) = a(x) + b(x)$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим ε-окрестность U множества $c(x)$. Положим $\varepsilon' = \varepsilon/2$, и пусть U' и U'' обозначают ε'-окрестности множеств $a(x)$ и $b(x)$ соответственно. Рассмотрим отображение $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, определенное так: $\beta(y', y'') = y' + y''$. По определению, имеем: $\beta\big(a(x), b(x)\big) = c(x)$. Покажем, то $\beta\big(U', U''\big) \subset U$. Действительно, пусть $y' \in U'$ и $y'' \in U''$. Тогда существуют такие $z' \in a(x)$ и $z'' \in b(x)$, что $\|y' - z'\| < \varepsilon'$ и $\|y'' - z''\| < \varepsilon''$. Пусть $y = \beta(y', y'') = y' + y''$ и $z = \beta(z', z'') = z' + z''$. Ясно, что $y \in c(x)$, и, кроме того,

$$\|z - y\| = \|z' + z'' - y' - y''\| \le \|z' - y'\| + \|z'' - y''\| < \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon,$$

т.е. $z \in U$, что и требовалось.

Так как многозначные отображения $a(x)$ и $b(x)$ полунепрерывны сверху, то существует такая окрестность V точки x, что для любой точки $x' \in V$ имеем: $a(x') \subset U'$ и $b(x') \subset U''$, поэтому

$$c(x') = \beta\big(a(x'), b(x')\big) \subset \beta(U', U'') \subset U,$$

что и завершает доказательство леммы.

Покажем теперь, что многозначное отображение $B_i(p)$ является непрерывным. Прежде всего, в соответствии с леммой 14.1, для любого $p \in \Delta$ имеем $B_i(p) \in X_i^c$. Иными словами, область значений отображения B_i содержится в X_i^c.

Начнем с доказательства полунепрерывности сверху.

Лемма 14.3 *Отображение $B_i(p)$ полунепрерывно сверху.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. для некоторого $p \in \Delta$ существует такая ε-окрестность U множества $B_i(p)$, что для некоторой сходящейся к p последовательности точек $p_s \in \Delta$ в каждом множестве $B_i(p_s)$ имеется точка x_s, не принадлежащая U. В силу компактности множества X_i^c, в последовательности x_s можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $x \in X_i^c$. Поэтому, без ограничения общности, будем считать, что сама последовательность x_s сходится к некоторой точке $x \in X_i^c$. Таким образом, мы построили последовательность (p_s, x_s) точек из $\Delta \times X_i^c$, сходящуюся к точке (p, x).

Покажем, что, на самом деле, $x \in B_i(p)$. Для этого рассмотрим функцию $f(p, x)$, равную $\langle p, x\rangle - K_i(p)$. Так как $K_i(p)$ — непрерывная функция, то $f(p, x)$ — также непрерывная функция. Очевидно, что

$$B_i(p) = \{x \in X_i^c \mid f(p, x) \le 0\}.$$

Обозначим через A_i подмножество в $\Delta \times X_i^c$, равное $f^{-1}\big((-\infty, 0]\big)$. Ясно, что

$$A_i = \big\{(p, x) \in \Delta \times X_i^c \mid p \in \Delta,\ x \in B_i(p)\big\}.$$

Ясно, что все точки (p_s, x_s) лежат в A_i.

Так как функция $f(p, x)$ непрерывна, множество A_i замкнуто. Поэтому и точка (p, x) также лежит в A_i, откуда немедленно заключаем, что $x \in B_i(p)$.

Однако из последнего утверждения вытекает, что, начиная с некоторого номера s, все точки x_s лежат в ε-окрестности точки x, а, значит, и в ε-окрестности U множества $B_i(p)$. Последнее противоречие и завершает доказательства полунепрерывности сверху отображения $B_i(p)$.

Лемма 14.4 *Отображение $B_i(p)$ полунепрерывно снизу.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. имеется такое p, что в этой точке отображение $B_i(p)$ не полунепрерывно снизу. Последнее означает, что существует такая последовательность p_s, стремящаяся к p, и такой $x \in B_i(p)$, для которого в семействе множеств $B_i(p_s)$ нельзя выбрать сходящейся к x последовательности. Отсюда вытекает, что у точки x существует окрестность U, такая что для некоторой подпоследовательности в последовательности p_s соответствующие множества $B_i(p_s)$ не пересекают U. Поэтому, без ограничения общности, будем сразу предполагать, что все $B_i(p_s)$ не пересекают U.

Напомним, что, в соответствии с условием (4) на потребительский сектор, функция дохода $K_i(p)$ равна $\langle p, b_i\rangle + \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}\langle p, y_j\rangle$. По условию (3), существует такой $\bar{x}_i \in B_i(p)$, что $\bar{x}_i \gg b_i$. Поэтому $\langle \bar{x}_i, p\rangle < K(p)$

при любом $p \in \Delta$. Рассмотрим отрезок $[\bar{x}_i, x]$. Так как функция $f(p,x) = \langle p, x\rangle - K(p)$ при каждом фиксированном p линейна по x, то ее ограничение на отрезок $[\bar{x}_i, x]$ также линейно. Так как $f(p, \bar{x}_i) < 0$ и $f(p,x) \le 0$, то в любой окрестности точки x, в частности, в выбранной окрестности U, существует x', такая что $f(p,x') < 0$. В силу непрерывности функции f, для всех p', достаточно близких к p, имеем $f(p',x') < 0$, т.е. $x' \in B(p')$. Поэтому, существует такое s, что $x' \in B(p_s)$, т.е. окрестность U пересекает $B(p_s)$. Полученное противоречие и завершает доказательство леммы.

Лемма 14.5 *Отображение $\Phi_i(p)$ полунепрерывно сверху.*

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 14.3, мы, предположив противное, найдем для некоторого p такую ε-окрестность U множества $\Phi_i(p)$, что для некоторой последовательности точек $p_s \in \Delta$, сходящихся к p, в каждом $\Phi_i(p_s)$ можно выбрать точку x_s, не лежащую в U. При этом опять, без ограничения общности, будем предполагать, что последовательность x_s сходится к некоторой точке $x \in X_i^c$.

Мы покажем, что, на самом деле, точка x лежит в $\Phi_i(p)$, что и завершит доказательство леммы по тем же соображениям, что и в доказательстве леммы 14.3.

Вновь рассмотрим непрерывную функцию $f(p,x)$, равную $\langle p, x\rangle - K_i(p)$, и обозначим через A_i замкнутое подмножество в $\Delta \times X_i^c$, равное $f^{-1}\big((-\infty, 0]\big)$. Так как $\Phi_i(p_s) \subset B_i(p_s)$, получаем, что все точки (p_s, x_s) лежат в A_i, поэтому, из замкнутости множества A_i, имеем: $x \in B_i(p)$.

Покажем, что $u_i(x) = \max_{x' \in B_i(p)} u_i(x')$, т.е. что $x \in \Phi_i(p)$. Пусть это не так. Так как $B_i(p)$ компактно, существует точка $\bar{x} \in B_i(p)$, в которой достигается максимум функции u_i. По предположению, $u_i(x) < u_i(\bar{x})$.

Так как, по лемме 14.4, отображение $B_i(p)$ полунепрерывно снизу, то существует сходящаяся к $\bar{x}$ последовательность $\bar{x}_s$, таких что $\bar{x}_s \in B_i(p_s)$. Однако $u_i(\bar{x}_s) \le u_i(x_s)$, поэтому из непрерывности функции u_i заключаем, что

$$u_i(x) = u_i\big(\lim_{s\to\infty} x_s\big) = \lim_{s\to\infty} u_i(x_s) \ge \lim_{s\to\infty} u_i(\bar{x}_s) = u_i\big(\lim_{s\to\infty} \bar{x}_s\big) = u_i(\bar{x}),$$

противоречие. Доказательство закончено.

Лемма 14.6 *Множества $\Phi_i(p)$ являются непустыми выпуклыми компактами.*

Доказательство. Условие (4) гарантирует непустоту множеств $\Phi_i(p)$. Эти множества ограничены, так как они являются подмножествами компакта X_i^c по лемме 14.1. Эти множества замкнуты, так как являются множествами максимальных значений ограничения непрерывной функции $u_i(x)$ на компактные подмножества $B_i(p)$. Таким образом, каждое $\Phi_i(p)$ — компакт. Докажем теперь выпуклость множества $\Phi_i(p)$.

Пусть x' и x'' — две произвольные точки из $\Phi_i(p)$, и x — произвольная точка из отрезка $[x', x'']$, т.е. существует такое $0 \le \alpha \le 1$, что $x = (1-\alpha)x' + \alpha x''$. Так как функция $u_i(x)$ вогнута по условию (2b), имеем

$$u_i(x) \ge (1-\alpha)\, u_i(x') + \alpha\, u_i(x'').$$

В силу выпуклости множества $B_i(p)$, точка x лежит в $B_i(p)$. Так как в точках x' и x'' функция u_i принимает максимальное на $B_i(p)$ значение $u_{\max}$, имеем $u_i(x) \ge u_{\max}$, поэтому $u_i(x) = u_{\max}$, и, значит, $x 1 \Phi_i(p)$. Что и требовалось.

Лемма 14.7 *Отображение $\Phi(p)$ полунепрерывно сверху. Каждое множество $\Phi(p)$ является непустым выпуклым компактом.*

Доказательство. Отображение $\Phi(p)$ равно, по определению, сумме отображений полунепрерывных сверху $\Phi_i(p)$. поэтому, в соответствии с леммой 14.2, отображение $\Phi(p)$ также полунепрерывно сверху.

Так как сумма непустых выпуклых компактов является непустым выпуклым компактом, мы, используя лемму 14.6, заключаем, что множество $\Phi(p)$ также непусто, выпукло и компактно. Доказательство закончено.

Лемма 14.8 *Отображение $\Psi(p)$ полунепрерывно сверху.*

Доказательство. Идеи доказательства такие же, как и при доказательстве аналогичного результата для $\Phi(p)$.

Рассмотрим теперь функцию избыточного предложения $\varphi(p) = \Psi(p) - \Phi(p)$. По лемме 14.2, эта функция полунепрерывна сверху, и, кроме того, каждое $\varphi(p)$ является непустым выпуклым компактом. Далее, по предложению 12.2 лекции 12, выполняется следующее соотношение: для любого $u \in \varphi(p)$ имеем $\langle u, p\rangle \ge 0$ (закон Вальраса). Мы используем перечисленные свойства, доказав предварительно следующую лемму.

Лемма 14.9 (Гейл) *Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^n_+$ — стандартный симплекс, Γ — выпуклый компакт, и $\varphi : \Delta \Rightarrow \Gamma$ многозначное отображение, удовлетворяющее следующим свойствам:*

1) *отображение φ полунепрерывно сверху, и для всякого $p \in \Delta$ образ $\varphi(p)$ является непустым выпуклым подмножеством в Γ;*

2) выполняется закон Вальраса в широком смысле, т.е. $\langle p, u\rangle \geq 0$ *для любого* $u \in \varphi(p)$.

Тогда существует такой вектор $p^* \in \Delta$, *что* $\varphi(p^*) \cap \mathbb{R}^n_+ \neq \emptyset$.

Доказательство. Для каждого $u \in \Gamma$ определим множество $\nu(u)$ следующим образом:

$$\nu(u) = \{p \in \Delta \mid \langle p, u\rangle = \min_{p' \in \Delta} \langle p, u\rangle\}.$$

Рассмотрим многозначное отображение $\mu : \Delta \times \Gamma \Rightarrow \Delta \times \Gamma$, задаваемое так:

$$\mu(p, u) = \nu(u) \times \varphi(p).$$

Покажем, что отображение μ удовлетворяет условиям теоремы Какутани. Действительно, множество $\Delta \times \Gamma$ выпукло и компактно в силу выпуклости и компактности сомножителей.

Далее, легко видеть, что множества $\nu(u)$ непусты и выпуклы, а множества $\varphi(p)$ непусты и выпуклы по предположению. Поэтому все $\mu(p, u)$ непусты и выпуклы.

Лемма 14.10 *Отображение* $\nu : \Gamma \Rightarrow \Delta$ *полунепрерывно сверху.*

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим ε-окрестность произвольного множества $\nu(u)$. Мы должны показать, что существует окрестность V точки u, такая что для любого $u' \in V$ имеем $\nu(u) \subset U$. Предположим противное. Тогда существует такая последовательность $u_s \to u$, что в каждом $\nu(u_s)$ имеется некоторая точка p_s, не принадлежащая U. По определению, $\langle p_s, u_s\rangle \leq \langle p', u_s\rangle$ для любого $p' \in \Delta$. В силу компактности множества Γ, из последовательности p_s можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, поэтому, не ограничивая общности, будем сразу считать, что последовательность p_s сходится к некоторому $p \in \Delta$.

В силу непрерывности скалярного произведения, имеем $\langle p, u\rangle \leq \langle p', u\rangle$ для любого p' из Δ, поэтому $p \in \nu(u)$. Следовательно, все точки p_s, достаточно близкие к p, лежат в окрестности U. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Далее, отображение $\varphi(p)$ также полунепрерывно сверху, поэтому и наше отображение $\mu(p, u)$ полунепрерывно сверху.

Таким образом, мы видим, что все условия теоремы Какутани выполняются, поэтому существует такая точка (p^*, u^*), что $(p^*, u^*) \in \nu(u^*) \times \varphi(p^*)$, иными словами, $p^* \in \nu(u^*)$ и $u^* \in \varphi(p^*)$.

По определению множества $\nu(p)$, мы получаем, что

$$\langle p^*, u^* \rangle \leq \langle p, u^* \rangle \text{ для любого } p \in \Delta.$$

По условию леммы, выполняется закон Вальраса в широком смысле, т.е.

$$\langle p, u^* \rangle \geq 0 \text{ для любого } p \in \Delta.$$

Поэтому имеем

$$\langle p, u^* \rangle \geq 0 \text{ для любого } p \in \Delta.$$

Из произвольности точки $p \in \Delta$ вытекает, что $u^* \geq 0$, т.е. $u^* \in \varphi(p^*) \cap \mathbb{R}^n_+$, откуда $\varphi(p^*) \cap \mathbb{R}^n_+ \neq \emptyset$, что и требовалось. Лемма Гейла полностью доказана.

Из леммы Гейла и доказанных выше свойств функции избыточного спроса $\varphi(p)$ вытекает, что существует такая система цен $p^* \in \Delta$, при которой множество $\varphi(p^*)$ содержит неотрицательный элемент u^*. По определению, имеются $x^* \in \Phi(p)$ и $y^* \in \Psi(p)$, такие что $u^* = y^* - x^*$, откуда $x^* \leq y^*$, т.е. существуют такие цены p^*, при которых спрос x^* не превышает предложения y^*.

Нам осталось доказать, что для тройки (x^*, y^*, p^*) выполняется закон Вальраса в узком смысле. Для этого воспользуемся предположением о ненасыщаемости потребителей, откуда следует, что для любого $x \in \Phi_i(p)$ имеет место равенство $\langle p, x \rangle = K_i(p)$. Выкладки, аналогичные тем, что проводятся при выводе закона Вальраса в широком смысле слова, дают равенство $\langle p, x \rangle = \langle p, y \rangle$ для любых $x \in \Phi(p)$ и $y \in \Psi(p)$. Доказательство закончено.

Лекция 15

Модель Эрроу–Дебре и оптимальность по Парето

В настоящей лекции мы введем понятие оптимальности по Парето, обобщающего определения точки максимума вещественной функции на случай отображения со значениями в $\mathbb{R}^n$. Оказывается, состояние конкурентного равновесия является оптимальным по Парето для естественного отображения, задаваемого функциями полезности. Перейдем к деталям.

Пусть X_i, $i = 1, \ldots, l$ — произвольные множества, и $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ — произвольные функции. Рассмотрим множество $\bar{X} = X_1 \times \cdots \times X_l$, равное декартовому произведению множеств X_i, и определим $\mathbb{R}^l$-значное отображение $\bar{u} : \bar{X} \to \mathbb{R}^l$ так:

$$\bar{u}(x_1, \ldots, x_l) = \big(u_1(x_1), \ldots, u_l(x_l)\big).$$

Предположим, что в $\bar{X}$ выделено некоторое подмножество $\bar{X}_0$. Набор векторов $x = (x_1, \ldots, x_l)$ назовем *допустимым* или *распределением*, если $x \in \bar{X}_0$.

Определение. Распределение $x = (x_1, \ldots, x_l)$ назовем *оптимальным по Парето*, если не существует распределения $x' = (x'_1, \ldots, x'_l)$, такого что $u_i(x'_i) \geq u_i(x_i)$, и хотя бы для одного i имеет место строгое неравенство; иными словами, если не существует распределения x', такого что $\bar{u}(x') > u(x)$.

Таким образом, оптимальная по Парето точка — это точка максимума для отображения $\bar{u} : \bar{X} \to \mathbb{R}^l$, построенного выше.

Рассмотрим модель Эрроу–Дебре в тех же обозначениях, что и в предыдущих главах. А именно, пусть теперь имеется l потребителей, причем i-ый из них характеризуется своим потребительским множеством X_i и функцией полезности $u_i(x)$, определенной на X_i. Как и выше, положим $\bar{X}$ равным декартову произведению потребительских множеств X_i.

Пусть Y — совокупное технологическое множество, и b — совокупный начальный запас. Тогда, напомним, $b + Y$ — это множество всех наборов товаров, которые только могут быть произведены в этой системе. Основное требование модели Вальраса состоит в том, чтобы спрос не превышал предложения. Исходя из этого требования, мы определим допустимое множество $\bar{X}_0$ следующим образом:

$$\bar{X}_0 = \Big\{ x = (x_1, \dots, x_n) \mid \exists y \in Y : \sum_{i=1}^{l} x_i \le b + y \Big\}.$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 15.1 *Если (x^*, y^*, p^*) — конкурентное равновесие в модели Эрроу–Дебре, то распределение x^* оптимально по Парето.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. найдется такое распределение $x \in \bar{X}_0$, что $\bar{u}(x) > \bar{u}(x^*)$. Иными словами, $u_i(x_i) \ge u_i(x_i^*)$, и для некоторого i, скажем для $i = i_0$, имеет место строгое неравенство.

Воспользуемся тем, что каждый потребитель ненасыщаем, и для каждого $i = 1, \dots, l$ выберем такое $w_i \in X_i$, что $u_i(w_i) > u_i(x_i)$. Положим $x_i(t) = (1-t)x_i + t\, w_i$. В силу вогнутости функции полезности u_i, имеем

$$u_i\big(x_i(t)\big) \ge (1-t)u_i(x_i) + t\, u_i(w_i) > u_i(x_i),$$

при любом $0 < t \le 1$. Поэтому $u_i\big(x_i(t)\big) > u_i(x_i^*)$, и, значит, в силу того, что x_i^* является точкой максимума для функции u_i на Вальрасовом бюджетном множестве $B_i(p^*)$, мы заключаем, что $x_i(t) \notin B_i(p^*)$ при любом $0 < t \le 1$. Следовательно, при этих t выполняется

$$\langle p^*, x_i(t) \rangle > \langle p^*, b_i \rangle + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \langle p^*, y_j^* \rangle.$$

Переходя к пределу при $t \to 0$, получаем

$$\langle p^*, x_i \rangle \ge \langle p^*, b_i \rangle + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \langle p^*, y_j^* \rangle. \tag{15.1}$$

Отметим, что при $i = i_0$ предыдущее неравенство строгое. Действительно, по условию, для такого i имеем $u_i(x_i) > u_i(x_i^*)$, и так как x_i^* — точка максимума для ограничения функции u_i на $B_i(p^*)$, заключаем, что $x_i \notin B_i(p^*)$, откуда и вытекает строгость неравенства.

Суммируя по i неравенства (15.1), и учитывая, что $\sum_{i=1}^l \alpha_{ij} = 1$ при каждом j, получаем

$$\Big\langle p^*, \sum_{i=1}^{l} x_i \Big\rangle > \langle p^*, b\rangle + \Big\langle p^*, \sum_{j=1}^{m} y_j^* \Big\rangle.$$

В силу оптимальности вектора $y^* = \sum_{j=1}^m y_j$, получаем, что $\langle p^*, y^*\rangle \geq \langle p^*, y\rangle$ для любого $y \in Y$, поэтому для любого $y \in Y$

$$\Big\langle p^*, \sum_{i=1}^{l} x_i \Big\rangle > \langle p^*, b + y\rangle. \tag{15.2}$$

Далее, так как набор $x = (x_1, \dots, x_l)$ является распределением, то существует $y \in Y$, такой что $\sum_{i=1}^l x_i \leq b + y$, и, значит, для этого y выполняется

$$\Big\langle p^*, \sum_{i=1}^{l} x_i \Big\rangle \leq \langle p^*, b + y\rangle,$$

что противоречит неравенству (15.2). Доказательство закончено.

Оказывается, верен и обратный результат: всякое оптимальное по Парето распределение может участвовать в конкурентном равновесии. А именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 15.2 *Предположим, что распределение* $(x_1^*, \dots, x_l^*)$ *оптимально по Парето. Тогда существует вектор цен* p^* *и набор* $(y_1^*, \dots, y_m^*)$, $y_j^* \in Y_j$, *такие что*

1) $\sum_{i=1}^l x_i^* \leq b + \sum_{j=1}^m y_j^*$;

2) при каждом j *вектор* y_j^* *максимизирует функцию* $\langle p^*, y_j\rangle$ *по всем* $y_j \in Y_j$;

3) при каждом i *вектор* x_i^* *минимизирует функцию* $\langle p^*, x_i\rangle$ *по всем* $x_i \in X_i$ *таким, что* $u_i(x_i) \geq u_i(x_i^*)$.

Замечание. Если в дополнение к условиям теоремы 15.2 потребовать, чтобы доли α_{ij} участия в прибылях равнялись $1/l$, и перераспределить начальную собственность так, чтобы новая начальная собственность i-ого потребителя равнялась

$$b'_i = x^*_i - \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{m} y^*_l,$$

то построенный набор $(x^*_1, \ldots, x^*_l, y^*_1, \ldots, y^*_m, p^*)$ будет конкурентным равновесием (докажите).

Доказательство теоремы 15.2. Существование набора y^*, удовлетворяющего первому утверждению, вытекает из определения оптимальности по Парето.

Докажем второе и третье утверждения. Положим $M_i = \{x_i \in X_i \mid u_i(x_i) > u_i(x^*_i)\}$. Так как потребители ненасыщаемы, то $M_i \neq \emptyset$. Рассмотрим множество $G = b + Y - \sum_{i=1}^{l} M_i$.

Лемма 15.1 *Множество G не содержит положительных векторов.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. существует вектор $z \in G$, такой что $z \geq 0$. По определению, существуют такие $y \in Y$ и $x_i \in M_i$ для каждого i, что

$$z = b + y - \sum_{i=1}^{l} x_i \geq 0.$$

Данное неравенство означает, что набор $(x_1, \ldots, x_l)$ допустим, т.е. является распределением. Однако, из определение множеств M_i вытекает, что этот набор "лучше" набора $x^*_1, \ldots, x^*_l$, что противоречит оптимальности по Парето последнего набора. Лемма доказана.

Лемма 15.2 *Множество G выпукло.*

Доказательство. Мы покажем, что множества M_i выпуклы, откуда мгновенно получаем выпуклость множества G.

Пусть x'_i и x''_i — две произвольные точки из M_i. По определению множества M_i, имеем $u_i(x'_i) > u_i(x^*_i)$ и $u_i(x''_i) > u_i(x^*_i)$. Рассмотрим произвольную точку x_i из отрезка $[x'_i, x''_i]$. Так как функция u_i вогнута, то

$$u_i(x_i) \geq \min\bigl(u_i(x'_i), u_i(x''_i)\bigr) > u_i(x^*_i),$$

поэтому x_i также принадлежит M_i. Доказательство закончено.

Применяя теорему об отделимости к двум непересекающимся выпуклым множествам G и $\mathbb{R}^n_+$, заключаем, что существует такое p^*, что $\langle p^*, z\rangle \le 0$ для всех $z \in G$. Отсюда вытекает, что для всех $x_i \in M_i$ и всех $y_j \in Y_j$ имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{l}\langle p^*, b_i\rangle + \sum_{j=1}^{m}\langle p^*, y_j\rangle \le \sum_{i=1}^{l}\langle p^*, x_i\rangle. \tag{15.3}$$

Обозначим через $\bar{M}_i$ замыкание множества M_i, т.е.

$$\bar{M}_i = \{x_i \in X_i \mid u_i(x_i) \ge u_i(x_i^*)\}$$

Лемма 15.3 *Неравенство (15.3) имеет место также для любых* $\bar{x}_i \in \bar{M}_i$ *и любых* $y_j \in Y_j$.

Доказательство. Пусть $x_i \in M_i$ и $\bar{x}_i \in \bar{M}_i$. Положим $x_i(t) = (1 - t)\bar{x}_i + t\, x_i$. Так как функция $u_i(x)$ вогнута, имеем

$$u_i\big(x_i(t)\big) \ge (1-t)u_i(\bar{x}_i) + t\, u_i(x_i) > u_i(x_i^*) \quad \text{при } 0 < t \le 1,$$

поскольку средняя часть этого неравенства меняется по $t \in [0,1]$ линейно от значения $u_i(\bar{x}_i) \ge u_i(x_i^*)$ при $t = 0$ до значения $u_i(x_i) > u_i(x_i^*)$ при $t = 1$. Отсюда вытекает, что при $t \in (0,1]$ все точки $x_i(t)$ лежат в M_i, поэтому для них также выполняется неравенство (15.3). Переходя к пределу при $t \to 0$, получаем, что неравенство (15.3) выполняется и для точки $\bar{x}_i$. Доказательство леммы закончено.

Вспомним теперь, что набор $(x_1^*, \dots, x_l^*)$ является распределением, т.е. существует $y^* = y_1^* + \ldots + y_m^*$, $y_i^* \in Y_i$, для которого

$$\sum_{i=1}^{l} b_i + \sum_{j=1}^{m} y_j^* \ge \sum_{i=1}^{l} x_i^*.$$

Умножая это неравенство скалярно на p^*, получаем неравенство, противоположное неравенству (15.3). Так как, по лемме 15.3, неравенство (15.3) выполняется для всех $\bar{x}_i \in \bar{M}_i$, и, очевидно, $x_i^* \in \bar{M}_i$, получаем

$$\sum_{i=1}^{l}\langle p^*, b_i\rangle + \sum_{j=1}^{m}\langle p^*, y_j^*\rangle = \sum_{i=1}^{l}\langle p^*, x_i^*\rangle. \tag{15.4}$$

Из соотношений (15.3) и (15.4) получаем, что

$$\sum_{j=1}^{m}\langle p^*, y_j\rangle - \sum_{j=1}^{m}\langle p^*, y_j^*\rangle \le \sum_{i=1}^{l}\langle p^*, x_i\rangle - \sum_{i=1}^{l}\langle p^*, x_i^*\rangle \tag{15.5}$$

для любых $x_i \in \bar{M}_i$ и $y_j \in Y_j$.

Подставляя в неравенство (15.5) $x_i = x_i^*$ для всех $i = 1, \ldots, l$, и $y_j = y_j^*$ для всех j, кроме одного, скажем, $j = j_0$, получаем

$$\langle p^*, y_j \rangle \leq \langle p^*, y_j^* \rangle \text{ для любого } y_j \in Y_j,$$

тем самым доказано второе утверждение теоремы.

Подставляя в неравенство (15.5) $x_i = x_i^*$ для всех i, кроме одного, скажем $i = i_0$, и $y_j = y_j^*$ для всех $j = 1, \ldots, m$ получаем

$$\langle p^*, x_{i_0} \rangle \geq \langle p^*, x_{i_0}^* \rangle \text{ для любого } x_{i_0} \in \bar{M}_{i_0},$$

тем самым доказано третье утверждение теоремы. Доказательство теоремы закончено.

Лекция 16

Конкурентное равновесие в модели Вальда–Касселя

Опишем еще одну модель, предложенную Касселем и являющуюся частным случаем модели Вальраса. Эта модель близка к модели Вальда, рассмотренной еще в 30-ых годах. Несмотря на то, что модель Вальда–Касселя является частным случаем модели Вальраса, мы дадим несколько другое определение конкурентного равновесия. Основным результатом данной лекции является доказательство существования конкурентного равновесия в новом понимании.

Одна из основных отличительных черт рассматриваемой модели состоит в том, что теперь мы будем различать *продукты производства* и *первичные факторы*.

Итак, пусть, как и выше, имеется n типов товаров, и, поэтому, пространство товаров — это $\mathbb{R}^n$. Также имеется l потребителей, причем i-ый потребитель характеризуется потребительским множеством $X_i \subset \mathbb{R}^n$, функцией дохода и функцией спроса.

В отличие от модели Вальраса, где i-ый потребитель характеризовался еще запасом $b_i \in X_i$ первичных факторов, являвшихся точкой в потребительском множестве X_i, в модели Вальда–Касселя первичные факторы рассматриваются "изолировано" от потребителей: мы предполагаем, что имеется m первичных факторов, образующих положительный вектор $b \in \mathbb{R}^m_+$. Более того, если раньше первичные факторы, принадлежа пространству товаров, имели цены $p = (p_1, \ldots, p_n)$, то теперь первичные факторы имеют свои цены $v = (v_1, \ldots, v_m)$. Таким образом, вектор цен на все товары, обращающиеся в нашей экономике, равен (p, v).

Отсюда вытекают и дальнейшие отличия. Функция совокупного спроса зависит теперь от цен не только на продукты производства, но и от цен на первичные факторы, т.е. функция спроса имеет вид $\Phi(p, v)$. Более того, мы будем предполагать, что функция $\Phi(p, v)$ является однозначной и непрерывной. Таким образом, имеем:

$$\Phi(p, v) = \big(\Phi_1(p, v), \dots, \Phi_n(p, v)\big),$$

где $\Phi_i(p)$ — функция спроса на i-ый продукт. Также мы будем считать, что $\Phi(p, v)$ удовлетворяет закону Вальраса в узком смысле, т.е.

$$\langle p, \Phi(p, v)\rangle = \langle v, b\rangle.$$

Иными словами, стоимость всех потребленных товаров равна стоимости всех имевшихся первичных факторов (в денежном отношении, все первичные факторы были преобразованы в товар).

Производственный сектор будем описывать линейной моделью Леонтьева с матрицей $A = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, где a_{ij} — количество i-ого первичного фактора, необходимого для производства единицы j-ого продукта. Как обычно, мы предполагаем, что все a_{ij} неотрицательны, и что в матрице A нет нулевых строк и столбцов. Отметим, что если $y = (y_1, \dots, y_n)$ — совокупное предложение производственного сектора, то вектор $A\,y$ описывает полные затраты производственного сектора на производство ассортиментного набора y; иными словами, i-ая компонента вектора $A\,y$ равна количеству i-ого первичного фактора, затраченного на производство набора y. Естественно, в реальных моделях количества затраченных первичных факторов не должны превосходить количеств имеющихся первичных факторов, т.е. должно выполняться неравенство $A\,y \le b$.

Потребуем дополнительно, чтобы спрос на всякий товар в точности совпадал с предложением, т.е. $y = \Phi(p, v)$. Из этого ограничения, в частности, следует, что производственный сектор приобретает весь вектор b запаса первичных факторов. Поэтому доходы производственного сектора равны $\langle p, y\rangle - \langle v, b\rangle$. Так как $\langle v, b\rangle$ не зависит от p, то естественно приходим к следующему описанию оптимального поведения производителей: производственный сектор максимизирует число $\langle p, y\rangle$ при ограничениях $A\,y \le b$ и $y \ge 0$.

Определение. Набор (y, p, v) называется *конкурентным равновесием в модели Вальда–Касселя*, если выполняются следующие условия:

1) вектор y является решением стандартной задачи линейного программирования, описывающей поведение производственного сектора:

$$\begin{aligned} &\langle p, y\rangle \to \max, \\ &A\,y \le b,\ \ y \ge 0. \end{aligned} \tag{16.1}$$

2) спрос равен предложению: $y = \Phi(p, v)$; это условие описывает поведение потребительского сектора.

Рассмотрим двойственную задачу к задаче 16.1:

$$\begin{aligned} &\langle v, b\rangle \to \min, \\ &v\,A \ge p,\ \ v \ge 0. \end{aligned} \tag{16.2}$$

Эту задачу можно интерпретировать так: требуется найти такие цены, при которых расходы $\langle v, b\rangle$ производственного сектора были минимальны, и при этом прибыль отсутствовала.

Теорема 16.1 *Для модели Вальда–Касселя существует конкурентное равновесие (y, p, v), в котором v является решением задачи 16.2.*

Доказательство. Напомним некоторые факты из линейного программирования. Каждый вектор y, удовлетворяющий ограничениям задачи (16.1), а также каждый вектор v, удовлетворяющий ограничениям задачи (16.2), называется *допустимым* или *планом*. Если множество допустимых векторов не пусто, то задача называется *допустимой*. Если задача имеет решение, то соответствующее значение целевой функции называется *значением задачи*. Имеет место следующая теорема двойственности.

Предложение 16.1 (Теорема двойственности) *Если прямая и двойственная задачи линейного программирования допустимы, то они обе имеют решения и одинаковые значения. Если одна из задач недопустима, то вторая задача решения не имеет. Если у прямой и двойственной задачи имеются допустимые вектора, и значения соответствующих целевых функций на этих векторах одинаковы, то эти вектора в действительности являются решениями этих задач.*

Так как $b \in \mathbb{R}^n_+$ отличен от нуля, и $A \ge 0$, то $y = 0$ удовлетворяет неравенству $A\,y \le b$, поэтому задача (16.1) допустима. Так как $A \ge 0$ и в матрице A нет нулевых строк, то для любого p существует такое $v \in \mathbb{R}^m_+$, что $v\,A \ge p$, поэтому двойственная задача (16.2) также допустима. Таким образом, обе задачи (16.1) и (16.2) допустимы при любом $p \in \mathbb{R}^n_+$. Таким образом, основная проблема — показать, что среди решений задач (16.1) и (16.2) можно выбрать такие, которые дополнительно удовлетворяют условию $y = \Phi(p, v)$. Для доказательства последнего, мы построим некоторое многозначное отображение и воспользуемся теоремой Какутани. Отметим, что так как p предполагается отличным от нуля, а в теореме Какутани используются компактные множества, нам прийдется рассматривать не все ненулевые вектора p из $\mathbb{R}^n_+$, а лишь те, которые лежат в некотором компактном подмножестве в $\mathbb{R}^n_+$, не содержащем начало координат. Перейдем к подробностям.

Для удобства изложения, нам понадобится норма $\|\cdot\|_0$, которая, напомним, определяется так: для любого вектора x его норма $\|x\|_0$ равна сумме модулей координат вектора x:

$$\|x\|_0 = \sum_i |x^i|, \ x = (x^1, x^2, \dots).$$

Обозначим через e вектор из $\mathbb{R}^n$, все координаты которого равны 1: $e = (1, \dots, 1)$, а через a — вектор из $\mathbb{R}^m$ вида $A\,e$. Иными словами, i-ая координата вектора a равна сумме всех элементов i-ой строки матрицы A. Так как $A \geq 0$ и A не содержит нулевых строк, то все координаты вектора a больше нуля.

Для каждого вектора $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ обозначим через $|x|$ вектор с координатами $(|x^1|, \dots, |x^n|)$. Отметим, что для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$\|x\|_0 = \langle |x|, e\rangle.$$

По аналогии с нормой $\|\cdot\|_0$, определим норму $\|x\|_a$ вектора $x \in \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\|x\|_a = \langle |x|, a\rangle.$$

Зададим положительные числа α, β и γ следующим образом,

$$\alpha = \min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m a_{ij}, \ \beta = \|b\|_0,$$

а γ — любое положительное число, такое что $b \geq \gamma a$. Так как $b \gg 0$, то такое γ существует. Так как в A нет нулевых столбцов и вектор $b \in \mathbb{R}^m_+$ не равен нулю, числа α и β положительны. Из чисел α, β и γ построим число μ следующим образом: $\mu = \alpha\gamma/\beta$. Это число будет определять степень отделенности от нуля рассматриваемых цен p.

Лемма 16.1 *Положительное число μ, определенное выше, не превосходит* 1.

Доказательство. По определению, $b \geq \gamma a$, поэтому

$$\beta = ||b||_0 \geq \gamma ||a||_0 = \gamma \sum_{i,j} a_{ij} \geq \gamma\, n \min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} = n\gamma\alpha \geq \gamma\alpha,$$

откуда и получаем требуемое.

Для краткости, положим $s = (p, v)$, и определим выпуклое компактное подмножество S в $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$ следующим образом:

$$S = \{s = (p, v) \mid p \in \mathbb{R}^n_+,\ v \in \mathbb{R}^m_+,\ \mu \leq ||p||_0 \leq 1,\ ||v||_a = 1\}.$$

Именно для этого множества S мы построим многозначное отображение $\varphi : S \rightrightarrows S$ и применим теорему Какутани.

Введем следующее удобное обозначение. Для любых векторов x и y из $\mathbb{R}^m_+$, таких что $y \neq 0$, положим

$$x \mathbin{/\!/} y = \max_{\delta y \leq x} \delta.$$

Теперь начнем строить различные отображения. Первое из них — это однозначное отображение $Z : S \to \mathbb{R}^n_+$. Положим

$$Z(s) = \Big(b \mathbin{/\!/} A\big(\Phi(s)\big)\Big)\, \Phi(s).$$

Лемма 16.2 *Отображение Z корректно определено и непрерывно. Более того, для любого $s \in S$ имеем*

$$A\big(Z(s)\big) \leq b,$$

причем хотя бы для одной компоненты векторов $A\big(Z(s)\big)$ и b имеет место равенство. Поэтому $b \mathbin{/\!/} A\big(Z(s)\big) = 1$.

Доказательство. Докажем, что построенное отображение корректно. Для этого мы покажем, что $\Phi(s) \neq 0$, откуда, в силу отсутствия в матрице A нулевых столбцов, получим не равенство нулю вектора $A\big(\Phi(s)\big)$. Итак, пусть $\Phi(s) = 0$ для некоторого $s \in S$. Воспользуемся законом Вальраса в узком смысле: $\langle p, \Phi(p, v)\rangle = \langle v, b\rangle$. Поэтому $\langle v, b\rangle = 0$. Однако, так как $b \gg 0$, и $||v||_0 = 1$, то $\langle v, b\rangle \neq 0$, противоречие, завершающее доказательство корректной определенности отображения Z.

Непрерывность отображения Z вытекает из непрерывности всех отображений, определяющих Z.

Далее, рассмотрим вектор $A\bigl(Z(s)\bigr) = \Bigl(b \,/\!/\, A\bigl(\Phi(s)\bigr)\Bigr) A\bigl(\Phi(s)\bigr)$. По определению, коэффициент при $A\bigl(\Phi(s)\bigr)$ равен наибольшему δ, при котором $\delta\, A\bigl(\Phi(s)\bigr) \le b$, поэтому $A\bigl(Z(s)\bigr) \le b$.

Наконец, последнее утверждение вытекает из того, что коэффициент при $A\bigl(\Phi(s)\bigr)$, т.е. число $\Bigl(b \,/\!/\, A\bigl(\Phi(s)\bigr)\Bigr)$ — наибольшее среди тех, для которых $\delta\, A\bigl(\Phi(s)\bigr) \le b$. Доказательство закончено.

Определение. Назовем вектор y, допустимый для задачи (16.1), *эффективным*, если $b \,/\!/\, A(y) = 1$.

Лемма 16.3 *Для эффективного вектора y существует такой ненулевой вектор $p \in \mathbb{R}^n_+$, что y является решением задачи (16.1).*

Доказательство. Так как вектор y эффективный, то одна из координат вектора b, скажем b_i, равна соответствующей, т.е. i-ой, координате вектора $A\,y$. Положим p равным i-ой строке a_i матрицы A. В силу выбора вектора p, имеем $\langle p, y\rangle = b_i$. Пусть y' — другой допустимый вектор задачи (16.1). Так как $Ay' \le b$, то

$$\langle p, y'\rangle = \langle a_i, y'\rangle \le b_i = \langle p, y\rangle,$$

поэтому $\langle p, y\rangle = \max\langle p, y'\rangle$ по всем допустимым векторам y'. Что и требовалось.

Обозначим через Ω множество всех эффективных векторов задачи (16.1). В силу леммы 16.2, построенное отображение Z переводит множество S в Ω.

Построим теперь многозначное отображение $P : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n_+$, сопоставив каждому $y \in \Omega$ множество $P(y)$, состоящее из всех $p \in \mathbb{R}^n_+$, для которых y является решением задачи (16.1). По лемме 16.3, множество $P(y)$ не пусто при каждом $y \in \Omega$.

Лемма 16.4 *Для любого y множество $P(y)$ является конусом.*

Доказательство. Выберем произвольное $\lambda \ge 0$ и покажем, что вектор λp также лежит в $P(y)$. Действительно, в силу билинейности скалярного произведения, если вектор y является точкой максимума функции $\langle p, \cdot\rangle$, то вектор y является точкой максимума и для функции $\langle \lambda p, \cdot\rangle = \lambda\langle p, \cdot\rangle$. Доказательство закончено.

Зададим еще одно многозначное отображение $V : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$, сопоставив любому $p \in \mathbb{R}^n_+$ множество решений задачи (16.2).

Комбинируя отображения P и V, построим многозначное отображение $K : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ следующим образом. Для любого эффективного вектора $y \in \Omega$ определим $K(y)$ так:

$$K(y) = \{(p, v) \mid p \in P(y),\ v \in V(p)\}.$$

Лемма 16.5 *Для любого $y \in \Omega$ множество $K(y)$ является отличным от нуля конусом в пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.*

Доказательство. Действительно, по лемме 16.3, существует ненулевой $p \in \mathbb{R}^n_+$, для которого y является решением задачи (16.1), т.е. $p \in P(y)$. С другой стороны, очевидно, что при любом $p \in \mathbb{R}^n_+$, в частности, при каждом $p \in P(y)$, существует вектор $v \in \mathbb{R}^m_+$, являющийся решением задачи (16.2), т.е. $v \in V(p)$. Отсюда следует, что $K(y)$ содержит не только нулевой вектор.

Далее, рассмотрим любой $s = (p, v) \in K(y)$, и выберем произвольное $\lambda \geq 0$. Мы должны показать, что $\lambda s = (\lambda p, \lambda v)$ лежит в $K(y)$. По лемме 16.4, $P(y)$ является конусом, и, значит, $\lambda p \in P(y)$. Рассмотрим вектор λv. Он является допустимым для задачи (16.2), в которой в качестве p рассматривается вектор λp. Действительно, $(\lambda v)A \geq (\lambda p)$, так как $vA \geq p$ по предположению. Кроме того, так как y, в силу выбора, является решением задачи (16.1), а v — решением двойственной задачи (16.2), то, по предложению 16.1, $\langle p, x\rangle = \langle v, b\rangle$, поэтому $\langle \lambda p, x\rangle = \langle \lambda v, b\rangle$. Опять, в силу предложения 16.1, вектор λp является решением задачи (16.2), где вместо p стоит λp. Иными словами, $\lambda v \in V(\lambda p)$. Доказательство закончено.

Лемма 16.6 *Для любого $y \in \Omega$ множество $K(y)$ и S пересекаются.*

Доказательство. По лемме 16.5, множество $K(y)$ является невырожденным конусом, поэтому в $K(y)$ имеется ненулевой вектор $s = (p, v)$. Для такого s вектор v также отличен. Действительно, в противном случае, в силу условия $vA \geq p$, мы бы имели $p = 0$, поэтому $s = 0$, противоречие. Следовательно, можно рассмотреть вектор $s' = (p', v') = s/\|v\|_a$. По лемме 16.5, вектор s' также лежит в $K(y)$, поэтому, в частности, $v'A \geq p'$, и, значит, $\|v'A\|_0 \geq \|p'\|_0$. С другой стороны, ясно, что

$$\|vA\|_0 = \langle vA, e\rangle = \langle v, a\rangle = \|v\|_a,$$

поэтому

$$\|v'A\|_0 = \left\| \frac{v}{\|v\|_a} A \right\|_0 = \frac{\|v\,A\|_0}{\|v\|_a} = 1,$$

откуда $\|p'\|_0 \leq \|v'A\| = 1$, т.е. для вектора p' выполняется верхнее неравенство из определения множества S, тогда как $\|v'\|_a = 1$.

Покажем теперь, что имеет место неравенство $||p'|| \geq \mu$. Так как $y \in \Omega$, то $\langle y, a_i\rangle \leq b_i$, где, напомним, a_i обозначает i-ую строку матрицы A. Обозначим через $\bar{a}$ вектор из $\mathbb{R}^n_+$, такой что i-ая координата этого вектора равна $\sum_{j=1}^m a_{ij}$. Складывая описанные только что неравенства, получаем

$$\alpha||y||_0 \leq \langle y, \bar{a}\rangle \leq \beta,$$

поэтому $||y||_0 \leq \beta/\alpha$.

Еще раз воспользовавшись предложением 16.1, заключаем, что $\langle p', y\rangle = \langle v', b\rangle$. Легко проверить, что $\langle p', y\rangle \leq ||p'||_0||y||_0$, поэтому

$$||p'|| \geq \frac{\langle p', y\rangle}{||y||_0} = \frac{\langle v', b\rangle}{||y||_0} \geq \langle v', b\rangle\alpha/\beta.$$

Так как $b \geq \gamma a$, то $\langle v', b\rangle \geq \gamma\langle v', a\rangle = \gamma||v'||_a = \gamma$, откуда $||p'|| \geq \alpha\gamma/b$, что и требовалось. Доказательство леммы закончено.

Наконец, определим главное многозначное отображение $\varphi : S \Rightarrow S$, положив

$$\varphi(s) = S \cap K\big(Z(s)\big).$$

Чтобы применить теорему Какутани, мы должны доказать, что отображение φ полунепрерывно сверху. Для этого докажем сначала полунепрерывность сверху всех остальных определенных нами многозначных отображений, т.е. отображений P, V и K.

Лемма 16.7 *Отображение P полунепрерывно сверху.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. существует такое $y \in \Omega$, для которого отображение P не является полунепрерывным сверху. Это означает, что существует некоторое $\varepsilon > 0$ и последовательность $y_i \to y$ точек из Ω, таких что в каждом множестве $P(y_i)$ имеется точка p_i, не принадлежащая ε-окрестности U множества $P(y)$.

Так как $P(y) \subset \mathbb{R}^n_+$ — конус, то можно считать, что все p_i удовлетворяют некоторым условиям нормировки, например, $||p_i||_0 = 1$. Иными словами, все p_i лежат в стандартном компактном $(n-1)$-мерном симплексе. Поэтому в последовательности p_i можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, и, значит, без ограничения общности, можно сразу предполагать, что последовательность p_i сходится к некоторому p.

Так как все p_i являются решениями задачи (16.1), то для любого допустимого y' выполняется $\langle p_i, y'\rangle \leq \langle p, y\rangle$. Переходя к пределу, получаем, что $\langle p, y'\rangle \leq \langle p, y\rangle$, поэтому $p \in P(y)$, и, значит, при достаточно больших номерах i все точки p_i лежат в ε-окрестности U множества $P(y)$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 16.8 *Многозначное отображение V полунепрерывно сверху.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. для некоторого p отображение V не полунепрерывно сверху. Это означает, что существует такое $\varepsilon > 0$ и такая последовательность точек $p_i \to p$, что в каждом множестве $V(p_i)$ имеется точка v_i, не лежащая в ε-окрестности U множества $V(p)$.

Отметим, что каждая точка v_i является, по определению, решением задачи (16.2) при $p = p_i$. Покажем, что последовательность v_i является ограниченной. Действительно, для любого вектора $v' \in \mathbb{R}^m_+$, такого что $v' \gg 0$, вектор $v' A$ также строго положителен, поэтому, в силу сходимости последовательность p_i, существует такое положительное число λ, что $(\lambda v') A \gg p_i$ для любого i. Положим $h = \langle \lambda v', b \rangle$. Так как v_i минимизирует функцию $\langle b, \cdot \rangle$ на множестве всех $v \in \mathbb{R}^m_+$, таких что $v A \geq p_i$, то $\langle v_i, b \rangle \leq h$ (на самом деле, имеет место даже строгое неравенство). Так как $b \gg 0$, то множество всех $v \in \mathbb{R}^m_+$, для которых $\langle b, v \rangle \leq h$, ограничено, откуда и вытекает, что последовательность v_i ограничена.

В свою очередь, из ограниченности последовательности v_i следует, что у нее имеется подпоследовательность, сходящаяся к некоторой точке $v \in \mathbb{R}^m_+$. Без ограничения общности, будем предполагать, что сама последовательность v_i сходится к v.

Покажем, что $v \in V(p)$, что и является искомым противоречием. Для этого, по определению, достаточно выяснить, что v является решением задачи (16.2). Вектор v удовлетворяет ограничениям задачи (16.2), так как $v_i A \geq p_i$, а $p_i \to p$ и $v_i \to v$. Более того, легко видеть, что значение задачи (16.2) при $p = p'$ непрерывно зависит от p' (докажите). Поэтому число $\langle b, v \rangle$ является значением задачи (16.2), и, значит, v — решение этой задачи, т.е. $v \in V(p)$, что и требовалось.

Доказательство следующих четырех утверждений оставляется слушателям в качестве домашнего задания.

Лемма 16.9 *Многозначное отображение K полунепрерывно сверху.*

Лемма 16.10 *Многозначное отображение $K \circ Z : S \rightrightarrows \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ полунепрерывно сверху.*

Лемма 16.11 *Многозначное отображение $\varphi : S \rightrightarrows S$ полунепрерывно сверху.*

Лемма 16.12 *Для любого $s \in S$ множество $\varphi(s)$ непусто и выпукло.*

Воспользовавшись теперь теоремой Какутани, получаем, что у отображения φ имеется неподвижная точка, т.е. существуют такие цены $s^* = (p^*, v^*)$, для которых $s^* \in \varphi(s^*)$. Положим $x^* = \Phi(s^*)$ и покажем, что тройка (x^*, p^*, v^*) удовлетворяет условиям равновесия нашей модели.

В самом деле, так как $s^* \in \varphi(s^*)$, то $s^* \in K\big(Z(s^*)\big)$. По определению отображения K, вектор $Z(s^*)$ является решением задачи (16.1) при $p = p^*$, а вектор v^* — решением задачи (16.2) тоже при $p = p^*$. Нам осталось показать, что $x^* = Z(s^*)$.

Действительно, по определению отображения Z, имеем

$$Z(s^*) = \nu\Phi(s^*), \text{ где } \nu = b \,/\!/\, A\big(\Phi(s^*)\big).$$

По предложению 16.1, имеем

$$\langle Z(s^*), p^*\rangle = \langle \nu\Phi(s^*), p^*\rangle = \nu\langle\Phi(s^*), p^*\rangle = \langle v^*, b\rangle,$$

однако функция Φ, по условию, удовлетворяет закону Вальраса, поэтому $\nu\langle\Phi(s^*), p^*\rangle = \langle v^*, b\rangle$, и, значит, $\nu = 1$. Отсюда мгновенно заключаем, что $Z(s^*) = \Phi(s^*) = x^*$, поэтому тройка $(x^* = \Phi(s^*), p^*, v^*)$ удовлетворяет всем условиям из определения конкурентного равновесия. Теорема полностью доказана.

Лекция 17

Модель равновесия с гарантированными доходами

Рассмотрим вариант модели Эрроу–Дебре, в которой учитывается социальное обеспечение. Предполагается наличие некоторого центрального органа, например, государства, который занимается *частичным перераспределение доходов в пользу малообеспеченных слоев населения*. Кроме того, мы будем предполагать, что у потребителей нет начальной собственности b_i.

При формализации модели мы будем использовать обозначения, введенные при описании модели Эрроу–Дебре.

Положим

$$\pi_j(p) = \max_{y \in Y_j} \langle p, y \rangle, \; j = 1, \ldots, m$$

$$\pi(p) = \sum_{j=1}^{m} \pi_j(p) = \max_{y \in Y} \langle p, y \rangle.$$

Величину $d = \pi(p)/l$ назовем *средним уровнем дохода*, приходящегося на одного потребителя при ценах p (напомним, что m — это количество производителей, а l — количество потребителей).

Назовем j-ое предприятие *рентабельным при ценах* p, если $\pi_j(p) > 0$ (напомним, что в модели Эрроу–Дебре допускались предприятия, не имеющие доходов). Обозначим через $J_1(p)$ множество всех номеров рентабельных предприятий при ценах, а через $J_2(p)$ — множество номеров всех оставшихся предприятий.

Замечание. Наличие нерентабельных предприятий является неотъемлемой частью действительности. Причем существуют предприятия и фирмы, не являющиеся рентабельными, но выпускающие продукцию, без которой невозможно обойтись. Такие предприятия обычно субсидируются правительством.

Будем предполагать, что перераспределение доходов осуществляется следующим образом. Пусть известны цены p. Тогда выберем некоторое число μ, $0 < \mu \leq 1$, и назовем число μd *минимальным уровнем дохода.* Мы хотим добиться того, чтобы каждый потребитель получил не меньше чем μd из доходов предприятий.

Для этого, с каждого рентабельного предприятия взимаем налог в размере $(1-\mu)\cdot 100\%$. Таким образом, реальная прибыль каждого предприятия составляет $\mu\pi_j(p)$ у рентабельного предприятия, и 0 — у нерентабельного предприятия. Эту реальную прибыль j-ого предприятия обозначим через $\tilde{\pi}_j(p)$. Если доход i-ого потребителя от участия в прибылях предприятий, т.е. величина $\sum_{j=1}^m \alpha_{ij}\tilde{\pi}_j(p)$, больше минимального уровня дохода, то такой потребитель субсидий не получает. В противном случае, ему выплачивается субсидия в таком размере, чтобы его доход равнялся минимальному уровню дохода, т.е. величине μd. Если обозначить через $K_i(p)$ доход i-ого потребителя от участия в прибылях производства, то вышесказанную стратегию можно записать следующей формулой:

$$K_i(p) = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}\tilde{\pi}_j(p) + \max\Big\{0,\, \mu d - \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}\tilde{\pi}_j(p)\Big\}.$$

Однако если число μ выбрать произвольно, то финансовый баланс, т.е. закон Вальраса в узком смысле слова, выполняться не обязан. Поэтому мы должны вычислить правильное число $\mu = \mu(p)$, исходя из соотношения

$$\sum_{i=1}^l K_i(p) = \pi(p).$$

Имеем

$$\pi(p) = \sum_{i=1}^l K_i(p) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}\tilde{\pi}_j(p) + \sum_{i=1}^l \max\Big\{0,\, \mu d - \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}\tilde{\pi}_j(p)\Big\} =$$
$$\mu\left(\sum_{j\in J_1(p)} \pi_j(p) + \sum_{i=1}^l \max\Big\{0,\, d - \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}\pi_j(p)\Big\}\right),$$

откуда

$$\mu = \mu(p) = \frac{\pi(p)}{\sum\limits_{j\in J_1(p)} \pi_j(p) + \sum\limits_{i=1}^{l} \max\Big\{0,\, d - \sum\limits_{j\in J_1(p)} \alpha_{ij}\pi_j(p)\Big\}}.$$

Предполагая, что $\pi(p) > 0$, и учитывая, что $\pi(p) = \sum_{j\in J_1} \pi_j(p)$, получаем $0 < \mu \le 1$.

Лемма 17.1 *Функция $\mu(p)$ непрерывно зависит от p.*

Доказательство. Функцию $\mu(p)$ можно, очевидно, переписать так:

$$\mu(p) = \frac{\pi(p)}{\sum\limits_{j=1}^{m} \pi_j(p) + \sum\limits_{i=1}^{l} \max\Big\{0,\, d - \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\pi_j(p)\Big\}} = \frac{\pi(p)}{\pi(p) + \sum\limits_{i=1}^{l} \max\Big\{0,\, d - \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\pi_j(p)\Big\}}.$$

В силу компактности множеств Y_j, функции $\pi_j(p)$ — непрерывны по p. Кроме того, так как мы предполагаем, что $\pi(p) > 0$ для любого ненулевого p, то знаменатель в нуль не обращается. Доказательство закончено.

Замечание. Доказательство этого факта в Ашманове — *неправильное*. А именно, утверждается, что для любого p_0 существует такая окрестность $V(p_0)$, что для любой точки $p \in V(p_0)$ множества $J_1(p)$ и $J_1(p_0)$ совпадают.

Рассмотрим следующий пример. Пусть $n = 1$, т.е. имеется два товара. Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ стандартные координаты (x^1, x^2). Для некоторого j определим технологическое множество Y_j для j-ого производителя как отрезок $[0,1]$ на оси x^1. Рассмотрим $p_0 = (0,1)$. Тогда $\pi_j(p_0) = 0$, поэтому $1 \notin J_1(p_0)$. Однако для любого $p = (p^1, p^2) \in \mathbb{R}^2_+$, близкого к p_0 и такого, что $p^1 \ne 0$, имеем $\pi(p) > 0$, поэтому для всех таких p имеем: $1 \in J_1(p)$.

Из непрерывности функции $\mu(p)$ вытекает непрерывность функций $\tilde{\pi}_j(p)$ и, наконец, непрерывность функций $K_i(p)$.

Лемма 17.2 *Функции $K_i(p)$ являются однородными функциями степени 1.*

Доказательство. Функция $\mu(p)$ является однородной степени 0. Это вытекает из того факта, что функции $\pi_j(p)$ однородны степени 1, и средний уровень дохода $d = d(p) = \pi(p)/l$ также однородна степени 1. Отсюда сразу вытекает однородность степени 1 для функций $K_i(p)$. Доказательство закончено.

Функции совокупного спроса $\Phi(p)$ и совокупного предложения $\Psi(p)$ мы определим так же, как и в общей модели Вальраса. Однако теперь, в связи с особенностями рассматриваемой задачи, внесем небольшое изменение в обозначение функции Φ, учтя ее зависимость от $\mu(p)$.

Для этого, обозначим через $\gamma(p) = 1-\mu(p)$ величину, определяющую налог на прибыли рентабельных предприятий. На самом деле, при формулировке понятия равновесия в рассматриваемой модели, мы не будем a priori предполагать, что функция $\gamma(p)$ вычисляется исходя из известных доходов предприятий так, как мы это проделали раньше для функции $\mu(p)$. Поэтому, считая изначально заданной функцию $\gamma(p)$, будем обозначать функцию совокупного спроса через $\Phi(p, \gamma(p))$.

Определение. Четверка $(x^*, y^*, p^*, \gamma^*)$ называется *состоянием равновесия в модели с гарантированными доходами*, если выполняются следующие соотношения:

$$x^* \in \Phi(p^*, \gamma^*), \quad y^* \in \Psi(p^*),$$
$$x^* \leq y^*, \quad \langle p^*, x^* \rangle = \langle p^*, y^* \rangle.$$

Здесь $x^* \in X$ — совокупный спрос, $y^* \in Y$ — совокупное предложение, $p^* \in \mathbb{R}^n_+$, $p^* \neq 0$, — вектор цен, и γ^* — вещественное число, $0 < \gamma^* \leq 1$, определяющее величину налога на прибыль рентабельных предприятий.

Аналогично доказательству существования конкурентного равновесия в модели Эрроу–Дебре, получается следующий результат.

Теорема 17.1 *Пусть выполнены следующие предположения*:

1) потребительское множество $X_i \subset \mathbb{R}^n_+$ выпукло и замкнуто, причем если $x^s \in X_i$ — последовательность, такая что $\|x^s\| \to \infty$ при $s \to \infty$, то каждая координата точек x^s также стремится к бесконечности;

2) при каждом i функция спроса $u_i(x)$ непрерывна и вогнута на X_i;

3) всякий потребитель ненасыщаем;

4) *технологические множества Y_j компактны и каждое из них содержит 0;*

5) *совокупное технологическое множество $Y = \sum_{j=1}^{m} Y_j$ выпукло и содержит вектор $\bar{y} \gg 0$.*

Тогда в модели с гарантированными доходами существует состояние равновесия $(x^*, y^*, p^*, \gamma^*)$, такое что при каждом i имеем $K_i(p^*) > 0$.

Лекция 18

Теория игр. Равновесие Нэша

В данной лекции мы рассмотрим элементы теории игр. Эта теория имеет многочисленные применения в экономике, например, при решении задач о борьбе фирм за рынки сбыта, или, скажем, при оптимальном распределении производственных мощностей, причем как в условиях, когда основные параметры системы известны точно, так и при частичной определенности. Отметим, что участники экономики могут выбирать различные стратегии своего поведения (это, собственно говоря, и является ключевой особенностью рассматриваемой теории). Однако, не все стратегии являются оптимальными: например, при более продуманных действиях одна фирма может быстрее вытеснить другую с рынка сбыта, или, скажем, получить большую прибыль. Цель теории игр — выяснить, существуют ли такие оптимальные стратегии, и если да, научиться определять, какое поведение при заданных условиях является наиболее выгодным, иными словами, научиться вычислять оптимальные стратегии.

Естественно, каждый участник игры стремится действовать оптимальным для себя образом. Если в игре существует такая ситуация, при которой каждый участник действует оптимальным образом, то эта ситуация называется равновесной. Поиск равновесия в игре — это одна из основных задач теории игр. Оказывается, для широкого класса игр можно доказать теорему существования равновесия, называемую теоремой Нэша. Замечательным является тот факт, что при доказательстве теоремы Нэша мы вновь используем уже неоднократно примененную теорему Какутани о неподвижной точке многозначного отображения. Перейдем к подробностям.

1 Основные определения теории игр

Мы будем рассматривать только так называемые *бескоалиционные игры*, т.е. игры, в которых каждый участник стремится получить наибольший возможный индивидуальный выигрыш. Игры, в которых действия игроков направлены на максимизацию выигрышей коллективов (коалиций) без последующего их разделения между игроками, называются *коалиционными*. Теория коалиционных игр весьма сложна, и в данном курсе обсуждаться не будет.

Каждая бескоалиционная игра характеризуется следующими объектами.

- Обозначим через I множество всех игроков, которое предполагается конечным и занумерованным: $I = \{1, \ldots, n\}$.

- Для каждого игрока $i \in I$ зададим множество S_i возможных действий, называемых *стратегиями*.

- Пусть S обозначает декартово произведение множеств S_i:

  $$S = S_1 \times \cdots \times S_n.$$

  Считая, что в процессе игры каждый игрок выбирает некоторую стратегию, мы получаем, что каждая конкретная ситуация, складывающаяся в игра, задается вектором $s = (s_1, \ldots, s_n)$, где $s_i \in S_i$. Таким образом, множество S— это множество всех возможных *ситуаций* игры.

- Обозначим через H_i произвольную функцию, заданную на множестве S. Функции H_i мы будем интерпретировать как *функции выигрыша i-ого игрока*: если в игре сложилась ситуации $s \in S$, то $H_i(s)$ равно выигрышу i-ого игрока в этой ситуации.

Таким образом, мы назовем *бескоалиционной игрой* Γ следующую тройку объектов:

$$\Gamma = \left\langle I, \{S_i\}_{i\in I}, \{H_i\}_{i\in I}\right\rangle,$$

где I — множество игроков, S_i — множество стратегий i-ого игрока и H_i — функция выигрыша i-ого игрока.

Функция $H(s) = \sum_{i\in I} H_i(s)$, определенная на множестве S, называется *сумой игры* Γ. Игра Γ называется *игрой с постоянной суммой*, если функция H постоянна. Важным частными случаем игры с постоянной суммой является *игра с нулевой суммой*, т.е. когда $H = 0$. Если в игре с нулевой суммой участвует ровно два игрока, то такая игра называется *антагонистической*. Ясно, что, играя в антагонистическую игру, в каждой ситуации каждый из двух игроков выигрывает столько, сколько проигрывает его напарник.

Далее, определим состояние равновесия в игре Γ. Для этого введем следующие традиционные обозначения. Пусть s — некоторая ситуация, т.е. $s \in S$, и s_i — это i-ая компонента вектора s, т.е. стратегия i-ого игрока в ситуации s. Выберем произвольную стратегию s_i' игрока i. Тогда через $s \parallel s_i'$ будем обозначать ситуацию, полученную из ситуации s заменой стратегии s_i на s_i' (стратегии всех игроков, отличных от i-ого, остаются неизменными).

Определение. Ситуация s в игре Γ называется *приемлемой для игрока* i, если для любой его стратегии s_i' выполняется:

$$H_i(s \parallel s_i') \le H_i(s).$$

Иными словами, в этой ситуации игрок i, изменив свою стратегию, не может увеличить своего выигрыша.

Ситуация s, приемлемая для всех игроков, называется *ситуацией равновесия*. Иными словами, ситуация $s \in S$ равновесная, если и только если

$$H_i(s \parallel s_i') \le H_i(s),$$

для любого игрока $i \in I$.

Замечание. Поясним важность поиска равновесных ситуаций. Для этого заметим, что если равновесная ситуация является предметом договора между игроками, то ни один игрок не заинтересован в отклонении от нее (от договора). Если же в результате договора зафиксирована неравновесная ситуация, то, по определению, найдется игрок, заинтересованный в нарушении этого договора.

Замечание. Определенная выше равновесная ситуация иногда называется *равновесием Нэша*. Это равновесие может быть естественным образом определено для произвольных $\mathbb{R}^n$-значных отображений, заданных на декартовом произведении произвольных n множеств. В предыдущих лекциях мы уже встречались с экстремальными точками таких отображений, определив понятие оптимумов Парето. Отметим, что, вообще говоря, равновесие Нэша и оптимумы Парето — это разные точки. Рассмотрим следующий пример.

Пусть $S_1 = \{1,2\}$, $S_2 = \{1,2\}$, $S = S_1 \times S_2$, $\mathcal{H}(s) = \{H_1(s), H_2(s)\}$, и

$$\mathcal{H}(1,1) = (2,1),\ \mathcal{H}(1,2) = (3,1),\ \mathcal{H}(2,1) = (1,3),\ \mathcal{H}(2,2) = (4,2).$$

Легко видеть, что оптимумы Парето — это точки $(1,3)$ и $(4,2)$. Чтобы описать равновесия Нэша, обозначим k-ую координату точки $\mathcal{H}(i,j)$ через $\mathcal{H}(i,j)[k]$.

Лемма 18.1 *Для определенной функции $\mathcal{H}$ единственной точкой равновесия Нэша является точка* $(1,1)$.

Доказательство. То, что эта точка равновесная, вытекает из следующих двух неравенств:

$$2 = \mathcal{H}(1,1)[1] \geq \mathcal{H}(2,1)[1] = 1,$$
$$1 = \mathcal{H}(1,1)[2] \geq \mathcal{H}(1,2)[2] = 1.$$

Остальные точки не являются равновесными в силу следующих неравенств, противоречащих определению равновесия:

$$3 = \mathcal{H}(1,2)[1] < \mathcal{H}(2,2)[1] = 4,$$
$$1 = \mathcal{H}(2,1)[1] < \mathcal{H}(1,1)[1] = 2,$$
$$2 = \mathcal{H}(2,2)[2] < \mathcal{H}(2,1)[2] = 3.$$

Доказательство закончено.

Определение. Стратегия игрока называется *равновесной*, если она входит хотя бы в одно равновесное состояние.

Разнообразие бескоалиционных игр делает желательным объединение их в такие классы, что принадлежащие одному и тому же классу игры обладают одними и теми же основными свойствами. Пусть Γ' и Γ'' — две бескоалиционных игры с одними и теми же множествами игроков и стратегий (т.е. отличающиеся только функциями выигрыша). Будем обозначать через H_i' и H_i'' функции выигрыша i-ого игрока в игре Γ' и Γ'' соответственно.

Определение. Игры Γ' и Γ'' называются *стратегически эквивалентными*, если существует такое число $k > 0$ и для каждого i такие числа c_i, что имеют место следующие соотношения:

$$H_i''(s) = k\, H_i'(s) + c_i, \quad \forall s \in S,\ \forall i \in I.$$

Задача 18.1 *Доказать, что стратегически эквивалентные игры имеют одни и те же ситуации равновесия.*

Задача 18.2 *Доказать, что всякая игра с постоянной суммой стратегически эквивалентна некоторой игре с нулевой суммой.*

Игра Γ называется *конечной*, если конечны множества S_i стратегий всех игроков $i \in I$ этой игры. В противном случае, игра Γ называется *бесконечной*.

Рассмотрим некоторые примеры конечных игр.

2 Конечные игры

Разберем сначала игру Γ, в которой принимают участие ровно два игрока. Обозначим через S' и S'' множества стратегий первого и второго игроков соответственно, и пусть H' и H'' — это функции выигрыша соответственно первого и второго игрока. Если S' состоит из m элементов, а S'' — из n элементов, то, как легко видеть, функции H' и H'' можно задать некоторыми матрицами A' и A'' размера $m \times n$, где (i,j)-ый элемент матрицы A' равен $H'(s'_i, s''_j)$, а (i,j)-ый элемент матрицы A'' равен $H''(s'_i, s''_j)$, $s'_i \in S'$, $s''_j \in S''$. Описанные только что игры называются *биматричными*.

Приведем пример биматричной игры в следующей задаче.

Задача 18.3 (Дилемма бандита) *Предположим, что игроками* 1 *и* 2 *являются преступники, находящиеся в предварительном заключении по подозрению в тяжком преступлении, причем прямых улик на них нет, и результат зависит от того, сознаются они или нет. Пусть имеются следующие возможности*:

1) если оба преступника сознаются, то они получат по 8 *лет (признание является смягчающим обстоятельством);*

2) если оба не сознаются, то получат по 1 *году (следователь докажет их виновность в совершении менее значительного преступления);*

3) если сознается только один из них, то он будет выпущен, а второй — осужден на 10 *лет.*

Считая, что преступники выберут оптимальное для них решение, являющееся равновесным, определить исход следствия.

Биматричная игра с нулевой суммой является частным случаем антагонистической игры и называется *матричной*. Последнее объясняется тем, что матрица A'' выигрыша второго игрока однозначно вычисляется по матрице A' выигрыша первого игрока: $A'' = -A'$. Матрица A' называется *матрицей выигрышей* матричной игры Γ.

Замечание. Для матричной игры Γ с матрицей выигрышей A принято нумеровать строки матрицы A номерами стратегий первого игрока, а столбцы матрицы A — номерами стратегий второго игрока. Если $A = \{a_{ij}\}$, то, как легко видеть, состояние (i^*, j^*) является равновесным, если и только если для любых i и j выполняется следующее условие:

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}.$$

Иными словами, $a_{i^*j^*}$ является наибольшим элементом в столбце с номером j^* (т.е. i^* — наилучшая стратегия первого игрока при фиксированной стратегии j^* второго игрока), и $a_{i^*j^*}$ является наименьшим элементом в строке с номером i^* (т.е. j^* — наилучшая стратегия второго игрока при фиксированной стратегии i^* первого игрока). Такие точки в теории игр называют *седловыми*.

Условие следующей задачи является критерием существования равновесия в матричной игре.

Задача 18.4 *Доказать, что в матричной игре* Γ *с матрицей* $A = \{a_{ij}\}$ *существует равновесие тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие*:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

3 Бесконечные игры

Во многих естественных и общественных науках широкое распространение получил прием, заменяющий рассмотрение конечных множеств с очень большим числом элементов рассмотрением бесконечных множеств. Этот прием позволяет применять к широкому классу задач мощный аппарат математического анализа.

Кроме того, бесконечные игры возникают в результате замен в конечных играх чистых стратегий, рассмотренных выше, на так называемые смешанные стратегии. Разберем это более подробно.

Как было отмечено выше, для существования равновесия в матричной игре необходимо и достаточно, чтобы соответствующие минимаксы совпадали. Если же они не совпадают, то первый игрок может обеспечить себе выигрыш не меньше $\max_i \min_j a_{ij}$, а второй может не дать ему больше, чем $\min_j \max_i a_{ij}$ (проверьте). Вопрос о разделе разности

$$\max_i \min_j a_{ij} - \min_j \max_i a_{ij}.$$

остается открытым. Поэтому естественно, чтобы игроки в этом случае искали дополнительные стратегические возможности. Оказывается, что для этого им целесообразно выбирать свои стратегии случайно.

Определение. Случайная величина, значениями которой являются стратегии игрока, называется *смешанной стратегией* этого игрока.

Пусть x_i — вероятность выбора первым игроком i-ой стратегии, а y_j — вероятность выбора вторым игроком j-ой стратегии. Ясно, что $0 \le x_i \le 1$, $0 \le y_i \le 1$, $\sum_i x_i = \sum_j y_j = 1$. Поэтому множество всех векторов $x = (x_1, \ldots, x_m)$ (векторов $y = (y_1, \ldots, y_n)$), описывающих смешанные стратегии первого (второго) игрока, образуют стандартный симплекс Δ^{m-1} (симплекс Δ^{n-1}).

Если все x_i (все y_j), кроме одного, равны 0, то первый (второй) игрок выбирает с вероятностью 1 ровно одну стратегию, и такая смешанная стратегия превращается в *чистую стратегию.*

Далее, предполагая, что игроки выбирают свои смешанные стратегии независимо, мы получаем, что вероятность выбора ситуации (i, j) равна $x_i y_j$, и, поэтому, математическое ожидание выигрыша первого игрока равно $\sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j = xAy^T$. Последнюю величину принимают за выигрыш первого игрока при смешанных стратегиях (x, y) и обозначают через $H(x, y)$.

Определение. В сделанных выше обозначениях, бесконечная игра

$$\langle \{1, 2\}, \{\Delta_m, \Delta_n\}, \{H, -H\} \rangle$$

называется *смешанным расширением* рассмотренной матричной игры.

Задача 18.5 *Покажите, что если ситуация (i^*, j^*) является равновесной для матричной игры, то эта же ситуация является равновесной и для смешанного расширения этой игры.*

Следующая задача показывает, что в игре со смешанными стратегиями всегда существует равновесное состояние.

Задача 18.6 *Докажите, что для смешанного расширения матричной игры с матрицей выигрышей A имеет место равенство*:

$$\max_x \min_y xAy^T = \min_y \max_x xAy^T.$$

Выведите отсюда существование равновесного состояния в этом смешанном расширении.

В действительности, минимаксы из задачи 18.6 равны выигрышу первого игрока в игре со смешанными стратегиями, являющейся смешанным расширением матричной игры с матрицей A. Это число называется *значением* матричной игры с матрицей A и обозначается через $v(A)$. Пара (x^*, y^*), для которой выполняется равенство из задачи 18.6, называется *равновесным состоянием в смешанных стратегиях.*

Задача 18.7 *Докажите, что для любой матрицы A имеют место следующие неравенства*:

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq v(A) \leq \min_j \max_i a_{ij}.$$

В частности, если в матричной игре имеется равновесие (в чистых стратегиях), то

$$\max_i \min_j a_{ij} = v(A) = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Задача 18.8 *Пусть Γ — матричная игра с матрицей $A = \{a_{ij}\}$ размера 2×2. Найти равновесную ситуацию $(x^*, 1-x^*, y^*, 1-y^*)$ в смешанных стратегиях. Показать, что если в чистых стратегиях равновесие не достигается, то*

$$x^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \quad y^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}.$$

4 Равновесие в бесконечных играх

Рассмотрим бесконечную игру Γ между n игроками. Предположим, что для любого i множество S_i стратегий i-ого игрока является выпуклым компактным метрическим пространством. Как и выше, обозначим через S множество всех ситуаций в игре Γ, т.е. $S = \prod_i S_i$. Для удобства, введем следующие обозначения. Пусть $s \in S$ — произвольная ситуация. Если $s = (s_1, \ldots, s_n)$, то через s_{-i} обозначим $(n-1)$-мерный вектор, полученный из s выбрасыванием i-ой координаты:

$$s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n).$$

Обратную операцию, т.е. восстановление вектора s по s_{-i} и s_i, будем обозначать через $s_{-i} \llcorner s_i$:

$$s = s_{-i} \llcorner s_i.$$

Далее, пусть дополнительно известно, что функции выигрыша $H_i : S \to \mathbb{R}$ непрерывны, и, кроме того, каждая H_i вогнута по i-ому аргументу:

$$H_i\Big(s_{-i} \llcorner \big((1-t)s'_i + ts''_i\big)\Big) \geq (1-t)H_i(s_{-i} \llcorner s'_i) + tH_i(s_{-i} \llcorner s''_i).$$

Теорема 18.1 (Нэш) *В сделанных выше предположениях, игра* Γ *обладает равновесным состоянием.*

Доказательство. Мы докажем эту теорему, сведя ее к теореме Какутани. Прежде всего, отметим, что множество S всех событий является выпуклым метрическим компактом.

Далее, обозначим через S_{-i} множество $\prod_{k \neq i} S_k$. Ясно, что S_{-i} — тоже выпуклый метрический компакт.

Для каждого i зададим однозначное отображение $\mu_i : S_{-i} \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\mu_i(s_{-i}) = \max_{x \in S_i} H_i(s_{-i} \llcorner x),$$

и многозначное отображение $\varphi_i : S_{-i} \rightrightarrows S_i$ так:

$$\varphi_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i \mid H_i(s_{-i} \llcorner s_i) = \mu_i(s_{-i})\}.$$

В силу непрерывности отображения H_i и компактности всех S_k, получаем, что отображение μ_i также непрерывно.

Лемма 18.2 *Многозначное отображение* φ_i *полунепрерывно сверху.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. для некоторого s_{-i} существует такая окрестность U его образа $\varphi_i(s_{-i})$ и такая последовательность $s_{-i}^k \to s_{-i}$, что в каждом $\varphi_i(s_{-i}^k)$ найдется некоторый элемент s_i^k, который не лежит в U.

В силу компактности множества S_i, из последовательности s_i^k можно выбрать сходящуюся к некоторому s_i' подпоследовательность. Переходя к этой подпоследовательности, будем, без ограничения общности, сразу считать, что последовательность s_i^k сходится к s_i'. Таким образом, мы построили последовательность $s_{-i}^k \llcorner s_i^k$ точек множества S, сходящуюся к $s_{-i} \llcorner s_i'$.

Так как функции H_i и μ_i непрерывны, и $H_i(s_{-i}^k \llcorner s_i^k) = \mu_i(s_{-i}^k)$, имеем

$$H_i(s_{-i} \llcorner s_i') = \lim_{k \to \infty} H_i(s_{-i}^k \llcorner s_i^k) = \lim_{k \to \infty} \mu_i(s_{-i}^k) = \mu_i(s_{-i}),$$

поэтому $s_i' \in \varphi(s_{-i})$. Следовательно, начиная с некоторого номера k, все точки s_i^k лежат в U, противоречие. Доказательство леммы закончено.

Лемма 18.3 *Для каждого* i *и каждого* s_{-i} *множество* $\varphi_i(s_{-i})$ *непусто, замкнуто и выпукло.*

Доказательство. Непустота следует из компактности множества S_i и непрерывности функции H_i. Замкнутость вытекает из непрерывности функции H_i и того факта, что $\varphi_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i \mid H_i(s_{-i} \llcorner s_i) = \mathrm{const}\}$ (здесь через const обозначена величина $\mu_i(s_{-i})$, не зависящая от s_i).

Докажем выпуклость множества $\varphi_i(s_{-i})$. Для этого воспользуемся вогнутостью функции H_i по i-ому аргументу. Пусть s_i' и s_i'' — две произвольные точки из $\varphi_i(s_{-i})$, и $t \in [0,1]$. Мы должны показать, что точка $(1-t)s_i' + ts_i''$, принадлежащая S_i в силу его выпуклости, также принадлежит $\varphi_i(s_{-i})$. Имеем:

$$H_i\Big(s_{-i} \llcorner ((1-t)s_i' + ts_i'')\Big) \geq$$
$$(1-t)H_i(s_{-i} \llcorner s_i') + tH_i(s_{-i} \llcorner s_i'') =$$
$$(1-t)\mu_i(s_{-i}) + t\mu_i(s_{-i}) = \mu_i(s_{-i}).$$

Так как $\mu_i(s_{-i})$ — это максимальное значение функции $\psi_i(x) = H_i(s_{-i} \llcorner x)$, $x \in S_i$, получаем, что

$$H_i\Big(s_{-i} \llcorner ((1-t)s_i' + ts_i'')\Big) = \mu_i(s_{-i}),$$

что и доказывает принадлежность точки $(1-t)s_i' + ts_i''$ множеству $\varphi_i(s_{-i})$. Доказательство леммы закончено.

Построим теперь многозначное отображение φ множества S в себя по следующей формуле:

$$\varphi(s) = \prod_i \varphi_i(s_{-i}).$$

Из лемм 18.2 и 18.3 вытекает, что многозначное отображение φ полунепрерывно сверху, и образ каждой точки непуст, замкнут и выпукл. По теореме Какутани, у отображения φ имеется неподвижная точка s^*, т.е. такая точка, что $s_i^* \in \varphi_i(s_{-i}^*)$. Последнее, очевидно, означает, что s^* является точкой равновесия игры Г. Доказательство теоремы закончено.

Пример. Рассмотрим антагонистическую игру Г, описывающую борьбу двух фирм за рынки сбыта. Пусть общая сумма средств каждого из игроков равна единице. Стратегии игроков состоят в распределении имеющихся средств между двумя рынками. Будем считать, что игрок, добившийся превосходства на одном рынке, вытесняет своего противника с этого рынка и получает выигрыш, равный избытку своих средств, умноженному на некоторый коэффициент, который характеризует важность рынка.

Если x и y обозначают количества средств, помещаемых 1-ым и 2-ым игроками соответственно на первый рынок (на второй рынок они помещают $(1-x)$ и $(1-y)$ средств), а k_i — это коэффициент значимости i-ого рынка, то функция выигрыша первого игрока определена на единичном квадрате $[0,1]\times[0,1]$ и имеет следующий вид:

$$H(x,y) = \begin{cases} k_1(x-y), & \text{если } x \ge y \quad (k_1 > 0) \\ k_2(y-x), & \text{если } x \le y \quad (k_2 < 0) \end{cases}$$

(предположения относительно знаков коэффициентов k_i мы делаем для того, чтобы можно было применить теорему Нэша).

Так как игра антагонистическая, то функция выигрыша второго игрока равна $-H(x,y)$. Легко видеть, что функции выигрыша обоих игроков непрерывны, а также вогнуты по соответствующим аргументам, причем множества стратегий — выпуклые метрические компакты. По теореме Нэша, в этой игре существует равновесие.

Задача 18.9 *Найти это равновесие.*

Лекция 19

Оптимизационные модели производства

В предыдущих главах, рассматривая разновидности моделей Вальраса, мы уже неоднократно сталкивались с оптимизационными задачами. Например, чтобы найти конкурентное равновесие в модели Эрроу–Дебре, нужно описать функции спроса и предложения, каждая из которых является многозначным отображением, значение которого при данной системе цен определенным как множество максимумов некоторой однозначной функции, заданной на данном подмножестве пространства товаров. В частности, значение функции спроса при данных ценах определяется как множество максимумов функции полезности, относительно которой мы делали самые общие предложения; значение функции предложения при данных ценах определяется как множество максимумов линейной функции. Кроме того, изучая конкурентное равновесие в модели Вальда–Касселя, мы рассматривали типичные оптимизационные задачи, возникающие в линейном программировании.

Ниже мы рассмотрим еще один класс вариационных задач. Начнем с примера.

1 Модель монополиста

Впервые модель монопольного производства возникла в 1938 году.

Пусть Φ — функция спроса. Будем считать, что Φ — однозначная функция. В модели Вальраса мы предполагали, что Φ зависит лишь от системы цен p. В действительности, эта функция существенно зависит еще и от скорости изменения цен, т.е. от p'. Таким образом, если параметр t обозначает время, то функция спроса в момент времени t имеет вид $\Phi\bigl(p(t), p'(t)\bigr)$.

Далее, обозначим через $C(x)$ стоимость производства товарного набора x. Тогда выручка от продажи товара в момент времени t равна $p(t)\,\Phi\bigl(p(t), p'(t)\bigr)$, а стоимость производства в этот момент времени равна $C\Bigl(\Phi\bigl(p(t), p'(t)\bigr)\Bigr)$. Таким образом, прибыль монополиста в момент времени t имеет вид

$$p(t)\,\Phi\bigl(p(t), p'(t)\bigr) - C\Bigl(\Phi\bigl(p(t), p'(t)\bigr)\Bigr).$$

Если нас интересует прибыль монополиста на промежутке времени $[0, T]$, то предыдущую величину надо проинтегрировать по t на этом промежутке.

Будем теперь считать, что известны начальные и конечные цены $p(0) = p_0$ и $p(T) = p_1$, а выбор политики цен на промежутке времени $[0, T]$ принадлежит монополисту. Естественно, возникает следующая задача: выбрать такую политику цен $p(t)$ при ограничениях $p(0) = p_0$ и $p(T) = p_1$, при которой прибыль будет максимальна, т.е.

$$\int_0^T p(t)\,\Phi\bigl(p(t), p'(t)\bigr) - C\Bigl(\Phi\bigl(p(t), p'(t)\bigr)\Bigr)\,dt \to \max.$$

Оказывается, эта задача сводится к решению некоторой системы дифференциальных уравнений.

2 Уравнения Эйлера–Лагранжа

Сформулируем общую задачу.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая линейно связная область. Рассмотрим непрерывно-дифференцируемую функцию $L(t, x, p)$ на $\mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^n$. Такую функцию будем называть *лагранжианом*. Выберем в Ω произвольную гладкую кривую $x(t)$, $t \in [0, T]$. Кривая $x(t)$ и лагранжиан $L(t, x, p)$ задают функцию $L\bigl(t, x(t), x'(t)\bigr)$ на отрезке $[0, T]$. Проинтегрировав последнюю функцию по отрезку $[0, T]$, мы получим число, которое обозначим через $I\bigl(x(t)\bigr)$:

$$I\bigl(x(t)\bigr) = \int_0^T L\bigl(t, x(t), x'(t)\bigr)\,dt.$$

Таким образом, по лагранжиану $L(t, x, p)$ мы построили естественное отображение I, ставящее каждой кривой в области Ω некоторое число. Такие отображения I называются *функционалами* (функциями, определенными на пространствах кривых).

Замечание. Рассмотрим задачу монополиста. Тогда в качестве лагранжиана можно выбрать прибыль в момент времени t, т.е.

$$p(t)\,\Phi\big(p(t),p'(t)\big)-C\Big(\Phi\big(p(t),p'(t)\big)\Big),$$

а в качестве функционала — прибыль на промежутке времени $[0,T]$. Кривые $x(t)$ в этой модели — это всевозможные выборы политики цен $p(t)$ на промежутке времени $[0,T]$.

Пусть теперь в области Ω выбраны две точки A и B. Рассмотрим все гладкие кривые $x(t)$, начинающиеся в A и заканчивающиеся в B: $x(0)=A$ и $x(T)=B$. Определим деформации каждой такой кривой следующим образом. Пусть $h(t)$ — гладкое отображение из отрезка $[0,T]$ в $\mathbb{R}^n$, такое что $h(0)=h(T)=0$. Тогда для достаточно малых s кривая $x(t)+s\,h(t)$ по-прежнему лежит в Ω и соединяет точки A и B. Рассмотрим функцию $\varphi(s)=I\big(x(t)+s\,h(t)\big)$.

Определение. Кривая $x(t)$ называется *экстремалью функционала* I, если $\varphi'(0)=0$ для любой гладкой $\mathbb{R}^n$-значной функции $h(t)$, такой что $h(0)=h(T)=0$.

Замечание. В задаче монополиста, оптимальная политика цен, при которой прибыль максимальна, является экстремалью функционала, задающего прибыль.

Теорема 19.1 *Кривая $x(t)$ является экстремалью функционала*

$$I\big(x(t)\big)=\int_0^T L\big(t,x(t),x'(t)\big)\,dt$$

если и только если $x(t)$ удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x}\big(t,x(t),x'(t)\big)=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p}\big(t,x(t),x'(t)\big).$$

Доказательство. Вычислим производную функции $\varphi(s)$ при $s=0$.

Имеем

$$\frac{d\varphi}{ds}\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\int_0^T L\big(t, x(t) + s\,h(t), x'(t) + s\,h'(t)\big)\,dt =$$

$$\int_0^T \Big(\frac{\partial L}{\partial x}\cdot h(t) + \frac{\partial L}{\partial p}\cdot h'(t)\Big)\,dt =$$

$$\int_0^T \frac{\partial L}{\partial x}\cdot h(t)\,dt + \int_0^T \left(\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial p}\cdot h(t)\Big) - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial p}\Big)\cdot h(t)\right)dt =$$

$$\int_0^T \Big(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p}\Big)\cdot h(t)\,dt + \frac{\partial L}{\partial p}\cdot h(t)\Big|_0^T = \int_0^T \Big(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p}\Big)\cdot h(t)\,dt,$$

где последнее равенство имеет место в силу того, что $h(0) = h(T) = 0$.

Обозначим через $e(t)$ выражение $\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), x'(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p}(t, x(t), x'(t))$. Если $e(t)$ тождественно равно нулю, то, очевидно, $x(t)$ — экстремаль. Докажем обратное утверждение.

Пусть $x(t)$ — экстремаль. Предположим, что выражение $e(t)$ не равно нулю в некоторой точке $t = t_0$. Тогда, в силу непрерывности, для всех t из некоторой окрестности U точки t_0 вектора $e(t)$ отличны от нуля и отклоняются от вектора $e(t_0)$ на угол, меньший $\pi/2$. Построим гладкую $\mathbb{R}^n$-значную функцию на отрезке $[0, T]$, равную нулю вне окрестности U, и такую что для всех t из U вектора $h(t)$ отличны от нуля и сонаправлены с вектором $e(t_0)$. Очевидно, $e(t)\cdot h(t) \geq 0$ для любого $t \in [0, T]$, и $e(t)\cdot h(t) > 0$ для всех $t \in U$, что противоречит экстремальности $x(t)$. Теорема доказана.

Определение. Система дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), x'(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p}(t, x(t), x'(t)) = 0$$

называется *уравнениями Эйлера–Лагранжа.*

Часто решение уравнений Эйлера–Лагранжа можно свести к решению системы дифференциальных уравнений первого порядка. Рассмотрим важный частный случай.

Теорема 19.2 *Если лагранжиан L явно не зависит от параметра t (времени), то величина $H = p\frac{\partial L}{\partial p} - L$ постоянна вдоль экстремалей.*

Доказательство. Вычислим величину H вдоль экстремали $x(t)$:

$$H(t) = x'(t)\cdot\frac{\partial L}{\partial p}\big(x(t), x'(t)\big) - L\big(x(t), x'(t)\big),$$

и рассмотрим производную функции $H(t)$ по t. Мы должны показать, что эта производная равна нулю. Действительно,

$$\frac{dH(t)}{dt} = x''(t)\cdot\frac{\partial L}{\partial p}\big(x(t),x'(t)\big) + x'(t)\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p}\big(x(t),x'(t)\big) - \\ \frac{\partial L}{\partial x}\big(x(t),x'(t)\big)\cdot x'(t) - \frac{\partial L}{\partial p}\big(x(t),x'(t)\big)\cdot x''(t) = \\ x'(t)\cdot\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p}\big(x(t),x'(t)\big) - \frac{\partial L}{\partial x}\big(x(t),x'(t)\big)\right) = 0,$$

где последнее равенство вытекает из уравнений Эйлера– Лагранжа. Доказательство закончено.

Замечание. Выражение $H = p\frac{\partial L}{\partial p} - L$ называется *энергией*, а предыдущая теорема — *законом сохранения энергии.*

Пример. Пусть тело массы m движется в консервативном поле сил с потенциалом $U(x)$. Обозначим через v скорость этого тела. Определим лагранжиан L так:

$$L(x,v) = \frac{mv^2}{2} - U(x),$$

т.е. положив его равным разности кинетической и потенциальной энергий тела. Уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\frac{d}{dt}v + \frac{dU}{dx} = ma + \frac{dU}{dx} = 0,$$

где a — ускорение тела. Таким образом, поле сил в рассматриваемой системе равно минус градиенту потенциальной энергии.

Полная энергия H равна

$$v\frac{\partial L}{\partial v} - L = mv^2 - \frac{mv^2}{2} + U(x) = \frac{mv^2}{2} + U(x),$$

т.е. сумме потенциальной и кинетической энергий. Так как в нашем случае лагранжиан L явно не зависит от времени, то в системе выполняется закон сохранения энергии: сумма кинетической и потенциальной энергий тела сохраняется во время движения этого тела.

Пример. В модели монополиста лагранжиан также не зависит явно от времени, поэтому выполняется закон сохранения энергии. Таким образом, оптимальную политику цен $p(t)$ можно найти из условия

$$p'(t)\Psi_{p'}\big(p(t),p'(t)\big)\Big(p(t) - C'\Big(\Psi\big(p(t),p'(t)\big)\Big)\Big) - \\ p(t)\Psi\big(p(t),p'(t)\big) + C\Big(\Psi\big(p(t),p'(t)\big)\Big) = \mathrm{const}\,.$$

Лекция 20

Теория производственных функций

В следующих лекциях мы рассмотрим еще ряд оптимизационных задач, возникающих в экономике. Однако для формулировки этих задач нам понадобятся производственные функции, изучению которых и посвящена данная лекция.

Возникновение производственных функций принято относить к 1928 году, когда появилась статья американских ученых: экономиста П. Дугласа и математика Д. Кобба "Теория производства". В этой статье была предпринята попытка определить экспериментальным путем влияние величины затрачиваемого капитала K и труда L на объем $Y(L, K)$ выпускаемой продукции в обрабатывающей промышленности США. Д. Коббом была предложена зависимость между K, L и Y следующего вида:

$$Y(K, L) = A\,K^{\alpha} L^{\beta},$$

где A, α и β — параметры, такие что $A > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ и $\alpha + \beta = 1$. Анализ статистических данных за 1899–1922 года привел к следующим значениям параметров: $A = 1.01$, $\alpha = 0.25$ и $\beta = 0.75$. Сравнение величины $Y(K, L)$ за последующие годы с фактическими значениями показало, что полученная зависимость дает хорошее приближение к действительности.

Перейдем теперь к общему определению производственных функций.

1 Определение производственных функций

Пусть P — некоторый производственный процесс, и $x = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор затрат производственных ресурсов (множество первичных факторов, а также продукты внешнего производства, выступающие как сырье и ресурсы). Будем считать, что все допустимые вектора x образуют некоторое подмножество D в положительном ортанте $\mathbb{R}^n_+$.

Обозначим через $y = (y_1, \dots, y_m)$ набор количественных оценок результатов производства. Такими оценками могут служить, например, физический объем выпуска по каждому из наименований выпускаемой продукции, стоимостные показатели. Пусть $U \subset \mathbb{R}^m_+$ — множество всех допустимых векторов y.

Определение. *Производственной функцией производственного процесса* P будем называть отображение $F : D \to U$, моделирующе выпуск продукции в процессе P.

Отметим, что до сих пор в научной и прикладной экономико–математической литературе в основном изучается лишь случай $m = 1$, т.е. когда отображение F является обычной $\mathbb{R}$-значной функцией: $y = F(x_1, \dots, x_n)$. Всюду в дальнейшем мы будем иметь дело только с таким случаем.

Перечислим основные ограничения на производственные функции, вытекающие из экономико-математических соображений.

1. *Множества D и U являются областями, а F — гладкой функцией.*

2. *Если какой-либо ресурс не тратится, то производство P ничего не выпускает*, т.е. $F(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$ для любого $i = 1, \dots, n$. Иными словами, никакой производственный фактор не допускает замены другим.

3. *При увеличении затрат какого-либо ресурса общий выпуск возрастает*, т.е. если $x \geq x'$, то $F(x) \geq F(x')$. Это свойство эквивалентно условию $\partial F/\partial x_i \geq 0$ для любого $i = 1, \dots, n$.

4. *Условие вогнутости по каждому аргументу*: $\partial^2 F/\partial x_i^2 \leq 0$ для любого $i = 1, \dots, n$. Это условие можно интерпретировать так: при фиксированных всех факторах, кроме i-ого, последовательное увеличение i-ого фактора приводит ко все меньшим приростам производственного продукта. Поясним это условие на примере функции Кобба–Дугласа: $Y = AK^\alpha L^\beta$. Пусть объем основных фондов K остается неизменным, а число трудовых ресурсов L растет. Тогда вновь привлекаемая рабочая сила не обеспечивается дополнительными средствами производства, что и приводит к снижению предельной производительности труда, равной в данном случае $\partial Y/\partial L$ (на самом деле, снижается

также и средняя производительность труда Y/L). С другой стороны, если фиксировать число трудовых ресурсов, а увеличивать основные фонды, то эти фонды будут использоваться все менее эффективно, т.е. предельная фондоотдача $\partial Y/\partial K$ будет убывать (на самом деле, снижается также и средняя фондоотдача труда Y/K).

Замечание. Условия 2–4 мы фактически сформулировали без использования гладкости функции F, что позволяет расширить класс производственных функций, сняв требование гладкости.

Рассмотрим теперь двухфакторную модель, где $x_1 = K$ — объем основных фондов в их стоимостном или количественно выражении, $x_2 = L$ — числовое выражение объема трудовых ресурсов (число рабочих, число человеко–дней и т.д.), а $y = Y$ — объем выпущенной продукции в стоимостном или натуральном выражении. Таким образом, в сделанных предположениях, производственная функция имеет вид:

$$Y = F(K, L)$$

и может быть рассмотрена как обобщение функции Кобба–Дугласа, определенной выше.

Из сделанных выше ограничений на производственные функции вытекает, что F является гладкой функцией, удовлетворяющей следующим условиям:

$$\frac{\partial F}{\partial K} \geq 0,\ \frac{\partial F}{\partial L} \geq 0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} \leq 0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} \leq 0,\ K \geq 0,\ L \geq 0.$$

В действительности, в соответствие с традицией, мы будем предполагать, что производственная функция F в рассматриваемой двухфакторной модели удовлетворяет более сильным условиям, получающимся из сформулированных условий заменой всех нестрогих неравенств на строгие.

Приведем следующие полезные экономико-математические показатели в двухфакторной модели.

Величина $y = Y/L$ называется *средней производительностью труда*, а величина $v = \partial Y/\partial L$ — *предельной производительностью труда*.

Величина $z = Y/K$ называется *средней фондоотдачей*, а величина $r = \partial Y/\partial K$ — *предельной фондоотдачей*.

Величина

$$\alpha = \frac{\partial Y}{\partial K}\frac{K}{Y}$$

называется *коэффициентом эластичности по фондам*. В модели Кобба–Дугласа коэффициент α является коэффициентом эластичности по фондам.

Величина
$$\beta = \frac{\partial Y}{\partial L}\frac{L}{Y}$$
называется *коэффициентом эластичности по труду.* В модели Кобба–Дугласа коэффициент β является коэффициентом эластичности по труду.

2 Неоклассические производственные функции

На производственные функции, помимо описанных выше ограничений, накладывают часто и другие дополнительные ограничения. Основное из них — требование однородности, а именно, предполагается существование такого $\gamma > 0$, что для любого $\lambda > 0$ выполняется
$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^\gamma f(x_1, \dots, x_n).$$
Показатель γ называется *степенью однородности* и характеризует *эффект от расширения масштаба производства*: если $\gamma > 1$ ($\gamma < 1$), то одновременное увеличение всех факторов в λ раз приводит к возрастанию (убыванию) объема выпуска больше чем в λ раз. Отметим, что в модели Кобба–Дугласа $\gamma = 1$, т.е. функция F является однородной степени 1 или *линейно-однородной.*

Рассмотрим интерпретацию производственного процесса P с линейно-однородной производственной функцией в случае двухфакторной модели. Для таких функций выполняется теорема Эйлера, т.е.
$$Y = \frac{\partial F}{\partial K}K + \frac{\partial F}{\partial L}L \tag{20.1}$$
(докажите). Предположим, что общество состоит только из рабочих и капиталистов. Тогда доход Y распадается на две части: доход рабочих и доход капиталистов. Пусть средняя реальная зарплата рабочего равна w. Тогда суммарный доход рабочих равен wL. Теория предельной производительности труда утверждает, что в условиях совершенной конкуренции имеет место следующее соотношение:
$$\frac{\partial F}{\partial L} = w.$$
Отсюда вытекает, что второе слагаемое в формуле (20.1) равно суммарному доходу рабочих, и, значит, первое слагаемое — это суммарный доход капиталистов. Отсюда вытекает, что предельная фондоотдача $\partial F/\partial K$ характеризует доход капиталистов от одной единицы капитала. Последняя величина называется *нормой прибыли.*

Далее, для линейно-однородных производственных функций можно перейти к новым переменным $y = Y/L$ и $k = K/L$. Тогда вместо функции $F(K, L)$, зависящей от двух переменных, можно рассмотреть функцию $f(k)$ от одной переменной, положив

$$f(k) = F(k, 1).$$

Таким образом, $y = f(k)$, так как $F(K/L, 1) = F(K, L)/L = Y/L$ в силу линейной-однородности. Величину K/L называют *фондовооруженностью* (количество фондов, приходящихся на единицу трудовых ресурсов).

Задача 20.1 *Проверить, что основные экономико математические характеристики рассматриваемой модели в терминах функции f имеют вид:*

- *предельная производительность труда v равна $f - kf'$;*
- *предельная фондоотдача r равна f';*
- *коэффициент эластичности по фондам α равен kf'/f (эта формула верна для любой степени однородности);*
- *коэффициент эластичности по труду β равен $1 - kf'/f$ (если степень однородности равна γ, то $\beta = \gamma - kf'/f$).*

Задача 20.2 *Покажите, что если ходя бы один из коэффициентов α или β не зависит от k, то производственная функция является функцией Кобба–Дугласа.*

Определение. Линейно-однородная производственная функция $F(K, L)$ называется *неоклассической*, если функция $f(k) = F(k, 1)$, где $k = K/L$, удовлетворяет следующим условиям:

$$f' > 0, \; f'' < 0, \; f(0) = 0,$$
$$\lim_{k\to\infty} f(k) = \infty, \;\; \lim_{k\to 0} f'(k) = \infty, \;\; \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0.$$

Эти условия можно интерпретировать так: при отсутствии основных фондов выпуск равен нулю; при неограниченном росте фондовооруженности объем выпуска также безгранично возрастает; при возрастании фондовооруженности от нуля происходит стремительный рост объема выпуска, причем при дальнейшем росте фондовооруженности рост объема выпуска сходит на нет.

Задача 20.3 *Проверить, что функция Кобба–Дугласа является неоклассической.*

3 Эластичность замены факторов. CES-функции

Рассмотрим еще несколько важных экономико-математических показателей. Для этого отметим, что существенной особенностью реальных процессов производства является возможность замещения одного фактора другим (например, при отсутствия экскаватора его можно заменить некоторым числом землекопов). Разберем эту возможность на примере двухфакторной модели, заданной, как и выше, производственной функцией $Y = F(K, L)$.

Сформулируем следующую задачу. Предположим, что объем трудовых ресурсов L изменился на ΔL. На какую величину ΔK надо изменить объем K основных фондов, чтобы выпуск Y остался неизменным?

Ясно, что все пары (K, L), для которых выпуск Y одинаков, лежат на одной и той же линии уровня $F(K, L) = \text{const}$ функции F. Если в интересующей нас точке из этой линии уровня производная $\partial F/\partial K$ отлична от нуля, то существует такая функция $K(L)$, что $F\bigl(K(L), L\bigr) = \text{const}$. В этих предположениях, определим *предельную норму замены* S_K *трудовых ресурсов* L *основными фондами* K, положив

$$S_K = -\frac{dK}{dL} = \frac{\partial F/\partial L}{\partial F/\partial K},$$

Если же в этой точке производная $\partial F/\partial L$ отлична от нуля, то существует такая функция $L(K)$, что $F\bigl(K, L(K)\bigr) = \text{const}$. В этих предположениях, определим *предельную норму замены* S_L *основных фондов* K *трудовыми ресурсами* L, положив

$$S_L = -\frac{dL}{dK} = \frac{\partial F/\partial K}{\partial F/\partial L}.$$

Легко видеть, что $S_K S_L = 1$.

Задача 20.4 *Пусть функция F однородна степени γ, $k = K/L$, и $f(k) = F(K/L, 1)$. Показать, что*

$$S_K = \gamma \frac{f(k)}{f'(k)} - k.$$

Задача 20.5 *Показать, что для функции Кобба-Дугласа имеем:*

$$S_K = \frac{\beta}{\alpha} k.$$

(предельная норма замены S_K прямо пропорциональна фондовооруженности). Дать экономическую интерпретацию.

Пусть производственная функция однородна. Тогда определим *эластичность замены* σ_K трудовых ресурсов L основными фондами K, а также *эластичность замены* σ_L *основных фондов* K *трудовыми ресурсами* L, положив

$$\sigma_K^{-1} = \frac{dS_K}{dk}\frac{k}{S_K}, \quad \sigma_L^{-1} = \frac{dS_L}{dk^{-1}}\frac{k^{-1}}{S_L}.$$

Легко видеть, что $\sigma_K = \sigma_L$ (проверьте), поэтому мы будем пользоваться лишь σ_K.

Задача 20.6 *Доказать, что*

$$\sigma_K = -\frac{f'(\gamma f - kf')}{k\big((1-\gamma)(f')^2 + \gamma f f''\big)}.$$

Задача 20.7 *Доказать, что если норма замены S_K линейно однородной функции F не зависит от k, то $F(K,L) = AK+BL$ для некоторых констант A и B.*

Определение. Однородная функция F называется функцией с *постоянной эластичностью замены* или *CES-функцией* (Constant Elastisity of Substitution), если для нее σ_K постоянно.

Задача 20.8 *Пусть $F(K,L)$ — произвольная CES-функция степени однородности γ, и σ_K — ее норма замещения L на K. Положим $\sigma = \sigma_K/\gamma$.*

Показать, что если $\sigma = 1$, то F является функцией Кобба–Дугласа.

Если $\sigma = 0$, то $F = \min\{K^\gamma, L^\gamma\}$.

Если же $\sigma \neq 0$ и $\sigma \neq 1$, то

$$F(K,L) = C_1\big(K^{(\sigma-1)/\sigma} + CL^{(\sigma-1)/\sigma}\big)^{\gamma\sigma/(\sigma-1)},$$

где C и C_1 — некоторые константы.

Перепишем CES-функции в общепринятой форме. Для этого положим $\rho = (1-\sigma)/\sigma$, $\delta = 1/\sqrt{1+C^2}$, и $A = C_1\sqrt{1+C^2}$. Тогда имеем

$$F(K,L) = A\big(\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\big)^{-\gamma/\rho}.$$

4 Модели технического прогресса

В предыдущих разделах мы не учитывали, что со временем производственный процесс, а, значит, и соответствующая производственная функция, может меняться. Основные причины этого изменения связаны с научно-техническим прогрессом.

Рассмотрим однопродуктовую двухфакторную модель и учтем ее временную зависимость. Тогда производственную функцию в общем виде можно записать так:

$$Y(t) = F\big(K(t), L(t), t\big).$$

Будем предполагать, что производственная функция линейно-однородна по K и L:

$$F\big(\lambda K, \lambda L, t\big) = \lambda F\big(K, L, t\big)$$

для любого $\lambda > 0$.

Определение. Говорят, что имеет место *технический прогресс*, если $F\big(K(t), L(t), t\big)$ — монотонно возрастающая функция от t.

Напомним, что выше мы ввели в рассмотрение следующие восемь экономико-математических показателей (а также некоторые другие показатели, получающиеся из этих восьми элементарными алгебраическими операциями):

- $y = Y/L$ — средняя производительность труда;
- $k = K/L$ — фондовооруженность;
- $v = \partial Y/\partial L$ — предельная производительность труда;
- $r = \partial Y/\partial K$ — предельная фондоотдача;
- $\alpha = \frac{\partial Y}{\partial K}\frac{R}{Y}$ — коэффициент эластичности по фондам;
- $\beta = \frac{\partial Y}{\partial L}\frac{L}{Y}$ — коэффициент эластичности по труду;
- $S_K = \frac{\partial F/\partial L}{\partial F/\partial K}$ — предельную норму замены трудовых ресурсов основными фондами (а также $S_L = 1/S_K$ — предельную норму замены основных фондов трудовыми ресурсами); норму S_K будем обозначать через S;
- $\sigma_K = \big(\frac{dS_K}{dk}\frac{k}{S_K}\big)^{-1}$ — эластичность замены трудовых ресурсов основными фондами (а также $\sigma_L = \sigma_K$ эластичность замены основных фондов трудовыми ресурсами). Эластичность σ_K будем обозначать через σ.

Как правило, описание гипотезы относительно характера научно-технического прогресса формулируются в терминах соотношений на вышеперечисленные показатели. Предполагается, что хотя эти показатели изменяются, но однако на них имеются некоторые соотношения, которые остаются неизменными.

Определение. Пусть $\Phi(y,k,v,r,\alpha,\beta,S_K,\sigma_K)$ — некоторая функция. Прогресс называется Φ-нейтральным, если $\Phi(y,k,v,r,\alpha,\beta,S_K,\sigma_K) = 0$.

Рассмотрим наиболее популярные типы прогресса.

1) Технический прогресс называется *нейтральным по Хиксу*, если предельная норма замены S является не зависящей от времени функцией $\varphi(k)$ фондовооруженности k: $S = \varphi(k)$. Иными словами, имеет место следующее дифференциальное уравнение, записанное в терминах функции f:

$$\frac{f}{f'} - k = \varphi(k).$$

Общее решение этого уравнения имеет вид $y = A(t)f_0(k)$ для некоторых функций $A(t)$ и $f_0(k)$. Вспоминая про условие линейной однородности, получаем, что соответствующая производственная функция имеет вид $F(K,L,t) = A(t)F_0(K,L)$, и, значит, $A(t)$ — монотонно возрастающая функция.

2) Технический прогресс называется *нейтральным по Харроду*, если предельная фондоотдача r является не зависящей от времени функцией $\psi(z)$ средней фондоотдачи $z = Y/K = y/k$: $r = \psi(z)$. Эта ситуация описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$f' = \psi(f/k).$$

Можно показать (сделайте это), что общее решение этого уравнения имеет вид $f = A(t)f_0\big(k/A(t)\big)$, поэтому общий вид соответствующий производственной функции таков: $F(K,L,t) = F_0\big(K, A(t)L\big)$.

3) Технический прогресс называется *нейтральным по Солоу*, если предельная производительность труда v является не зависящей от времени функцией средней производительности y. Аналогичные рассмотрения показывают, что общий вид производственной функции таков: $F(K,L,t) = F_0\big(A(t)K, L\big)$.

Лекция 21

Моделирование процессов распределения капиталовложений

В данной лекции мы разберем одно из приложений теории производственных функций на примере предложенной Ф. Рамсеем модели, описывающей взаимодействие процессов производства и потребления.

Мы будем опять предполагать, что имеется однопродуктовая двухфакторная модель, в которой переменная Y описывает объем выпуска, переменные K и L — количества основных фондов и трудовых ресурсов соответственно, а F — это производственная функция. Как и при исследовании моделей технического прогресса, будем учитывать зависимость параметров производственного процесса от времени $t \in [0, T]$.

Первое предположение рассматриваемой модели состоит в том, что в каждый момент времени t весь выпуск $Y(t)$ делится на две части: одна из них, обозначаемая через $C(t)$, идет на потребление, а другая, $I(t)$, — на развитие производства (т.е. $I(t)$ — это инвестиции или капиталовложения). Обозначим через $s(t)$ ту часть выпуска $Y(t)$, которая идет на инвестиции. Таким образом,

$$Y(t) = C(t) + I(t) = \big(1 - s(t)\big)Y(t) + s(t)Y(t), \tag{21.1}$$

и $0 \le s(t) \le 1$.

Определение. Величина $c(t) = C(t)/L(t)$ называется *удельным потреблением*.

Наша цель состоит в выборе оптимальной функции $s(t)$. В качестве критерия оптимальности рассмотрим задачу максимизации общего удельного потребления с учетом дисконтирования. Предполагая, что дисконтирование задается функцией $e^{-\delta t}$, где $\delta > 0$ — некоторая константа, приходим к следующему вариационному функционалу, который и является *удельным потреблением с учетом дисконтирования на промежутке* $[0, T]$:

$$\int_0^T \frac{C(t)}{L(t)} e^{-\delta t}\, dt. \tag{21.2}$$

Сформулируем теперь основные ограничения.

Обозначим через $\mu > 0$ скорость амортизации (т.е. μ — это та часть основных фондов, которая выбывает из строя за единицу времени). Таким образом, прирост $K'(t)$ основных фондов за единицу времени равен разности между вкладом от инвестиций, т.е. величиной $I(t)$, и ущербом от износа, т.е. величиной $\mu K(t)$. Предполагая, что на рассматриваемом промежутке времени технологических изменений производственной функции не происходит (т.е. F явно от t не зависит), а также что трудовые ресурсы находятся на постоянном уровне (т.е. L от t не зависит), приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$K'(t) = I(t) - \mu K(t) = s(t) F\big(K(t), L\big) - \mu K(t). \tag{21.3}$$

Второе ограничение называется "выбор экономического горизонта" и состоит в том, чтобы в конечный момент времени T фондовооруженность не упала ниже некоторой положительной константы k_T, т.е.

$$\frac{K(t)}{L} \geq k_T > 0. \tag{21.4}$$

Актуальность этого условия заключается в том, чтобы за пределами рассматриваемого периода времени обеспечить определенный экономический потенциал.

Таким образом, мы приходим к задаче поиска функции $s(t)$, максимизирующей функционал (21.2) при ограничениях (21.1), (21.3) и (21.4).

Исследуем эту задачу на примере линейно-однородной производственной функции $F(K, L)$ в предположении, что функция $f(k) = F(k, 1)$ является неоклассической. Перейдем к новой переменной — фондовооруженности $k = K/L$. Тогда общее удельное потребление перепишется так:

$$\int_0^T \big(1 - s(t)\big) f\big(k(t)\big) e^{-\delta t}\, dt, \tag{21.5}$$

а ограничения имеют вид:

$$
\begin{gathered}
k'(t) = s(t) f\big(k(t)\big) - \mu k(t), \\
0 \le s(t) \le 1,\ k(0) = k_0 > 0,\ k(T) \ge k_T > 0.
\end{gathered} \tag{21.6}
$$

Перепишем эту задачу в общем виде. Для этого обозначим через $L(k,s,t)$ функцию $(1-s)f(k)e^{-\delta t}$, а через $\varphi(k,s,t)$ функцию $sf(k) - \mu k$ (в нашем случае φ явно не зависит от t). Кроме того, пусть U обозначает отрезок $[0,1]$ (область значений функции s), а M — множество всех k, таких что $k \ge k_T$. В соответствии с традицией, переменную s будем называть *управлением*, а переменную k — *фазовой переменной*. Итак, получаем следующую задачу:

$$
\begin{gathered}
\int_0^T L(k,s,t)\,dt \to \max, \\
k' = \varphi(k,s,t), \\
s : [0,T] \to U,\ k(0) = k_0,\ k(T) \in M.
\end{gathered}
$$

Иными словами, при каждом заданном управлении $s(t)$ мы находим из дифференциального уравнения фазовую кривую $k(t)$, удовлетворяющую начальному условию $k(0) = k_0$. Проверяем, выполняется ли для этой кривой второе граничное условие $k(T) \in M$, и если да, то вычисляем значение вариационного функционала. Наша задача: найти такое управление $s(t)$, чтобы функционал принял максимально возможное значение.

Для решения этой задачи мы воспользуемся принципом максимума Понтрягина. Однако, прежде чем напомнить этот принцип, рассмотрим более простую задачу. Считая управление $s(t)$ постоянным, таким что $s(t) = s$, где $0 < s < 1$, и рассматривая стационарное решение $k(t) = k_s$ уравнения (21.6) при заданном s, найдем такое s, при котором функционал (21.5) максимален.

Легко видеть, что стационарное решение $k(t) = k_s$ уравнения (21.6) существует, единственно и k_s является единственным корнем уравнения $sf(k) - \mu k = 0$ (все эти факты следуют из неоклассичности функции f, докажите).

Далее, ясно, что в сделанных предположениях условие максимальности функционала (21.5) эквивалентно максимальности выражения $(1-s)f(k_s)$.

Задача 21.1 *Докажите, что выражение* $(1-s)f(k_s)$ *максимально если и только если* $f'(k_s) = \mu$.

Из предыдущей задачи получаем, что если s^* — такое s, при котором выражение $(1-s)f(k_s)$ максимально, а k^* — это соответствующее k_{s^*}, то

$$s^* = \frac{\mu s^*}{f(k^*)} = \frac{f'(k^*)k^*}{f(k^*)}.$$

Дадим интерпретацию последнего уравнения. Для этого вспомним, что $\partial F/\partial K = f'(k)$, откуда, положив $k^* = K^*/L$, получаем

$$\frac{\partial F(K^*, L)}{\partial K} K^* = s^* F(K^*, L).$$

Напомним, что величина $\partial F/\partial K$ для линейно однородной функции интерпретируется как норма прибыли с капитала, поэтому величина $K^* \partial F/\partial K$ — это доход от капитала. Напомним также, что величина $s^* F(K^*, L)$ — это величина инвестиций в основные фонды. Таким образом, мы получаем *золотое правило накопление*, сформулированное Е. Фелпсом: *инвестиции в основные фонды должны равняться доходу, получаемому от капитала.*

Перейдем теперь к описанию принципа максимума Понтрягина.

1 Принцип максимума Понтрягина

Пусть состояние некоторого объекта задается n-мерным вектором x. Таким образом, множество всех состояний x образует n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$, называемое *фазовым пространством.* Предположим, что изменение состояния x зависит как от времени t, так и от некоторых величин u_i, образующих m-мерный вектор u, называемый *управлением.* Будем считать, что множество всех *допустимых управлений* образует некоторую замкнутую ограниченную область $U \subset \mathbb{R}^m$.

Пусть закон изменения состояния x задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, зависящих от параметра u:

$$x_i' = f_i(x, u, t), \ i = 1, \dots, n, \tag{21.7}$$

где функции f_i предполагаются непрерывными по совокупности переменных и непрерывно-дифференцируемыми по переменным x_i и t.

Если задано некоторое допустимое управление $u(t)$ (т.е. при любом t точка $u(t)$ лежит в U), то система (21.7) вместе с начальным условием $x(0) = x_0$ задает единственную траекторию $x(t)$, являющуюся решением этой системы. Будем говорить, что такое $x(t)$ является выходящим из точки x_0 решением уравнения (21.7), *соответствующим управлению* $u(t)$.

Пусть x_T — некоторая точка из фазового пространства $\mathbb{R}^n$, и M — подмножество этого фазового пространства, состоящее из всех $x \in \mathbb{R}^n$, таких что $x \geq x_T$. Будем говорить, что *допустимое управление переводит точку x_0 на множество M*, если для выходящего из x_0 решения $x(t)$ уравнения (21.7), соответствующего управлению $u(t)$, конечная точка $x(T)$ лежит в M, т.е. если $x(T) \geq x_T$. Обозначим через $\mathcal{U}(x_0, M)$ множество всех таких управлений.

Пусть $L(x, u, t)$ — непрерывно-дифференцируемая функция переменных x, u и t. Рассмотрим вариационный функционал $F\big(x(t), u(t)\big)$, ставящий в соответствие каждой фазовой кривой $x(t)$ и каждому допустимому управлению $u(t)$ число

$$F\big(x(t), u(t)\big) = \int_0^T L\big(x(t), u(t), t\big)\, dt. \tag{21.8}$$

Если в качестве $x(t)$ выбирается выходящее из x_0 решение уравнения (21.7), соответствующее $u(t)$, то функционал $F\big(x(t), u(t)\big)$ будем обозначать через $F\big(x_0, u(t)\big)$.

Возникает следующая задача: *найти допустимое управление $u(t)$, максимизирующее функционал $F\big(x_0, u(t)\big)$, ограниченный на $\mathcal{U}(x_0, M)$.* Такое управление будем называть *оптимальным.*

Пример. Задача о распределении капиталовложений, рассмотренная в предыдущем пункте, является примером только что сформулированной задачи. Действительно, достаточно положить $x = k$, $x_0 = k_0$, $u = s$, $L(x, u, t) = L(k, s, t) = (1 - s)f(k)e^{-\delta t}$, $x_T = k_T$, и, значит, $M = \{k \in \mathbb{R} \mid k \geq k_T\}$. Тогда задача состоит в поиске оптимальной функции $s(t)$, отвечающей за распределение капиталовложений.

Приведем необходимое условие оптимальности управления $u(t)$, называемое *принципом максимума Понтрягина.*

Рассмотрим функцию

$$\mathcal{H}(x, p, u, t) = L(x, u, t) + p \cdot f(x, u, t),$$

где переменные $p \in \mathbb{R}^n$ называются *двойственными.* Функция $\mathcal{H}$ называется *гамильтонианом.*

Отметим следующие очевидное тождество:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = f(x, u, t),$$

откуда

$$x'(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\big(x(t), p, u(t), t\big) \tag{21.9}$$

(в действительности, правая часть уравнения 21.9 от p не зависит). Таким образом, если $x(t)$ — решение системы (21.9) на отрезке $[0,T]$ для некоторого допустимого управления $u(t)$, причем $x(0)=x_0$, то $x(t)$ является выходящим из точки x_0 решением уравнения (21.7), соответствующим управлению $u(t)$.

Рассмотрим теперь систему

$$p'(t) = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}\big(x(t),p(t),u(t),t\big). \tag{21.10}$$

Эта система называется *сопряженной.*

По гамильтониану $\mathcal{H}(x,p,u,t)$ построим функцию $\mathcal{M}(x,p,t)$, не зависящую от управления u, следующим образом:

$$\mathcal{M}(x,p,t) = \max_{u\in U}\mathcal{H}(x,p,u,t).$$

Теорема 21.1 *Пусть управление $u(t)$, переводящее точку x_0 на множество M, оптимально, и $x(t)$ — соответствующая $u(t)$ фазовая кривая. Тогда существует такое непрерывное кусочно непрерывно дифференцируемое решение $p(t)$ сопряженной системы*

$$p'(t) = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}\big(x(t),p(t),u(t),t\big),$$

для которого $\mathcal{H}\big(x(t),p(t),u(t),t\big) = \mathcal{M}\big(x(t),p(t),t\big)$. Иными словами, решение $p(t)$ максимизирует при каждом t функцию $\mathcal{H}\big(x(t),p,u(t),t\big)$. Более того, выполняется следующее условие:

$$p(T)\cdot\big(x(T)-x_T\big)=0.$$

Определение. Система уравнений вида

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p} \\ p' &= -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} \end{aligned} \tag{21.11}$$

называется *гамильтоновой.*

2 Применение принципа максимума Понтрягина к исследованию задачи об оптимальном распределении капиталовложений

Применим теперь принцип максимума Понтрягина к исследованию задачи об оптимальном распределении капиталовложений. Для этого выпишем гамильтониан. По определению, гамильтониан $\mathcal{H}(k,p,s,t)$ имеет вид

$$\mathcal{H}(k,p,s,t) = (1-s)f(k)e^{-\delta t} + p\big(sf(k) - \mu k\big).$$

Выпишем сопряженную систему. Имеем

$$p'(t) = -(1-s)f'(k)e^{-\delta t} - p\big(sf'(k) - \mu\big). \tag{21.12}$$

Выпишем теперь функцию $\mathcal{M}(k,p,t)$:

$$\mathcal{M}(k,s,t) = \max_{s\in[0,1]}\Big[(1-s)f(k)e^{-\delta t} + p\big(sf(k) - \mu k\big)\Big] = \\ c + f(k)e^{-\delta t}\max_{s\in[0,1]}\Big[s\big(pe^{\delta t} - 1\big)\Big],$$

где величина c не зависит от s.

По теореме 21.1, если функция $s(t)$ оптимальна, то существует решение $p(t)$ сопряженной системы, в правую часть которой подставлена вместо s функция $s(t)$, такое что при каждом t выполняются следующие условия:

$$s(t)\big(p(t)e^{\delta t} - 1\big) = \max_{s\in[0,1]} s\big(p(t)e^{\delta t} - 1\big) \tag{21.13}$$

и

$$p(T)\big(k(T) - k_T\big) = 0. \tag{21.14}$$

Обозначим через $q(t)$ величину $p(t)e^{\delta t}$. Тогда, очевидно, из условия (21.13) вытекает, что

$$s(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } q(t) > 0, \\ 0, & \text{если } q(t) < 0, \\ 0 \le s(t) \le 1, & \text{если } q(t) = 0. \end{cases} \tag{21.15}$$

Из уравнения (21.12) вытекает, что $q(t)$ удовлетворяет следующему уравнению

$$q'(t) = p'(t)e^{\delta t} + \delta p(t)e^{\delta t} = \\ \Big(-(1-s)f'(k)e^{-\delta t} - p(t)\big(sf'(k) - \mu\big)\Big)e^{\delta t} + \delta p(t)e^{\delta t} = \\ -(1-s)f'(k) + q(t)\big(\mu + \delta - sf'(k)\big),$$

т.е.

$$q'(t) = -(1-s)f'(k) + q(t)\big(\mu + \delta - sf'(k)\big). \tag{21.16}$$

Дальнейший анализ можно проводить так. Для каждой пары начальных условий $k(t) = k_t$ и $q(t) = q_t$, в зависимости от того, больше q_t чем 1 или меньше, мы полагаем, в соответствии с условием (21.15), функцию s равной или 0, или 1, и разрешаем уравнение (21.6) относительно k при начальном условии $k(t) = k_t$. Подставляя полученную функцию k в уравнение (21.16), находим функцию q при начальном условии $q(t) = q_t$. Полученное решение q продолжаем до тех пор, пока q не станет равным 1. Таким образом, мы получаем семейство кривых на плоскости (k, q), определенных вне прямой $q = 1$. Так как, по теореме 21.1, для оптимального $s(t)$ функция $q(t)$ является непрерывной, а функция $k(t)$ также непрерывна, до мы доопределяем полученные кривые на прямой $q = 1$ из соображений непрерывности. Точнее говоря, мы склеиваем решения, имеющие одинаковые пределы при $q \to 1$ сверху и снизу (вообще говоря, такая склейка определена неоднозначно, так как некоторые точки прямой $q = 1$ могут быть предельными более чем для двух кривых). Остается выбрать те решения, для которых выполняется ограничение (21.14).

Задача 21.2 *Проанализировать рассматриваемую модель распределения капиталовложений с помощью принципа максимума Понтрягина.*

Задача 21.3 *Проанализировать модель распределения капиталовложений в случае, когда* $f(k) = k^\alpha$, $0 < \alpha < 1$.

Задача 21.4 *Проанализировать модель распределения капиталовложений для производственной функции* $F(K, L, t) = A(t)F_0(K, L)$, *соответствующей техническому прогрессу, нейтральному по Хиксу, где* $A(t) = A_0 e^{-\rho t}$ *и* $L(t) = L_0 e^{nt}$.

Лекция 22

Экономико-математические модели с неопределенными факторами. Имитационные модели

В предыдущих лекциях мы рассмотрели много разных математических моделей экономических систем. Большинство из них можно представить в следующем виде. Пусть $x \in X$ — входные параметры системы. Требуется найти максимум некоторой целевой функции $W(x)$. Имеется богатый набор методов решения таких задач (линейное и математическое программирование, метод Лагранжа, принцип максимума Понтрягина и др.) Однако в реальных системах имеются многочисленные случайные факторы, которые могут сильно повлиять на систему и привести к существенному отклонению ее поведения от вычисленного решения. Математические модели, учитывающие описанную возможность, называются моделями *с неопределенными факторами.*

Идея состоит в учете зависимости целевой функции $W(x)$ еще и от случайного параметра $y \in Y$, т.е. теперь целевая функция имеет вид $W(x, y)$. Мы разберем две задачи такого типа: модель со случайными факторами и модель с неполной информацией.

1 Модель со случайными факторами

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностное пространство, где Ω — пространство элементарных исходов, $\mathcal{A}$ — это σ-алгебра на Ω (т.е. семейство подмножеств в Ω, содержащее Ω и замкнутое относительно взятия бесконечных объединений, бесконечных пересечений и дополнения), и P — вероятностная мера. Пусть ξ — некоторая случайная величина, т.е. измеримая функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, определенная на пространстве событий Ω.

Напомним некоторые определения из теории вероятностей. *Функцией распределения* случайной величины ξ называется функция на вещественной прямой $\mathbb{R}$, определенная так:

$$F_\xi(t) = P(\xi \le t).$$

Функция распределения, очевидно, является монотонно возрастающей, неотрицательной и

$$\lim_{t\to-\infty} F_\xi(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} F_\xi(t) = 1.$$

Если существует неотрицательная функция $f_\xi(t)$, такая что

$$F_\xi(t) = \int_{-\infty}^{t} f_\xi(\tau)\, d\tau,$$

то функция $f_\xi(t)$ называется *плотностью* распределения $F_\xi(t)$.

Математическим ожиданием $M\xi$ случайной величины ξ с плотностью распределения f_ξ называется величина

$$\mathbf{M}\xi = \int_\Omega \xi\, dP = \int_{-\infty}^{\infty} t\, f_\xi(t)\, dt,$$

k-ым моментом — величина $\mathbf{M}\xi^k$, а дисперсией — величина

$$\sigma_\xi^2 = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2.$$

Во введенных обозначениях, L_k-норма случайной величины $\xi(\omega)$ задается следующей формулой

$$L_k(\xi) = \left(\int_\Omega \xi^k\, dP\right)^{\frac{1}{k}} = \left(\mathbf{M}\xi^k\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Пусть $W(x, y)$ — целевая функция, и случайные возмущения в системе задаются случайной величиной $y = \xi(\omega)$. Таким образом, мы получаем функцию $W\big(x, \xi(\omega)\big)$, определенную на декартовом произведении множества X и пространства событий Ω. Пусть $\Phi(\omega)$ — функционал, определенный на пространстве случайных величин нашего вероятностного пространства (например, математическое ожидание). Положим $\varphi(x) = \Phi\Big(W\big(x, \xi(\omega)\big)\Big)$. Тогда Φ-*критерием* выбора оптимального набора x^* входных параметров системы назовем условие того, что в точке x^* функция $\varphi(x)$ принимает максимальное значение.

Наиболее популярные Φ-критерии получаются, если в качестве функционала Φ взять или k-ый момент, в частности, математическое ожидание, или дисперсию, или L_k-норму. Еще одна возможность: выбрать некоторую константу β и рассмотреть следующий функционал:

$$\Phi(\xi) = P\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \geq \beta\}.$$

Таким образом, мы имеем многокритериальный подход к решению задачи.

2 Модели с неполной информацией

Пусть теперь y — это элемент пространства событий Ω: $y = \omega$. Иными словами, параметр y можно рассматривать как неопределенный фактор, влияющий на вид целевой функции. Рассмотрим классические критерии поиска оптимального x^*.

1. *Критерий гарантированного решения* (Вальд). Положим

$$W'(x) = \min_{y \in \Omega} W(x, y).$$

В качестве оптимального x^* выберем точку, в которой достигается максимум функции $W'(x)$. Этот метод называются еще *методом пессимиста*, так как при каждом фиксированном x мы выбираем "наихудшее событие" (когда целевая функция принимает наименьшее значение). Итак, x^* находится из условия:

$$W'(x^*) = \max_{x \in X} W'(x) = \max_{x \in X} \min_{y \in \Omega} W(x, y).$$

2. *Решение оптимиста.* Положим

$$W''(x) = \max_{y \in \Omega} W(x, y).$$

В качестве оптимального x^* выберем точку, в которой достигается максимум функции $W''(x)$. Название этого метода объясняется тем, что при каждом фиксированном x мы выбираем "наилучшее событие" (когда целевая функция принимает наибольшее значение). Итак, x^* находится из условия:

$$W''(x^*) = \max_{x\in X} W''(x) = \max_{x\in X}\max_{y\in\Omega} W(x,y).$$

3. *Критерий Гурвица.* Этот критерий является обобщением двух предыдущих. Выберем произвольное $\alpha \in [0,1]$, и рассмотрим функцию

$$W_\alpha(x) = (1-\alpha)W'(x) + \alpha W''(x).$$

Определяем x^* из условия

$$W_\alpha(x^*) = \max_{x\in X} W_\alpha(x).$$

Ясно, что при $\alpha = 0$ получаем решение пессимиста, а при $\alpha = 1$ — решение оптимиста.

4. *Критерий Сэвиджа.* Определим функцию $V(y)$ на пространстве событий Ω, положив $V(y) = \max_{x\in X} W(x,y)$. Рассмотрим функцию потерь или функцию сожаления:

$$B(x,y) = V(y) - W(x,y) = \max_{x\in X} W(x,y) - W(x,y).$$

Найдем оптимальный x^* исходя из критерия Вальда (решения пессимиста) для функции $B(x,y)$. В явном виде, x^* определяется из следующего условия:

$$\min_{y\in\Omega}\Big(\max_{x\in X}\big(W(x,y)\big) - W(x^*,y)\Big) = \max_{x\in X}\min_{y\in\Omega}\Big(\max_{x\in X}\big(W(x,y)\big) - W(x,y)\Big).$$

5. *Критерий Байеса–Лапласа.* Этот критерий состоит в сведении модели с неполной информацией к модели с неопределенными факторами. В качестве y рассматриваем случайную величину $y = \xi(\omega)$ и применяем критерии предыдущего раздела.

3 Имитационные модели

Во многих реальных экономико-математических моделях соотношения, связывающие разные ее характеристики, оказываются достаточно сложными, что приводит к невозможности найти явное решение, описывающее поведение системы. Кроме того, часто многие параметры не могут быть вычислены точно из-за присущих реальной ситуации случайных возмущений. Все вышесказанное приводит к необходимости использования возможностей вычислительной техники. Реализованные на компьютере численные аппроксимации, полученные из строгих математических моделей, называются *имитационными моделями*.

Имитационные модели можно условно разделить на *пассивные* и *активные*. При построении пассивных моделей проводятся эксперименты, состоящие в съеме и обработке данных. Вмешательство в работу модели не происходит. Примером построения таких моделей является сбор статистической информации и ее последующая обработка статистическими методами, например, вычисление математических ожиданий, дисперсии, различных моментов и т.д.

Активное моделирование состоит в проведении численных экспериментов при разных параметрах (и даже при разных моделях) и отборе тех параметров (моделей), которые наиболее адекватны имеющейся конкретной ситуации. В этом случае мы уже активно вмешиваемся в модель. Например, изучая зависимость выпуска товаров от количеств первичных ресурсов, мы можем моделировать имеющиеся в наличии ресурсы случайными величинами с различными распределениями, а функцию, задающую выпуск товаров, определять как некоторый случайный процесс. Реализуя все имеющиеся случайные величины на компьютере с использованием, например, метода псевдослучайных чисел, мы получим имитационную модель. Сравнивая эту модель с действительностью и варьируя функции распределения, добиваемся того, чтобы результаты численного эксперимента наиболее хорошо согласовались с реальными данными.

Приведем основные этапы построения имитационной модели.

1. *Соотношения, связывающие входные величины с выходными, приводятся к алгоритмическому виду.* Например, если соотношения задаются дифференциальными уравнениями, то эти уравнения заменяются на какой-либо численный метод их интегрирования.

2. *Составляется компьютерная программа, реализующая указанный выше алгоритм.*

3. *Проводится компьютерный эксперимент.* В результате такого эксперимента вычисляются выходные величины при заданных входных, исследуется изменение выходных величин при изменении входных и т.д. Подчеркнем, что данный эксперимент проводится не с реальной системой, а с ее *моделью*, поэтому он, позволяя рассмотреть большие возможности изменения параметров, является более гибким, чем эксперимент с реальной системой.

4 Модель Нейлора

Рассмотрим один из примеров имитационных моделей, разработанный Нейлором для описания влияния правительственной финансовой политики на функционирование экономики.

Данная модель работает в дискретном времени t. Для ее описания используются следующие переменные, измеряемые в денежном исчислении:

C_t — личное потребление;

W_t^p — фонд заработной платы в частном секторе;

P_t — суммарная прибыль государства

I_t — государственные инвестиции;

K_t — основной капитал;

Y_t — национальный доход.

Динамика этих переменных зависит от следующих управляющих факторов:

W_t — правительственный фонд заработной платы;

G_t — правительственные заказы;

T_t — налог на деловую активность.

Описание модели состоит из описания *балансовых соотношений* и *уравнений динамики*.

Балансовые соотношения

1. *Уравнение национального дохода*:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t - T_t.$$

2. *Уравнение прибыли*:

$$P_t = Y_t - (W_t + W_t^p).$$

3. *Уравнение изменения капитала*:

$$K_t = K_{t-1} + I_t.$$

Уравнения динамики

1. *Динамика потребления*:

$$C_t = a_1 + a_2(W_t^p + W_t) + a_3 P_t + a_4 P_{t-1} + \xi_t^{(1)}.$$

2. *Динамика инвестиций*:

$$I_t = b_1 + b_2 P_t + b_3 P_{t-1} + b_4 K_{t-1} + \xi_t^{(2)}.$$

3. *Динамика спроса на рабочую силу*:

$$W_t^p = c_1 + c_2(Y_t + T_t - W_t) + c_3(Y_{t-1} + T_{t-1} - W_{t-1}) + c_4 t + \xi_t^{(3)}.$$

Здесь a_i, b_i и c_i — некоторые константы, а $\xi_t^{(i)}$ — случайные величины, моделирующие все случайности, возникающие при функционировании реальных систем. В данной модели случайный вектор

$$\xi = \left(\xi_t^{(1)}, \xi_t^{(2)}, \xi_t^{(3)}\right)$$

предполагается нормально распределенным, а последовательность $\{\xi_t\}_{t\geq 0}$ состоящей из независимых одинаково распределенных векторов.

Замечание. Предположение о линейности уравнений динамики является достаточно грубым приближением и не дает возможности использовать модель Нейлора для долговременного прогноза. Тем не менее, в условиях стабильности экономической структуры кратковременный прогноз с помощью данной модели возможен.

Замечание. Важным этапом составления модели является ее *калибровка*, т.е. определение коэффициентов a_i, b_i и c_i, а также ковариационной матрицы для величин $\xi_t^{(i)}$. Такая калибровка может быть проведена на основе имеющихся данных по прошлым годам с использованием метода наименьших квадратов.

Замечание. При численном моделировании неизбежно возникают погрешности. Это связано как с использованием приближенным методов решения уравнений, так и с ограниченными по точности вычислительными возможностями компьютера. Поэтому для того, чтобы приближенная модель адекватно отражала качественные явления из моделируемой реальной системы, необходимо, чтобы искомое решение было устойчиво при малых возмущениях параметров системы. Существует много разных определений устойчивости, описанию которых посвящен следующий раздел лекции.

5 Типы устойчивости

Рассмотрим основные типы устойчивости, встречающиеся в экономике, на примере решений обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{x} = F(x)$. Пусть $\varphi(t)$ — решение этого уравнения с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$, продолжающееся на всю полуось $[t_0, \infty)$. Будем говорить, что решение $\varphi(t)$ *устойчиво*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $\psi(t)$ с начальным условием $\psi(t_0)$, таким что $\|x_0 - \psi(t_0)\| < \delta$, продолжается на $[t_0, \infty)$ и для него выполняется следующее условие: $\|\varphi(t) - \psi(t)\| < \varepsilon$ для любого t. Иными словами, устойчивость — это равномерная на интервале $[t_0, \infty)$ сходимость решений $\psi(t)$, начальные условия которых стремятся к x_0, к решению $v(t)$.

Если $\varphi(t)$ — устойчивое стационарное решение, т.е. $\varphi(t) = \mathrm{const}$, то $\varphi(t)$ называется *устойчивым по Ляпунову.*

1. Пусть $\varphi(t) = \mathrm{const}$ — устойчивое стационарное решение. Тогда оно называется *асимптотически устойчивым*, если $\varphi(t) - \psi(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

2. Пусть теперь $\varphi(t)$ — произвольное устойчивое решение. Мы говорим, что $\varphi(t)$ *сильно абсолютно устойчиво*, если $\varphi(t) - \psi(t) \to 0$ при $t \to \infty$, и *слабо абсолютно устойчиво*, если $\varphi(t) - \psi(t)$ — ограниченная функция при t, больших некоторого t'.

3. Будем говорить, что устойчивое $\varphi(t)$ *сильно относительно устойчиво*, если $\varphi(t)/\psi(t) \to 1$ при $t \to \infty$, и *слабо относительно устойчиво*, если $\varphi(t)/\psi(t)$ — ограниченная функция при t, больших некоторого t'.

4. Будем говорить, что $\varphi(t)$ *сильно логарифмически устойчиво*, если $\ln\varphi(t)/\ln\psi(t) \to 1$ при $t \to \infty$, и *слабо логарифмически устойчиво*, если $\ln\varphi(t)/\ln\psi(t)$ — ограниченная функция при t, больших некоторого t'.

Приведем теперь теорему, являющуюся достаточным условием асимптотической устойчивости. Пусть $\varphi(t) = x_0$ является стационарным решением, т.е. $F(x_0) = 0$. Наряду с уравнением $\dot{x} = F(x)$ рассмотрим линеаризованное уравнение $\dot{x} = A\,(x - x_0)$, где $A = dF(x_0)$ — дифференциал отображения F в точке x_0.

Теорема 22.1 *Если все собственные числа λ оператора A лежат в левой полуплоскости, т.е.* $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, *то положение равновесия $\varphi(t) = x_0$ уравнения $\dot{x} = F(x)$ является асимптотически устойчивым.*

Приведем пример исследования устойчивости положении равновесия в неоклассической модели роста Солоу.

6 Неоклассическая модель роста Солоу

Пусть L — количество трудовых ресурсов, K — капитал и $F(K, L)$ — производственная функция. Рассмотрим экзогенную модель, задающую динамику параметров L и K с помощью следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{L} &= nL \\ \dot{K} &= sF(K, L), \end{cases} \tag{22.1}$$

где s — инвестируемая доля производства.

Будем предполагать, что производственная функция $F(K, L)$ однородна степени 1, а функция $f(k) = F(1, k)$, где $k = K/L$ — фондовооруженность, удовлетворяет следующим условиям:

$$f(0) = 0,\ f'(k) > 0,\ f''(k) < 0,\ \lim_{k\to\infty} f'(k) = a,\ \lim_{k\to 0} f'(k) = b,\ b > a.$$

Обозначим через I интервал (a, b) (вообще говоря, b может равняться бесконечности).

Используя уравнения (22.1), вычислим производную $\dot{k}$ фондовооруженности k. Имеем

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - k\frac{\dot{L}}{L} = \frac{sF(K, L)}{L} - k\frac{nL}{L} = sf(k) - nk. \tag{22.2}$$

Таким образом, стационарные решения уравнения (22.2) определяются из условия $f(k)/k = n/s$.

Теорема 22.2 *В сделанных выше предположениях, если $n/s \in I$, то существует и единственно положительное k^*, являющееся состоянием равновесия для уравнения (22.2). Это равновесие асимптотически устойчиво. Более того, любые два решения $L_i(t)$, $K_i(t)$ слабо относительно устойчивы, т.е. при достаточно больших t:*

$$\left|\frac{L_1(t)}{L_2(t)}\right| < c_1, \quad \left|\frac{K_1(t)}{K_2(t)}\right| < c_2,$$

где c_i — некоторые положительные константы.