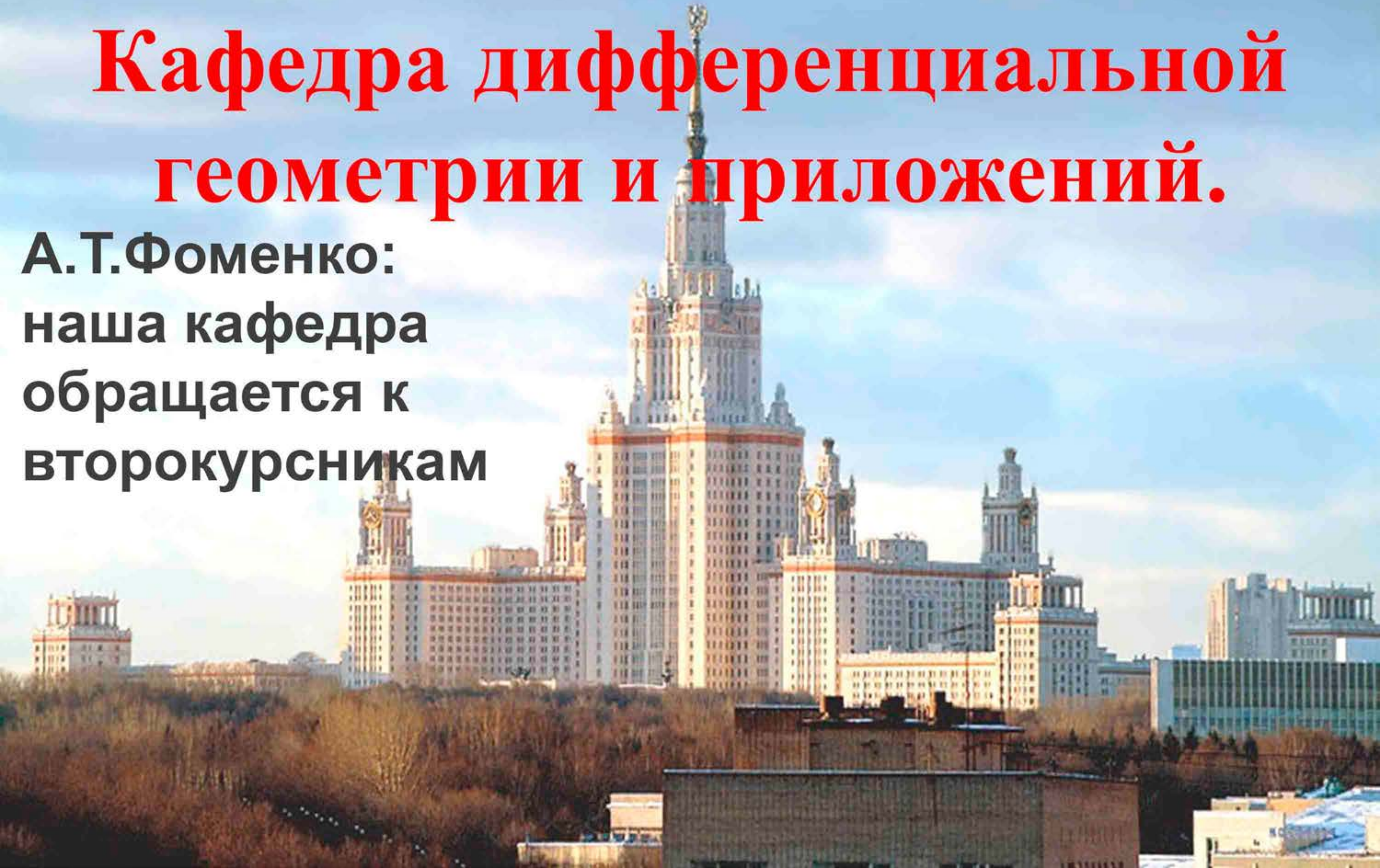


Кафедра дифференциальной геометрии и приложений.

А.Т.Фоменко:
наша кафедра обращается к второкурсникам

Фоменко Анатолий Тимофеевич, дфмн, профессор, академик РАН, заведующий кафедрой. Руководитель проекта «Современные геометрические методы и их приложения» Росс. Научного Фонда.

Научные интересы: Многомерное вариационное исчисление, минимальные поверхности, геометрическая теория групп и алгебр Ли, симплектическая геометрия и топология, гамильтоновы динамические системы. Новое научное направление – теория топологической классификации интегрируемых динамических систем и их симметрий. Построение инвариантов, описывающих топологический тип и группы симметрий особенностей (бифуркаций) функций, гладких отображений и векторных полей. Руководит курсовыми, дипломными и диссертационными работами. Некоторые темы см. например, на сайте, в разделе «Наши диссертации». Результаты, получаемые в том числе студентами и аспирантами, применяются в геометрии, топологии, в математической физике и теоретической механике.

Шафаревич Андрей Игоревич, дфмн, профессор, член-корр. РАН.
Декан мехмата МГУ.
Руководитель проекта "Геометрические асимптотики, интегрируемые системы и квантование", поддержанного Российским Научным Фондом.

Научные интересы: математическая физика, геометрическое и асимптотическое квантование, геометрическая и асимптотическая теория уравнений в частных производных, спектральная теория. Теория квазиклассического квантования инвариантных многообразий гамильтоновых систем. Квантование комплексных многообразий и многообразий с особенностями. Спектральная геометрия операторов с сингулярными коэффициентами и операторов на сингулярных пространствах. Асимптотическая теория нелинейных уравнений в частных производных. Руководит курсовыми, дипломными и диссертационными работами.

Иванов Александр Олегович, дфмн, профессор, зам. заведующего кафедрой, зам. декана по науке. Руководитель индустриальным проектом «Изучение метрики, структуры и размерности многообразий методами дифф. геометрии» по применению геометрии к анализу данных.

Научные интересы: геометрические оптимизационные задачи (минимальные сети, минимальные заполнения), дискретная геометрия (геометрия многогранников, геометрическая теория графов), метрическая геометрия (геометрия пространств Александрова, геометрия групп), компьютерная геометрия, анализ данных. В течение многих лет вместе с профессором А.А.Тужилиным руководит исследовательским семинаром по геометрии экстремальных сетей, руководит курсовыми, дипломными и диссертационными работами. Некоторые актуальные исследовательские задачи можно найти на сайте кафедры (http://dfgm.math.msu.su) и лаборатории (http://dcglab.uniyar.ac.ru).

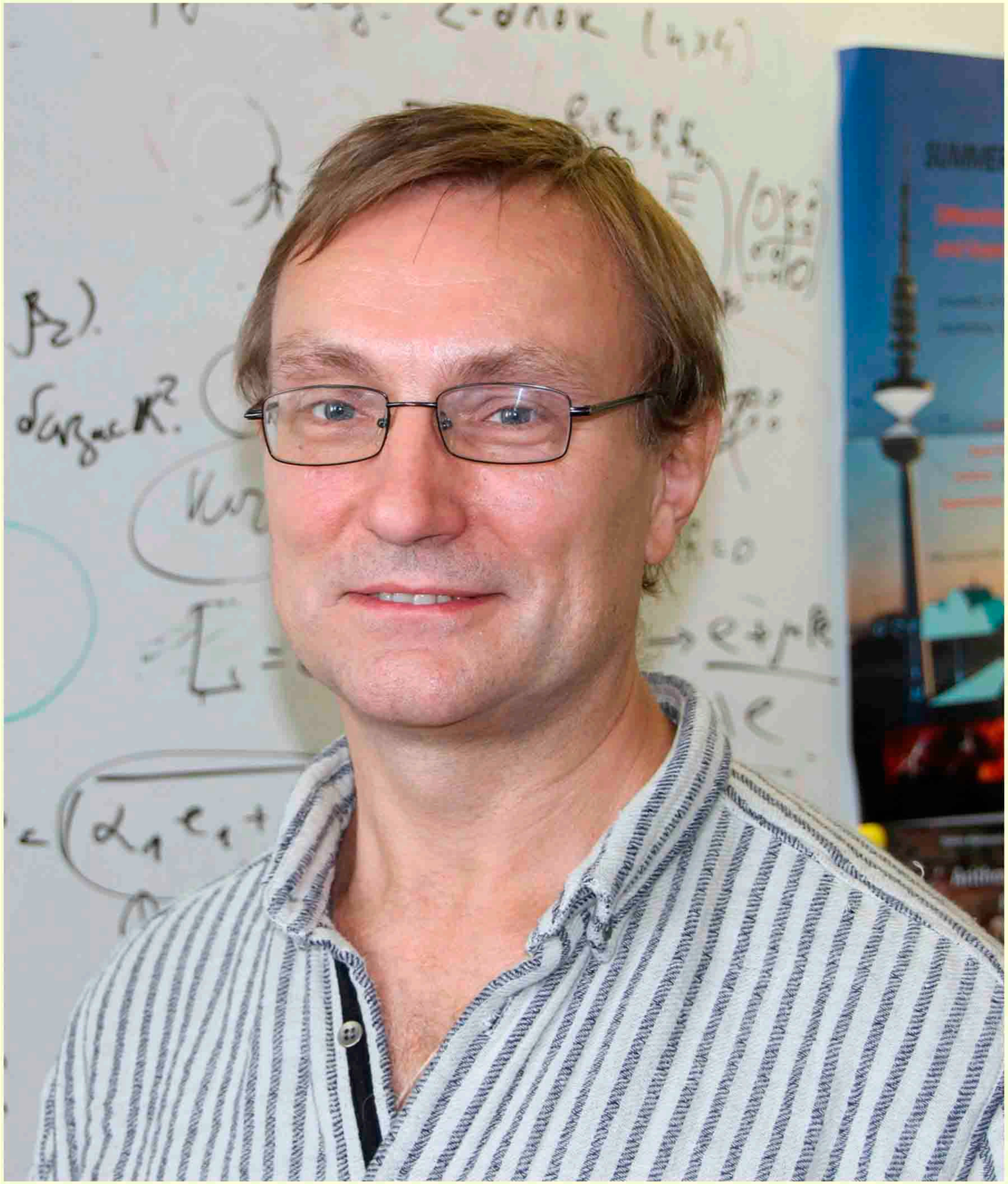
Тужилин Алексей Августинович, профессор, дфмн, заведующий лабораторией компьютерной геометрии. Научные интересы: метрическая геометрия, в том числе, геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова-Хаусдорфа; геометрическая оптимизация, в частности, теория экстремальных сетей (минимальные деревья Штейнера, минимальные заполнения в смысле Громова, локально-минимальные сети); компьютерная геометрия. Задачи такого типа, решаемые в том числе студентами и аспирантами, имеют приложения в геометрии и топологии, в транспортных задачах и проектировании микросхем, в биоинформатике и теории эволюции. Тематика развивается совместно с профессором А.О.Ивановым. Список некоторых интересных задач в этой области см. в http://dfgm.math.msu.su/people/tuzhilin/part7.php

Ошемков Андрей Александрович, дфмн, профессор. Научные интересы: симплектическая и пуассонова геометрия, алгебры Ли, динамические системы, топология особенностей интегрируемых систем. Руководит студентами и аспирантами.

Кудрявцева Елена Александровна, дфмн, профессор, профессор РАН. Руководила научными проектами «Топология и алгебра теории интегрируемых систем:новые направления и приложения » (2017-2021) при поддержке Российского научного фонда. Трое учеников - стипендиаты фонда БАЗИС.

Научные интересы: Гамильтоновы системы – теория возмущений, небесная механика, топологические инварианты магнитных полей. Теоретическая геофизика. Интегрируемые гамильтоновы системы – симплектические и топологические инварианты, структурно устойчивые особенности. Маломерная топология – минимизация числа точек пересечения и совпадения, разветвленные накрытия. Теория особенностей: топология пространств функций и градиентоподобных потоков с заданными особенностями. Имеет 34 соавторов, 15 из которых - зарубежные математики, 10 - студенты, аспиранты и постдоки.

Руководит курсовыми, дипломными и диссертационными работами.



Болсинов Алексей Викторович, дфмн, профессор. Научные интересы: 1) Интегрируемые гамильтоновы системы: интегрируемые геодезические потоки, алгебраическая интегрируемость, топологические инвариантны интегрируемых систем, топологические препятствия интегрируемости, интегрируемые волчки в динамике твердого тела, согласованные пуассоновы структуры и бигамильтоновы системы. 2) Особенности: особенности отображения момента интегрируемых систем, их топологические и симплектические инварианты, алгоритмическая классификация, особенности лиувиллевых слоений. 3) Группы Ли и алгебры Ли: динамические системы на группах Ли и однородных пространствах, лиевы пучки, гамильтонова редукция, гамильтоновы системы на алгебрах Ли. 4) симплектическая геометрия и риманова геометрия.

Жеглов Александр Борисович, дфмн, профессор. Научные интересы: Исследования в области алгебры, алгебраической геометрии, алгебраической теории чисел и их приложениях к теории гамильтоновых динамических систем. Одно из актуальных направлений исследований – развитие и обобщение теории, связанной с решениями уравнения Кадомцева-Петвиашвили.

Ведюшкина (Фокичева) Виктория Викторовна, д.ф.м.н., профессор. Лауреат Премии правительства Москвы для молодых ученых 2019 года, Медали РАН для молодых ученых 2020, Шуваловской премии МГУ 2021. Руководит проектом "Обобщенные интегрируемые биллиарды: их топологические свойства и квазиклассические асимптотики соответствующих квантовых систем" при поддержке Росс. Научного Фонда.

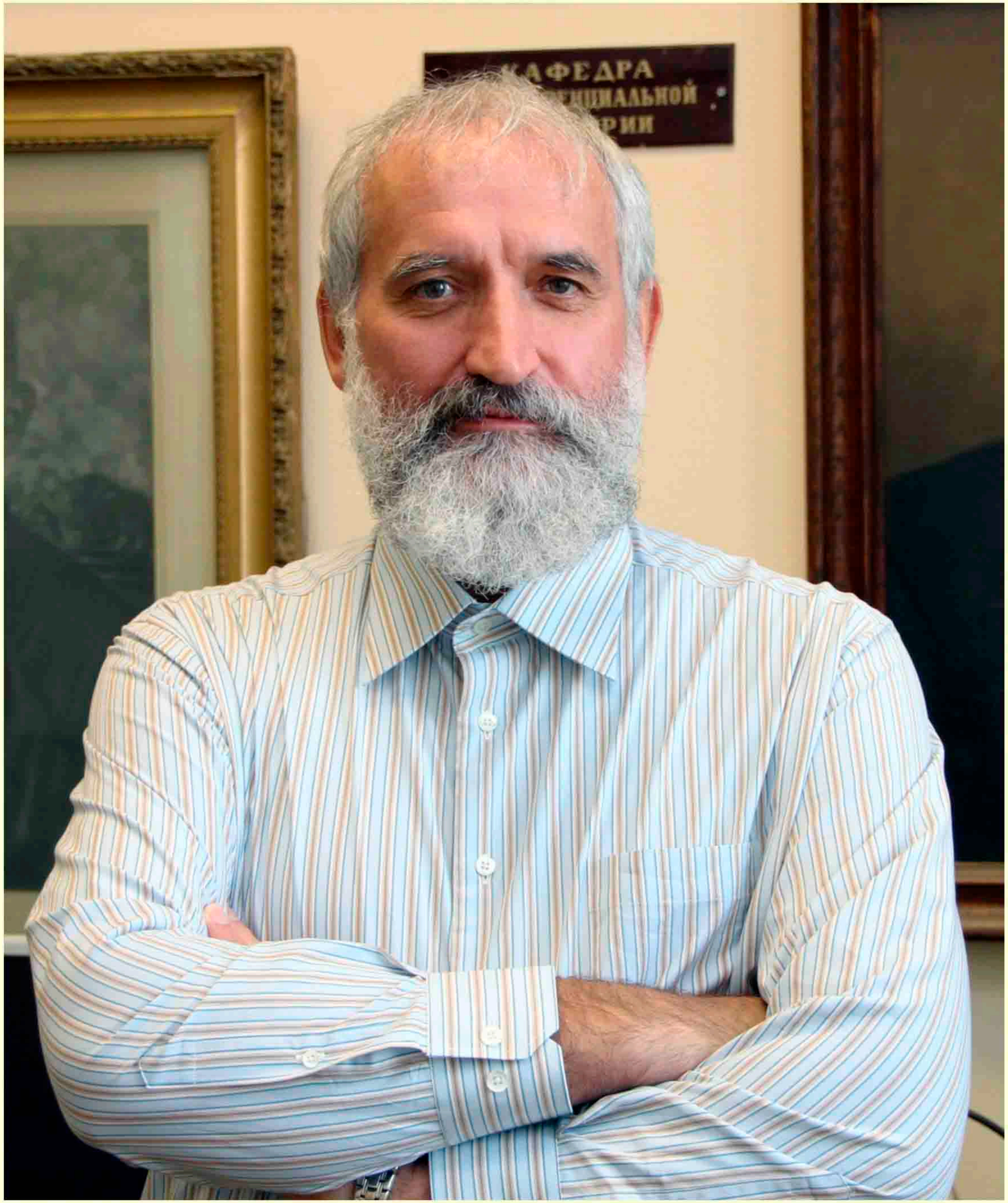
Научные интересы: интегрируемые гамильтоновы системы, теория математического биллиарда, маломерная топология.

Обнаружила новые классы интегрируемых биллиардов – топологические биллиарды и биллиардные книжки. Дала полную классификацию топологических биллиардов. Оказалось, что многие важные эффекты, наблюдаемые в сложных проблемах физики и механики, наглядно и эффективно моделируются системами на подходящих «биллиардных книжках». Руководит студентами и аспирантами, семинаром по теории биллиардов

Пржиялковский Виктор Владимирович, д.ф.-м.н., профессор. Лауреат премии правительства Москвы для молодых ученых 2019 г. Руководит проектом в рамках конкурса Junior Leader фонда «БАЗИС».

Научные интересы: бирациональная геометрия, многообразия Фано,
группы автоморфизмов многообразий,
рациональность,
взвешенные полные пересечения,
зеркальная симметрия.
Является соруководителем научно-исследовательского семинара
им. В.А. Исковских (МГУ-МИАН).
Работает в МИАН (ведущий
научный сотрудник) и ВШЭ (заместитель
заведующего лабораторией
зеркальной симметрии).

Попеленский Федор Юрьевич, кфмн, доцент, ученый секретарь кафедры. Научные интересы: алгебраическая топология, гомологическая алгебра, некоммутативная геометрия, К-теория, компьютерная геометрия, динамические системы.



Носовский Глеб Владимирович, кфмн, доцент. Научные интересы: Теория управления стохастическими процессами на многообразиях, нелинейные дифференциальные уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, компьютерная геометрия, финансовая математика, прикладная статистика, анализ данных. См. подробнее на сайте кафедры.

Ильютко Денис Петрович, кфмн, доцент. Работает на кафедре с 2003 года и с 2011 года в должности доцента. В 2005 году защитил кандидатскую диссертацию «Геометрия локально минимальных и экстремальных сетей в нормированных пространствах» по специальности 01.01.04. Научные интересы: вариационные задачи, в частности проблема Штейнера; маломерная топология и теория узлов; дискретная математика; компьютерная геометрия.

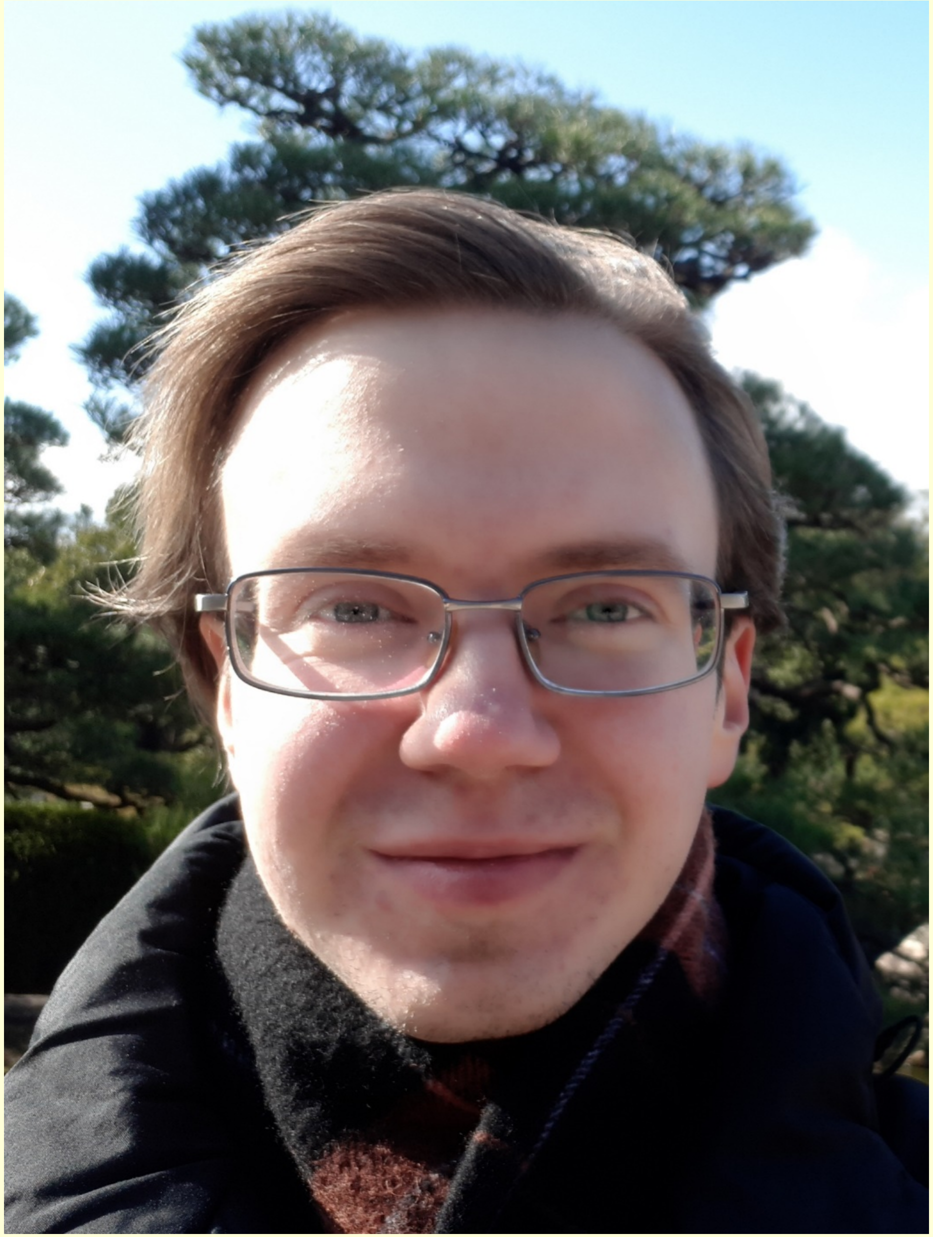
Никонов Игорь Михайлович, кфмн, доцент. Научные интересы: некоммутативная геометрия, вариационное исчисление и маломерная топология. Изучение некоммутативных характеристических классов. Исследование комбинаторных инвариантов узлов. Определение геометрических свойств экстремальных сетей в нормированных пространствах. Для решения подобных задач привлекаются средства геометрии, топологии, алгебры и комбинаторики.

Шарыгин Георгий Игоревич,кфмн, доцент. Научные интересы: Некоммутативная геометрия, К-теория (топологическая и С*-алгебр), характеристические классы векторных расслоений и других объектов. Циклические и хохшильдовы гомологии и когомологии, их вариации и применения. Деформационное квантование, формальность, высшие гомотопические операции, операды.

Коняев Андрей Юрьевич, кфмн, доцент. Создатель и издатель научно-популярного издания N+1. Руководитель проекта «Особенности интегрируемых систем» при поддержке Московск. центра фундаментальной и прикладной математики.

Научные интересы: Алгебра и геометрия интегрируемых систем, алгебры Ли, пуассонова и бигамильтонова геометрии. Вопросы глобального строения симплектических слоений. Классификация алгебр Ли с орбитами малой размерности, дискриминант спектральной кривой и бифуркационная диаграмма отображения момента на классических комплексных алгебрах Ли. Геометрия Нийенхейса (совм. с А.В.Болсиновым и В.С.Матвеевым)

Толченников Антон Александрович, кфмн, ассистент. Научные интересы: спектральные свойства операторов на декорированных графах и асимптотическая теория уравнений в частных производных.



Кибкало Владислав Александрович, кфмн, ассистент. Финалист Конкурса Мебиуса за 2021 и Конкурса фонда «Талант и Успех» для молодых математиков России за 2021. Руководитель проекта "Интегрируемые системы динамики в неевклидовых пространствах и топология некомпактных слоений" при поддержке Росс. Научного Фонда.

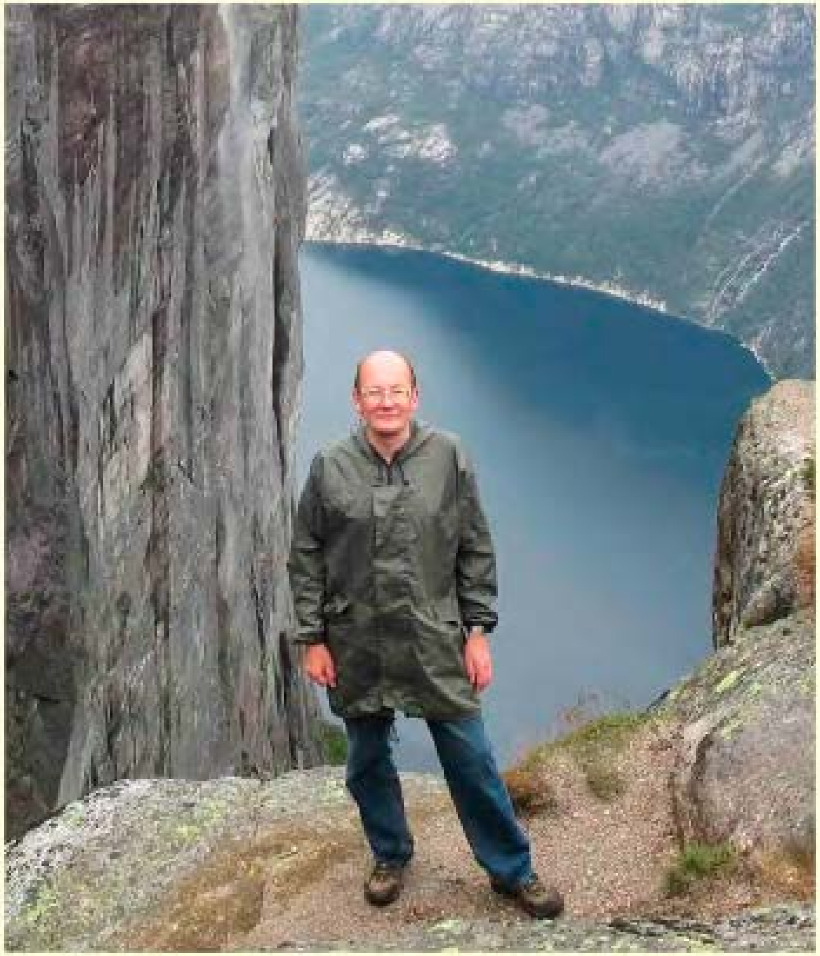
Научные интересы:

- теория интегрируемых гамильтоновых систем, близкие вопросы из геометрии, механики, алгебры, теории особенностей.
- механика в псевдо-евклидовых прост-вах, на алгебрах Ли.
- интегрируемые биллиарды и маломерная топологии, геодезические потоки
- вопросы применения геометрических методов к задачам из приложений, в том числе из анализа данных (проверка гипотезы о многообразии для выхода некоторой нейросети).

Руководит студентами, соруководитель семинара по теории биллиардов.

Белозеров Глеб Владимирович, ассистент кафедры. Область научных интересов: интегрируемые гамильтоновы системы, интегрируемые биллиарды, маломерная топология.

Геометрия и математическая физика.

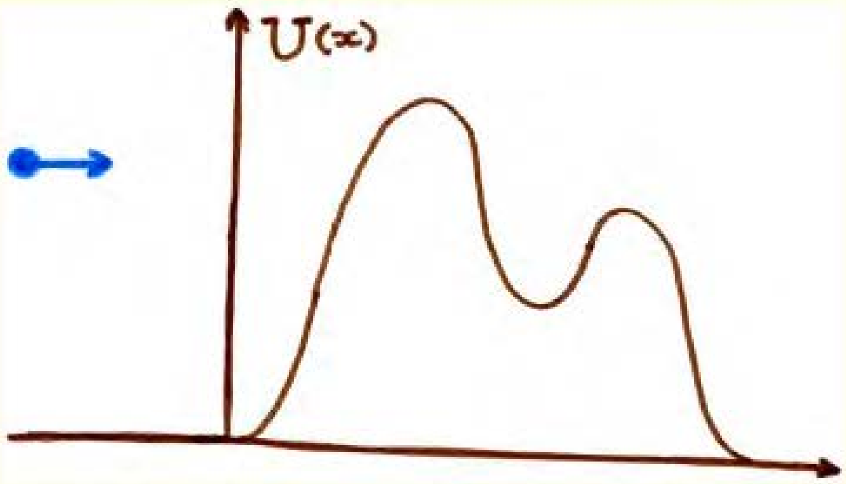


А.И.Шафаревич

А.А.Толченников

Пример 1. Комплексная геометрия в квантовой механике

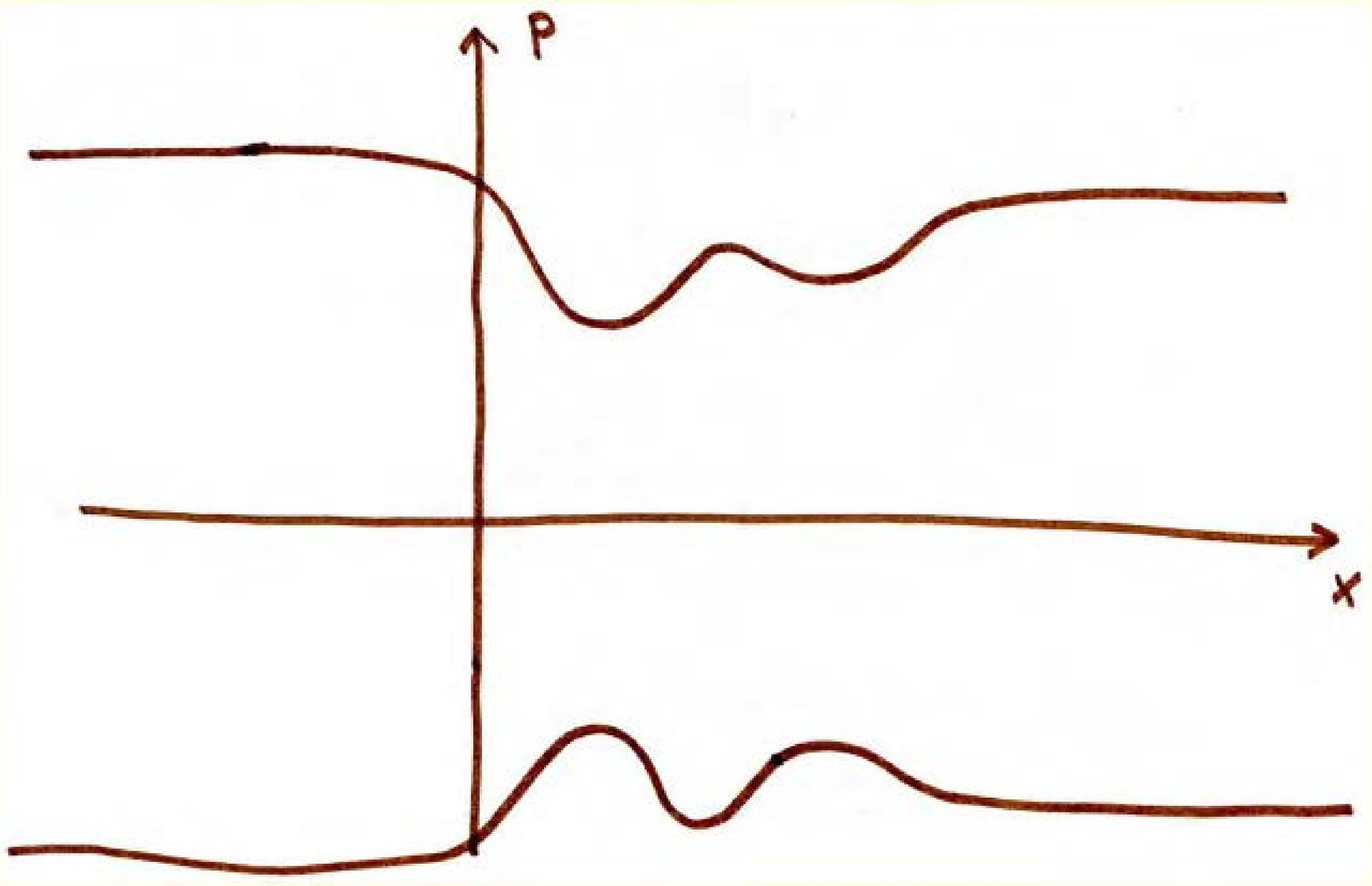
Одномерное движение классической частицы (шарик). Силы (потенциальная энергия) сосредоточены на отрезке.



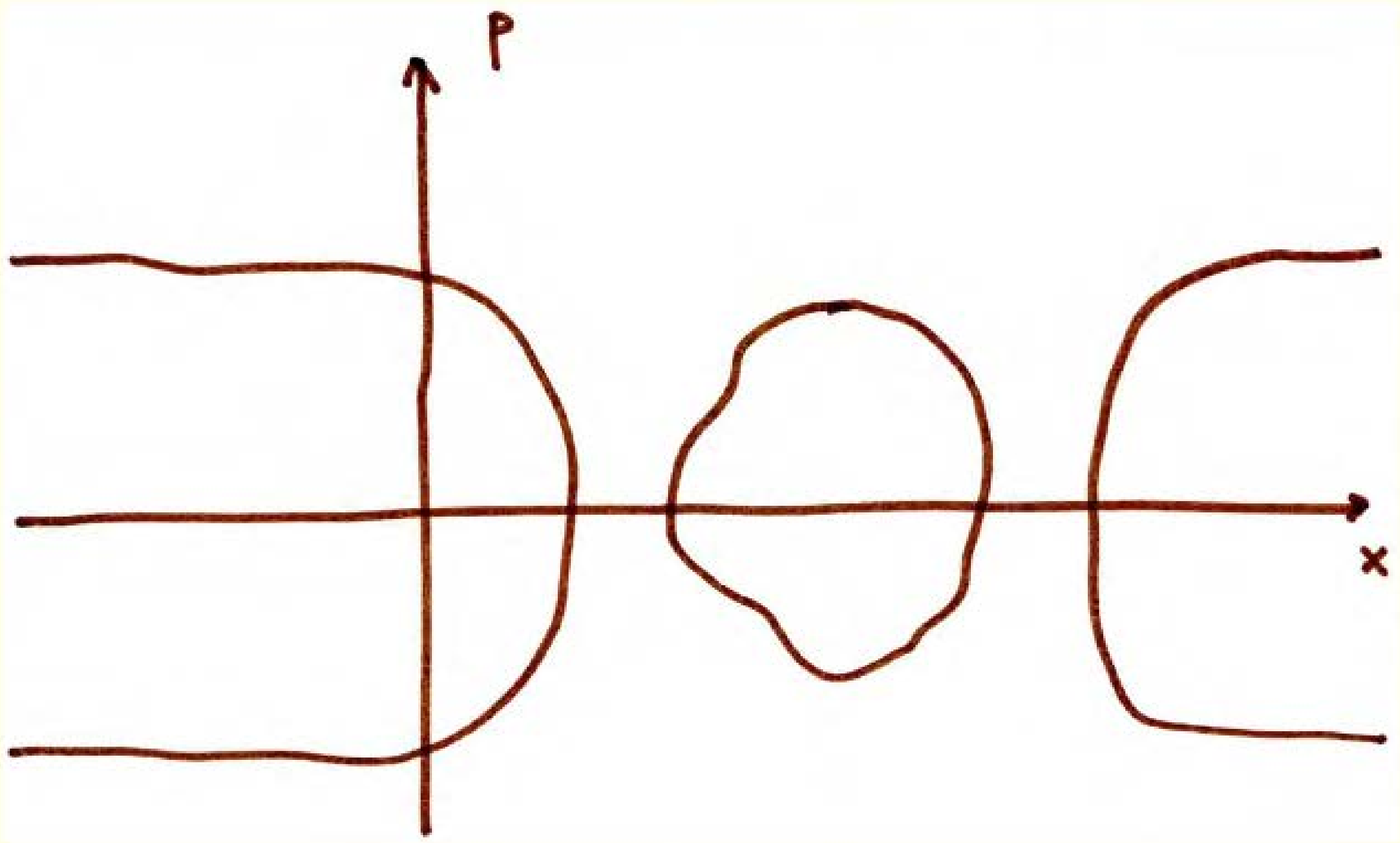
Поведение шарика определяется геометрией кривой постоянной энергии

$$\frac{p^2}{2} + U(x) = E$$

Прохождение: $E > \max U(x)$



Отражение: $E < \max U(x)$

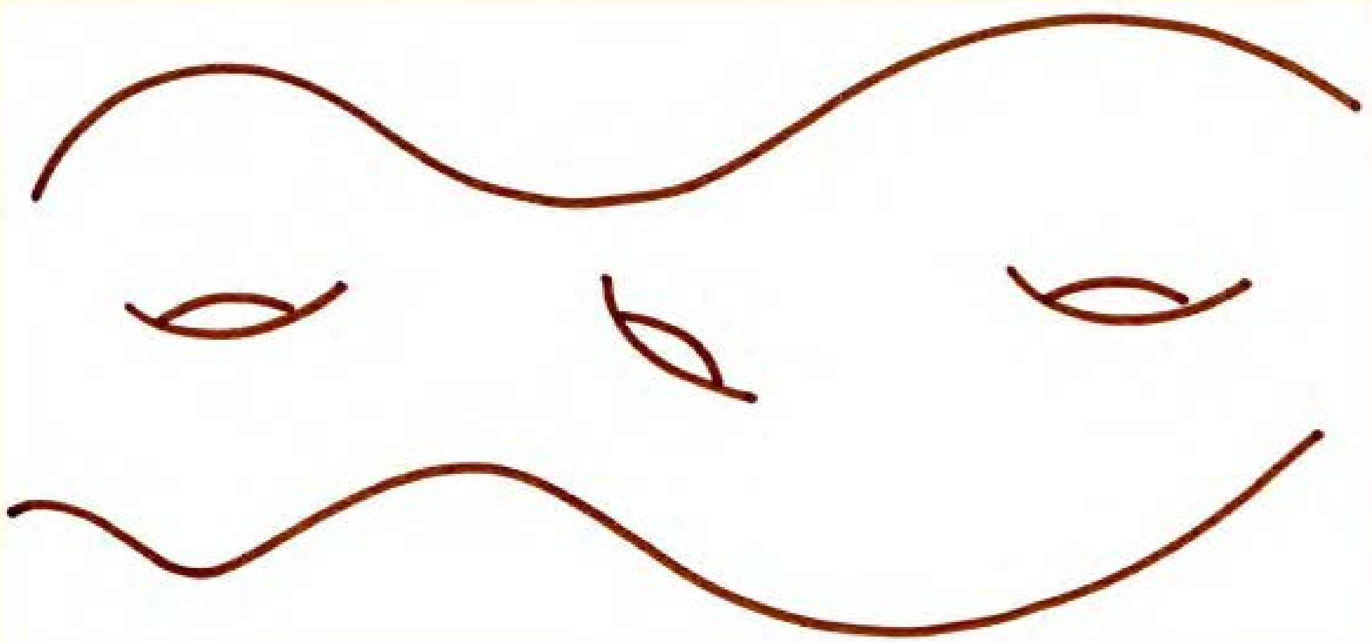


Движение квантовой частицы (электрона): геометрия комплексной кривой постоянной энергии

$$x = x_1 + ix_2 \qquad p = p_1 + ip_2$$

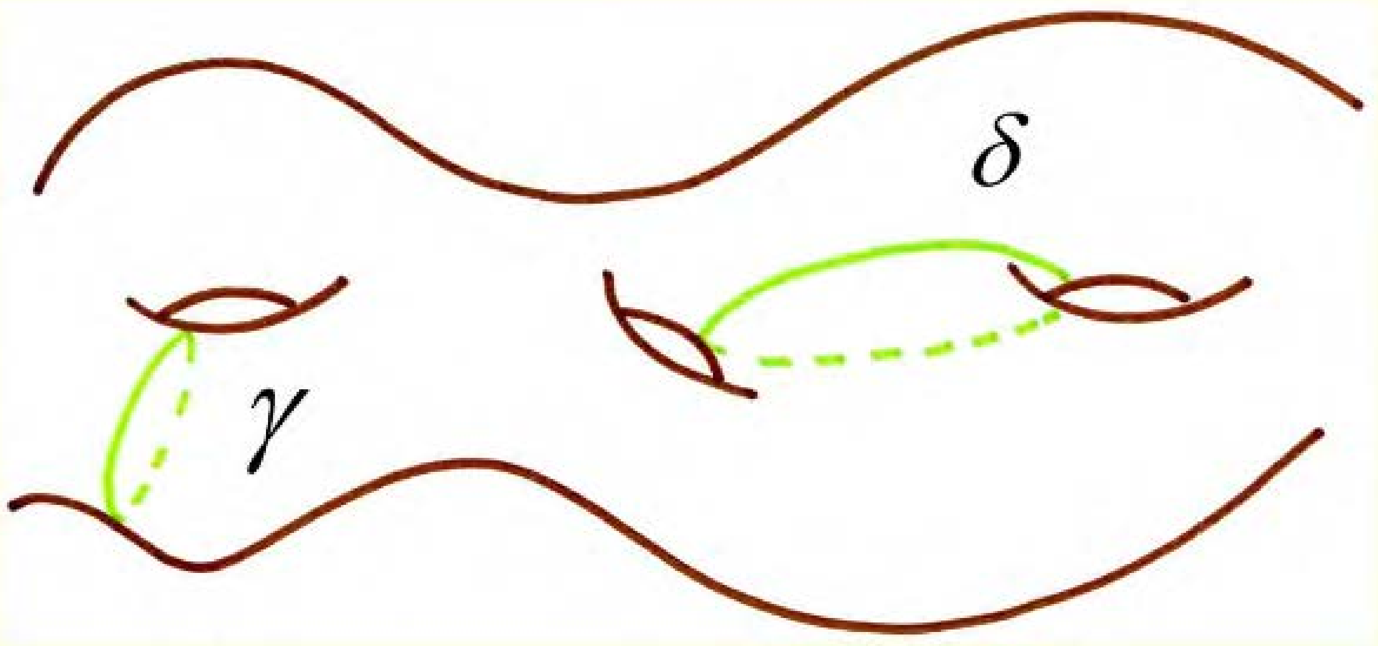
$$\frac{1}{2}(p_1^2 - p_2^2) + \mathrm{Re}\,U = E \qquad p_1 p_2 + \mathrm{Im}\,U = 0$$

Двумерная поверхность в четырехмерном пространстве



Ненулевая вероятность отражения и ненулевая вероятность прохождения.

Вычисление вероятностей: интегралы по циклам на поверхности.



В ситуации общего положения

$$|\tau|^2 = e^{-\frac{\rho}{h}}(1+O(h))$$

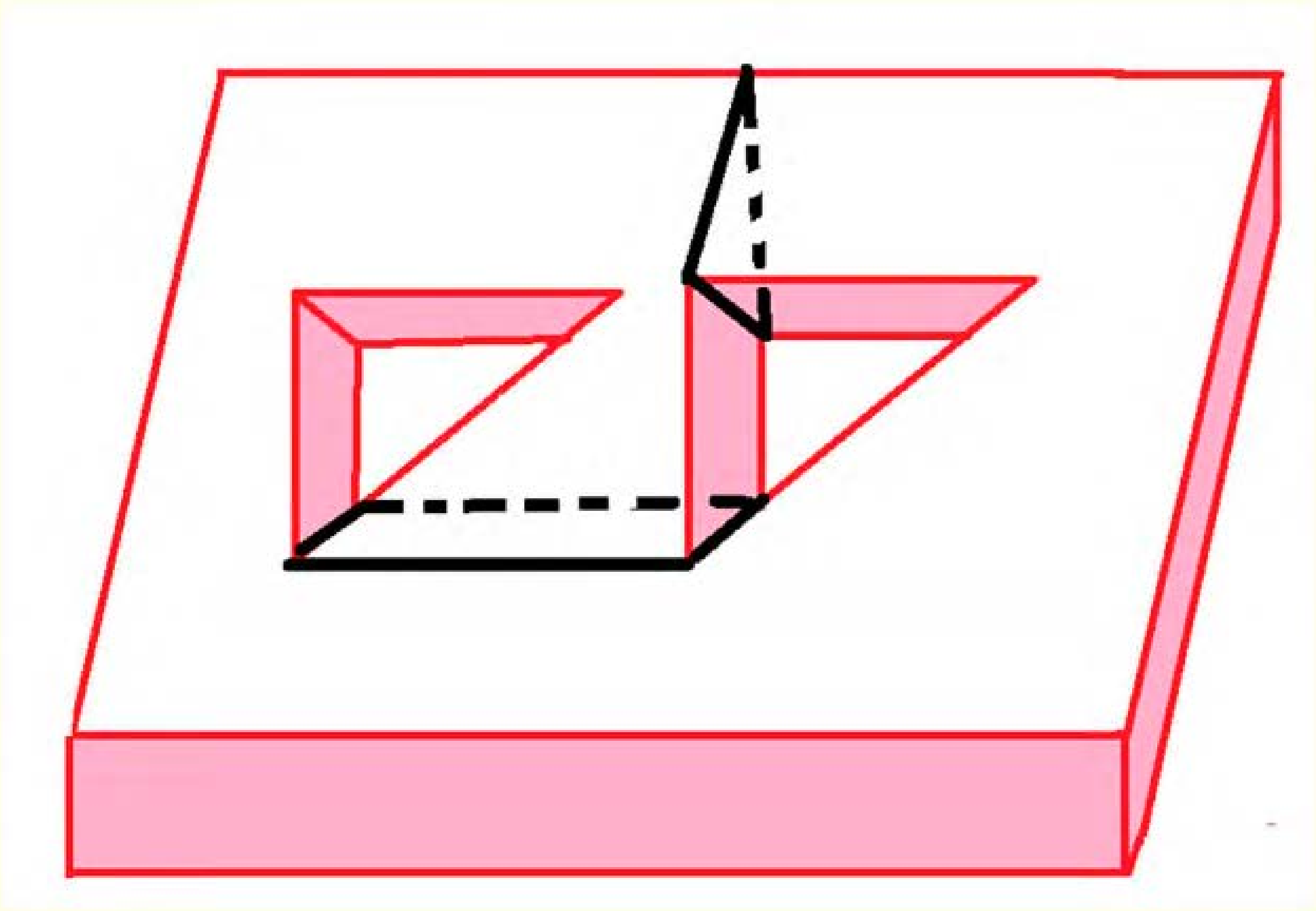
$$\rho = \mathrm{Im}\int_\gamma p\,dx$$

Резонансное туннелирование: если

$$\frac{1}{2\pi h}\int_\delta p\,dx = m + \frac{\mu}{4}$$ **, то**

$$|\tau| = 1 + O(h)$$

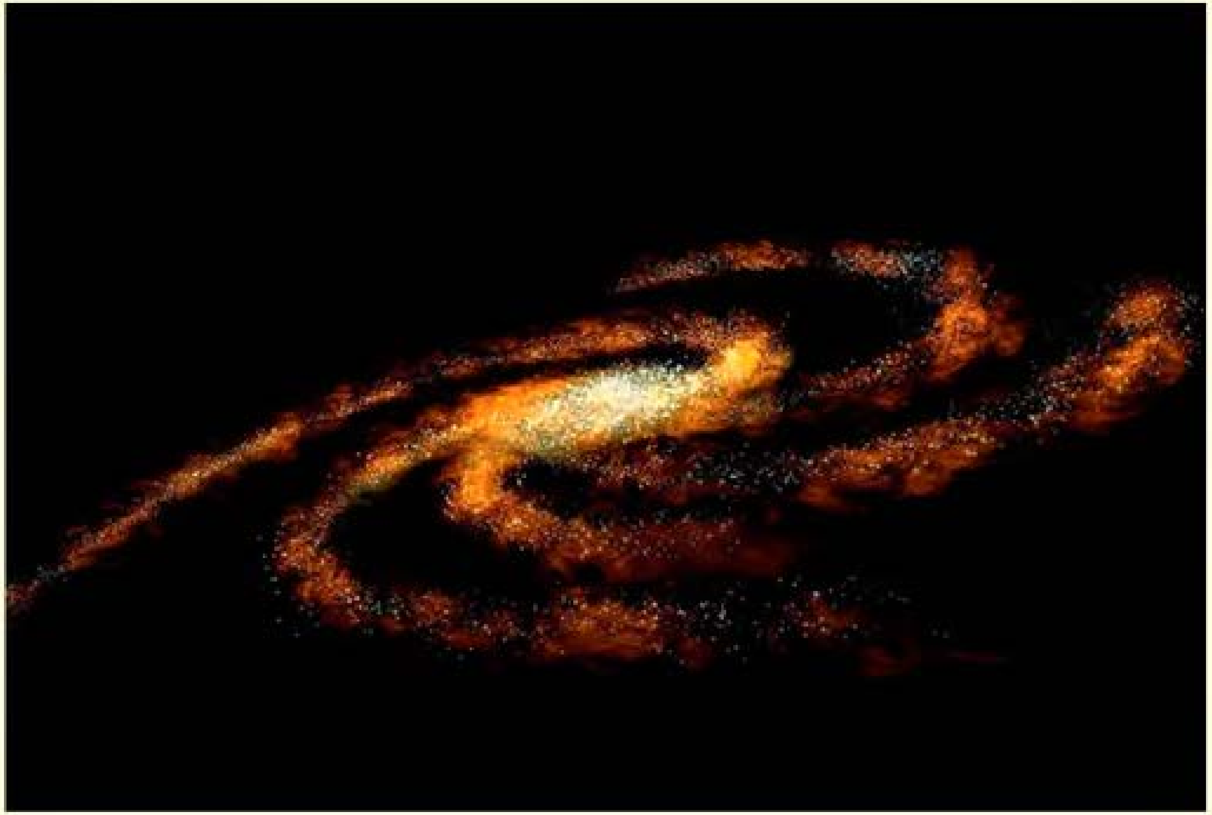
Те же интегралы: длины замкнутых геодезических на многогранной поверхности.



Пример 2. Магнитные поля в галактиках и звездах

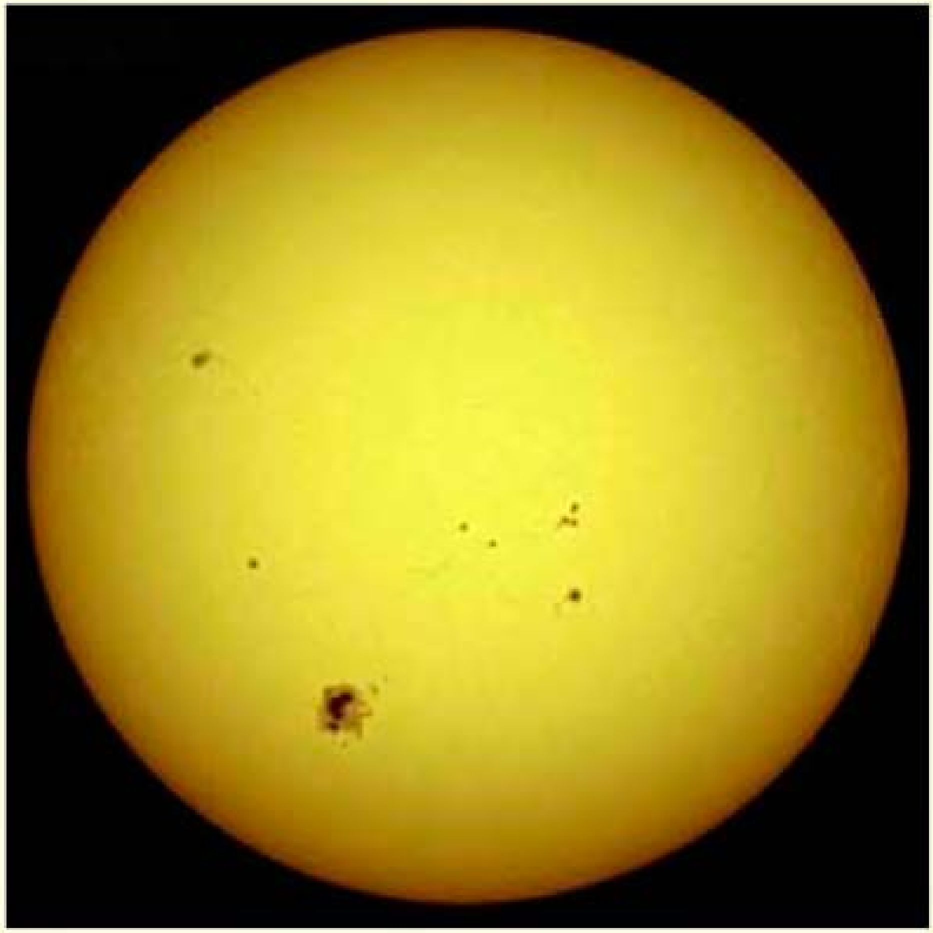
Туманность Андромеды

Млечный путь



Галактика «Скульптор»

Магнитные поля в фотосфере и пятна на Солнце



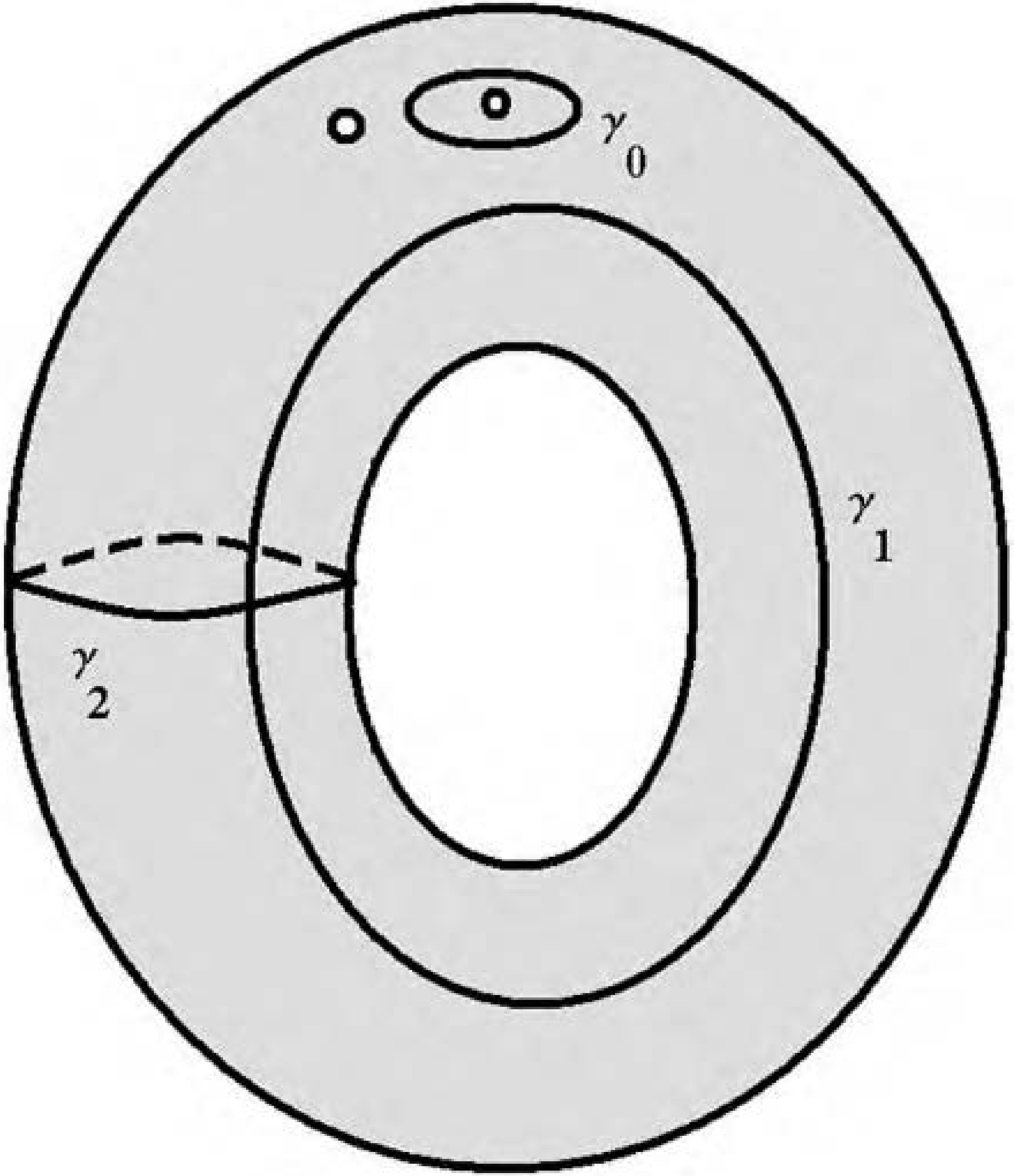
Рост и частота магнитного поля: спектр дифференциального оператора на двумерной поверхности.

$$LB = \varepsilon^2 \Delta B - \{v, B\} = \lambda B$$

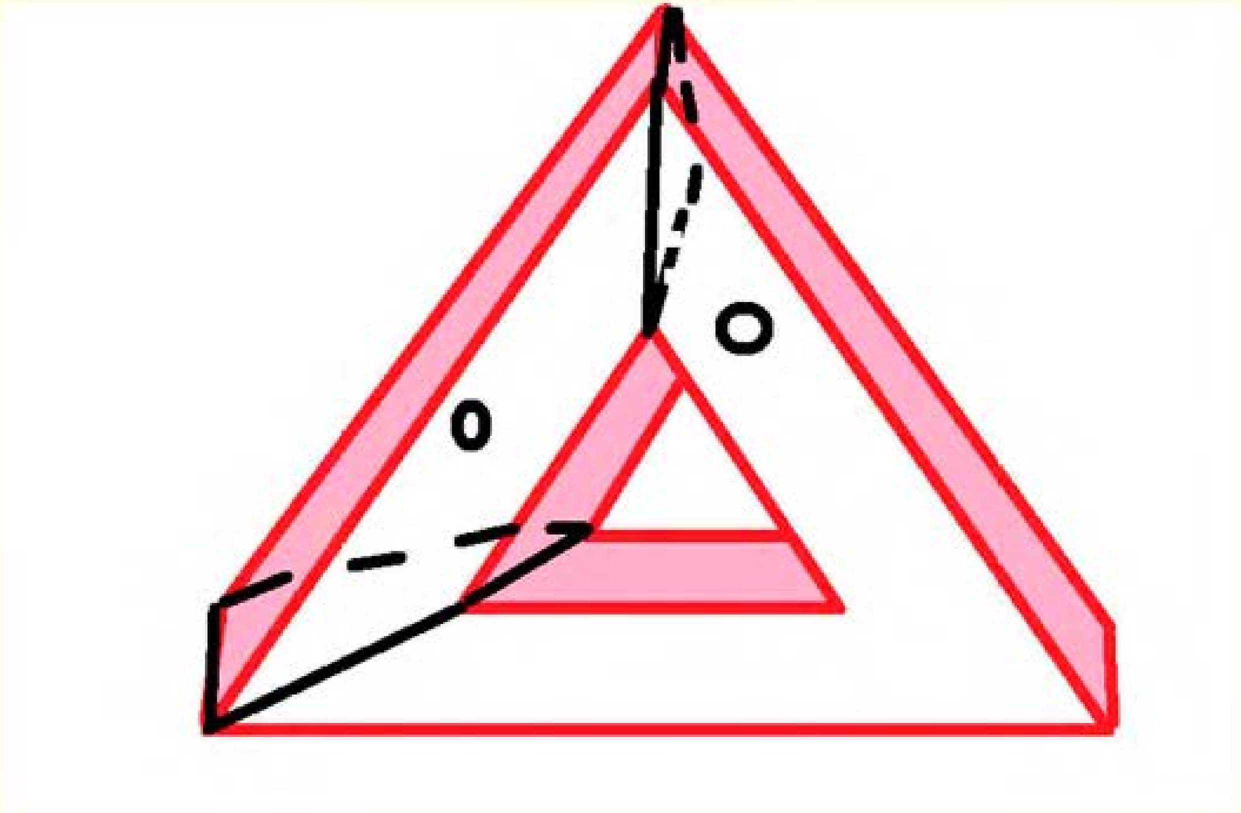
$$(\nabla, v) = (\nabla, B) = 0$$

$$\varepsilon \to 0, \qquad x \in M -$$

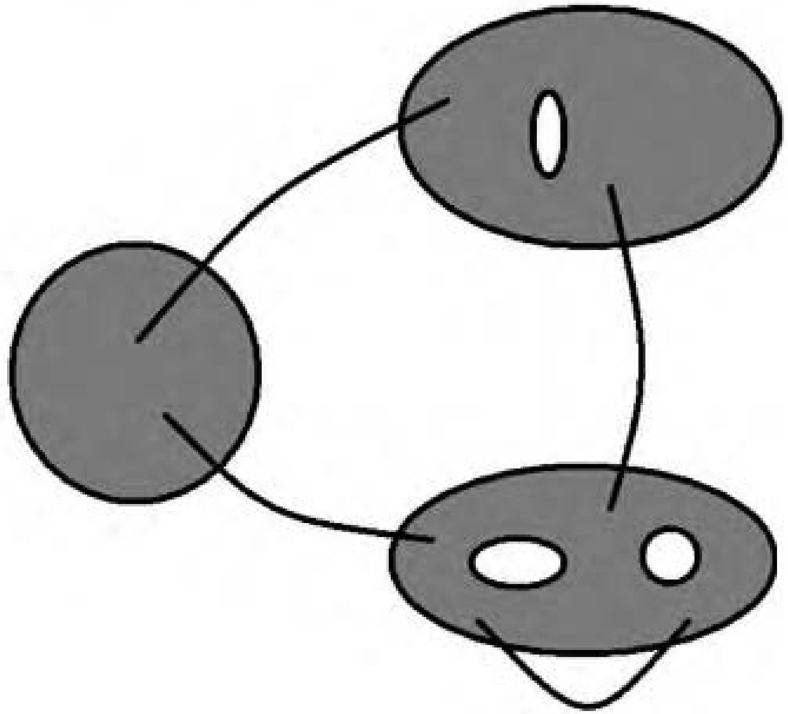
двумерная поверхность галактики или звезды

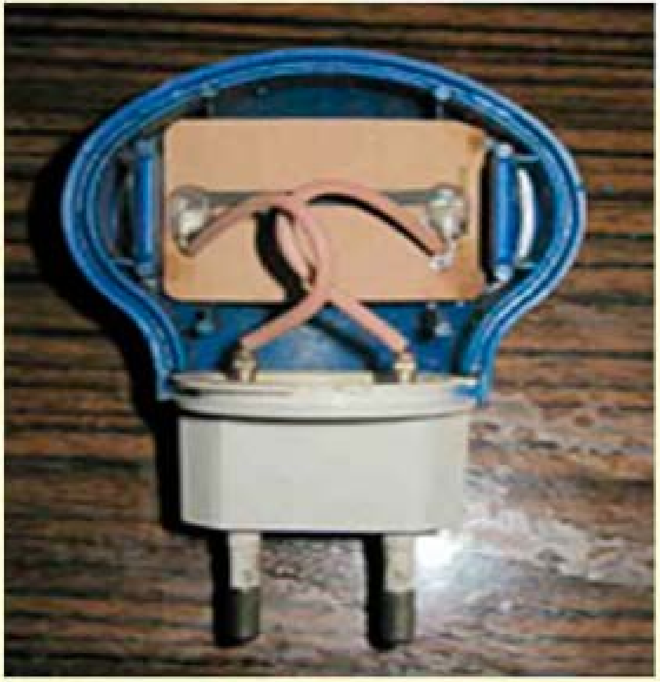

γ_0
γ_1
γ_2

Условие целочисленности длины замкнутой геодезической на многогранной поверхности

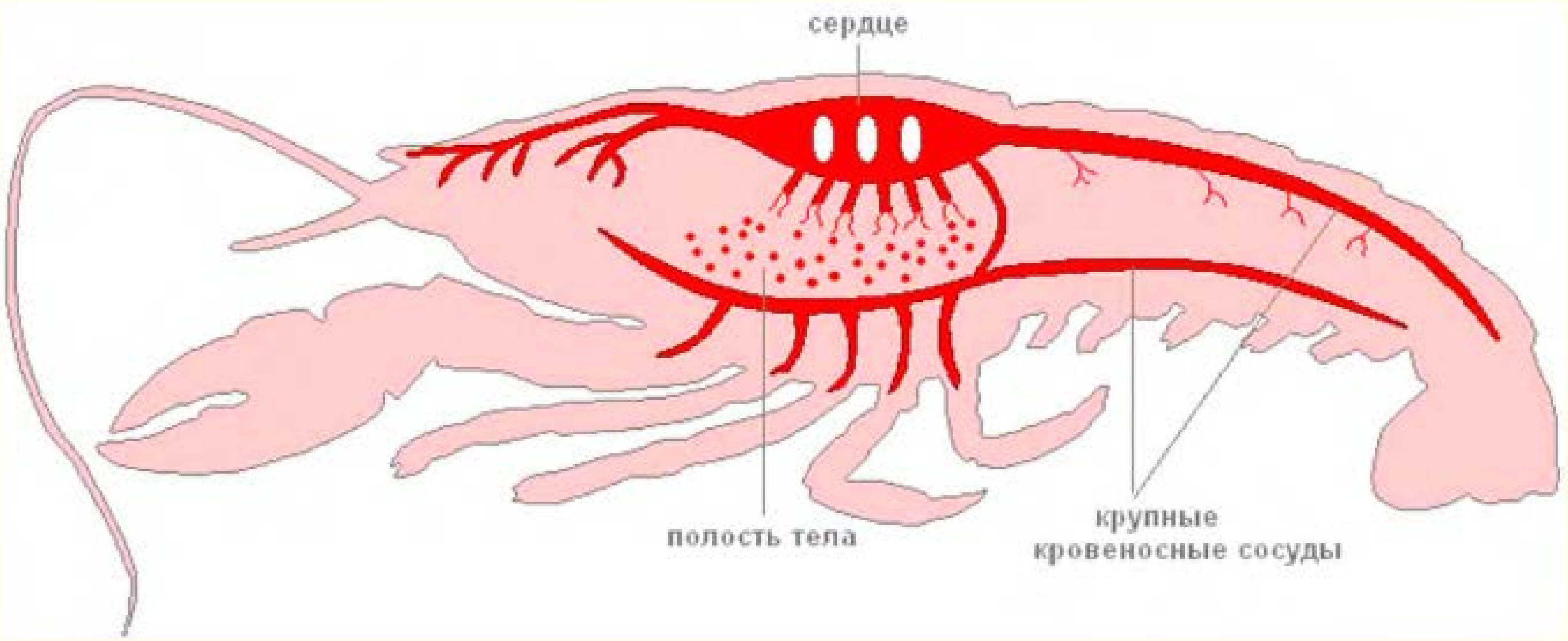


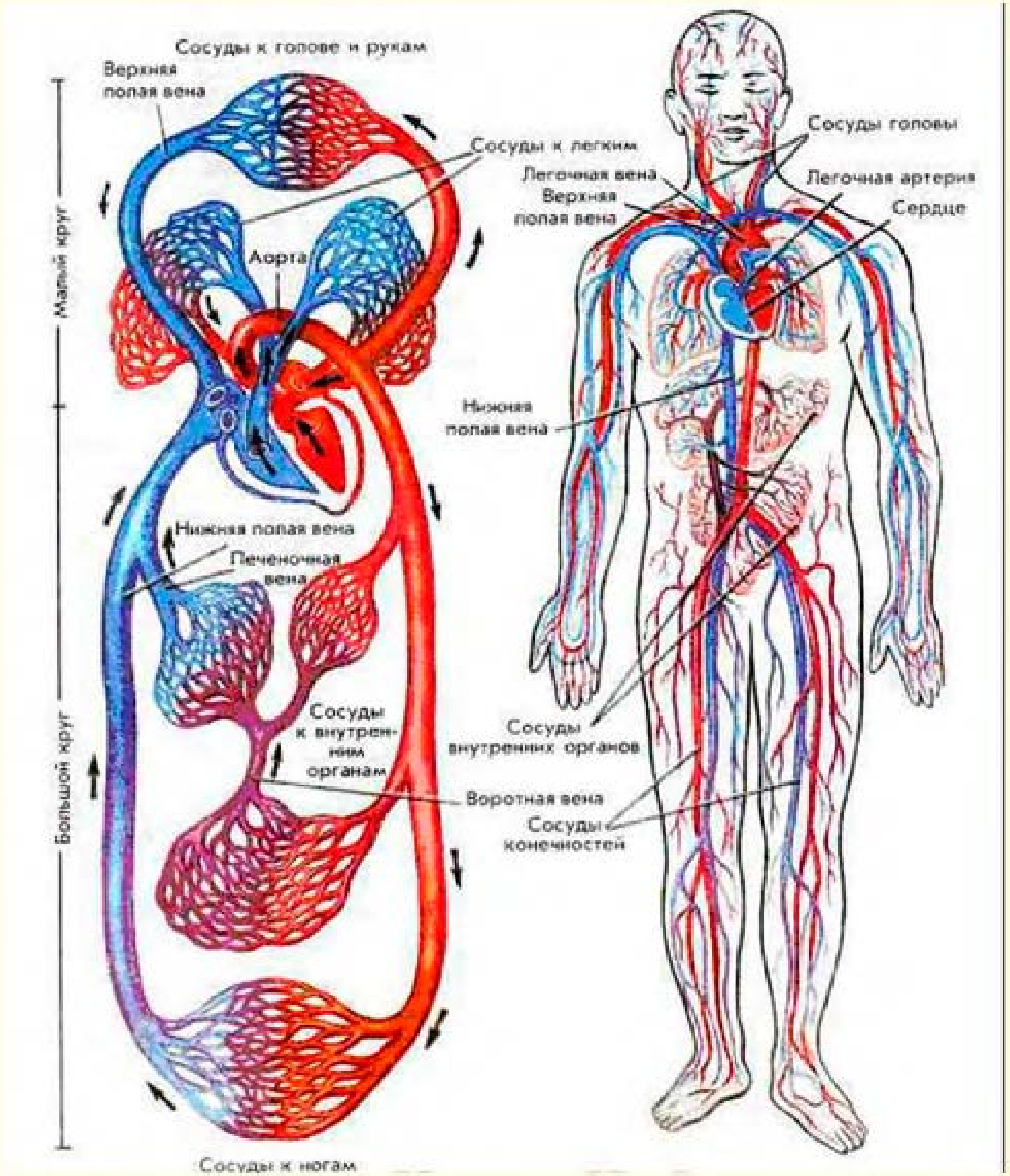
Пример 3. Классическая и квантовая динамика и геометрия множеств переменной размерности.

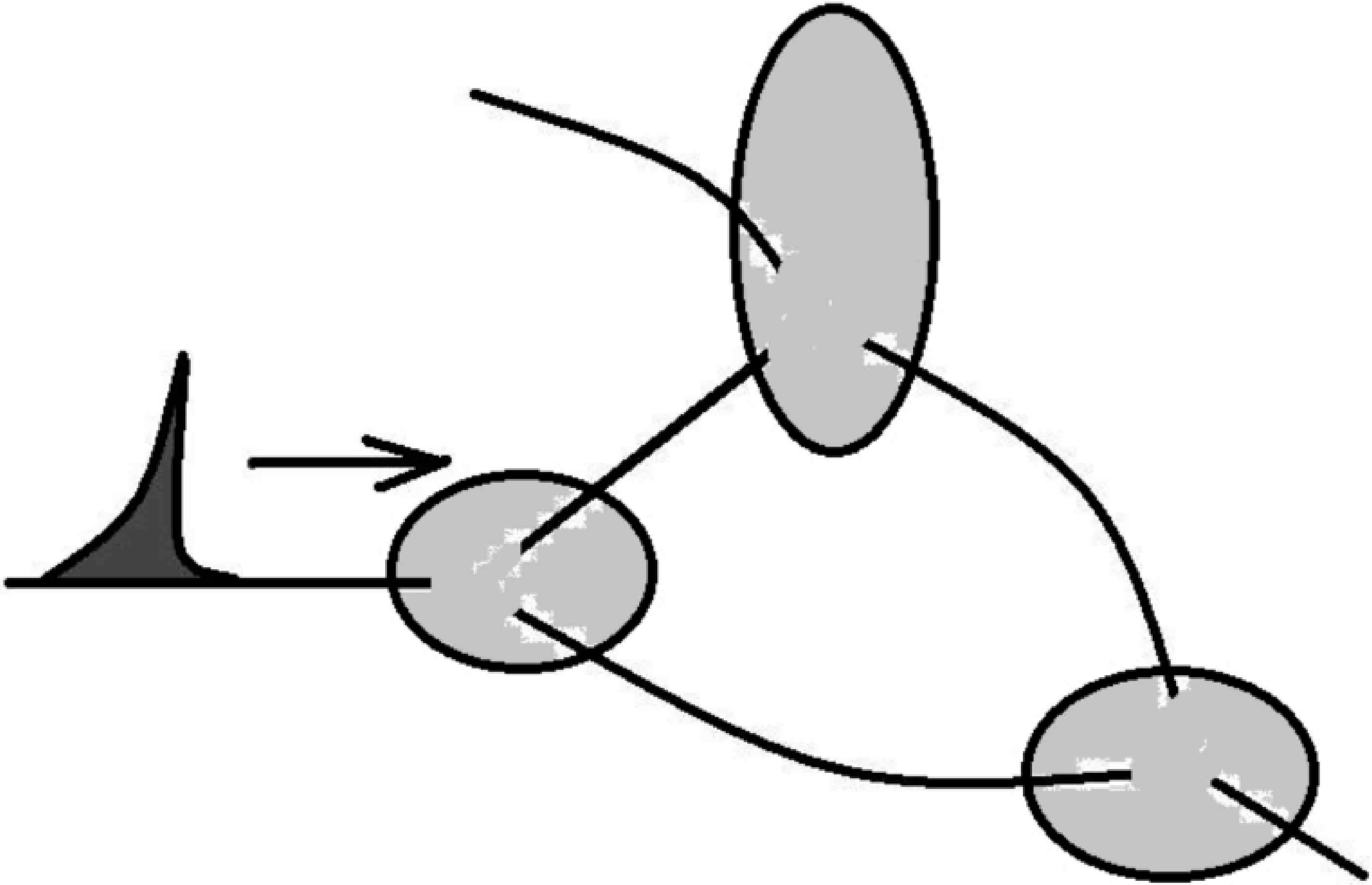





Увеличить

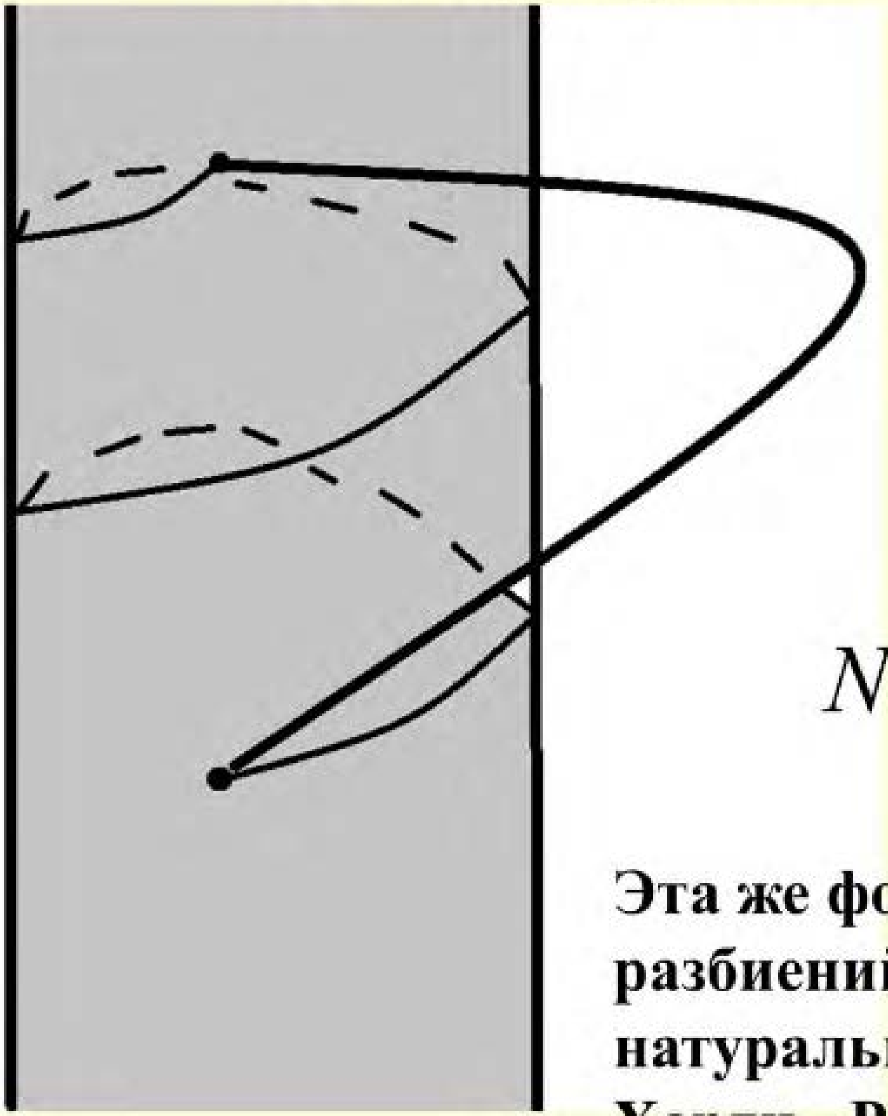

сердце
полость тела
крупные
кровеносные сосуды


Сосуды к голове и рукам
Верхняя полая вена
Сосуды к легким
Аорта
Малый круг
Нижняя полая вена
Печеночная вена
Сосуды к внутренним органам
Большой круг
Воротная вена
Сосуды к ногам
Сосуды головы
Легочная вена
Легочная артерия
Верхняя полая вена
Сердце
Нижняя полая вена
Сосуды внутренних органов
Сосуды конечностей



Как меняется со временем число частиц?

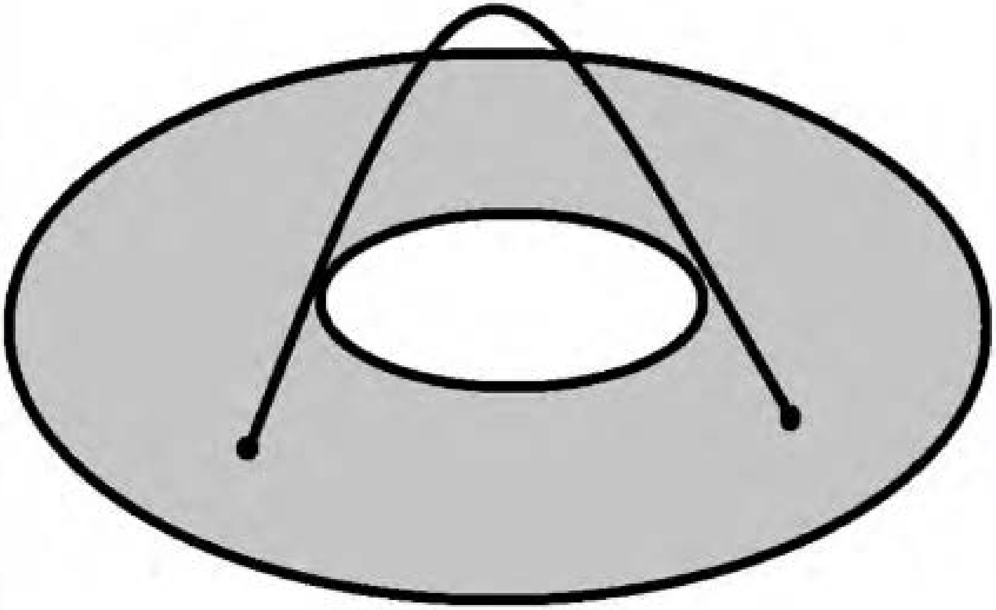
Цилиндр с приклеенным отрезком



$$N(t) \sim \exp(\sqrt{\frac{2}{3R}}\pi t^{1/2})$$

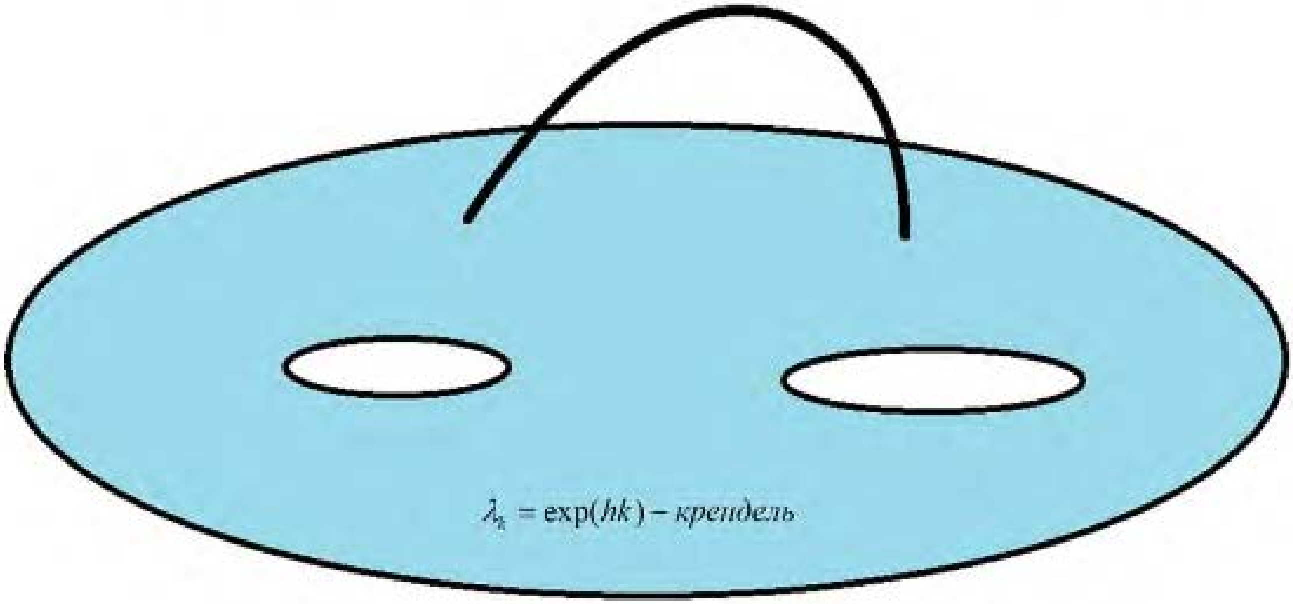
Эта же формула определяет число разбиений натурального числа t на натуральные слагаемые (теорема Харди - Рамануджана)

Тор с приклеенным отрезком



$$N(t) \sim \exp(3\sqrt[3]{\frac{5\pi}{8ab}}\zeta(3)t^{2/3})$$

Крендель с приклеенным отрезком



$$N(t) \sim \exp(ht)$$

Общий ответ — задача аналитической теории чисел об абстрактных простых

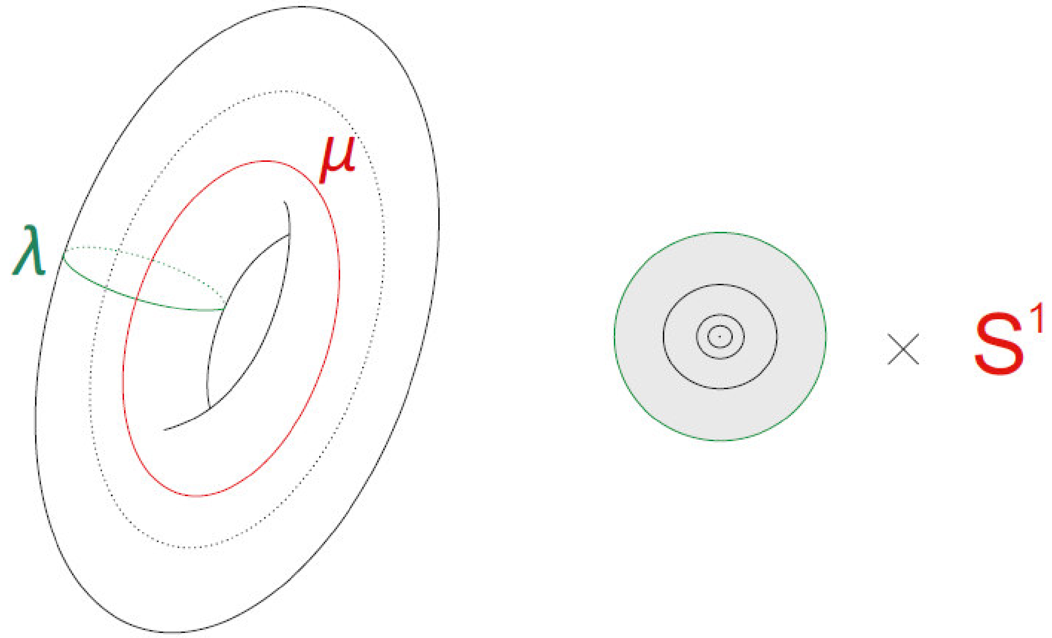
Интегрируемые системы и биллиарды. Топология, геометрия, симметрии, особенности.

А.Т.Фоменко

В.В.Ведюшкина

В.А.Кибкало

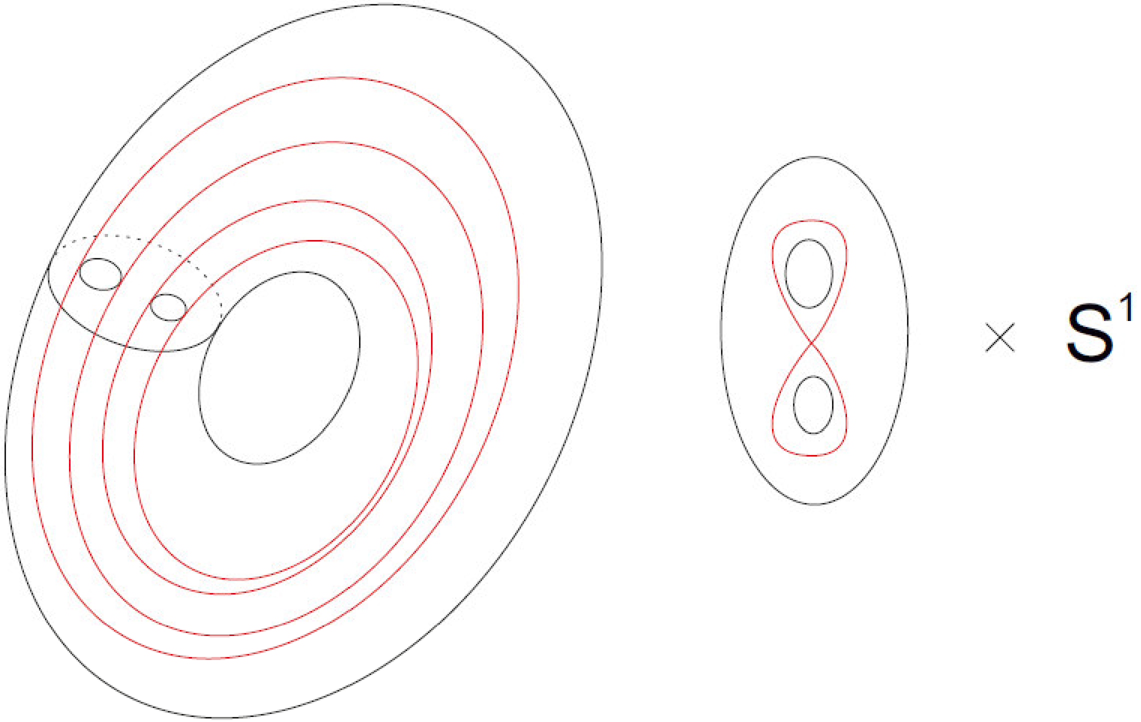
Г.В.Белозеров



Склейка двух полноторий по матрице

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ гомеоморфна прямому произведению $S^1 \times S^2$;
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ гомеоморфна трехмерной сфере S^3;
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ гомеоморфна проективному пространству RP^3.

Из полнотория выброшены два параллельных полнотория.



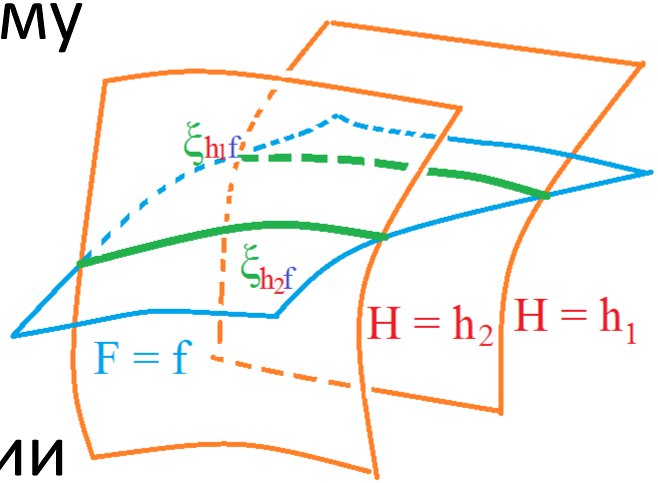
Получилось 3-мерное многообразие с краем, состоящим из трех двумерных торов. Приклеим к каждому такому тору свое полноторие по какому-нибудь гомеоморфизму граничного тора. Получится новое 3-многообразие. Этот процесс можно продолжать.

Так получается богатый класс 3-многообразий – т.н. “граф-многообразия”.

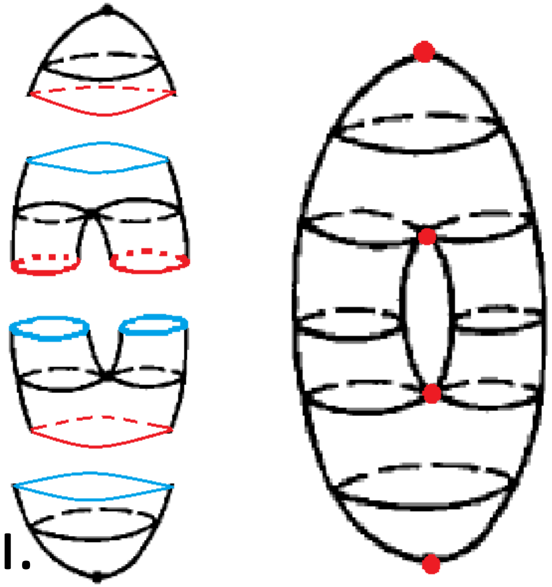
Топология и механика

- **Гамильтоновы уравнения** на $R^{2n}(x_1, \dots x_n, v_1, \dots v_n)$: строим по энергии $H(\vec{x}, \vec{v})$ – динамическую систему

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(x,v)}{\partial v}, \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial H(x,v)}{\partial x},$$



- Если в R^4 две функции H, F постоянны вдоль решений $(x(t), v(t))$, то решение целиком лежит на пересечении $\xi_{h,f} = \{H = h\} \cap \{F = f\}$
- **На практике**: для почти всех (h, f) непустое пересечение состоит из торов $T^2 = S^1 \times S^1$. **Теорема Лиувилля.**
- **Бифуркации** (перестройки) торов.
- **Особые точки**: где dH, dF линейно зависимы.



- Невырожденность: обобщение « $\frac{df}{dx} = 0 \Rightarrow$ *см. знак* $\frac{d^2f}{dx^2} \neq 0$ »

Лиувиллева (топологическая) эквивалентность

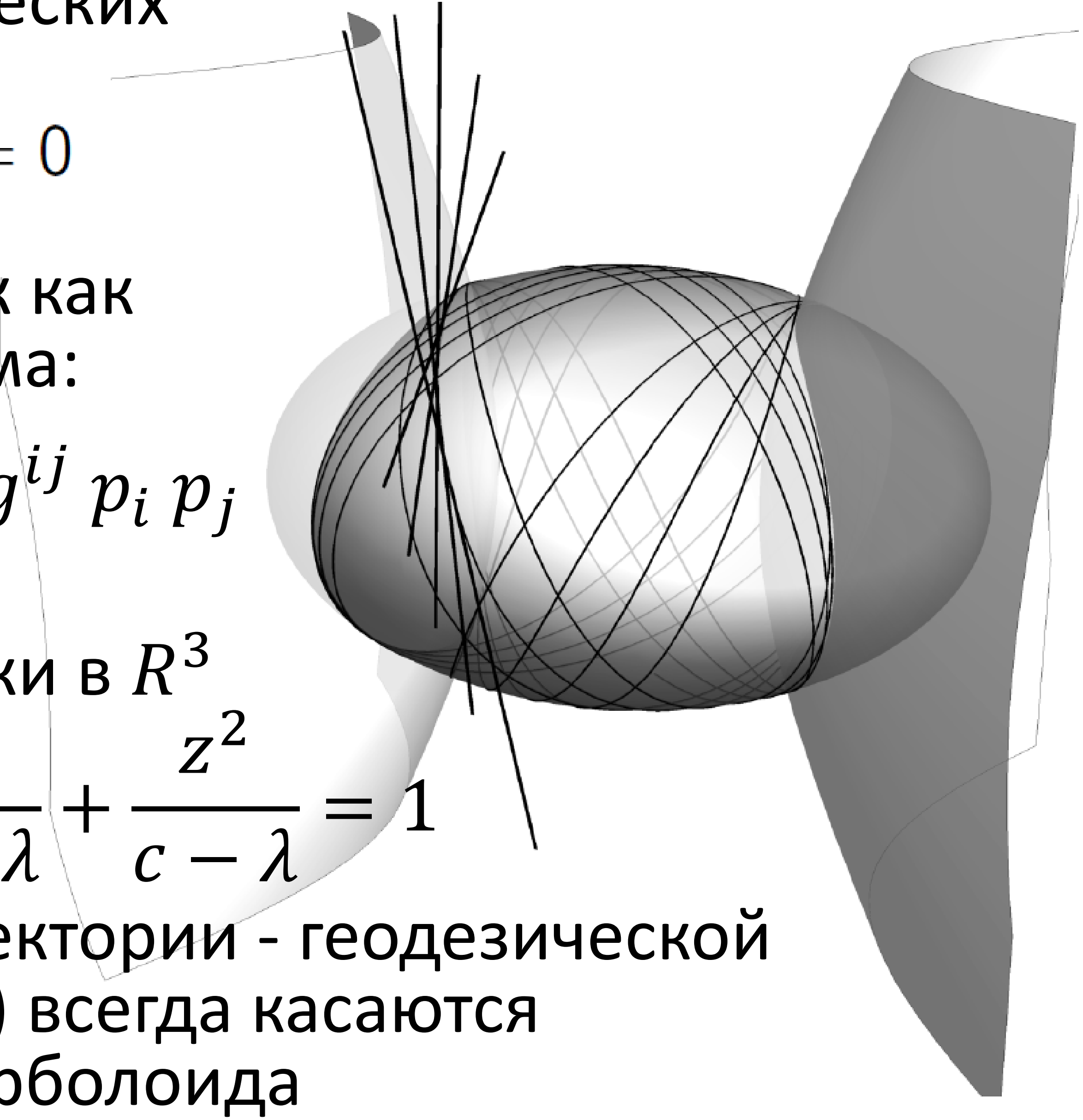
- Лиувиллева эквивалентность есть эквивалентность замыканий почти всех решений, так как в известных случаях, почти все торы Лиувилля являются нерезонансными.

- Инвариант — меченая молекула Фоменко–Цишанга, т.е. конечный граф Риба, оснащенный числовыми метками и типами атомов-бифуркаций (в вершинах графа).

- Инвариант классифицирует системы: две системы с 2 степенями свободы лиувиллево эквивалентны, если и только если их инварианты Фоменко-Цишанга совпадают

- Инвариант позволяет устанавливать не только является ли особое решение устойчивым/неустойчивым, но и описывает в топологических терминах поведение регулярных траекторий, близких к особому слою.

Геодезический поток на квадриках



- Уравнение геодезических

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{\alpha k}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0$$

- Геодезический поток как гамильтонова система:

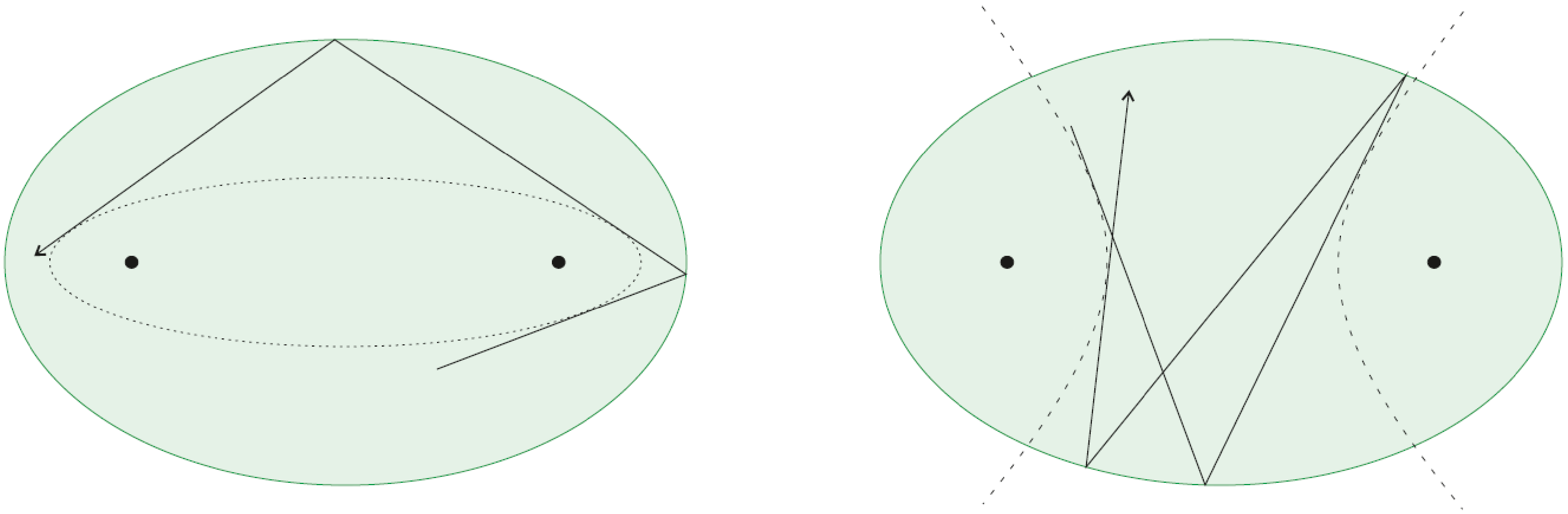
$$H = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g^{ij}\, p_i\, p_j$$

- Софокусные квадрики в R^3

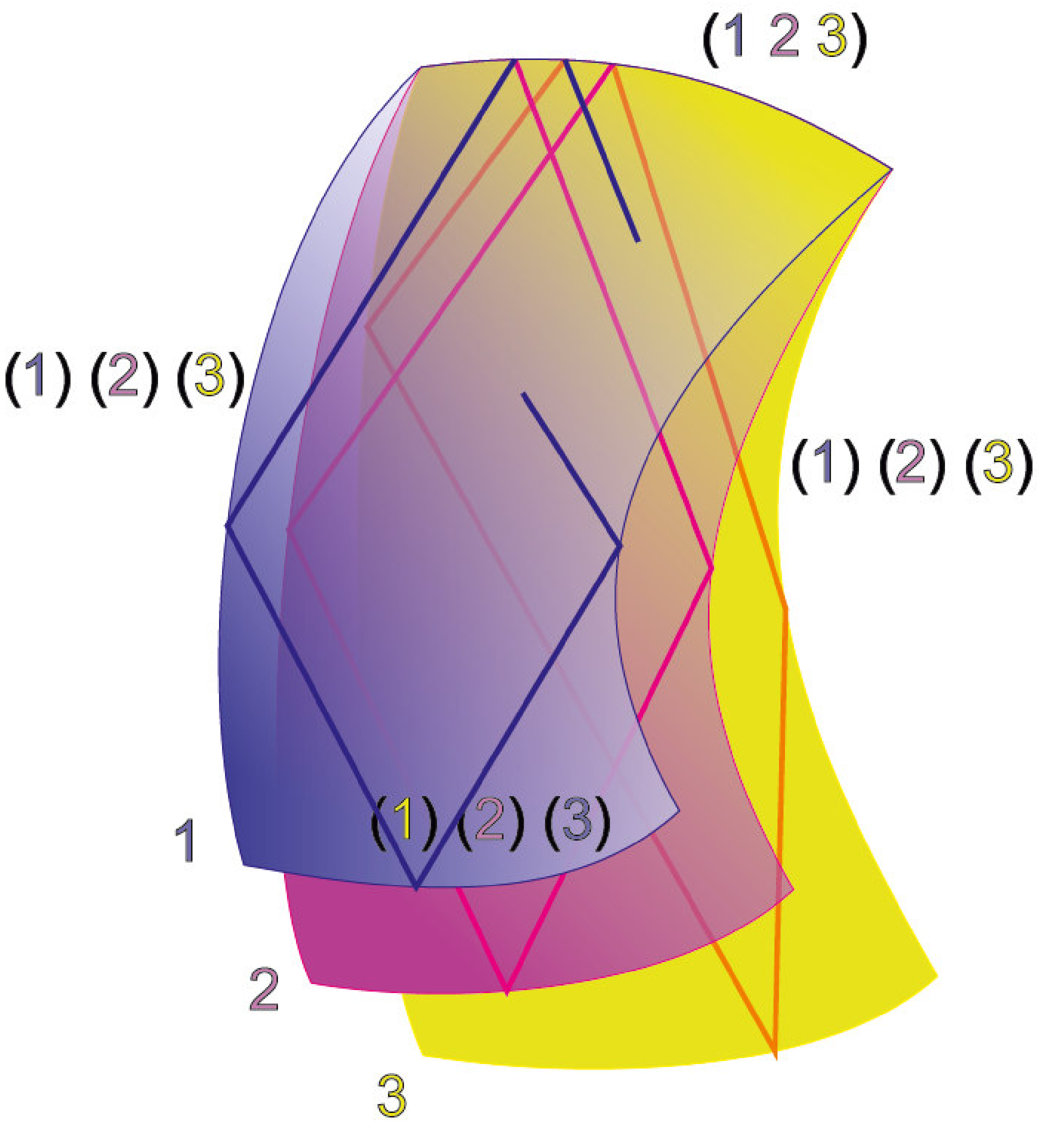
$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} = 1$$

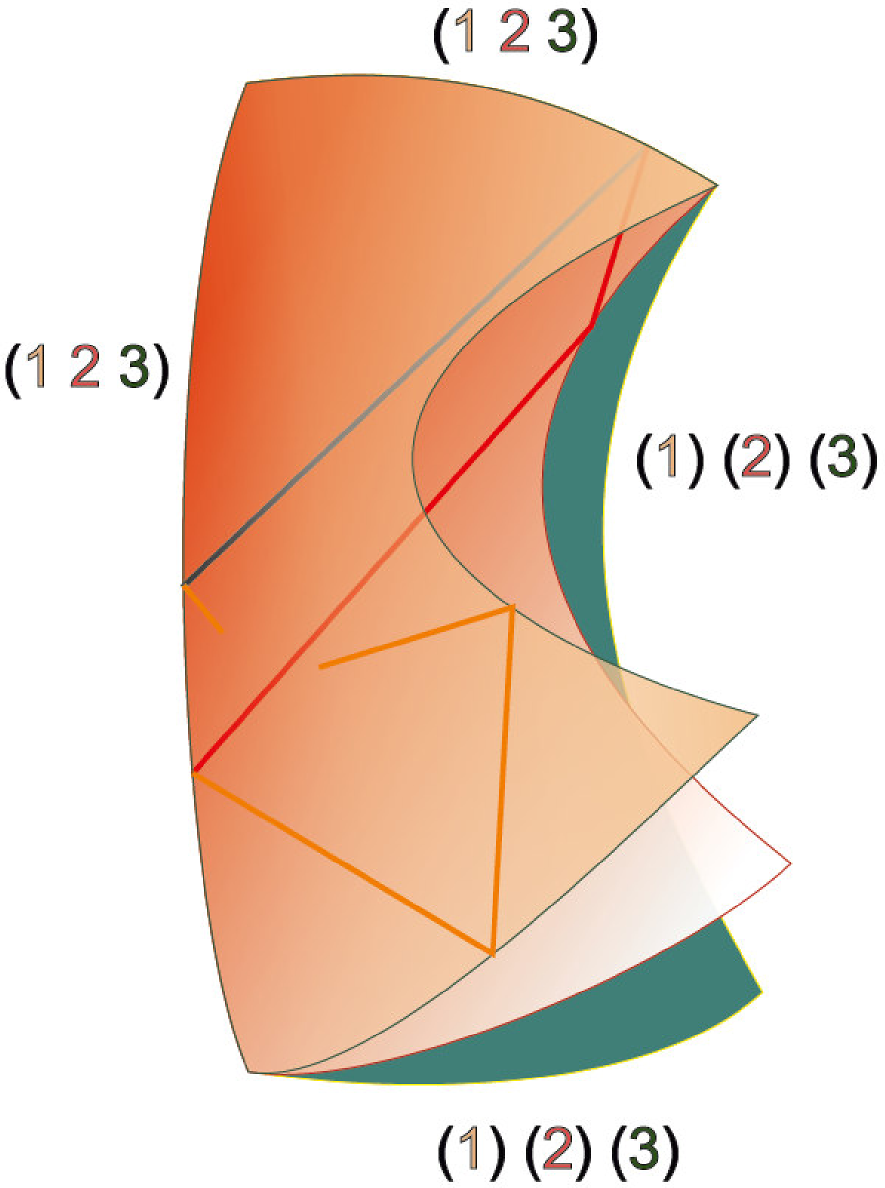
Вектора скорости траектории - геодезической (на эллипсоиде $\lambda = 0$) всегда касаются фиксированного гиперболоида из того же софокусного семейства

Биллиард в эллипсе интегрируем:
Звенья траектории лежат на прямых, касательных к некоторому эллипсу или к некоторой гиперболе, софокусных с граничным эллипсом.



Биллиардная книжка

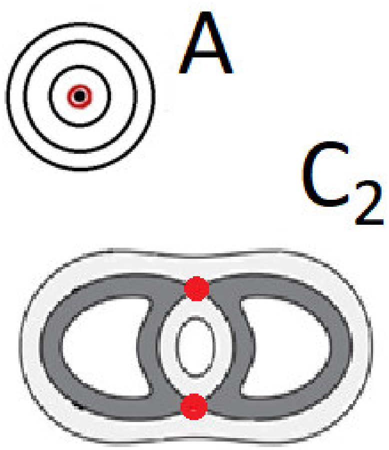


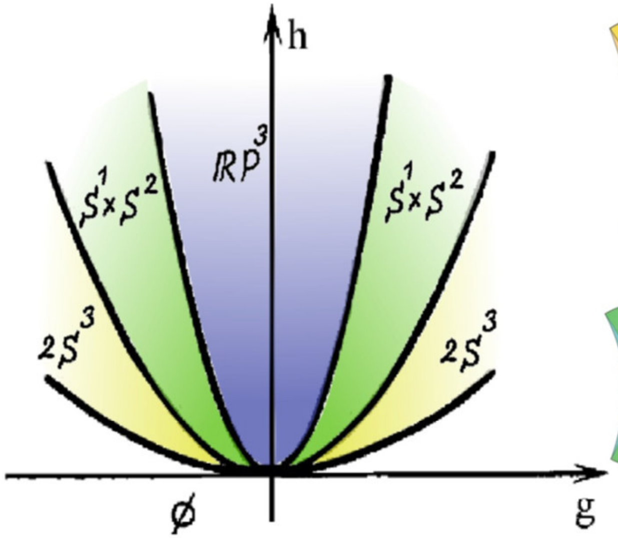


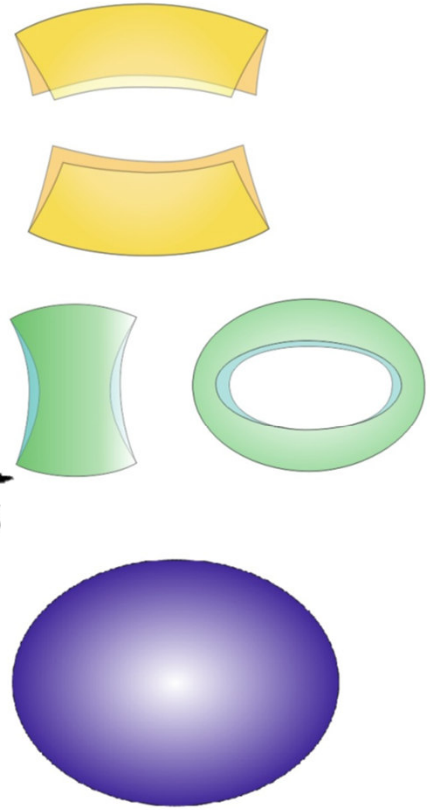
Волчок Эйлера, инварианты и биллиарды

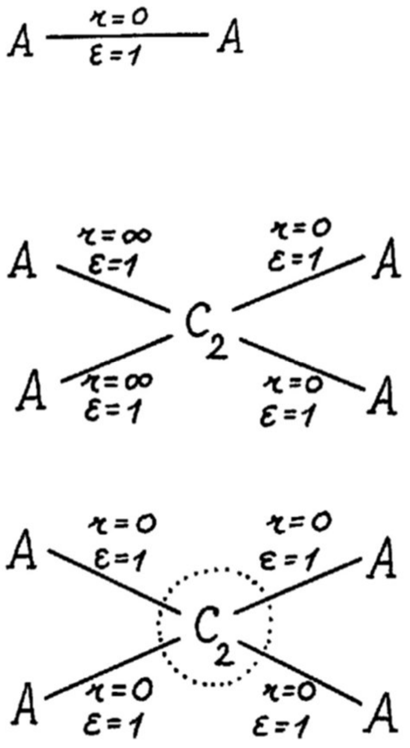
Волчок Эйлера – тв. тело, закрепл. шарниром в центре масс.
В разных зонах энергии H разные инварианты-молекулы.
Эквивалентен геодезическому потоку на эллипсоиде.
Софокусные биллиарды на CW-комплексах: **моделируют** их.

Атомы A – устойчивое вращение вокруг большой, малой осей инерции. Атом C_2 – неустойчивое вращение, вокруг средней.



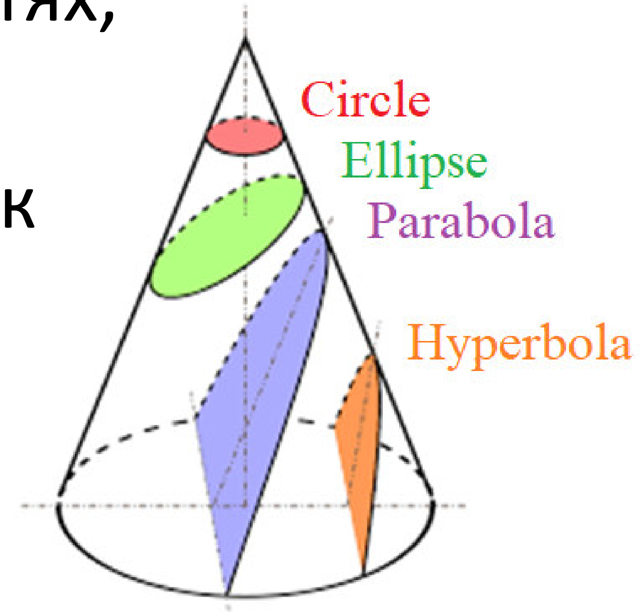






Открытые задачи, направления

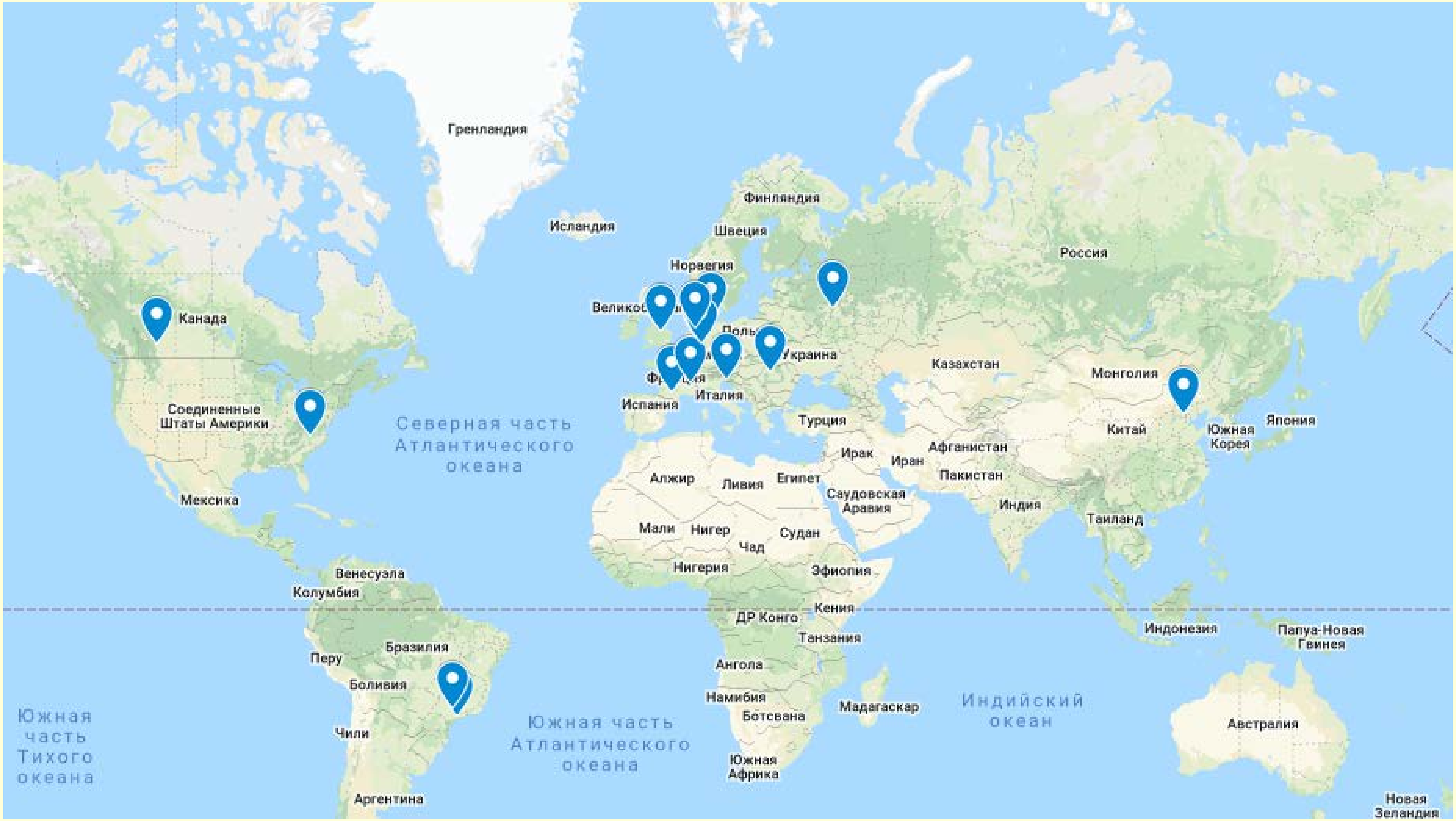
- Топологический анализ систем механики и матем. физики, их аналогов для разных алгебр Ли
- Изучение слоений с некомпактными слоями: бифуркации слоев могут происходить без особых точек.
- Комбинация обобщений биллиардов: CW-комплексы, потенциал, метрика, проскальзывание вдоль границы
- Движение частицы по квадрикам в многомерном пространстве, ограниченных ими областях, пересечениям квадрик.
- Изучение коммутирующих перестановок для 1-клеток (корешков) книжек, их влияния на топологию слоения.



Геометрическая топология

Е.А.Кудрявцева

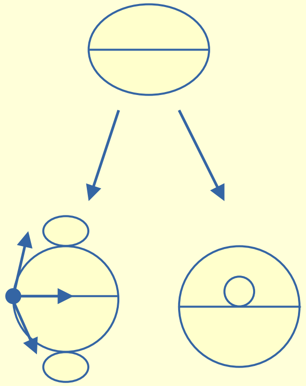
Совместные научные исследования Е.А.Кудрявцевой



Геометрическая топология

изучает «хорошие» отображения **f: M → N** (например, непрерывные или гладкие) и их **топологические инварианты** - т.е. свойства, не меняющиеся при любых «деформациях» отображения.

Геометрические методы.



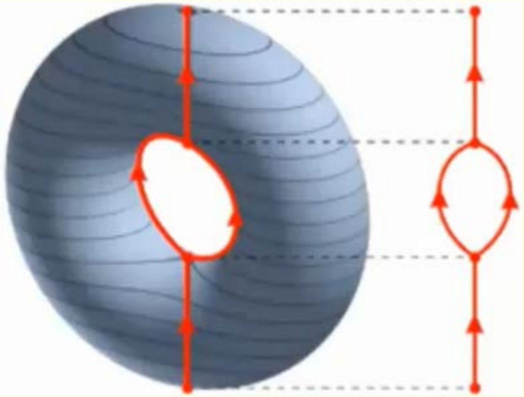
Задача 1. Пусть **f: M → N** - отображение графа **M** в поверхность **N**, являющееся погружением (т. е. локально инъективно и регулярно).
Описать **топологический инвариант I = I(f)** на множестве погружений **f: M → N**, т.ч. **f** и **g** гомотопны в классе погружений <==> **I(f) = I(g)**.

Решение:
2016: Д.А. Пермяков (*канд. дисс.*): для всех **N** кроме **RP²** (ответ: *циклический порядок ребер в вершине, индекс самопересечения цикла*),

2016: М.А. Ивашковский (4 курс): для **N = RP²** (*статья*, *лучший доклад* на конференции «Ломоносов-2017»).

Дифференциальная топология: комплекс функций Морса, 16-я проблема Гильберта.

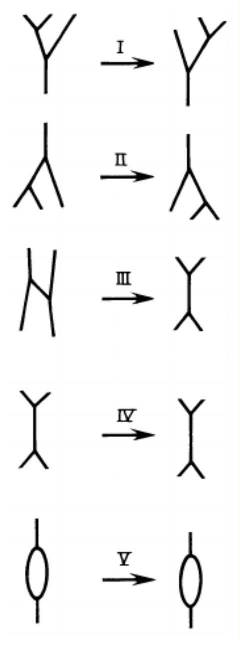
Пусть $\mathbf{M}=\mathbf{M}^2$ — двумерная поверхность, $\mathbf{f}: \mathbf{M} \to \mathbf{R}$.

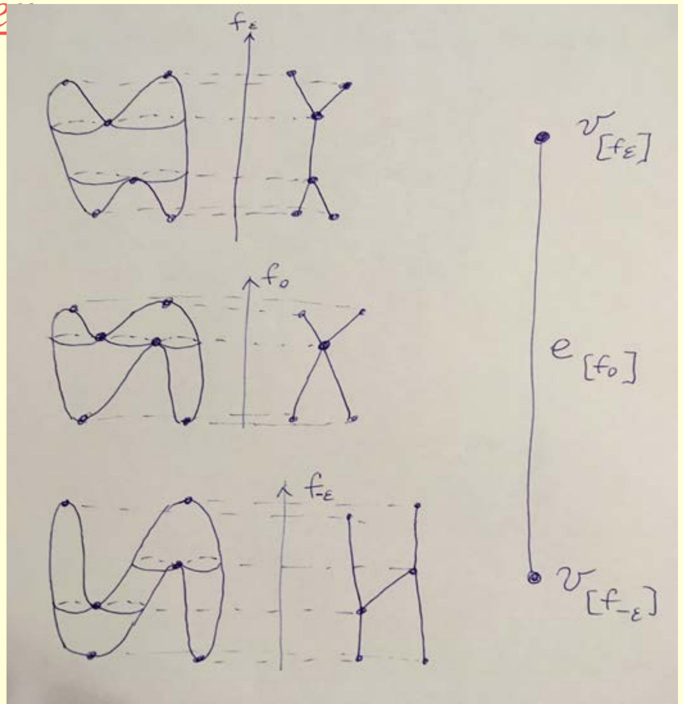


Морсовские критические точки:

1925: М. Морс: x^2+y^2, x^2-y^2, $-x^2-y^2$ (тип A_1).

2022: А.С. Оревкова (5 курс), Крит. точки типов A,D,E: *Приведение гладких функций к нормальной форме вблизи критических точе*





Задача 2. Для данного набора овалов γ на плоскости построить многочлен $P=P(x,y)$ т.ч. $h(\gamma) = \{P = 0\}$, $\lim_{|z| \to \infty} P(x,y) = +\infty$, $z = x + iy$, где $h: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ – гомеоморфизм.

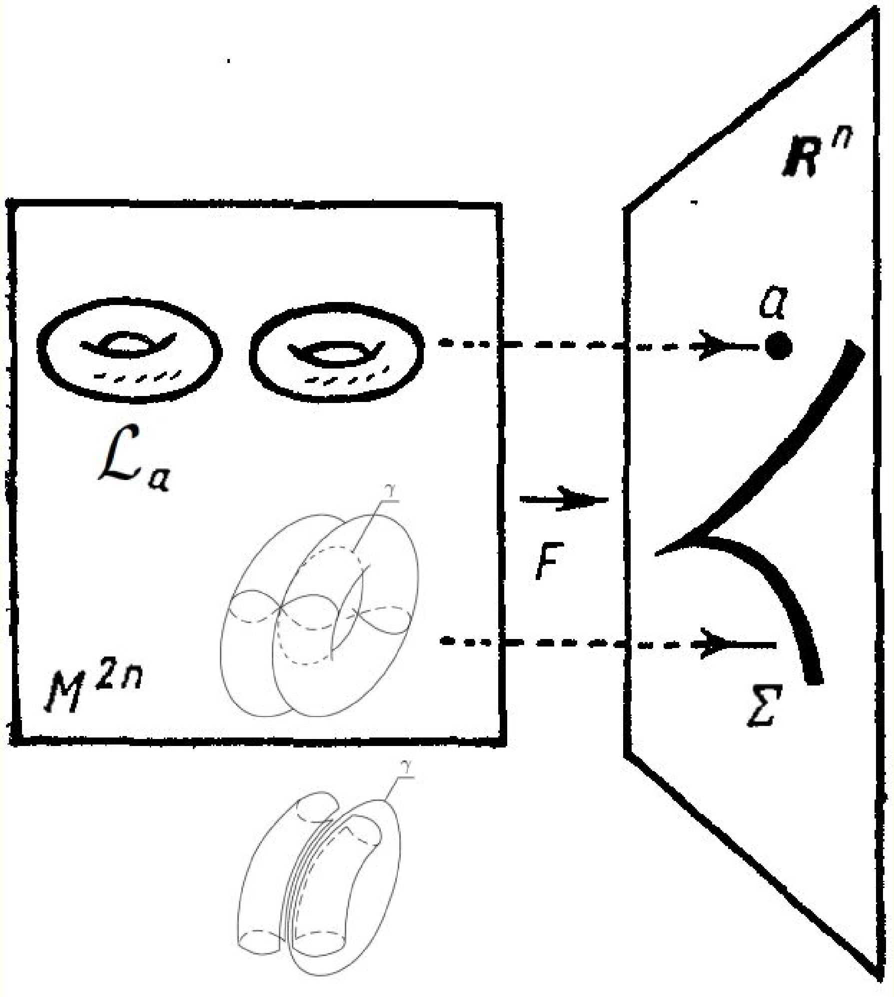
Пример: многочлен степени $2k$, где k — число овалов:
$P(x,y) = |z-z_1|^2\ldots|z-z_k|^2 - |z-w_1|^2\ldots|z-w_m|^2 =: Q(x,y) - R(x,y)$, $m < k$.
Ф-ция Морса $f(x,y) = Q(x,y) / R(x,y)$.

Задача 3. Описать все функции Морса и их перестройки (типов I–V и их комбинации). Описать **граф функций**.

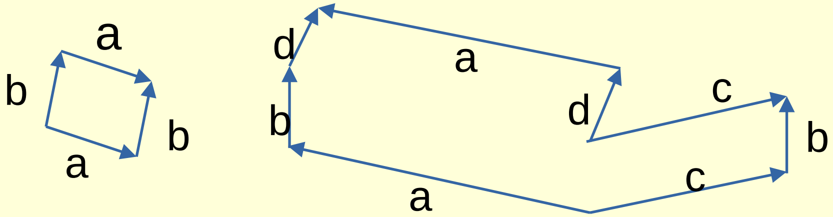
Интегрируемые гамильтоновы системы,
их топологические и симплектические инварианты

2022: *Лекторий* (А.А.Ошемков, А.Ю.Коняев, Е.А.Кудрявцева)
2017-2021: *Проект* «Топология и алгебра интегрируемых гамильтоновых систем» (**ИГ систем**)

ИГ система **$dx/dt = v(x)$** задана гладким отображением **$F=(f_1,\dots,f_n): M^{2n} \to R^n$**, где **$\{f_i, f_j\}=0$**, **$\omega(,v_i) = df_i$**, **$v = v_1$**. Возникает лагранжево **слоение с особенностями**: слои **L_a** — связные компоненты множеств уровня **$\{x: F(x)=a\}$**. Компактные регулярные слои — торы **T^n**.



Задача 1. Изучить слоение вблизи **некомпактных слоев**.
Примеры решений:
1906: Т. Леви-Чивита, регуляризация задачи Кеплера (**$z \to w = z^2$**),
2012: Е.А. Кудрявцева: рег. слои - *сферы с ручками и проколами*,
2019-21: *С.С. Николаенко*: некомп. *сингулярные* слои (*канд. дисс.*)



Достижения студентов и аспирантов кафедры

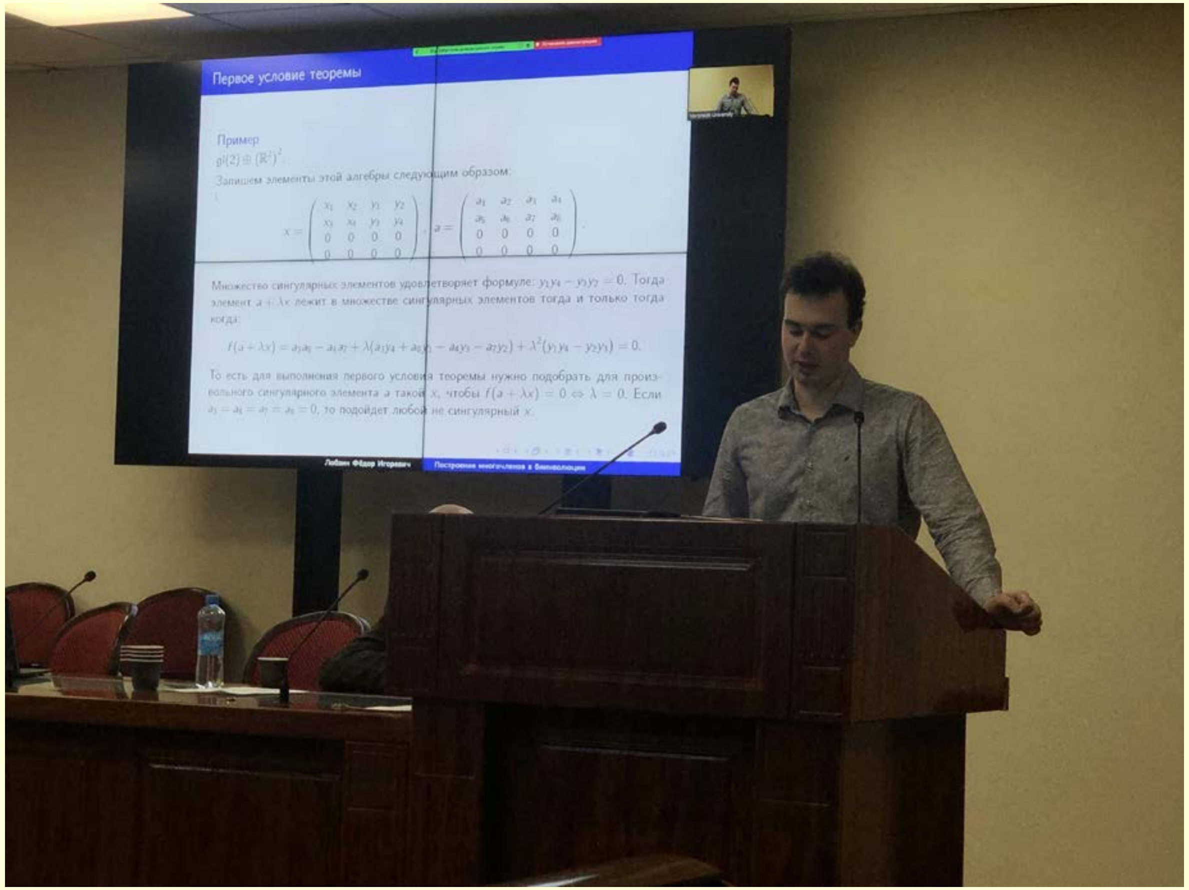
Стипендиаты фонда БАЗИС: М.В. Онуфриенко (2022, 2023), А.С. Оревкова (2022), В.А. Трифонова (2021-2023) (рук. Е.А. Кудрявцева).
Грант РФФИ для аспирантов: К.С. Ворушилов (2020-2021), рук. А.А. Ошемков.

Наши студенты и аспиранты на конференциях

2021: Конференция международных математических центров, Сочи:
Ф.И. Лобзин (**на фото**), М.В. Онуфриенко.

3rd International Conference on Integrable Systems & Nonlinear Dynamics, Ярославль:
Ф.И. Лобзин, М.В. Онуфриенко, Д. Акпан.

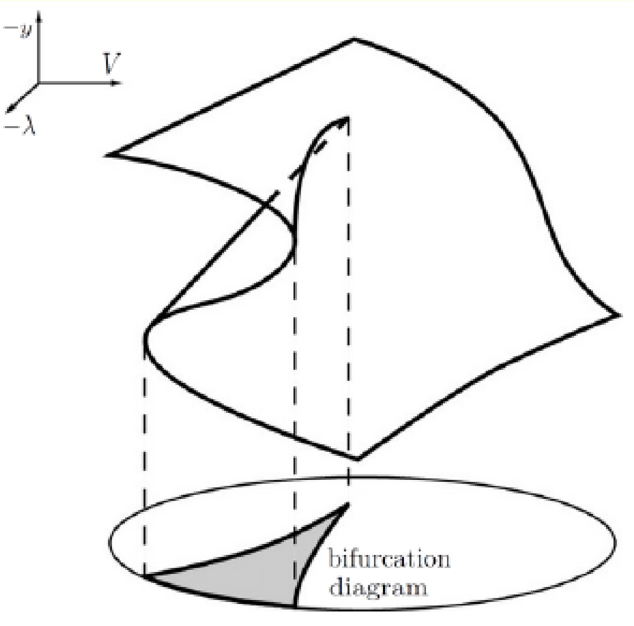
International Conference «Algebraic and Geometric Methods of Analysis», Одесса:
А.С. Оревкова (**пленарный доклад**).

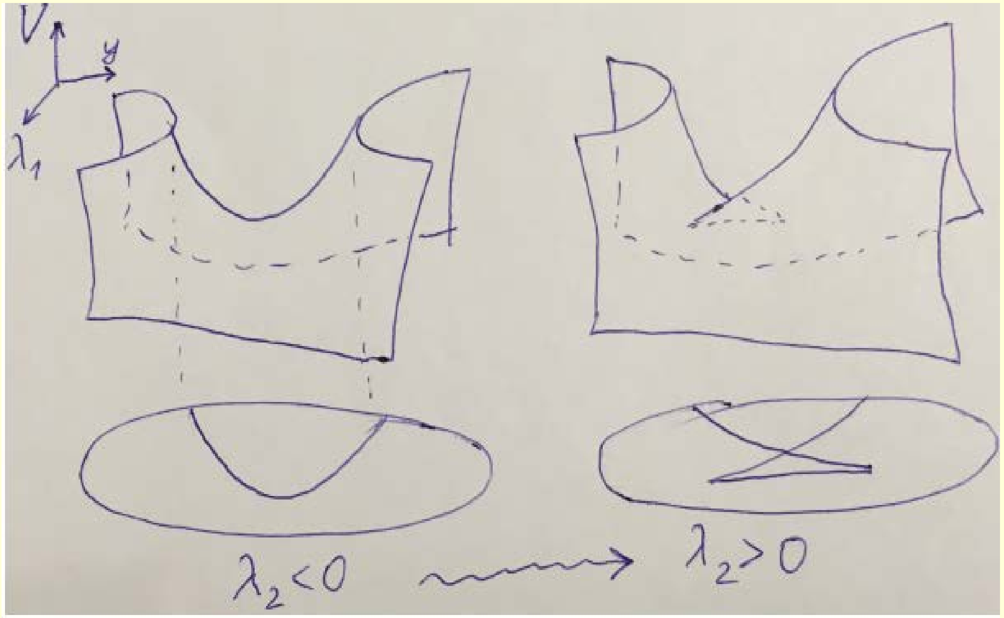


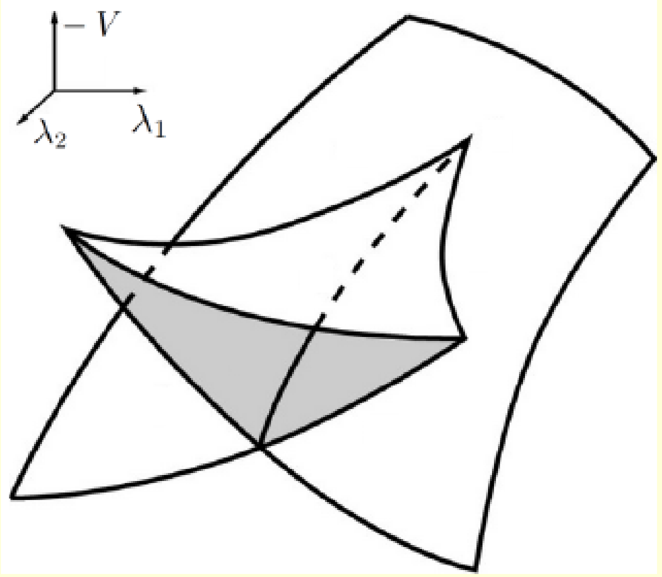
Задача 2. Описать все **структурно устойчивые** особые слои.

Складка: $V(y) = y^2$. Сборка Уитни: $V_I(y) = y^3 + I\,y$. Обобщение:
1998: В.В. Калашников, Параболические особенности с резонансами (кандидатская диссертация).

Ласточкин хвост: $V_I(y) = y^4 - I_2\,y^2 + I_1\,y$. Обобщение:
2023: М.В. Онуфриенко (6 курс), Бифуркации параболических особенностей с резонансами, *Classification of singularities of smooth functions with a finite cyclic symmetry group*

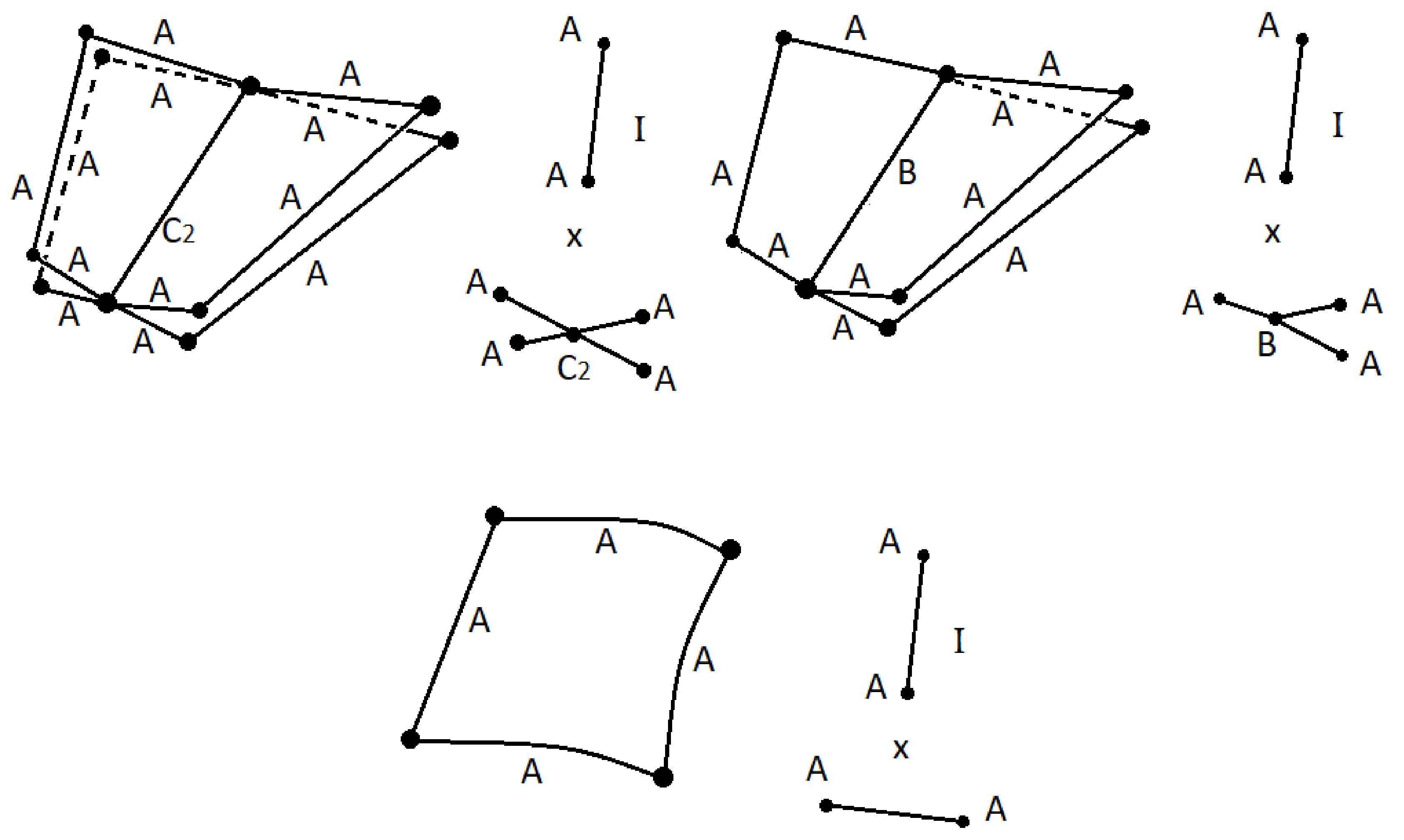




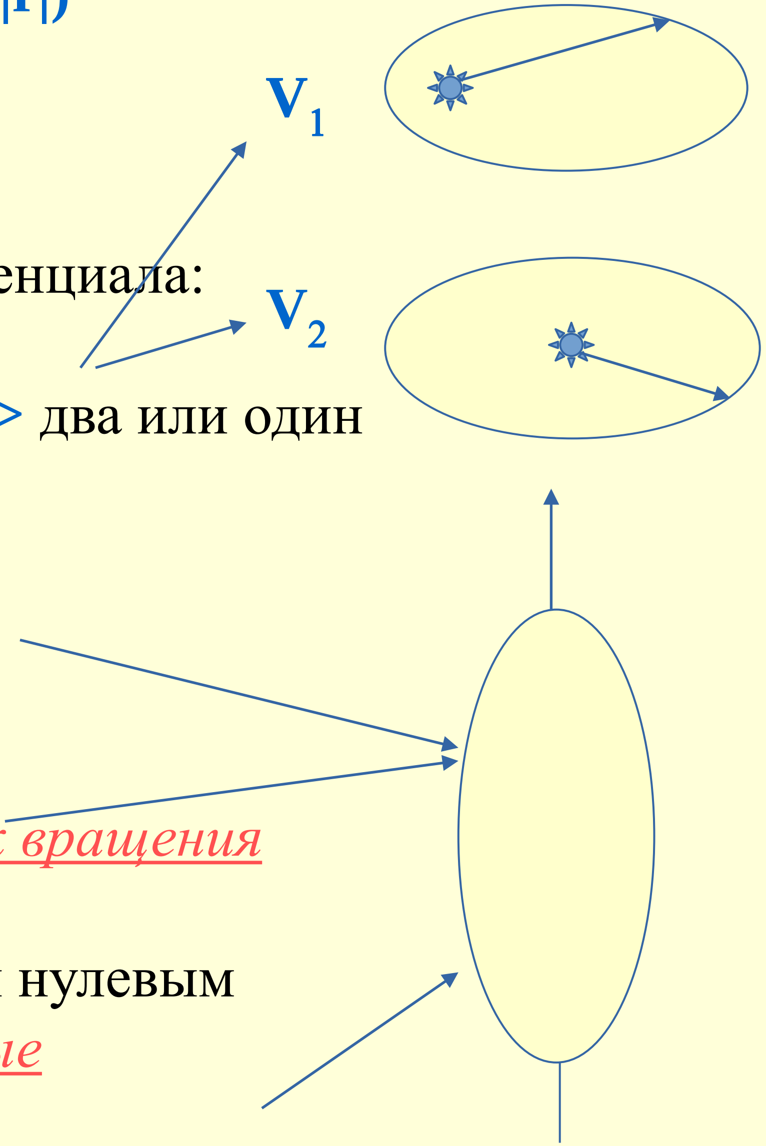


$f_1(x, y, I, \varphi) = x^2 + V_I(y)$, $f_2(x, y, I, \varphi) = I$.

Задача 3. Описать все лагранжевы слоения с особенностями, имеющие **заданую базу** (т.е. **пространство слоев**):



Задача 4. Описать все поверхности вращения и центральные потенциалы на них $\mathbf{V(|r|)}$, т.ч. все решения уравнения Ньютона $\mathbf{d^2r / dt^2 = - grad\ V(|r|)}$ периодичны.



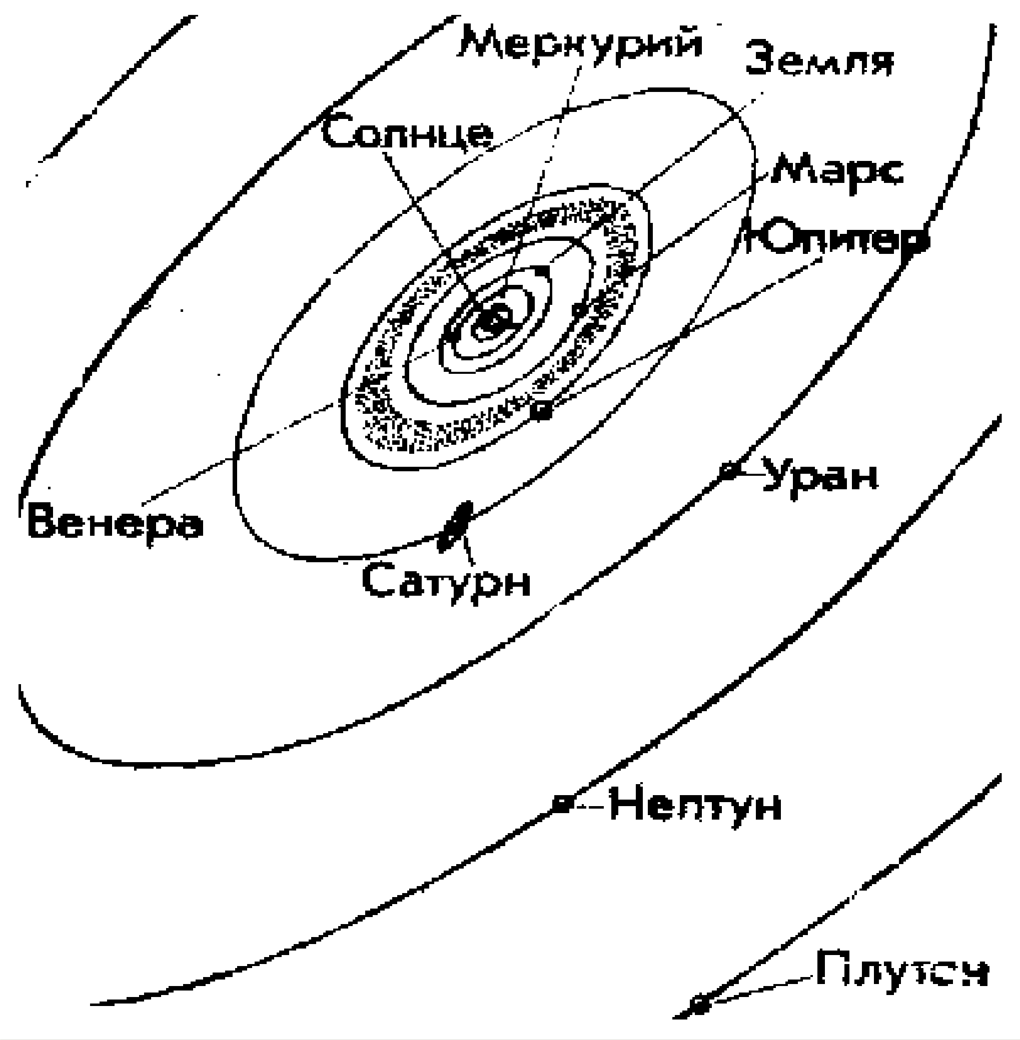
Решения:
1873: Бертран: евклидова плоскость $\mathbf{R^2}$ => два «замыкающих» потенциала: гравитационный $\mathbf{V_1(|r|) = -A/|r| + B}$ и упругий $\mathbf{V_2(|r|) = A|r|^2 + B}$.
1877: Дарбу, **1992**: Perlick: поверхности вращения *без экваторов* => два или один «замыкающих» потенциала: $\mathbf{V_1(|r|)}$, $\mathbf{V_2(|r|)}$ (или только $\mathbf{V_2(|r|)}$).
1978: А. Бессе: груши Таннери с нулевым потенциалом $\mathbf{V_0(|r|) = B}$.

2015-18: Д.А. Федосеев: поверхности вращения *с экваторами* =>
по сути $\mathbf{V_1(|r|)}$, $\mathbf{V_2(|r|)}$, $\mathbf{V_3(|r|)}$ (*кандидатская диссертация*),
Механические системы с замкнутыми орбитами на многообразиях вращения

2019: *С.А. Подлипаев*: поверхности вращения с магнитным полем и нулевым потенциалом (3 курс), *Суперинтегрируемые бертрановы магнитные геодезические потоки*

Геометрические методы в Небесной механике

Солнечная система:



Почти вся масса Солнечной системы (99,87%) сосредоточена **в Солнце**. Массы остальных тел – это **малые параметры** задачи.

Планеты обращаются вокруг Солнца по **почти круговым орбитам**, лежащим **приблизительно в одной плоскости**.

Проблема 1: Объяснить «люки» Кирквуда в поясе астероидов.

Сводится к изучению задачи 3 тел «**Солнце-Юпитер-астероид**».

Проблема 2: Объяснить «щели» в кольце Сатурна.

Кольцо Сатурна (Галилей 1610, Гюйгенс 1655) состоит из **отдельных частиц** (Максвелл).

Кольцевая структура состоит из **четырех концентрических колец,** отделенных друг от друга **резкими темными промежутками** – **щелями Кассини.**

Проблема **щелей** сводится к изучению системы «**Солнце-Сатурн-Мимас-частица** кольца Сатурна» (задачи 4 тел).

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

ПРИГЛАШАЕМ ВАС НА КАФЕДРУ!

Алгебраическая топология и ее приложения (докладчик - Попеленский).

И.М.Никонов

Ф.Ю.Попеленский

Г.И.Шарыгин

Алгебраическая геометрия и ее приложения

А. Б. Жеглов, В. В. Пржиялковский

Алгебраическая геометрия

Алгебраическая геометрия — один из самых глубоких, развитых, сложных и распространенных разделов математики. Она связана с дифференциальной и симплектической геометрией, топологией, комплексным и функциональным анализом, алгеброй, теорией категорий, дискретной математикой, теорией вероятности, статистикой, теорией игр, компьютерной алгеброй, криптографией, математической физикой и многими другими областями.

Объект изучения классической алгебраической геометрии — системы полиномиальных уравнений и их решения.

Старт классической алгебраической геометрии был дан Виетом и Декартом. Паскаль и Дезарг развили проективную геометрию. Начало систематической алгебраической геометрии — XIX век. В дальнейшем алгебраическая геометрия развивалась благодаря итальянской школе, известной своей красотой. Большой вклад внес, с алгебраической точки зрения, Гильберт.

Алгебраическая геометрия

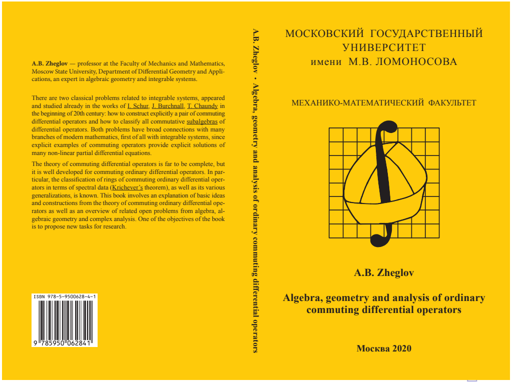
Расцвет алгебраической геометрии: XX век. В середине века революцию совершила французская школа. Бурный расцвет алгебраической геометрии в 60-80-е годы. Большую роль в нем сыграла советская (а потом и российская) школа алгебраической геометрии, основанная И. Р. Шафаревичем. Его учениками и “научными потомками” являются ученики Аракелов, Голод, Долгачёв, Исковских, Кострикин, Манин, Мойшезон, Орлов, Паршин, Прохоров, Тюрин, Шокуров; большинство из них работали на мехмате. Филдсовские медали за последние тридцать лет: Дринфельд (1990), Мори (1990), Бордчердс (1998), Концевич (1998), Лаффорг (2002), Воеводский (2002), Окуньков (2006), Тяу (2010), Биркар (2018), Шольце (2018). С 2003 года (даты основания) премию Абеля получили Серр, Атья, Делинь, Ленглендс.

Одним из важнейших центров алгебраической геометрии в мире является Москва.

Алгебраическая геометрия

А. Б. Жеглов: научные интересы:

- Алгебраическая геометрия квантовых интегрируемых систем.
- Многомерное соответствие Кричевера.
- Алгебро-геометрические точные решения нелинейных уравнений, алгебраическая теория уравнения КП.



A.B. Zheglov — professor at the Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University, Department of Differential Geometry and Applications, an expert in algebraic geometry and integrable systems.

There are two classical problems related to integrable systems, appeared and studied already in the works of I. Schur, J. Burchnall, T. Chaundy in the beginning of 20th century: how to construct explicitly a pair of commuting differential operators and how to classify all commutative subalgebras of differential operators. Both problems have broad connections with many branches of modern mathematics, first of all with integrable systems, since explicit examples of commuting operators provide explicit solutions of many non-linear partial differential equations.

The theory of commuting differential operators is far to be complete, but it is well developed for commuting ordinary differential operators. In particular, the classification of rings of commuting ordinary differential operators in terms of spectral data (Krichever's theorem), as well as its various generalizations, is known. This book involves an explanation of basic ideas and constructions from the theory of commuting ordinary differential operators as well as an overview of related open problems from algebra, algebraic geometry and complex analysis. One of the objectives of the book is to propose new tasks for research.

ISBN 978-5-9500628-4-1
9 785950 062841

A.B. Zheglov • Algebra, geometry and analysis of ordinary commuting differential operators

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

A.B. Zheglov

Algebra, geometry and analysis of ordinary commuting differential operators

Москва 2020

Алгебраическая геометрия

В. В. Пржиялковский: научные интересы:

- Бирациональная геометрия: многообразия Фано, рациональность, группы автоморфизмов.
- Методы торической геометрии и взвешенные полные пересечения.
- Алгебро-геометрические аспекты зеркальной симметрии. Топологическая зеркальная симметрия и зеркальная симметрия вариаций структур Ходжа. Торические модели Ландау–Гинзбурга. Гипотезы Кацаркова–Концевича–Пантева и P=W.

Более подробную презентацию и видеолекцию смотрите в записи на нашем сайте :
http://dfgm.math.msu.su/

Алгебраическая геометрия

Что изучать

- Элементарное введение: М. Рид, “Алгебраическая геометрия для всех”; Дж. Харрис “Алгебраическая геометрия. Начальный курс”.
- Более основательное: И. Р. Шафаревич, “Основы алгебраической геометрии”.
- Основной учебник: Р. Хартсхорн, “Алгебраическая геометрия”.

Где изучать

- Курс алгебраической геометрии на третьем-четвертом курсе.
- Спецкурсы по алгебраической геометрии
- Спецкурсы НОЦ МИАН
- Семинары Шафаревича и Исковских в МИАН.

Компьютерная геометрия

Г.В.Носовский

Д.П.Ильютко

Компьютерная геометрия

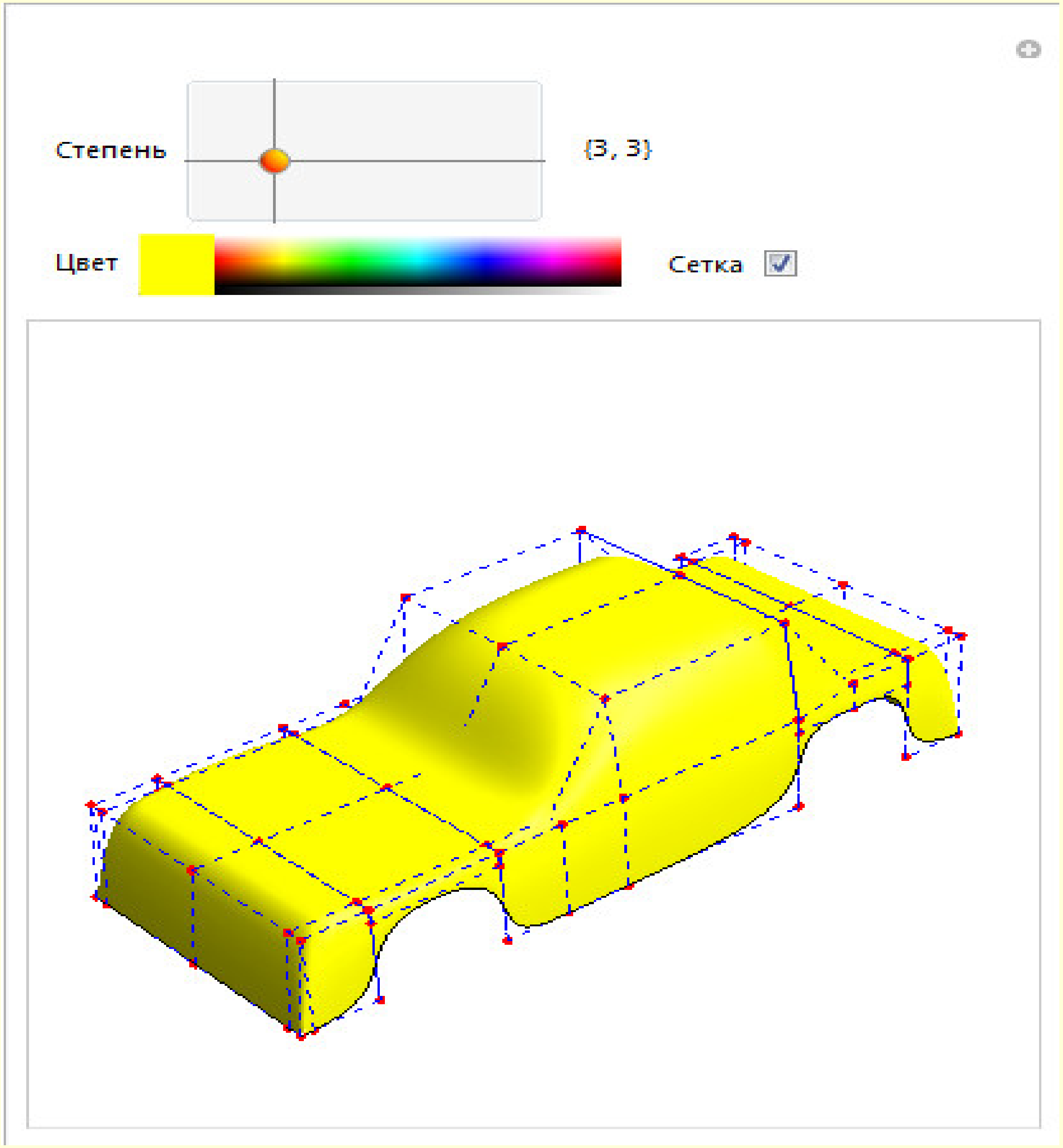
Представление геометрических образов на мониторе компьютера с возможностями:

- быстрого перерасчета в реальном времени (=> используются лишь рациональные функции);
- быстрого вычисления локальных дифференциально геометрических характеристик (кривизны, кручения, касательной плоскости, главных кривизн и главных направлений);
- произвольного масштабирования без потери плавности линий (визуальной гладкости);
- точного представления кривых и поверхностей 2-го порядка;
- удобного способа управления (редактирования) кривых и поверхностей пользователем, в том числе - локального управления заданным участком без изменения окружения, гладкого сопряжения между собой, деления на части и т.п.

Компьютерная геометрия

- **Классические подходы:**
  - сплайны: Эрмита, кубические, составные, псевдоупругие и т.д.;
  - поверхности Кунса и их обобщения (поверхности, затягивающие заданный остов из кривых);
  - треугольные поверхности, триангуляции.
- **Подходы современной компьютерной геометрии:**
  - кривые и поверхности Безье - основаны на полиномах Бернштейна;
  - *B*-кривые и *B*-поверхности (NURBS) – основаны на разделенных разностях и обладающие расширенным множеством управляющих параметров с возможностью локального редактирования.

Компьютерная геометрия



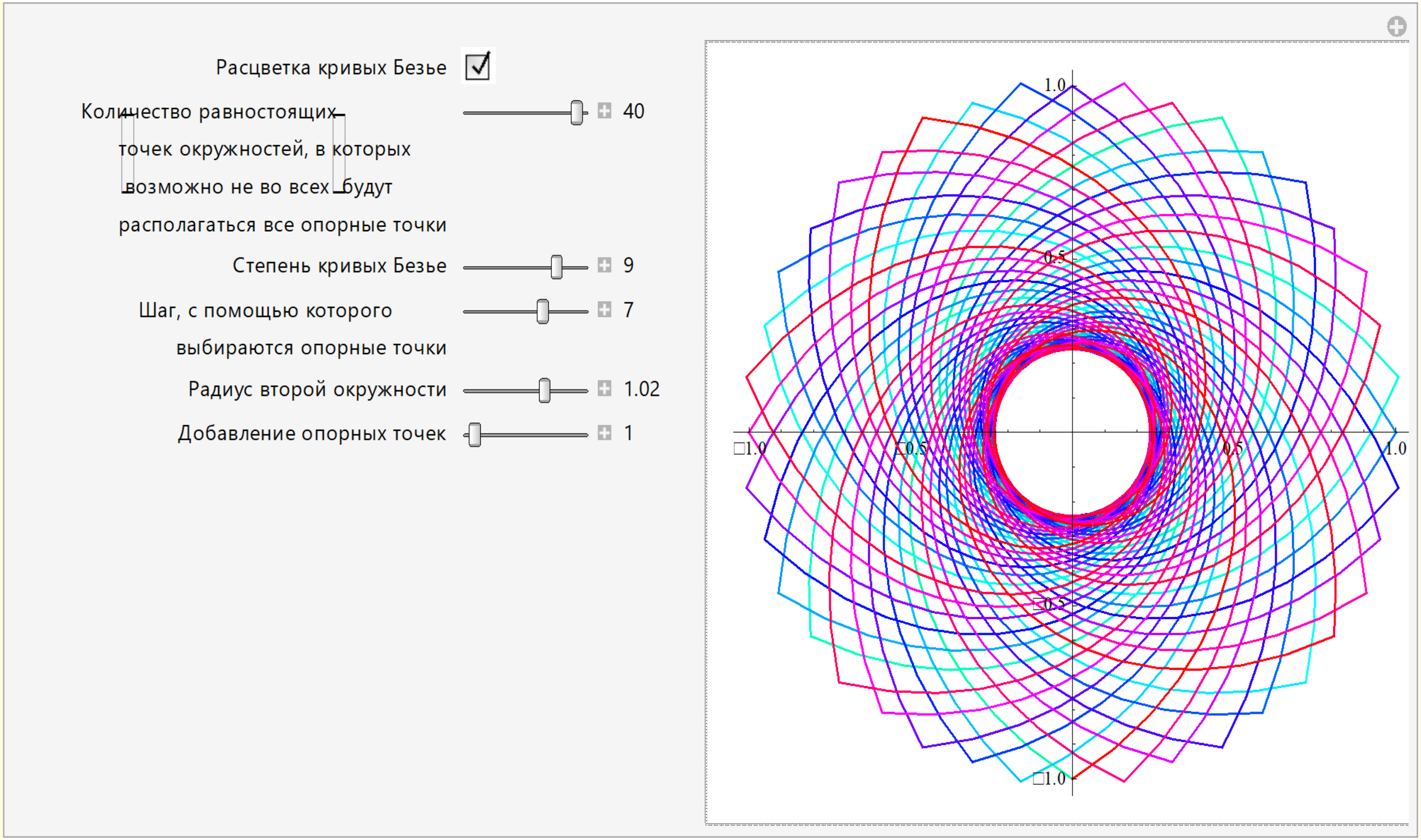
Степень {3, 3}

Цвет

Сетка ☑

Компьютерная геометрия

Пример: использование кривых Безье для создания художественных образов



Расцветка кривых Безье ☑

Количество равностоящих точек окружностей, в которых возможно не во всех будут располагаться все опорные точки 40

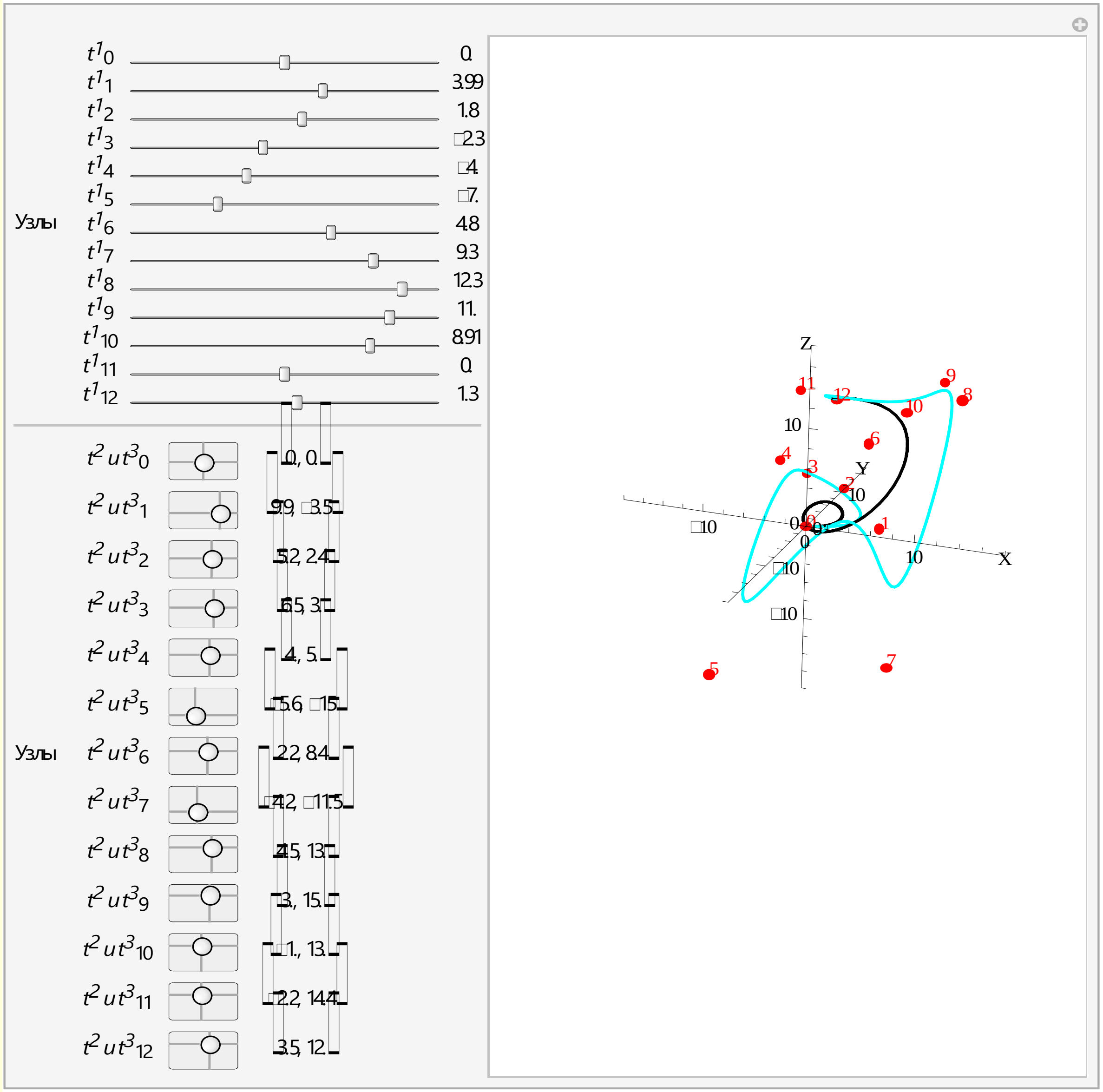
Степень кривых Безье 9

Шаг, с помощью которого выбираются опорные точки 7

Радиус второй окружности 1.02

Добавление опорных точек 1

Компьютерная геометрия



Узлы

t^{1}_{0}	0.
t^{1}_{1}	3.99
t^{1}_{2}	1.8
t^{1}_{3}	□2.3
t^{1}_{4}	□4.
t^{1}_{5}	□7.
t^{1}_{6}	4.8
t^{1}_{7}	9.3
t^{1}_{8}	12.3
t^{1}_{9}	11.
t^{1}_{10}	8.91
t^{1}_{11}	0.
t^{1}_{12}	1.3

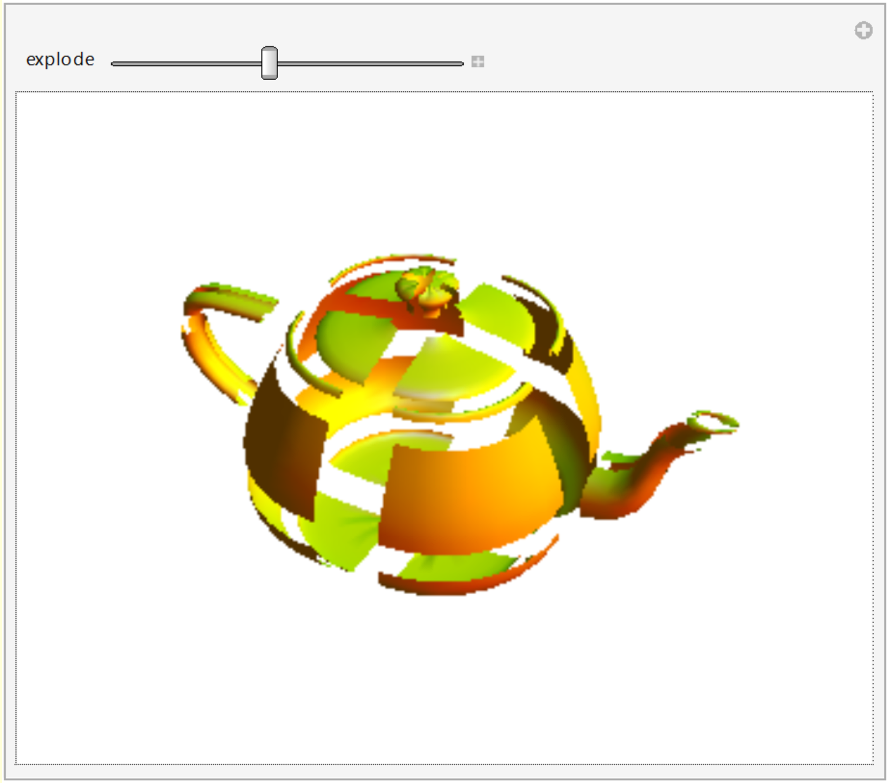
Узлы

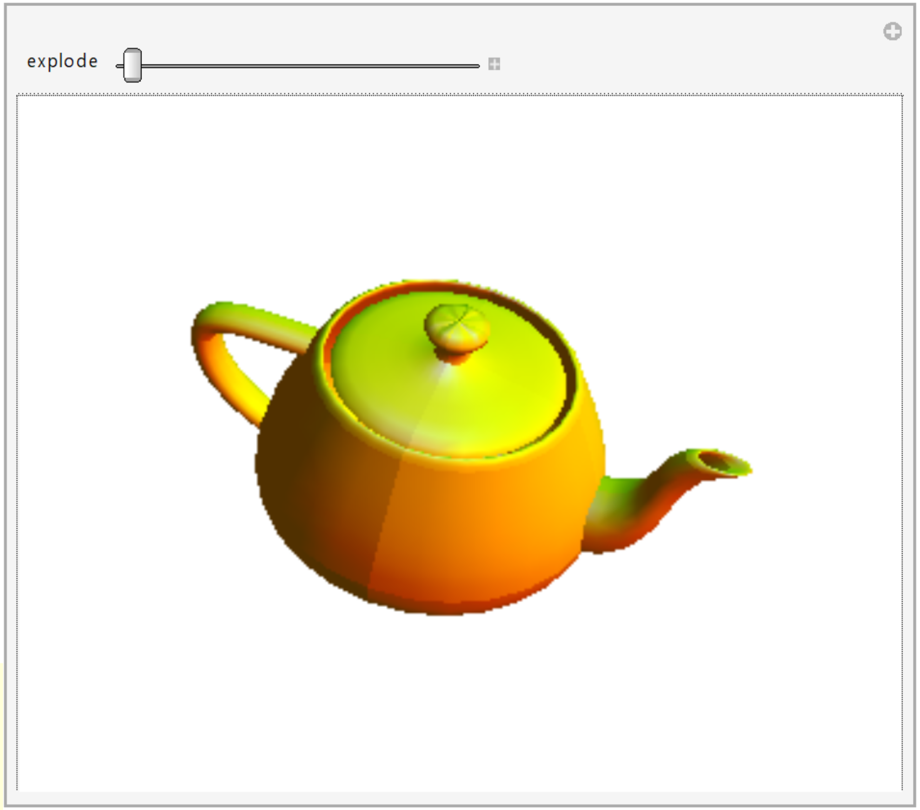
$t^{2}ut^{3}_{0}$	0., 0.
$t^{2}ut^{3}_{1}$	9.9, □3.5
$t^{2}ut^{3}_{2}$	5.2, 2.4
$t^{2}ut^{3}_{3}$	6.5, 3.
$t^{2}ut^{3}_{4}$	4., 5.
$t^{2}ut^{3}_{5}$	□5.6, □15
$t^{2}ut^{3}_{6}$	2.2, 8.4
$t^{2}ut^{3}_{7}$	□4.2, □11.5
$t^{2}ut^{3}_{8}$	4.5, 13.
$t^{2}ut^{3}_{9}$	3., 15.
$t^{2}ut^{3}_{10}$	□1., 13.
$t^{2}ut^{3}_{11}$	□2.2, 14.4
$t^{2}ut^{3}_{12}$	3.5, 12.

В-кривая в пространстве с автоматическим выбором узлов в сравнении с кривой Безье, построенной по тем же опорным точкам. Обратите внимание насколько более послушно ведет себя *B*-кривая при управлении опорными точками, чем кривая Безье. Кривая Безье по-другому учитывает влияние опорных точек на кривую, и при управлении опорными точками ведет себя гораздо более вязко, чем *B*-кривая.

Компьютерная геометрия

Чайник, созданный с помощью поверхностей Безье





СПЕЦКУРС

Г.В.Носовский и Д.П.Ильютко

“Компьютерная геометрия”

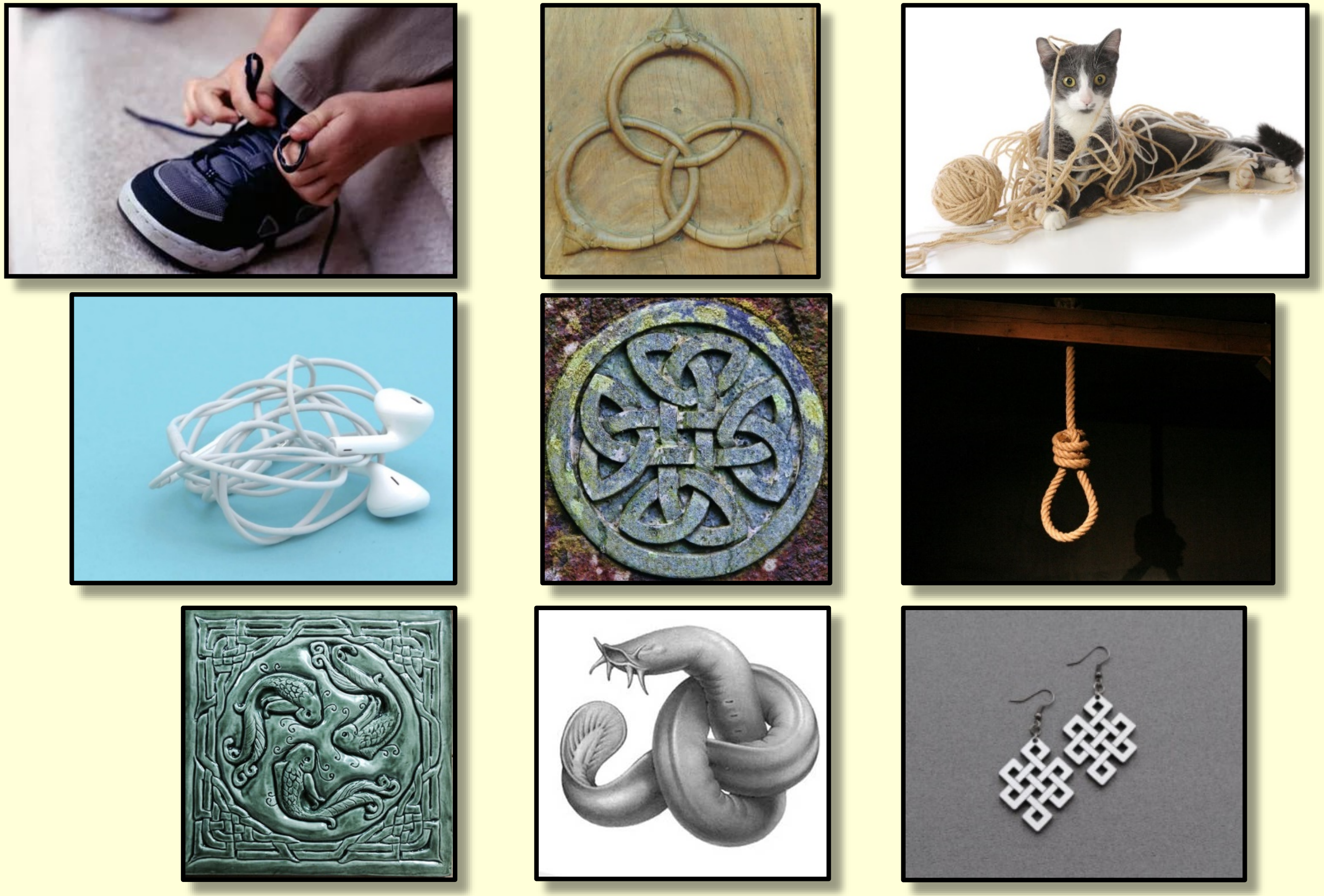
пон. 18:30, ауд. 12-07

Маломерная топология и теория графов

Д.П.Ильютко

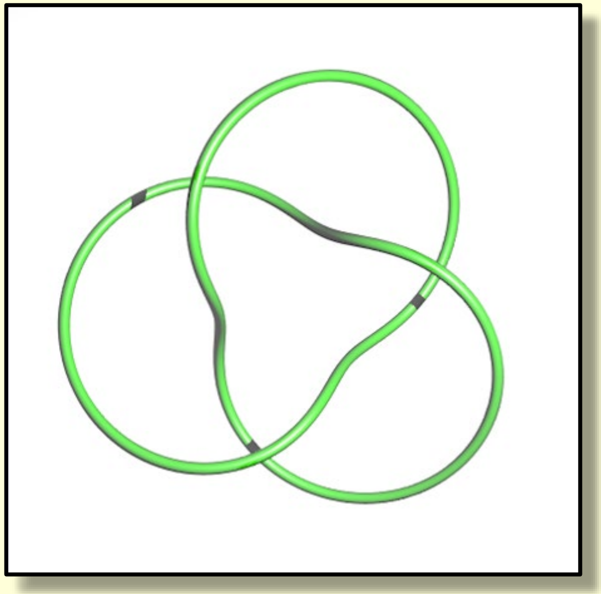
И.М.Никонов

Узлы

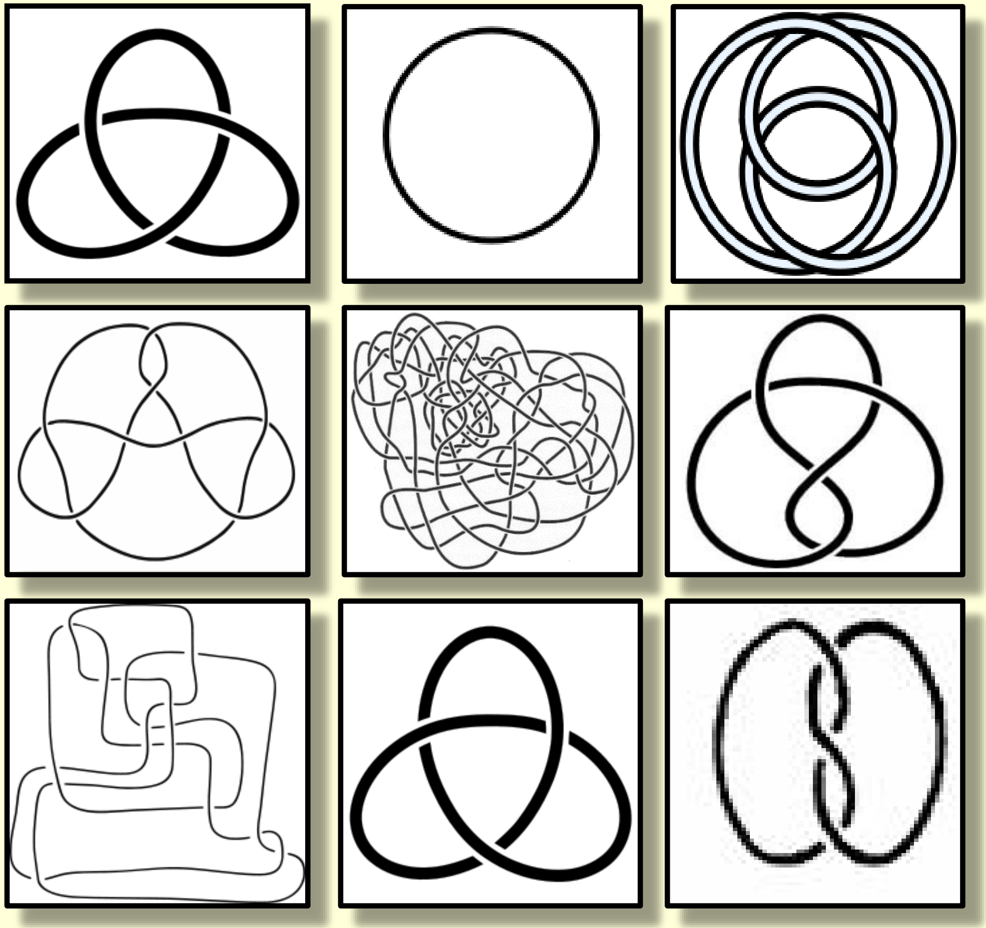


Теория узлов

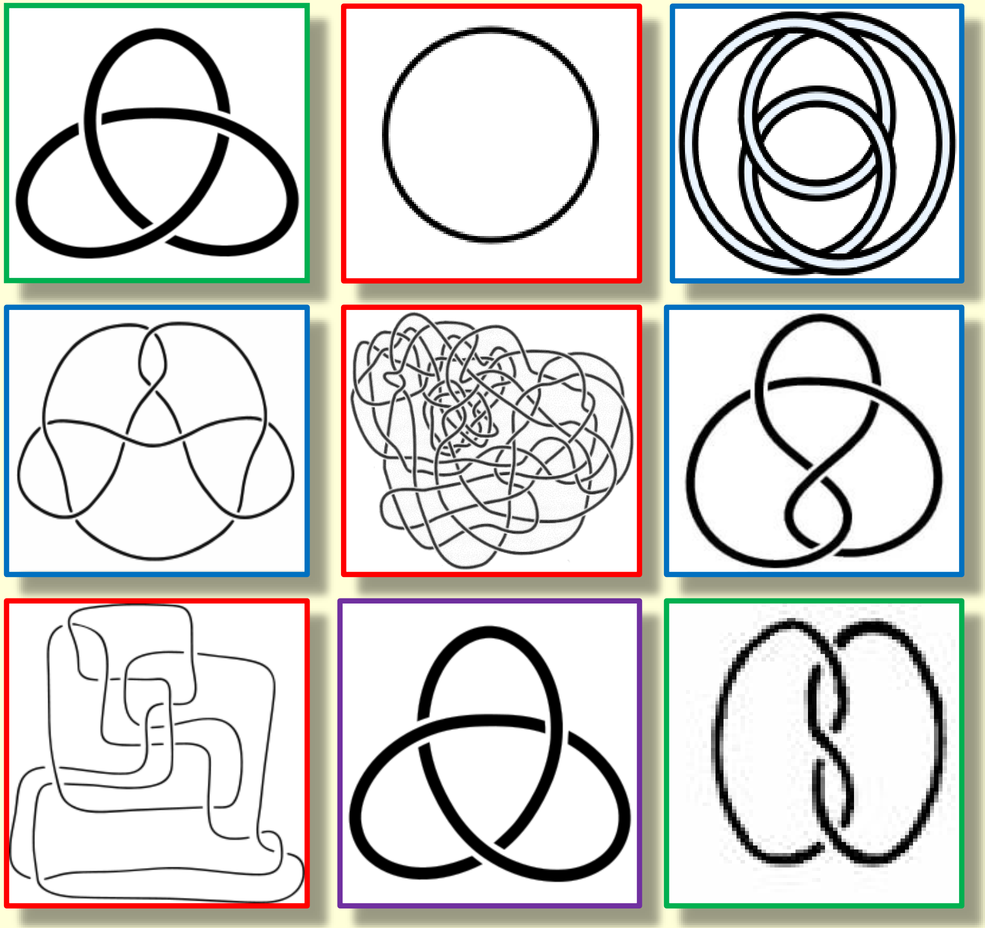
Замкнутая кривая в трехмерном пространстве без самопересечений



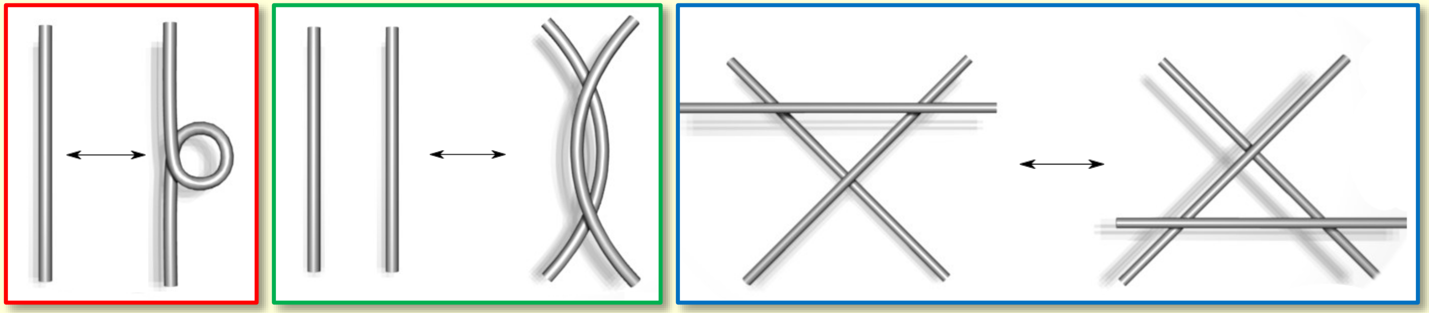
Основная проблема теории узлов

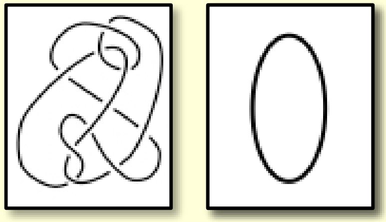


Основная проблема теории узлов

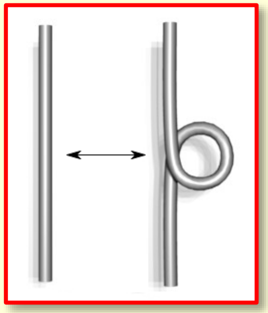


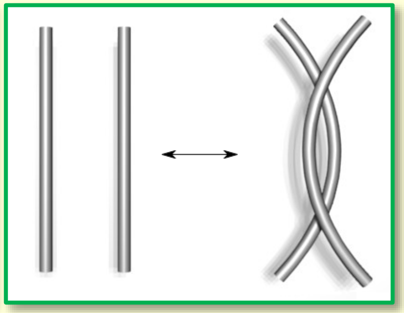
Движения Рейдемейстера

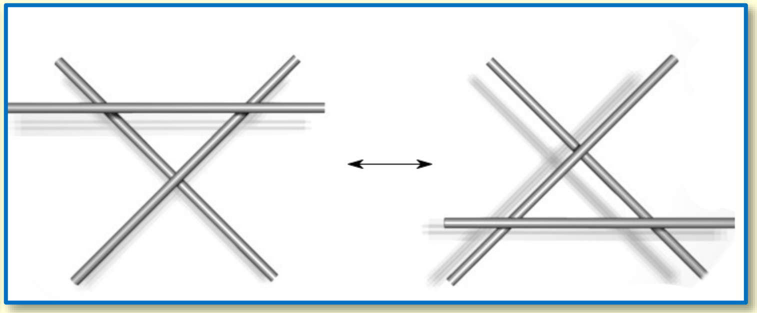


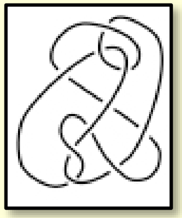


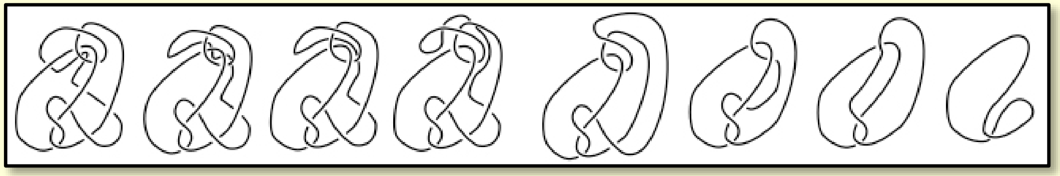
Движения Рейдемейстера

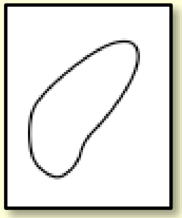




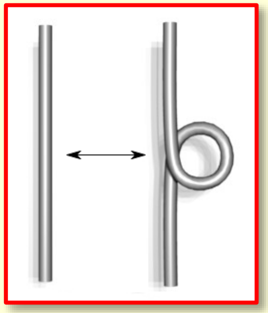


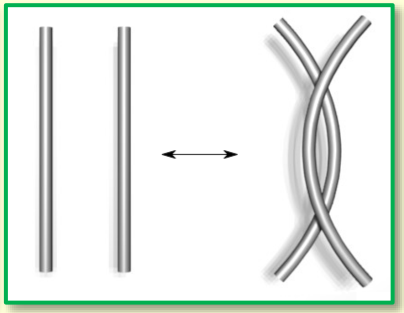


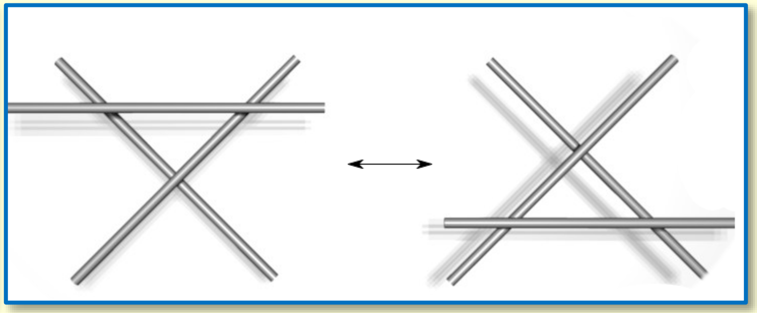


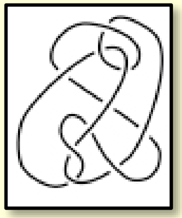


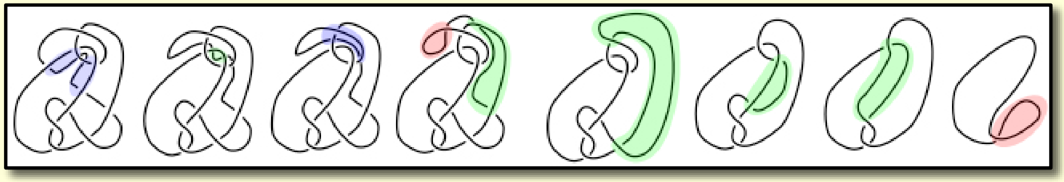
Движения Рейдемейстера

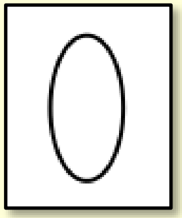




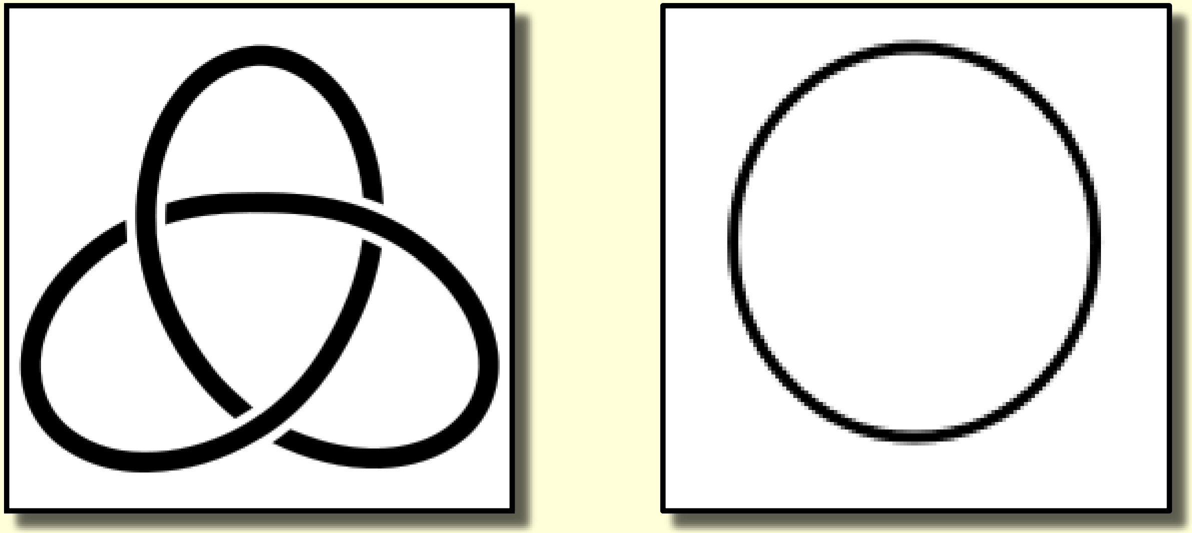




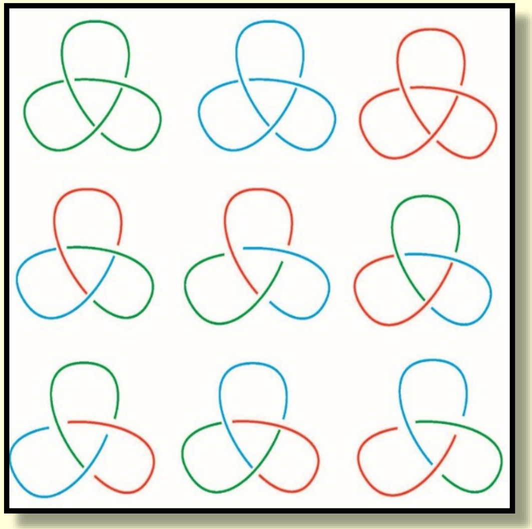


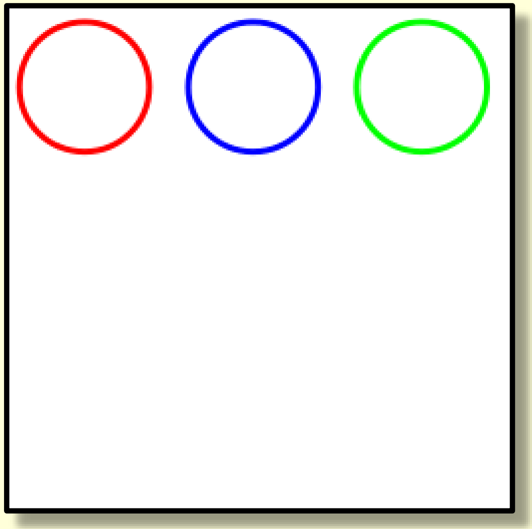


Инварианты узлов



Инварианты узлов





9 ≠ 3

Граф-узлы

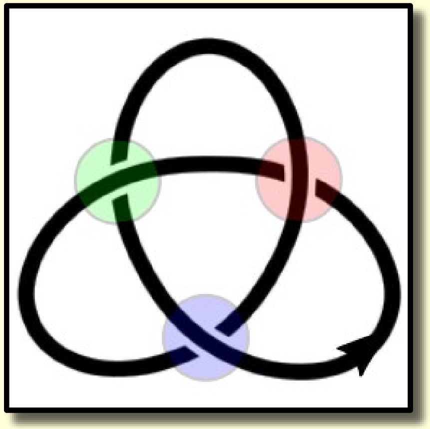
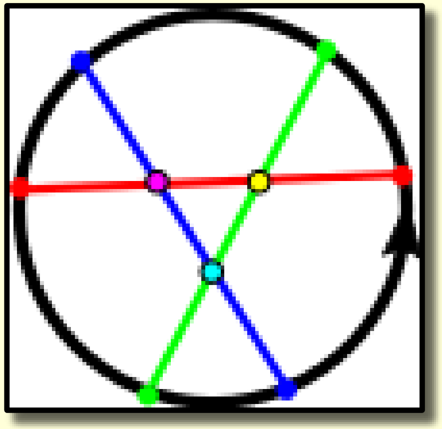
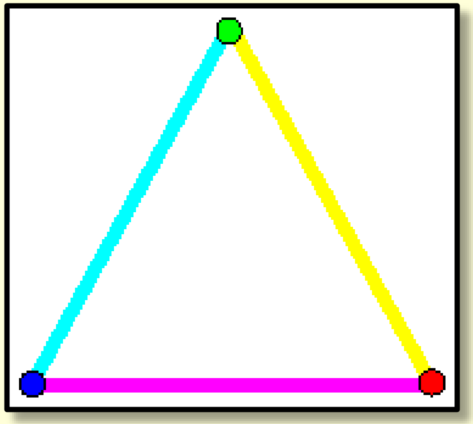


диаграмма узла



гауссова диаграмма



граф-узел

Граф-узлы

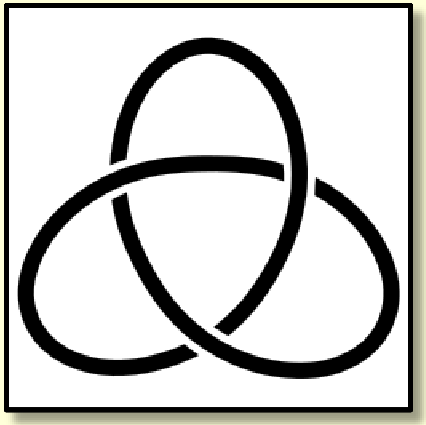
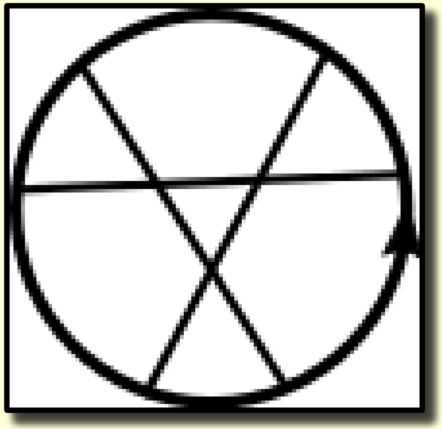
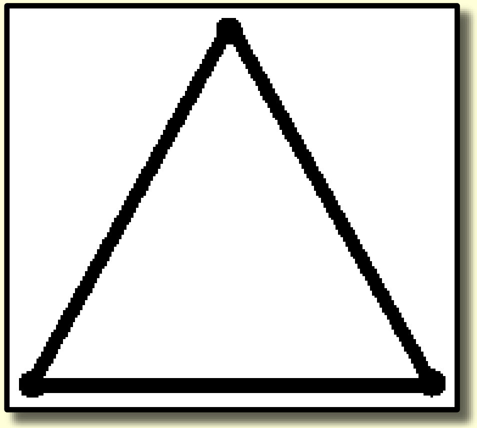


диаграмма узла

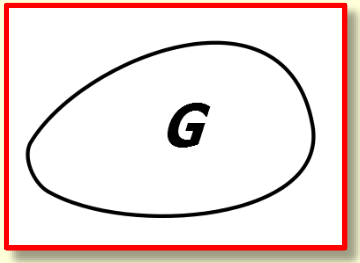


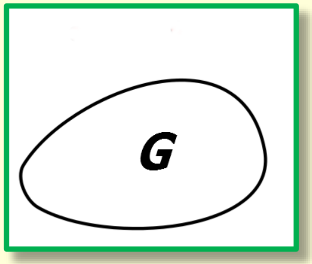
гауссова диаграмма

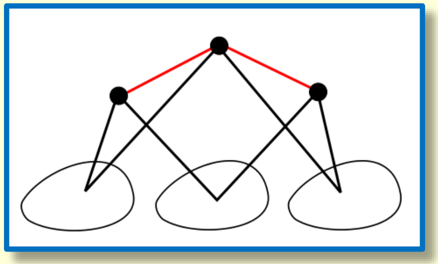


граф-узел

Движения Рейдемейстера для граф-узлов







Граф-узлы

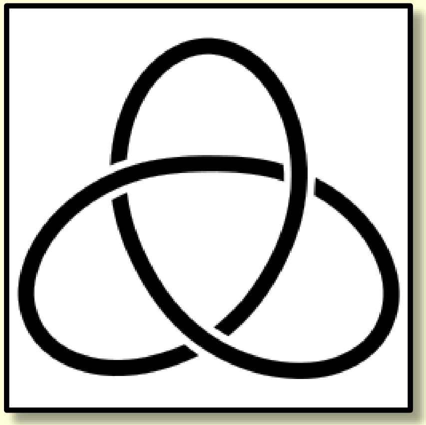
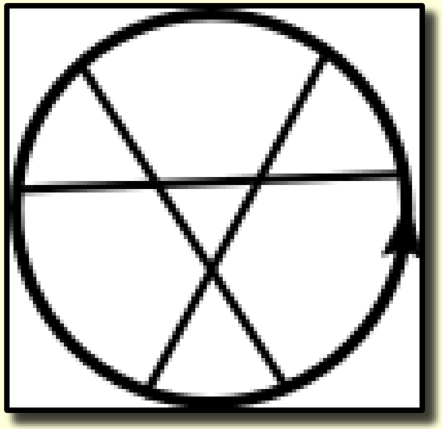
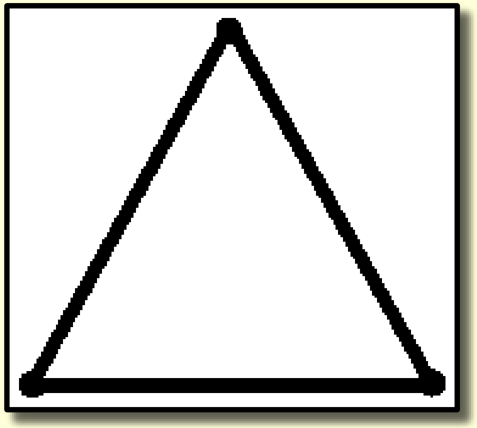
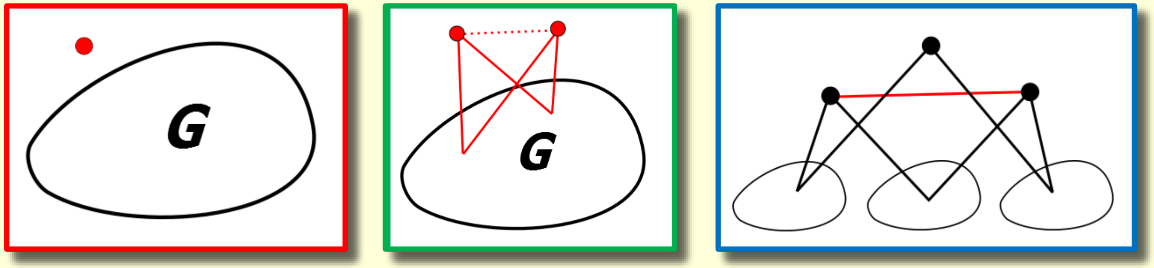


диаграмма узла

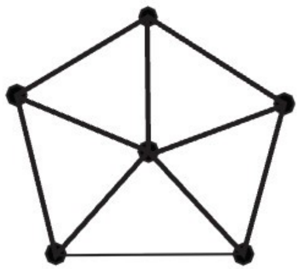

гауссова диаграмма


граф-узел

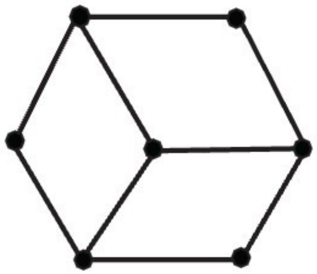
Движения Рейдемейстера для граф-узлов



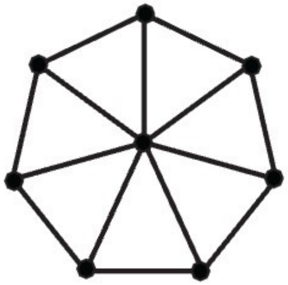
Нереализуемые графы



W_5

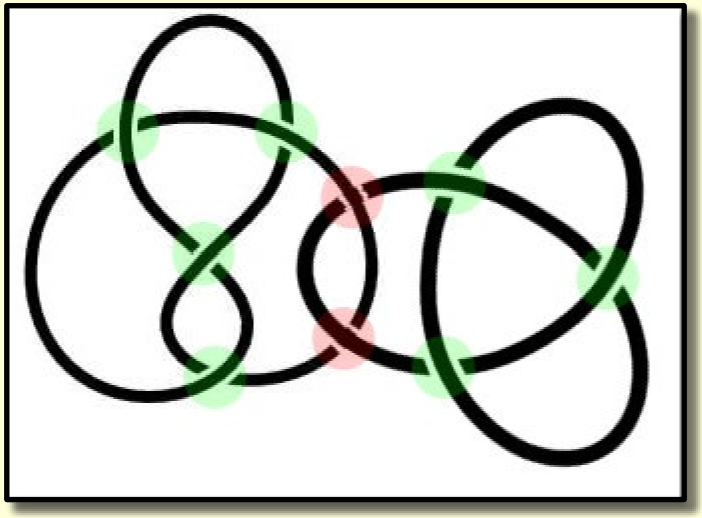


BW_3



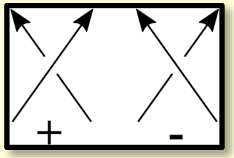
W_7

Четность узлов

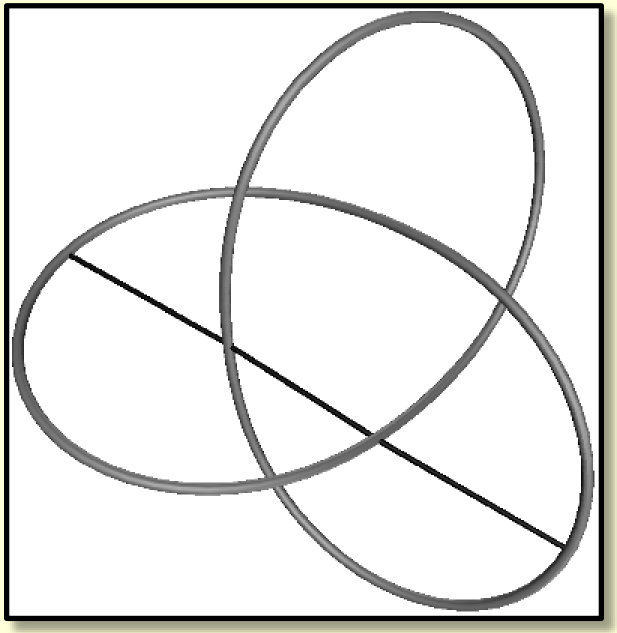


Аксиома четности: сумма четностей перекрестков, участвующих в движении Рейдемейстера, равна нулю.

Индекс зацепления $lk = \sum_{c \text{ нечетный}} \operatorname{sgn}(c)$



Квадрисеканта



Некоммутативная геометрия и математическая физика.

И.М.Никонов

Ф.Ю.Попеленский

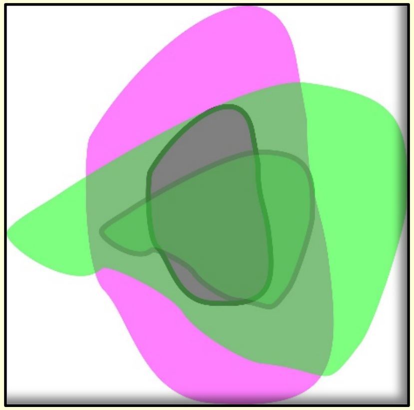
Г.И.Шарыгин

Метрическая геометрия и геометрическая оптимизация.

А.О.Иванов

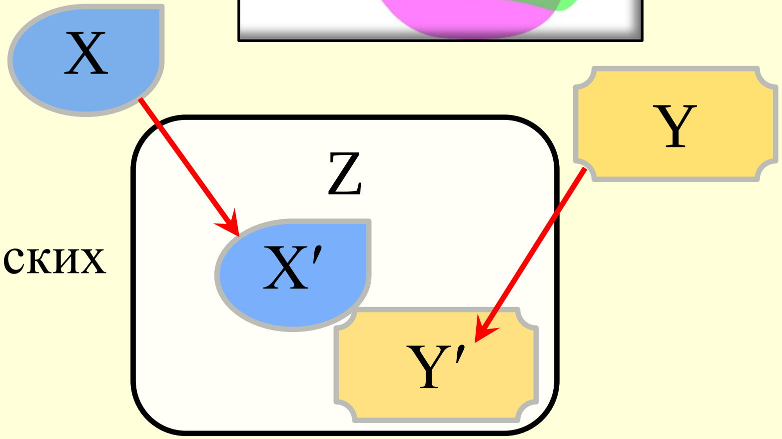
А.А.Тужилин

Основные темы

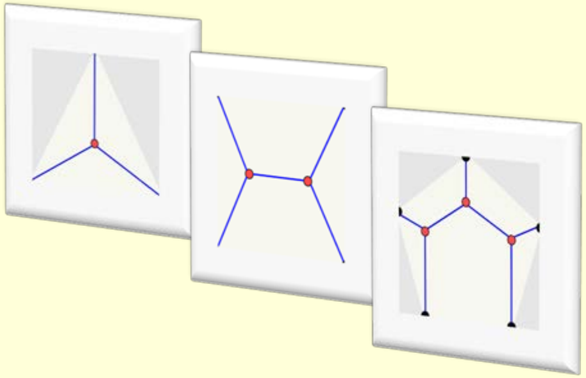


Геометрия расстояния Хаусдорфа, т.е. геометрия гиперпространств (семейств подмножеств метрических пространств), наделенных расстоянием Хаусдорфа.

http://dfgm.math.msu.su/people/tuzhilin/part8.php

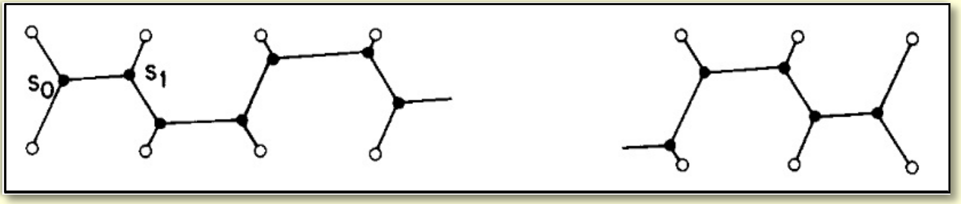


Геометрия расстояния Громова-Хаусдорфа, т.е. расстояния на собственном классе всех метрических пространств, введенного М.Громовым



Теория экстремалей одномерных геометрических функционалов

- минимальные сети, обобщенная проблема Штейнера

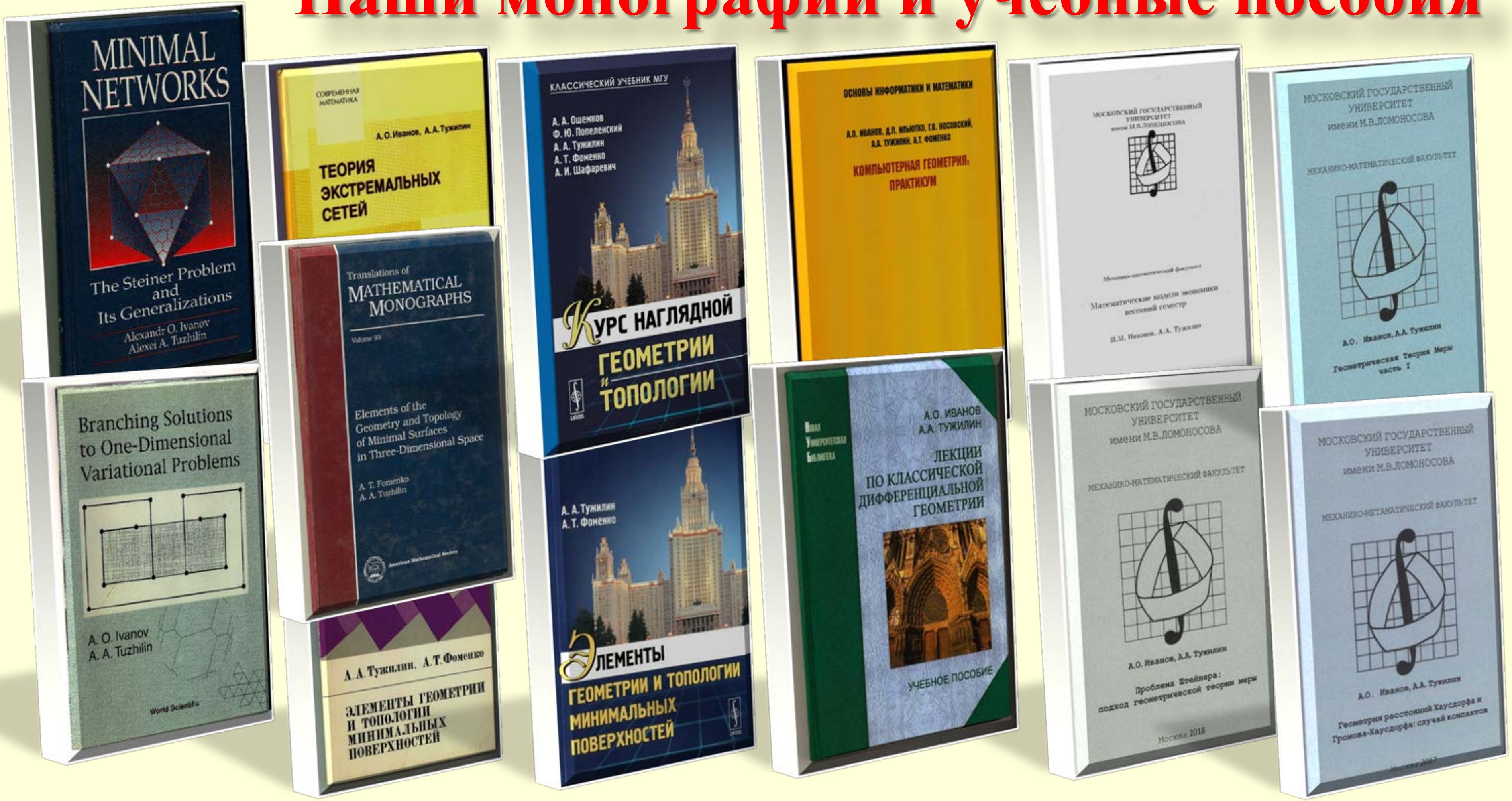


- минимальные заполнения в смысле Громова

Некоторые работы наших учеников

2001: Г.А.Карпунин, *Теория Морса минимальных сетей* (кандидатская диссертация)
2005: Д.П.Ильютко, *Геометрия локально минимальных и экстремальных сетей в пространствах с нормами* (кандидатская диссертация)
2010: Н.П.Стрелкова, *Замкнутые локально минимальные сети на выпуклых многогранниках* (диплом)
2013: Н.П.Стрелкова, *Минимальные сети на поверхностях многогранников* (кандидатская диссертация)
2014: С.Ю.Липатов, *Функции, не меняющие типов минимальных заполнений* (3 курс)
2015: Н.К.Николаева, *Минимальные деревья Штейнера в пространстве метрических компактов* (диплом)
2017: И.А.Михайлов, *Свойства отображения, сопоставляющего каждому метрическому компакту семейство его непустых компактных подмножеств* (3 курс)
2017: Д.П.Клибус, *Выпуклость шара в пространстве Громова-Хаусдорфа* (4 курс)
2017: О.С.Малышева, *Оптимальное положение компактов в пространствах с евклидово инвариантной метрикой Громова-Хаусдорфа* (4 курс)
2017: Р.А.Цветников, *Линейная связность сферы в пространстве Громова-Хаусдорфа* (4 курс)
2017: С.Ю.Липатов, *Преобразования метрик, сохраняющие типы одномерных минимальных заполнений* (диплом)
2017: В.М.Чикин, *Минимальные деревья Штейнера в малых окрестностях точек римановых многообразий* (диплом)
2018: О.Б.Борисова, *Некомпактность сегмента в пространстве Громова–Хаусдорфа* (3 курс)
2018: Д.С.Григорьев, *Вычисление расстояния Громова–Хаусдорфа до симплекса* (3 курс)
2018: Д.П.Клибус, *Компактная выпуклость шаров в пространстве Громова-Хаусдорфа* (5 курс)
2018: О.С.Малышева, *Проблема Штейнера в пространствах с евклидово инвариантной метрикой Громова-Хаусдорфа* (5 курс)
2018: А.В.Феклина, *Проблема Штейнера в пространстве Громова-Хаусдорфа: случай трехточечных метрических пространств* (диплом)
2019: О.Б.Борисова, *Непрерывность множеств соответствий в пространстве Громова-Хаусдорфа* (4 курс)
2019: Е.А.Лычагина, *Свойства расстояния Громова–Хаусдорфа до симплексов* (3 курс)
2019: Д.С.Григорьев, *Вычисление расстояния Громова–Хаусдорфа до симплексов произвольной мощности* (4 курс)
2020: О.Б.Борисова, *Metric Segments in Gromov–Hausdorff class* (6 курс)
2020: Е.И.Степанова, *Бифуркации минимальных сетей и минимальных заполнений конечных подмножеств евклидовой плоскости* (кандидатская диссертация)
2021: Д.С.Григорьев, *Расстояния Громова–Хаусдорфа до симплексов произвольной мощности, а также до 2-пространств* (6 курс)
2021: О.Б.Борисова, *Метрические сегменты в классе Громова-Хаусдорфа* (6 курс)
2022: Д.А.Илюхин, *The Fermat-Torricelli problem in the case of three-point sets in normed planes* (4 курс)
2022: Т.А.Талипов, *Gromov-Hausdorff distance between vertex sets of regular polygons inscribed in a given circle* (4 курс)
2022: А.Х.Галстян, *About the continuity of one operation with convex compacts in finite-dimensional normed spaces* (аспирант)
2022: В.М.Чикин, *Деформации метрик, локальные и глобальные аспекты* (кандидатская диссертация)
2023: А.А.Вихров, *Density of generic metric spaces in the Gromov–Hausdorff class* (4 курс)
2023: Д.А.Илюхин, *The Fermat-Torricelli problem in normed spaces* (4 курс)

Наши монографии и учебные пособия



MINIMAL NETWORKS
The Steiner Problem and Its Generalizations
Alexandr O. Ivanov
Alexei A. Tuzhilin

Branching Solutions to One-Dimensional Variational Problems
A. O. Ivanov
A. A. Tuzhilin
World Scientific

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
А. О. Иванов, А. А. Тужилин
ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СЕТЕЙ

Translations of MATHEMATICAL MONOGRAPHS
Volume 93
Elements of the Geometry and Topology of Minimal Surfaces in Three-Dimensional Space
A. T. Fomenko
A. A. Tuzhilin
American Mathematical Society

А. А. Тужилин. А. Т. Фоменко
ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

КЛАССИЧЕСКИЙ УЧЕБНИК МГУ
А. А. Ошемков
Ф. Ю. Попеленский
А. А. Тужилин
А. Т. Фоменко
А. И. Шафаревич
КУРС НАГЛЯДНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ
URSS

А. А. Тужилин
А. Т. Фоменко
ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ
URSS

ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИКИ
А.О. ИВАНОВ, Д.Л. ИЛЬЮТКО, Г.В. НОСОВСКИЙ, А.А. ТУЖИЛИН, А.Т. ФОМЕНКО
КОМПЬЮТЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ: ПРАКТИКУМ

Новая Университетская Библиотека
А.О. ИВАНОВ
А.А. ТУЖИЛИН
ЛЕКЦИИ ПО КЛАССИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ
УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет
Математические модели экономики
весенний семестр
И.М. Никонов, А.А. Тужилин

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
А.О. Иванов, А.А. Тужилин
Проблема Штейнера: подход геометрической теории меры
Москва 2018

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
А.О. Иванов, А.А. Тужилин
Геометрическая Теория Меры
часть I

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МЕТАМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
А.О. Иванов, А.А. Тужилин
Геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова-Хаусдорфа: случай компактов
Москва 2017

Спецкурс:
А.О.Иванов, А.А.Тужилин «Геометрия квантового расстояния Громова-Хаусдорфа», понедельник, 18:30, zoom.
Спецсеминар:
А.О.Иванов, А.А.Тужилин «Теория экстремальных сетей», среда, 16:45, zoom.