http://msu.mnc.ru

Кафедра дифференциальной геометрии и приложений.

А.Т.Фоменко:
наша кафедра обращается к второкурсникам

Уважаемые коллеги!

В этом году личная встреча кафедры с второкурсниками затруднена. Поэтому мы решили вкратце рассказать о кафедре и пригласить Вас в наш дружный коллектив, включиться в наши исследования. Интересующие Вас вопросы можете направить на мой личный е-мейл atfomenko@mail.ru. (Фоменко Анатолий Тимофеевич).

Сайт нашей кафедры: dfgm.math.msu.su (аудитория 16-19 ГЗ).

1.Вкратце скажу об истории кафедры. Кафедра дифференциальной геометрии является одной из старейших кафедр мехмата МГУ. Она была основана в 1933 году, хотя ее фундамент был заложен еще в 1922-1923 годах переехавшим в Москву из Одессы в 1922 году Вениамином Федоровичем Каганом. Затем кафедрой руководили проф. С.П.Фиников, проф. П.К.Рашевский, а с 1992 года академик А.Т.Фоменко. Сегодня кафедра называется так: «Кафедра дифференциальной геометрии и приложений». При кафедре действует Лаборатория компьютерной геометрии.

2.Много сведений о кафедре есть на нашем сайте dfgm.math.msu.su, где Вы можете подробно узнать об истории кафедры, о ее сотрудниках, научных достижениях, основных направлениях исследований. Там Вы узнаете, где работают наши выпускники, о международных и внутри-российских связях кафедры, увидите наши диссертации, книги, статьи сотрудников, аспирантов и студентов, познакомитесь с богатым наглядным материалом по топологии и геометрии. Там же приведены некоторые задачи для исследования, представляющие большой научный интерес.

3. В первую очередь, кафедра занимается фундаментальной математикой – современной геометрией, топологией, приложениями. В частности, - топологическое вариационное исчисление, симплектическая топология, гамильтонова

геометрия и физика, теория минимальных поверхностей, алгебраическая топология, теория многообразий, математические биллиарды, динамические системы, интегрируемые дифференциальные уравнения, комбинаторная геометрия и топология, геометрия и математическая физика, небесная механика и геометрия, теория особенностей функций и отображений, теория узлов и зацеплений, топологические инварианты, геометрия групп и алгебр Ли, компьютерная геометрия, распознавание образов, топологические аспекты обучающихся нейронных сетей.

На нашей геометрической кафедре высокий процент наших учеников, успешно защищающих востребованные диссертации по фундаментальной математике. Посмотрите их перечень на нашем сайте dfgm.math.msu.su. Сегодня наши выпускники устраиваются на работу в вузы (преподавание и научная работа), в институты Академии Наук, в аналитические отделы банков и различных фирм, в военную отрасль, некоторые выезжают за рубеж и там высоко котируются.

4.На кафедре работали и работают сегодня выдающиеся ученые. Работает наш декан, член-корреспондент РАН А.И.Шафаревич. Достижения сотрудников кафедры ценятся высоко. премии и специальные стипендии, присужденные членам кафедры перечислены на сайте нашей кафедры.

Хочу сформулировать важную мысль. Современные прикладные задачи требуют для своего решения знаний **фундаментальной науки**, в частности, дифференциальной геометрии и топологии. Конечно, в современном обществе востребованы программисты, специалисты по машинному обучению и подобным важным прикладным задачам. Однако многие из этих направлений в большой степени зиждятся на разработках современной дифференциальной геометрии. Например, алгоритмы распознавания образов опираются на теорию кривых и поверхностей, на свойства гауссовой и средней кривизн, на

законы отражения света от сложных топологических объектов. Еще пример: проблемы оптимизации инженерных конструкций, задач перевозок и более общих «транспортных задач», требуют для своего решения геометрических методов «вариационной топологии», разрабатываемой учеными нашей кафедры. Наши специалисты помогут Вам овладеть нужными фундаментальными геометрическими знаниями. Освоив методы **фундаментальной дифференциальной геометрии**, Вы получаете важные преимущества. Мы знаем, что они помогут Вам в конкурентной борьбе.

Далее я вкратце расскажу – чем в данный момент занимаюсь сам и мои ученики. И укажу направления, к которым приглашаю Вас присоединиться. Затем некоторые наши ученые вкратце расскажут о своих научных направлениях.

Фоменко Анатолий Тимофеевич, дфмн, профессор, академик РАН, заведующий кафедрой. Руководит проектом «Современные геометрические методы и их приложения» Российского научного фонда.
Научные интересы: Многомерное вариационное исчисление, минимальные поверхности, геометрическая теория групп и алгебр Ли, симплектическая геометрия и топология, гамильтоновы динамические системы. Новое научное направление – теория топологической классификации интегрируемых динамических систем и их симметрий. Построение инвариантов, описывающих топологический тип и группы симметрий особенностей (бифуркаций) функций, гладких отображений и векторных полей. Руководит курсовыми, дипломными и диссертационными работами. Некоторые темы см. например, на сайте, в разделе «Наши диссертации». Результаты, получаемые в том числе студентами и аспирантами, применяются в геометрии, топологии, в математической физике и теоретической механике.

Шафаревич Андрей Игоревич, дфмн, профессор, член-корр. РАН. Декан мехмата МГУ. Руководитель проекта "Дифференциальные операторы на сингулярных пространствах, алгебраически интегрируемые системы и квантование", поддержанного Российским научным фондом.

Научные интересы: математическая физика, геометрическое и асимптотическое квантование, геометрическая и асимптотическая теория уравнений в частных производных, спектральная теория. Теория квазиклассического квантования инвариантных многообразий гамильтоновых систем. Квантование комплексных многообразий и многообразий с особенностями. Спектральная геометрия операторов с сингулярными коэффициентами и операторов на сингулярных пространствах. Асимптотическая теория нелинейных уравнений в частных производных. Руководит курсовыми, дипломными и диссертационными работами.

Иванов Александр Олегович, дфмн, профессор, зам. заведующего кафедрой, зам. декана по науке. Руководит индустриальным проектом «Изучение метрики, структуры и размерности многообразий методами дифф. геометрии» по применению геометрии к анализу данных.

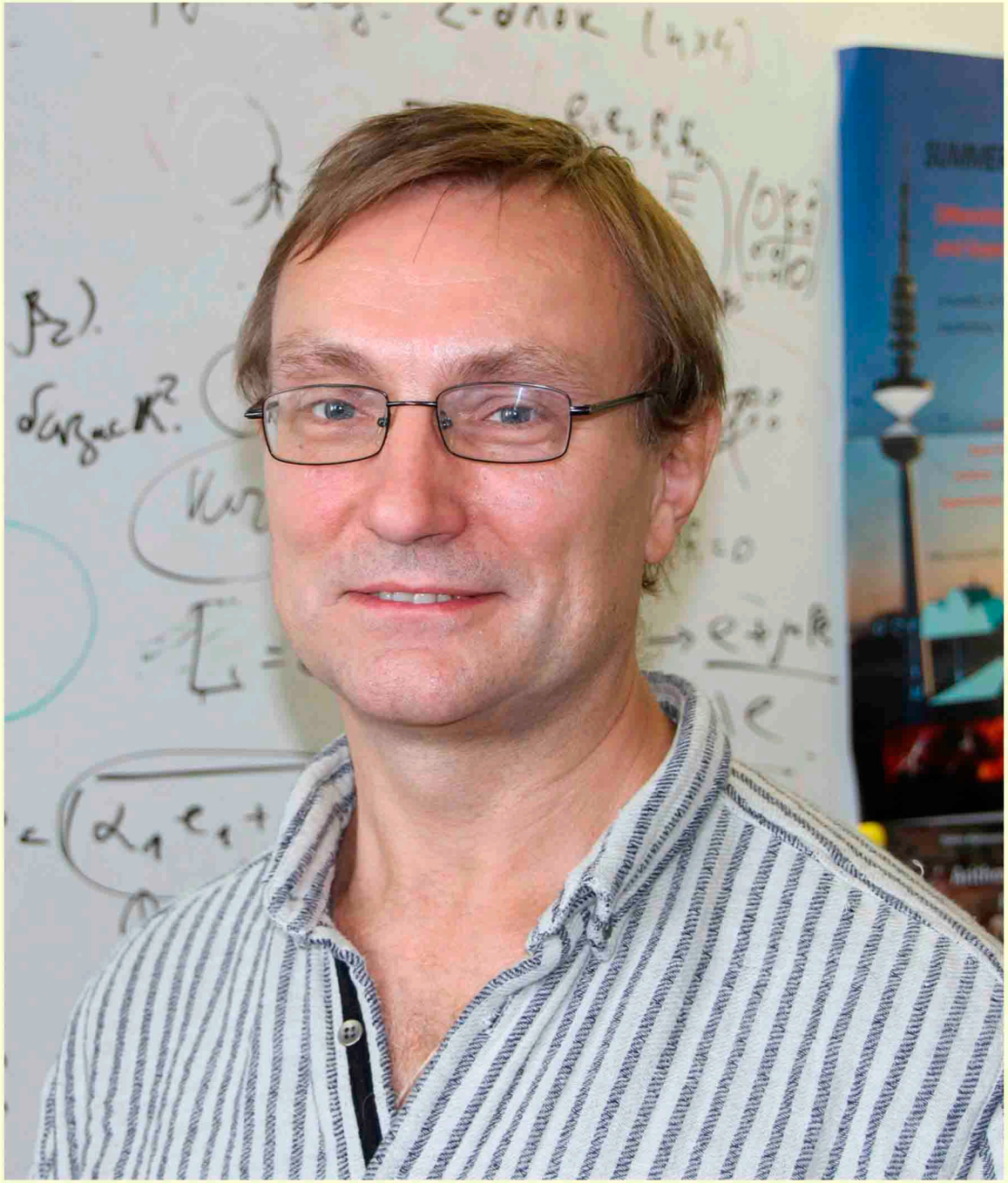
Научные интересы: геометрические оптимизационные задачи (минимальные сети, минимальные заполнения), дискретная геометрия (геометрия многогранников, геометрическая теория графов), метрическая геометрия (геометрия пространств Александрова, геометрия групп), компьютерная геометрия, анализ данных. В течение многих лет вместе с профессором А.А.Тужилиным руководит исследовательским семинаром по геометрии экстремальных сетей, руководит курсовыми, дипломными и диссертационными работами. Некоторые актуальные исследовательские задачи можно найти на сайте кафедры (http://dfgm.math.msu.su) и лаборатории (http://dcglab.uniyar.ac.ru).

Тужилин Алексей Августинович, профессор, дфмн, заведующий лабораторией компьютерной геометрии. Научные интересы: метрическая геометрия, в том числе, геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова-Хаусдорфа; геометрическая оптимизация, в частности, теория экстремальных сетей (минимальные деревья Штейнера, минимальные заполнения в смысле Громова, локально-минимальные сети); компьютерная геометрия. Задачи такого типа, решаемые в том числе студентами и аспирантами, имеют приложения в геометрии и топологии, в транспортных задачах и проектировании микросхем, в биоинформатике и теории эволюции. Тематика развивается совместно с профессором А.О.Ивановым. Список некоторых интересных задач в этой области см. в http://dfgm.math.msu.su/people/tuzhilin/part7.php

Ошемков Андрей Александрович, дфмн, профессор. Научные интересы: симплектическая и пуассонова геометрия, алгебры Ли, динамические системы, топология особенностей интегрируемых систем. Руководит студентами и аспирантами.

Кудрявцева Елена Александровна, дфмн, профессор. В 2017-2021 гг. руководила научным проектом «Топология и алгебра интегрируемых систем» при поддержке Российского научного фонда. Научные интересы: 1) Теоретическая геофизика – задача Эйлера обращения годографа. 2) Гамильтоновы системы – семейства периодических решений, теория возмущений, быстрые и медленные переменные, небесная механика, инварианты магнитных полей. 3) Интегрируемые гамильтоновы системы – симплектические и топологические инварианты, структурно устойчивые особенности (в т.ч. для систем с неполными потоками, кусочно-гладких систем биллиардного типа, магнитных геодезических потоков), связь с многоугольниками Ньютона, супер-интегрируемые механические системы. 4) Маломерная топология – минимизация числа точек пересечения и совпадения (теория Нильсена), квадратные уравнения в свободных группах, нормальные подгруппы фундаментальных групп поверхностей, неразложимые разветвленные накрытия между поверхностями (задача Гурвица). 5) Теория особенностей: топология пространств функций и градиентоподобных потоков с заданными особенностями.

Совместные публикации - с 15 зарубежными и 19 российскими математиками, в т.ч. **10 студентами, аспирантами и постдоком**. Руководит студентами и аспирантами. Трое учеников - стипендиаты фонда БАЗИС.



Болсинов Алексей Викторович, дфмн, профессор. Научные интересы: 1) Интегрируемые гамильтоновы системы: интегрируемые геодезические потоки, алгебраическая интегрируемость, топологические инвариантны интегрируемых систем, топологические препятствия интегрируемости, интегрируемые волчки в динамике твердого тела, согласованные пуассоновы структуры и бигамильтоновы системы. 2) Особенности: особенности отображения момента интегрируемых систем, их топологические и симплектические инварианты, алгоритмическая классификация, особенности лиувиллевых слоений. 3) Группы Ли и алгебры Ли: динамические системы на группах Ли и однородных пространствах, лиевы пучки, гамильтонова редукция, гамильтоновы системы на алгебрах Ли. 4) симплектическая геометрия и риманова геометрия.

Жеглов Александр Борисович, дфмн, профессор. Научные интересы: Исследования в области алгебры, алгебраической геометрии, алгебраической теории чисел и их приложениях к теории гамильтоновых динамических систем. Одно из актуальных направлений исследований – развитие и обобщение теории, связанной с решениями уравнения Кадомцева-Петвиашвили.

Ведюшкина (Фокичева) Виктория Викторовна, д.ф.м.н., доцент.
Лауреат Премии правительства Москвы для молодых ученых 2019 года, Медали РАН для молодых ученых 2020, Шуваловской премии МГУ 2021.
Руководит проектом "Моделирование интегрируемых систем топологическими биллиардами" при поддержке Российского научного фонда.
Научные интересы: интегрируемые гамильтоновы системы, теория математического биллиарда, маломерная топология.
Обнаружила новые классы интегри-руемых биллиардов – топологические биллиарды и биллиардные книжки. Дала полную классификацию топологических биллиардов. Оказалось, что многие важные эффекты, наблюдаемые в сложных проблемах физики и механики, наглядно и эффективно моделируются системами на подходящих «биллиардных книжках».
Руководит студентами и аспирантами, семинаром по теории биллиардов

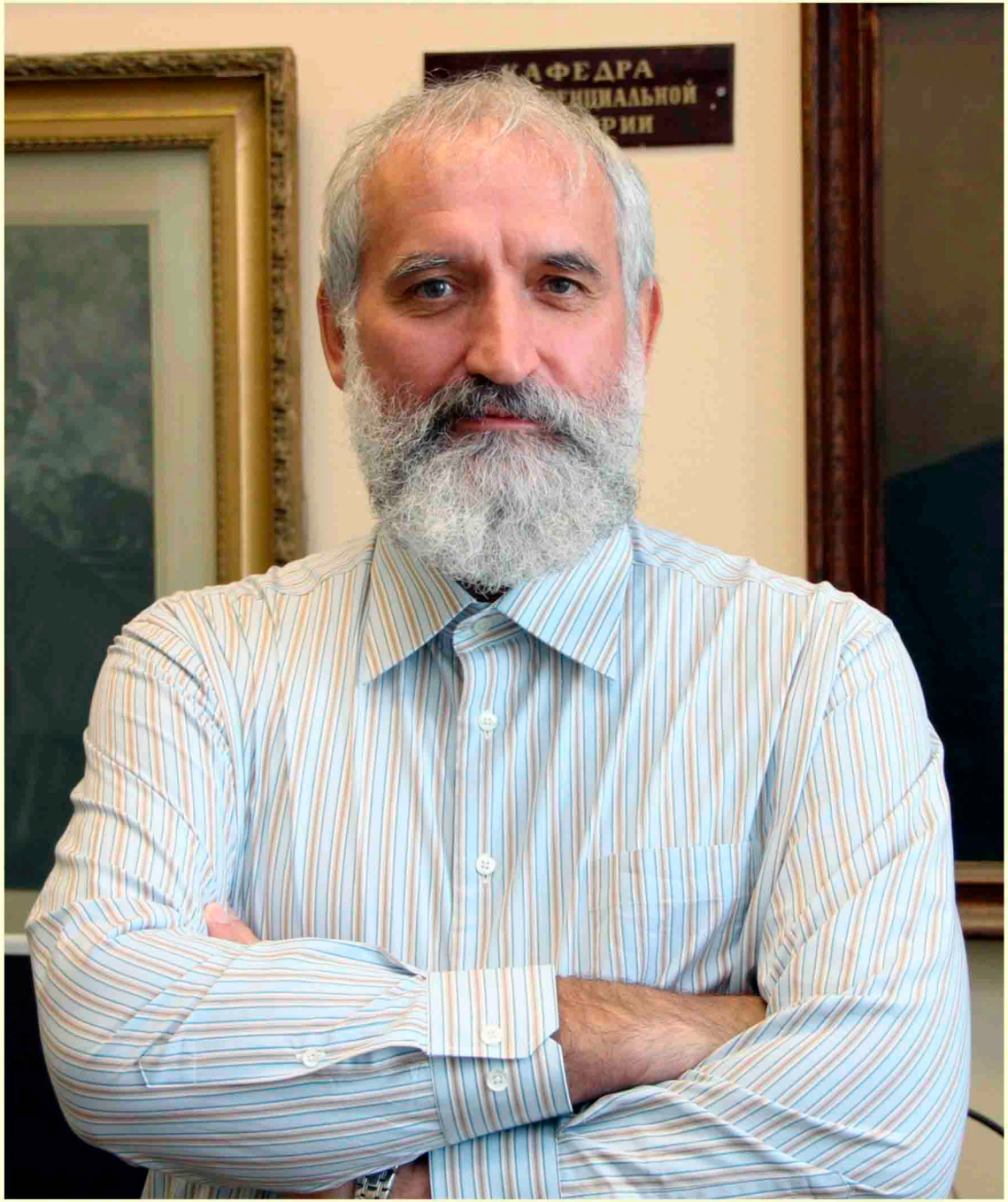
Пржиялковский Виктор Владимирович, д.ф.-м.н., профессор. Лауреат премии правительства Москвы для молодых ученых 2019 г. Руководит проектом в рамках конкурса Junior Leader фонда «БАЗИС».

Научные интересы: бирациональная геометрия, многообразия Фано, группы автоморфизмов многообразий, рациональность, взвешенные полные пересечения, зеркальная симметрия.

Является соруководителем научно-исследовательского семинара им. В.А. Исковских (МГУ-МИАН).

Работает в МИАН (ведущий научный сотрудник) и ВШЭ (заместитель заведующего лабораторией зеркальной симметрии).

Попеленский Федор Юрьевич, кфмн, доцент, ученый секретарь кафедры. Научные интересы: алгебраическая топология, гомологическая алгебра, некоммутативная геометрия, К-теория, компьютерная геометрия, динамические системы.



Носовский Глеб Владимирович, кфмн, доцент. Научные интересы: Теория управления стохастическими процессами на многообразиях, нелинейные дифференциальные уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, компьютерная геометрия, финансовая математика, прикладная статистика, анализ данных. См. подробнее на сайте кафедры.

Ильютко Денис Петрович, кфмн, доцент. Работает на кафедре с 2003 года и с 2011 года в должности доцента. В 2005 году защитил кандидатскую диссертацию «Геометрия локально минимальных и экстремальных сетей в нормированных пространствах» по специальности 01.01.04. Научные интересы: вариационные задачи, в частности проблема Штейнера; маломерная топология и теория узлов; дискретная математика; компьютерная геометрия.

Никонов Игорь Михайлович, кфмн, доцент. Научные интересы: некоммутативная геометрия, вариационное исчисление и маломерная топология. Изучение некоммутативных характеристических классов. Исследование комбинаторных инвариантов узлов. Определение геометрических свойств экстремальных сетей в нормированных пространствах. Для решения подобных задач привлекаются средства геометрии, топологии, алгебры и комбинаторики.

Шарыгин Георгий Игоревич,кфмн, доцент. Научные интересы: Некоммутативная геометрия, К-теория (топологическая и С*-алгебр), характеристические классы векторных расслоений и других объектов. Циклические и хохшильдовы гомологии и когомологии, их вариации и применения. Деформационное квантование, формальность, высшие гомотопические операции, операды.

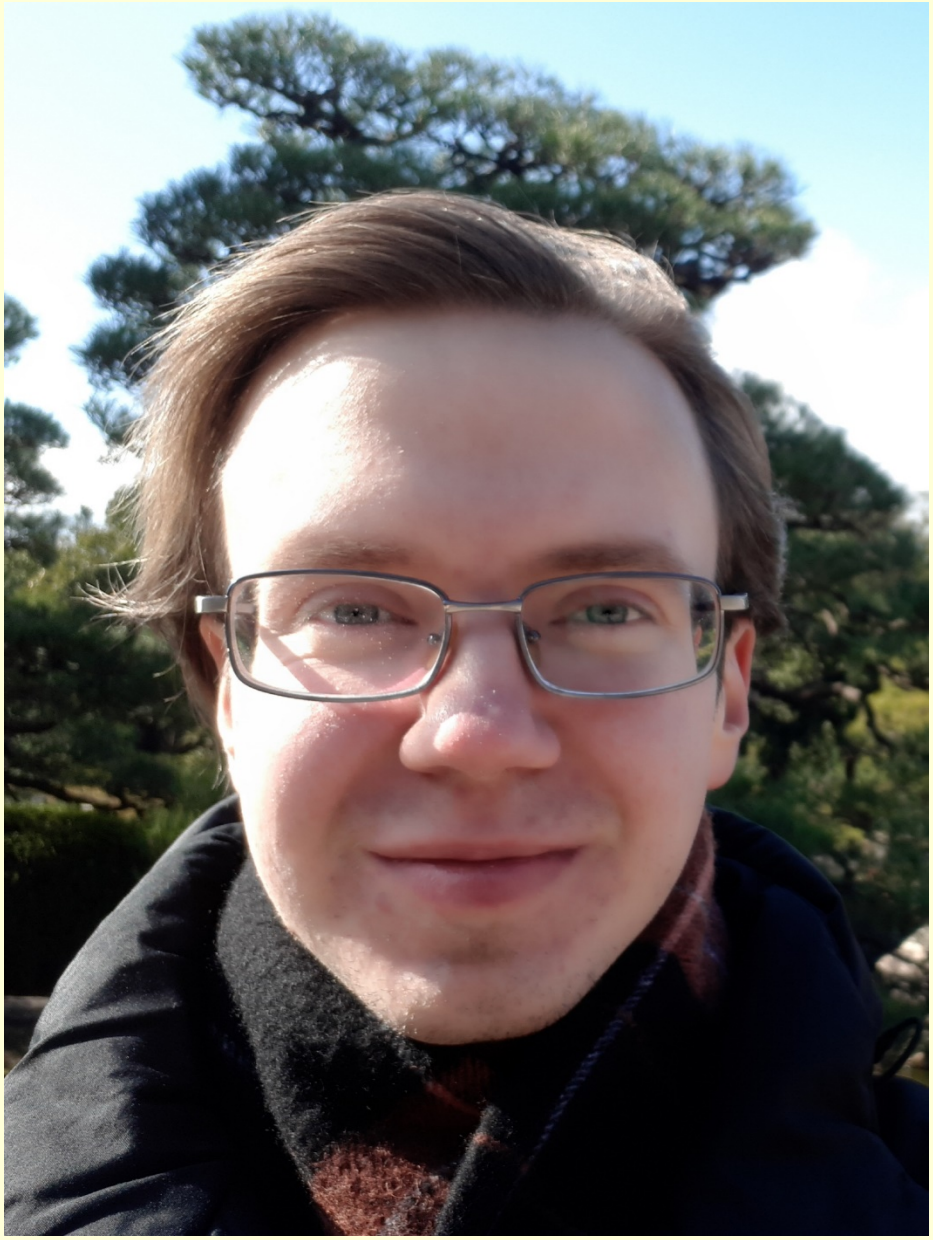
Коняев Андрей Юрьевич, кфмн, доцент. Создатель и издатель научно-популярного издания N+1. Научные интересы: Алгебра и геометрия интегрируемых систем, алгебры Ли, пуассонова и бигамильтонова геометрии. Вопросы глобального строения симплектических слоений. Классификация алгебр Ли с орбитами малой размерности, дискриминант спектральной кривой и бифуркационная диаграмма отображения момента на классических комплексных алгебрах Ли. Геометрия Нийенхейса (совм. с А.В.Болсиновым и В.С.Матвеевым)

Федосеев Денис Александрович, кфмн, ассистент. Руководитель проекта «Особенности интегрируемых систем» при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

Научные интересы:

- интегрируемые гамильтоновы системы (в том числе, с некомпактными бифуркациями), механические системы с замкнутыми траекториями, геометрия конфигурационных пространств обратных задач механики, в частности, задача Бертрана;
- теория узлов, в том числе многомерных; разработка подходов к построению инвариантов комбинаторно-геометрических объектов (узлов, свободных узлов, графов), принимающих значения в диаграммах. Кобордизмы узлов и графов.

Толченников Антон Александрович, кфмн, ассистент. Научные интересы: спектральные свойства операторов на декорированных графах и асимптотическая теория уравнений в частных производных.



Кибкало Владислав Александрович, кфмн, ассистент. Финалист Конкурса Мебиуса за 2021 и Конкурса фонда «Талант и Успех» для молодых математиков России за 2021. Руководитель проекта, конкурс фонда Базис стипендий для аспирантов мехмата МГУ

Научные интересы:
- теория интегрируемых гамильтоновых систем, близкие вопросы из геометрии, механики, алгебры, теории особенностей.
- механика в псевдо-евклидовых прост-вах
- интегрируемые биллиардыо и маломерной топологии, вопросы применения геометрических методов к задачам из приложений, в том числе из анализа данных (проверка гипотезы о многообразии для выхода некоторой нейросети).

Научные контакты кафедры:

Некоторые конференции с нашим участием,
лекционные курсы сотрудников кафедры,
места работы наших выпускников

Интегрируемые гамильтоновы системы и топологические биллиарды.

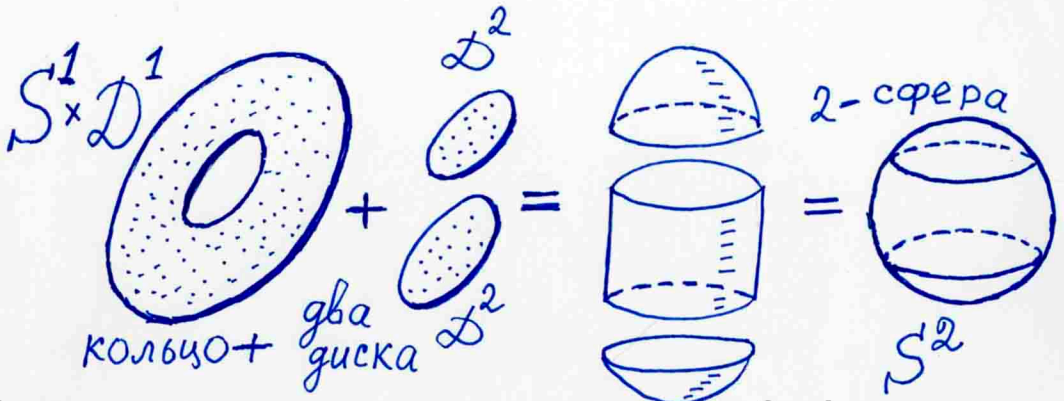
А.Т.Фоменко

В.В.Ведюшкина

В.А.Кибкало

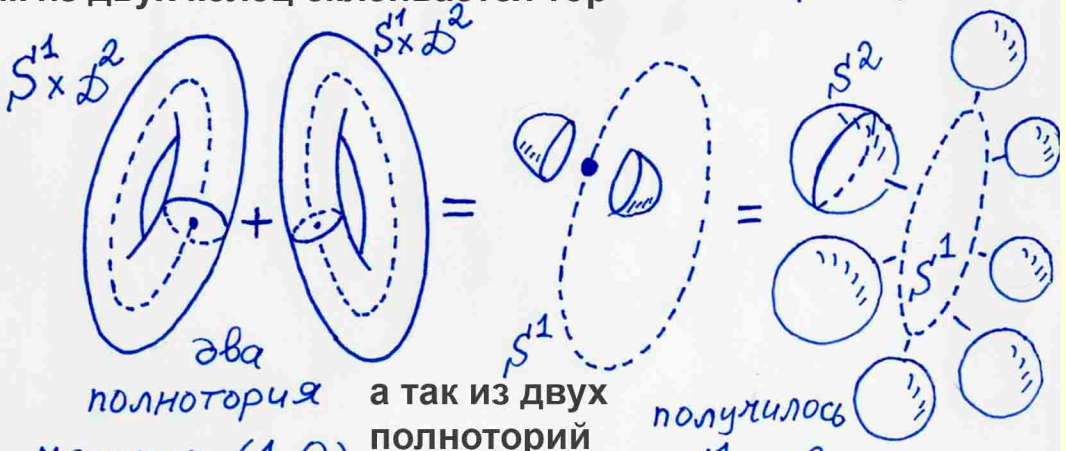
Пример геометрической проблемы, возникшей из приложений, и составляющей сегодня часть фундаментальной математики

Многие законы физики, химии, механики, биологии записываются в виде так называемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. Их изучению посвящено множество работ. С другой стороны, в топологии трехмерных многообразий весьма популярен класс «граф-многообразий» (многообразий Вальдхаузена). Замечательным фактом оказалось то, что этот класс 3-многообразий СОВПАДАЕТ с классом 3-многообразий постоянной энергии для невырожденных интегрируемых гамильтоновых систем (с двумя степенями свободы). Так топология «встретилась» с глубокой физикой и механикой.



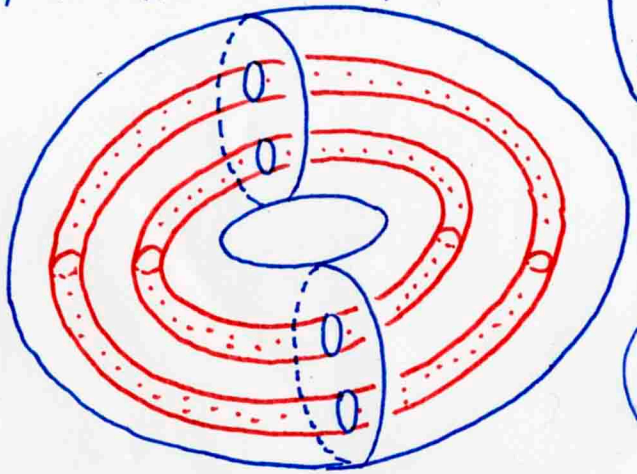
Так из кольца и двух дисков склеивается 2-сфера

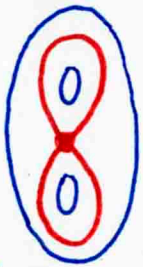
Так из двух колец склеивается тор

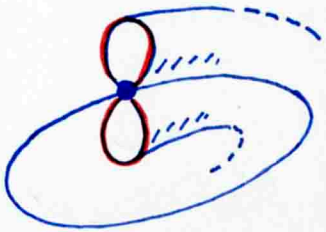


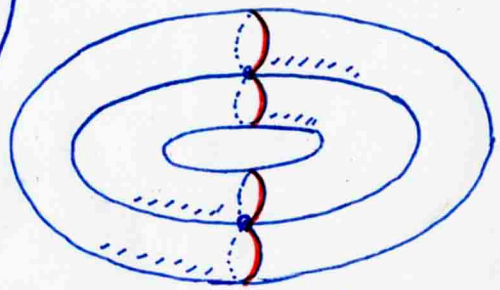
а так из двух полноторий склеивается 3-многообразие

Из полнотория
выброшены два
"параллельных" полнотория









особый слой

получилось
3-мерное многообразие
с краем, состоящим из
трех 2-мерных торов T^2.
Приклеим к каждому такому тору свое
полнотория по какому-нибудь гомеоморфизму
граничного тора. Получится новое
3-многообразие. Этот процесс можно продолжать.

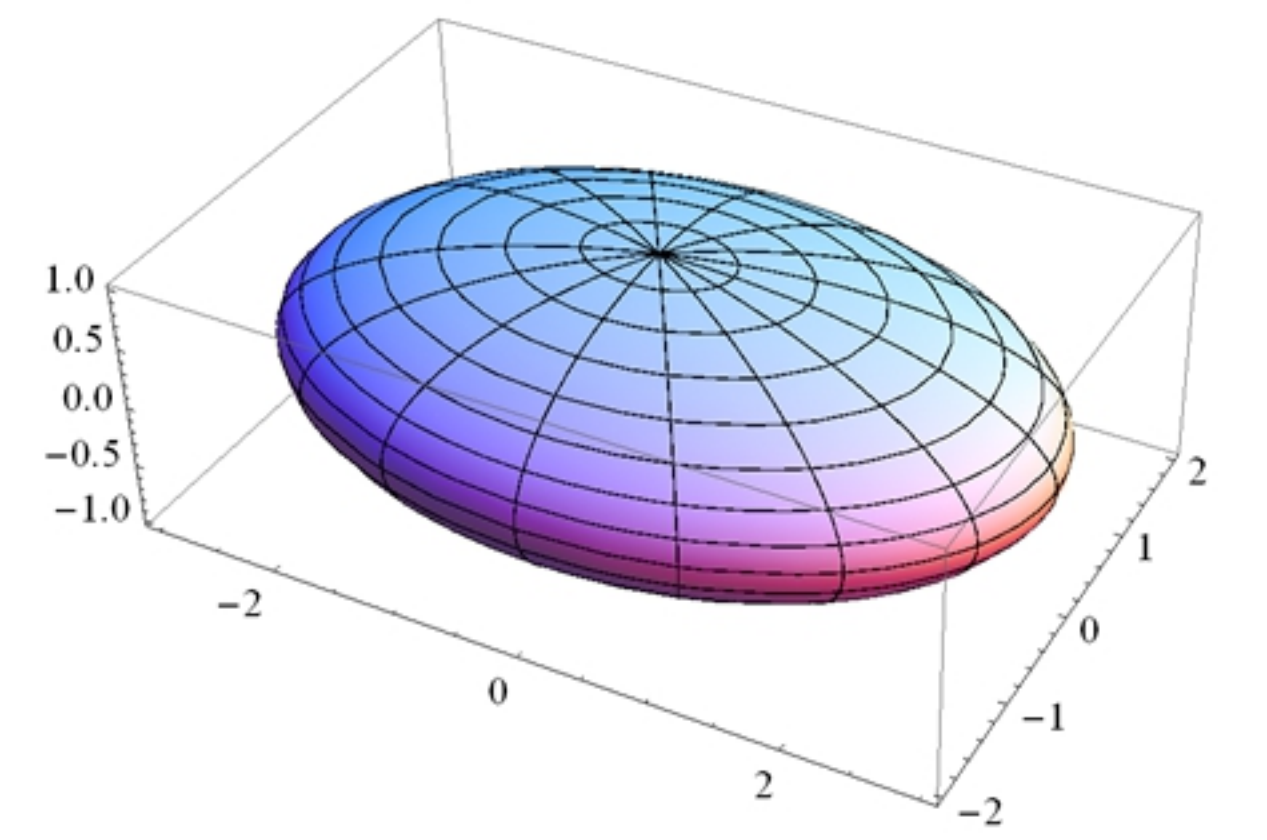
Так получается богатый класс
3-мерных многообразий – т. н.
"граф-многообразия". Знаменитый класс
в топологии и симплектической геометрии.
В нем содержатся т. н. многообразия
Зейферта.

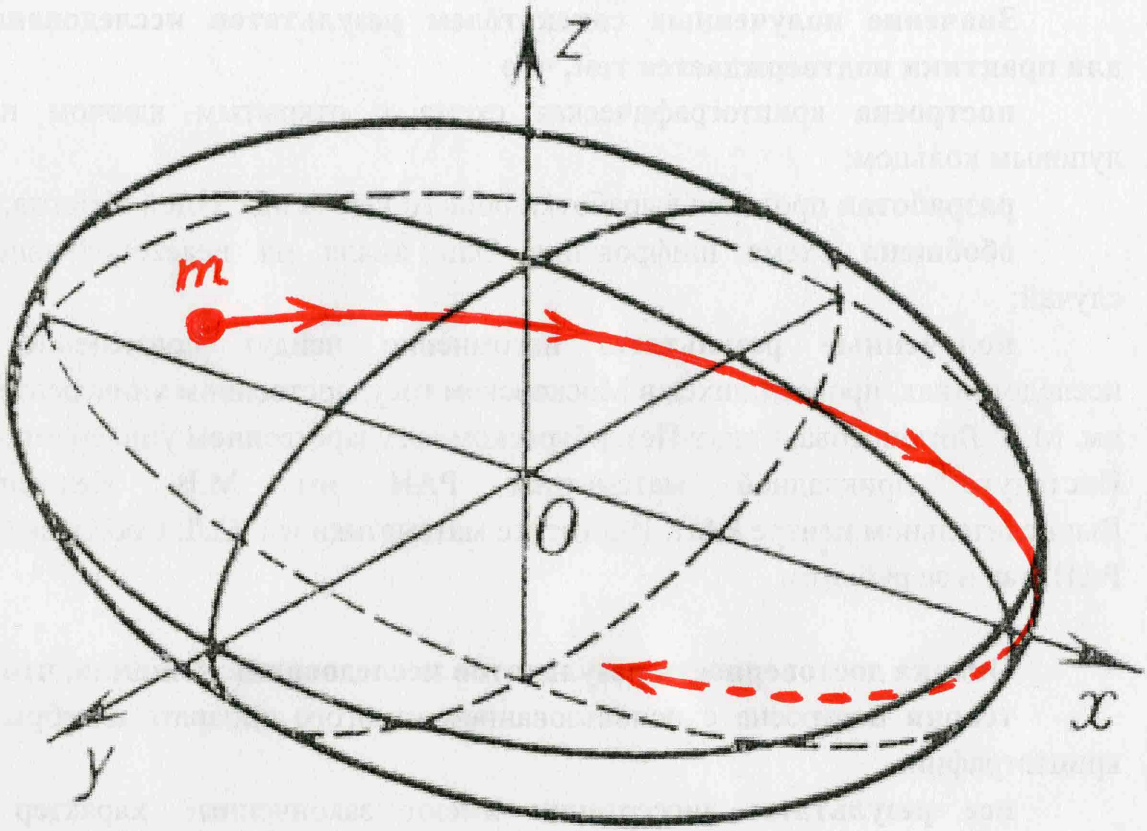
Зачем нужны такие многообразия? Где они возникают? Например, в гамильтоновой геометрии и теории динамических систем. Оказывается, на граф-многообразиях "живут" интегрируемые гамильтоновы системы.

$\mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}^4(p_1, p_2, q_1, q_2)$, дифф. ур-я: гамильтона

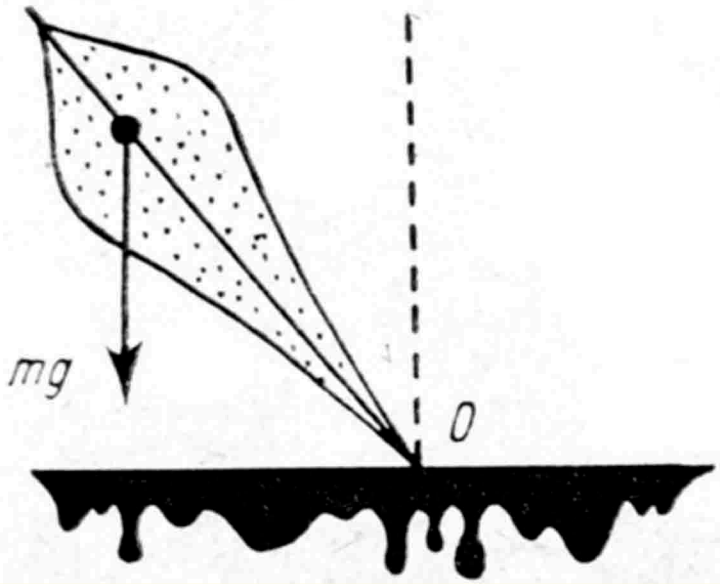
$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i=1,2; \quad H=H(p,q)$$

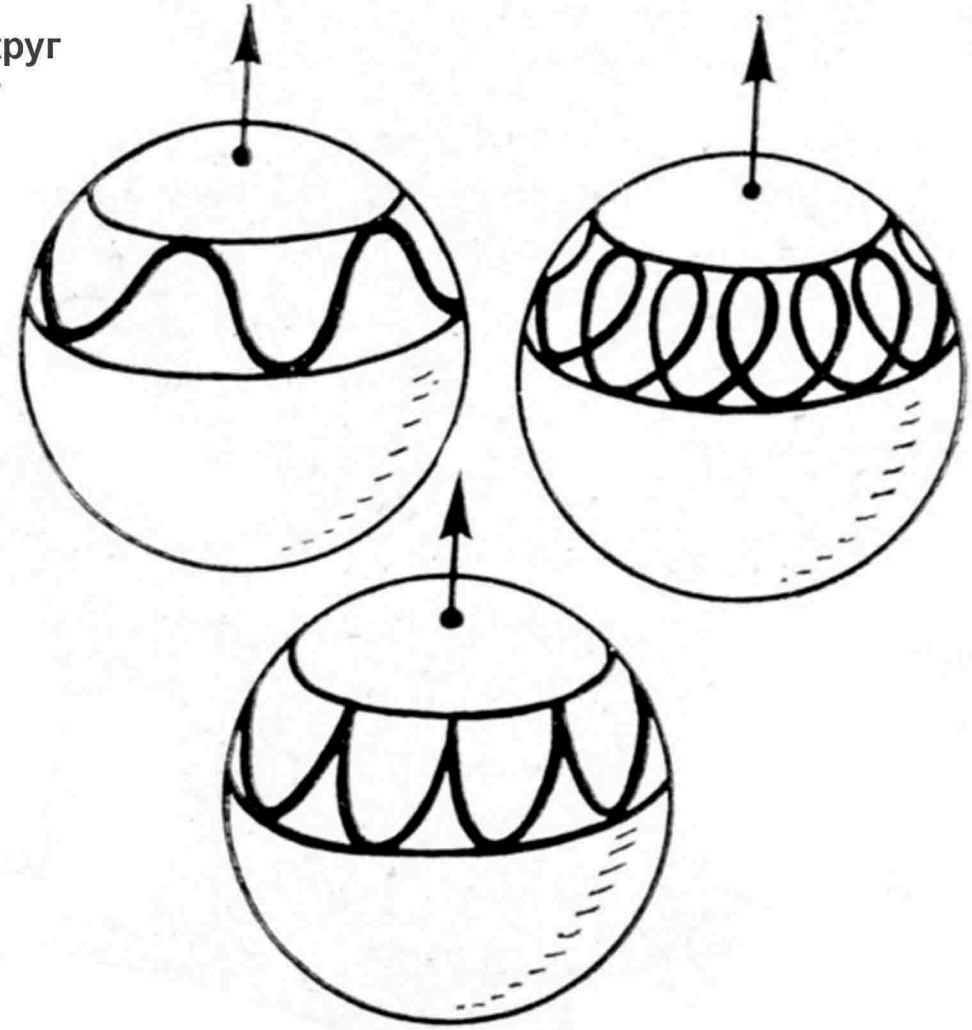
Они описывают эволюцию очень многих систем в физике, механике и т. д.
Поиск решений в явном виде практически невозможен. Поэтому мы их не интегрируем, а обнаруживаем топологическую классификацию интегральных траекторий. Для этого используются методы топологии, дифф. геометрии, алгебры, теории чисел.
Вот пример такой динамической системы.
Система "вполне интегрируема", если у нее достаточно много симметрий.


1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−2
0
2
2
1
0
−1
−2


z
m
O
x
y

Когда юла (волчок Лагранжа) вращается вокруг своей оси, конец которой неподвижно стоит на плоскости, ось волчка перемещается по сложному закону, задаваемому двумя движениями: прецессия и нутация. При этом ось волчка прочерчивает траектории, показанные на рисунке справа. Кстати, прецессия и нутация характеризуют колебания оси Земли при ее движении вокруг Солнца





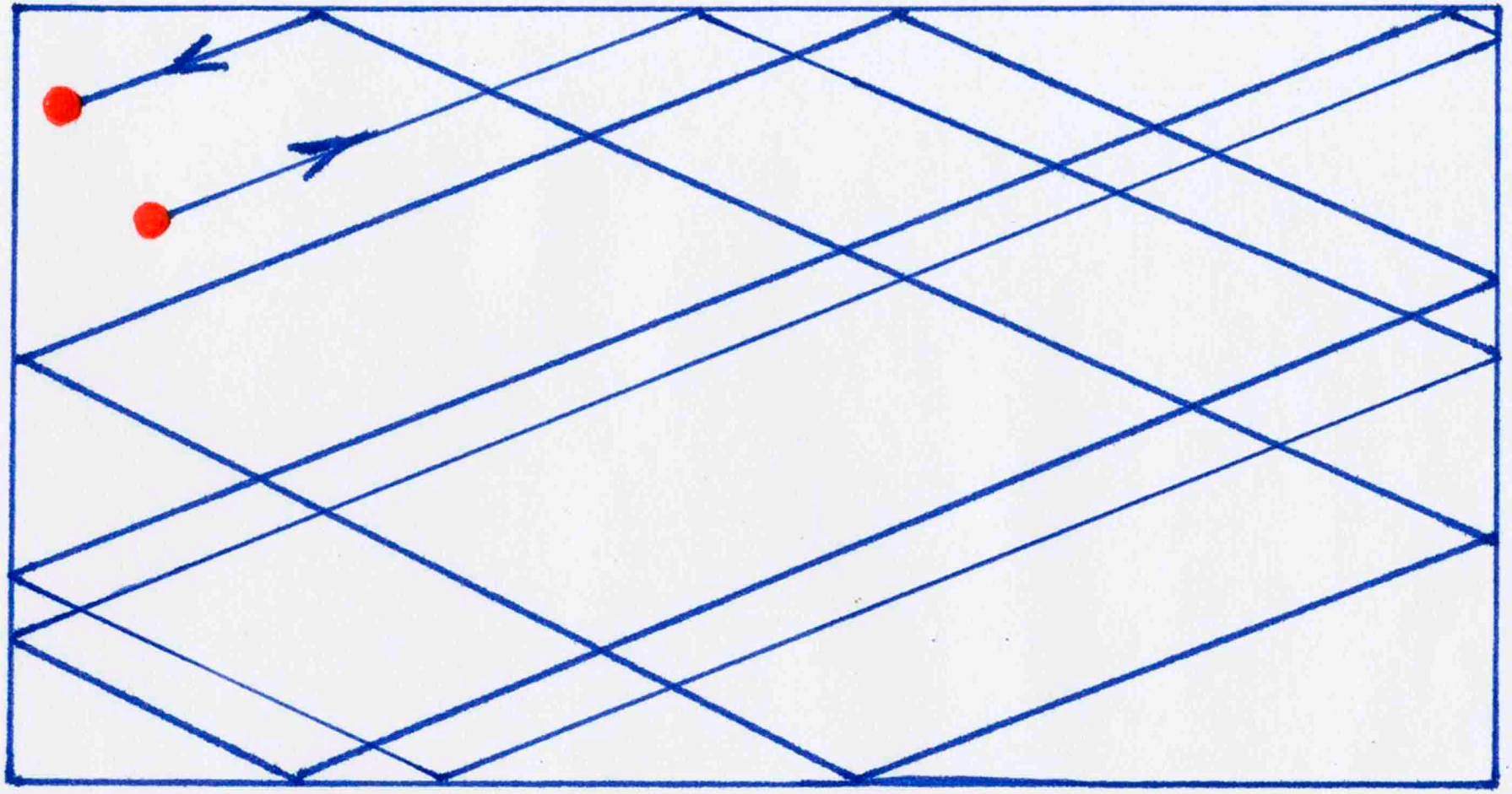
А.Т.Фоменко

Скрытые симметрии, биллиарды и механика.

За последние годы были открыты новые физические системы, обладающие богатыми скрытыми симметриями, что позволяет их «интегрировать», то есть эффективно описывать траектории движения. Оказывается, такие интегрируемые системы с двумя степенями свободы допускают топологическую классификацию. Однако во многих конкретных случаях эволюция системы весьма причудлива. Таковы, например, некоторые случаи динамики тяжелого твердого тела в пространстве. С другой стороны, недавно был открыт класс «обобщенных биллиардов», описываемых скольжением материальной точки по двумерным локально плоским поверхностям с «хорошей границей». Неожиданным и нетривиальным фактом оказалось, что такие кусочно-гладкие биллиарды "наглядно" моделируют важные (и достаточно сложные) случаи интегрируемости, например, в динамике твердого тела. То есть, некоторые запутанные и даже неустойчивые эволюции таких систем теперь можно наглядно увидеть как движение шара по двумерной биллиардной области с несложной топологией.

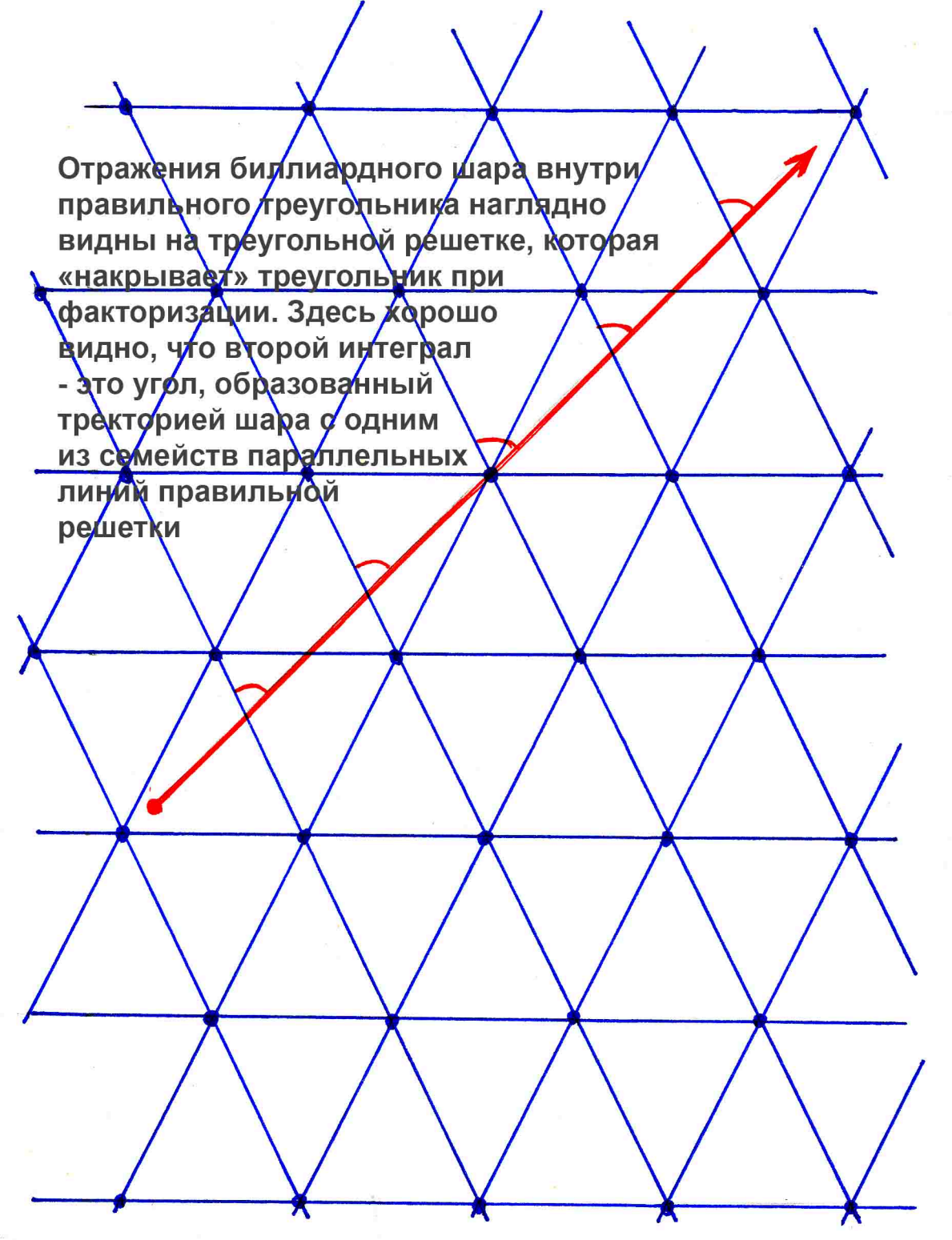
А теперь перейдем к биллиардам. Сначала рассмотрим плоские биллиарды.

Это пример плоского биллиарда (биллиардного стола) в виде прямоугольника. Биллиардный шар движется по отрезкам прямых, отражаясь от стенок по обычному закону отражения - угол падения равен углу отражения. Видно, что ломаная траектория шара обладает «законами сохранения», то есть эта динамическая система имеет два независимых интеграла движения.

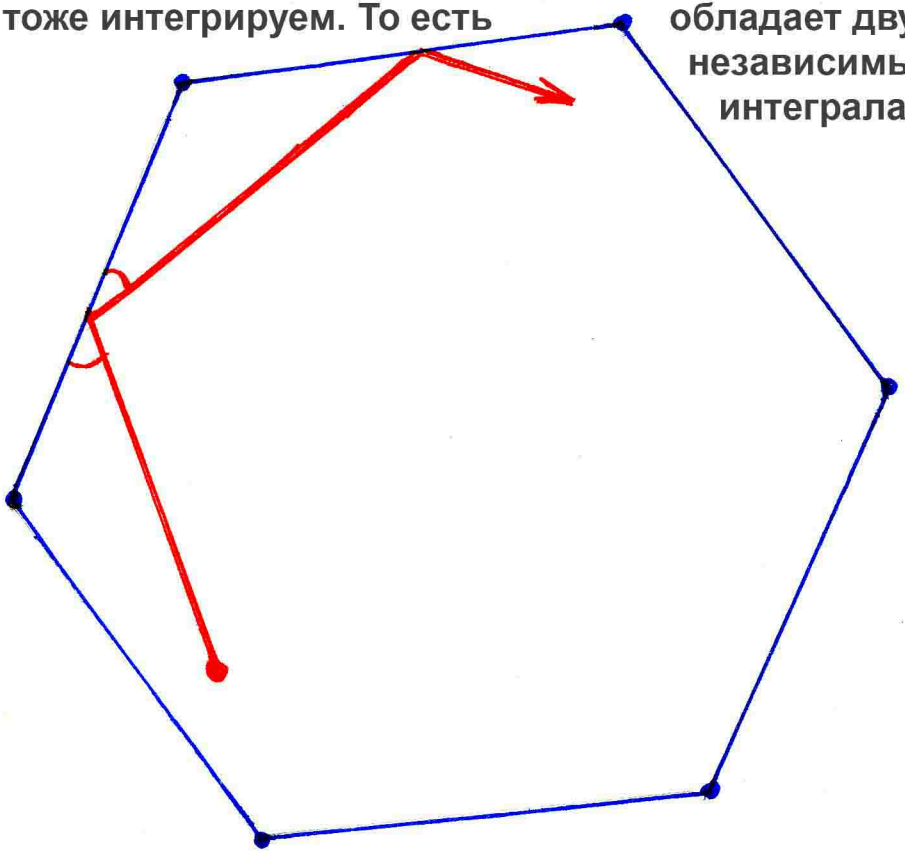


Первый интеграл - это длина вектора скорости. То есть при движении шара модуль его скорости сохраняется. Второй интеграл (закон сохранения) - это угол отражения, например от верхней или нижней стенки биллиарда. Эта система вполне интегрируема (по Лиувиллю). То есть она обладает богатыми симметриями.

Это пример другого плоского биллиардного стола в виде правильного треугольника. Этот биллиард тоже «интегрируем», то есть обладает двумя законами сохранения (двумя интегралами). Первый - длина вектора скорости шара, второй - угол отражения. Это хорошо видно на следующем рисунке


Отражения биллиардного шара внутри правильного треугольника наглядно видны на треугольной решетке, которая «накрывает» треугольник при факторизации. Здесь хорошо видно, что второй интеграл - это угол, образованный тректорией шара с одним из семейств параллельных линий правильной решетки

Это биллиард в правильном шестиугольнике. Он тоже интегрируем. То есть обладает двумя независимыми интегралами.



Как и в предыдущих примерах эти интегралы «коммутируют».

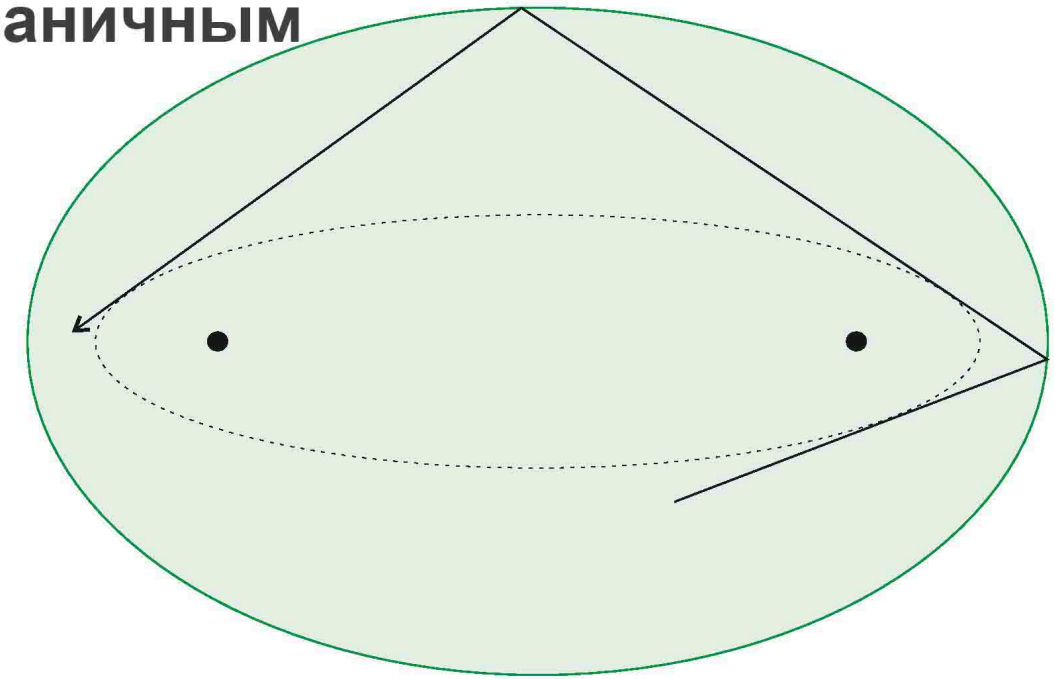
Два интеграла этого интегрируемого биллиарда хорошо видны на шестиугольной правильной решетке, которая «накрывает» биллиард в правильном шестиугольнике. Это опять-таки модуль скорости и угол, образуемый траекторией шара с одним из семейств ребер решетки

Плоские биллиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик (эллипсов, гипербол, парабол) интегрируемы, т.е. их траектории допускают "регулярное описание", они обладают большими группами симметрий

Биллиард в эллипсе интегрируем:

Звенья траектории лежат на прямых, касательных к некоторому эллипсу

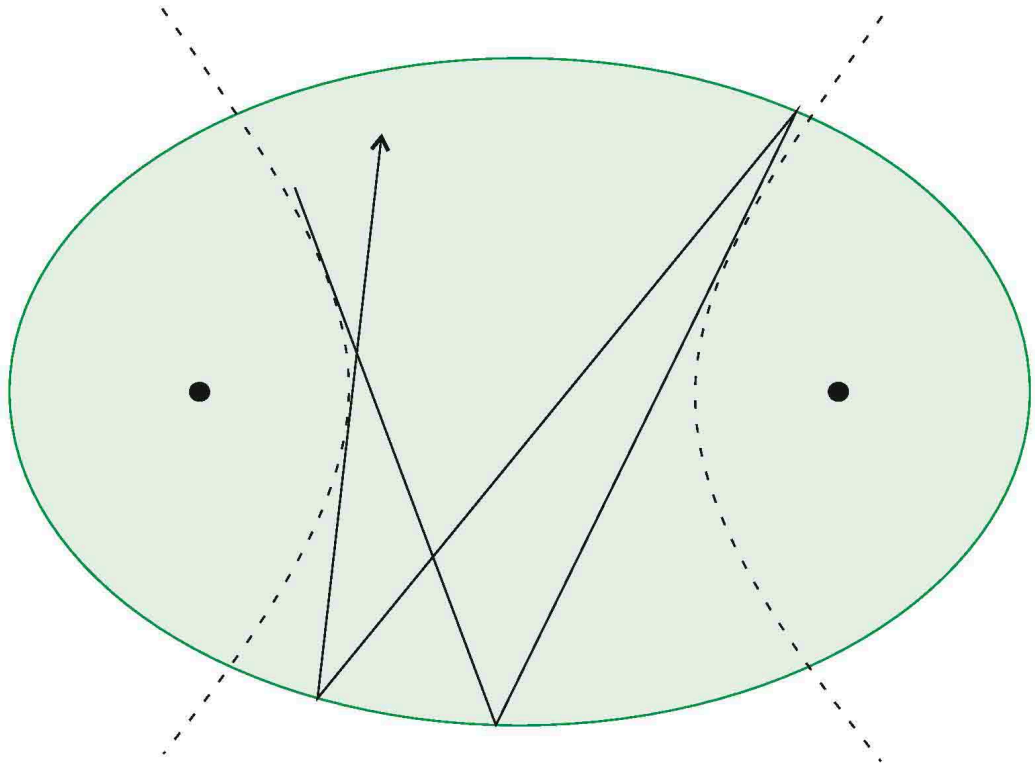
То есть ломаная траектория шара, выпущенного в каком-то направлении, обязательно будет касаться некоторого эллипса, софокусного с граничным

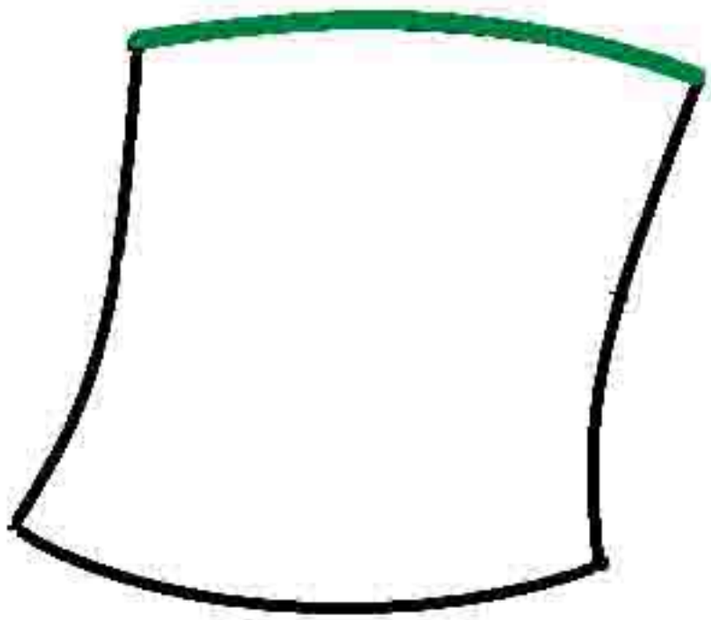


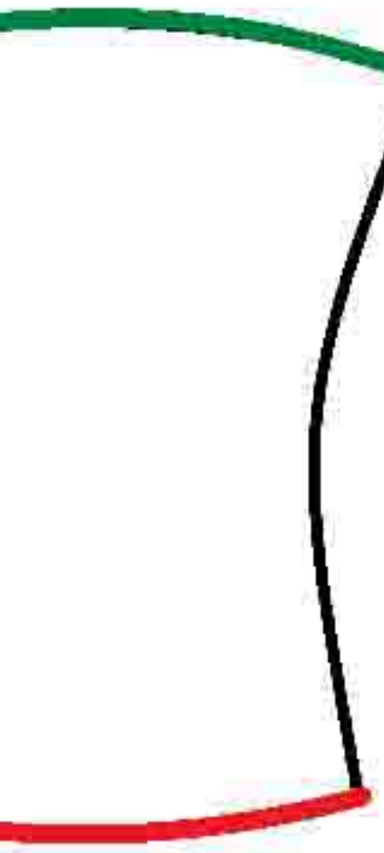
эллипсом, или ветвей гиперболы, софокусной с граничным эллипсом (см. следующий рисунок)

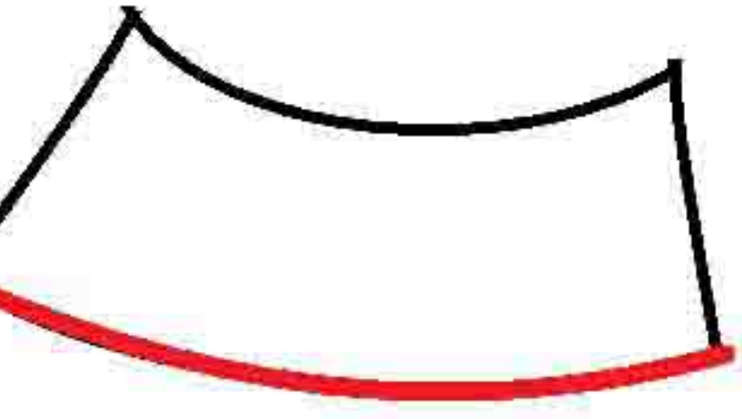
Ломаная траектория шара касательна к эллипсу

или к некоторой гиперболе, софокусных с граничным эллипсом.

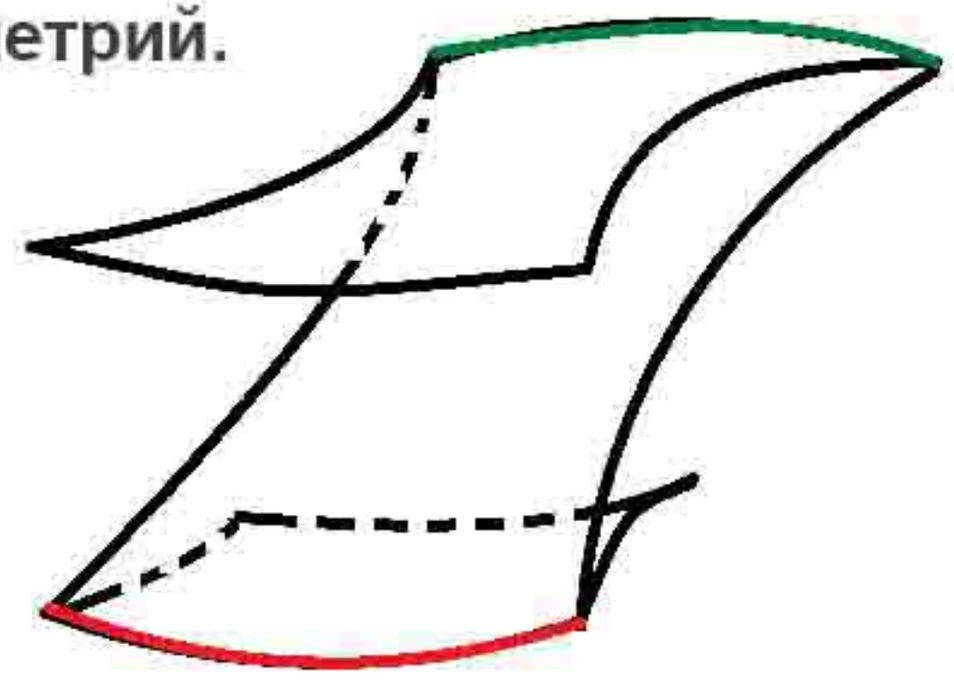




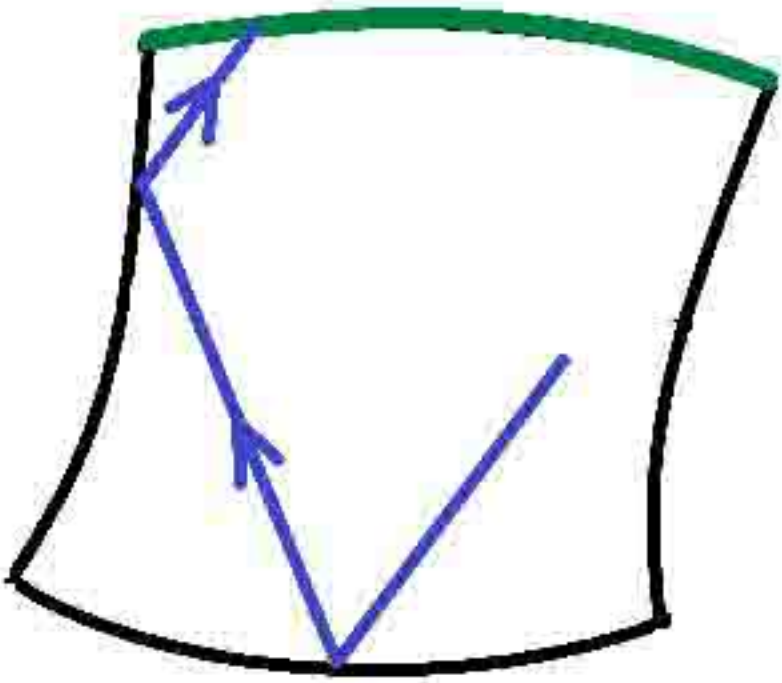




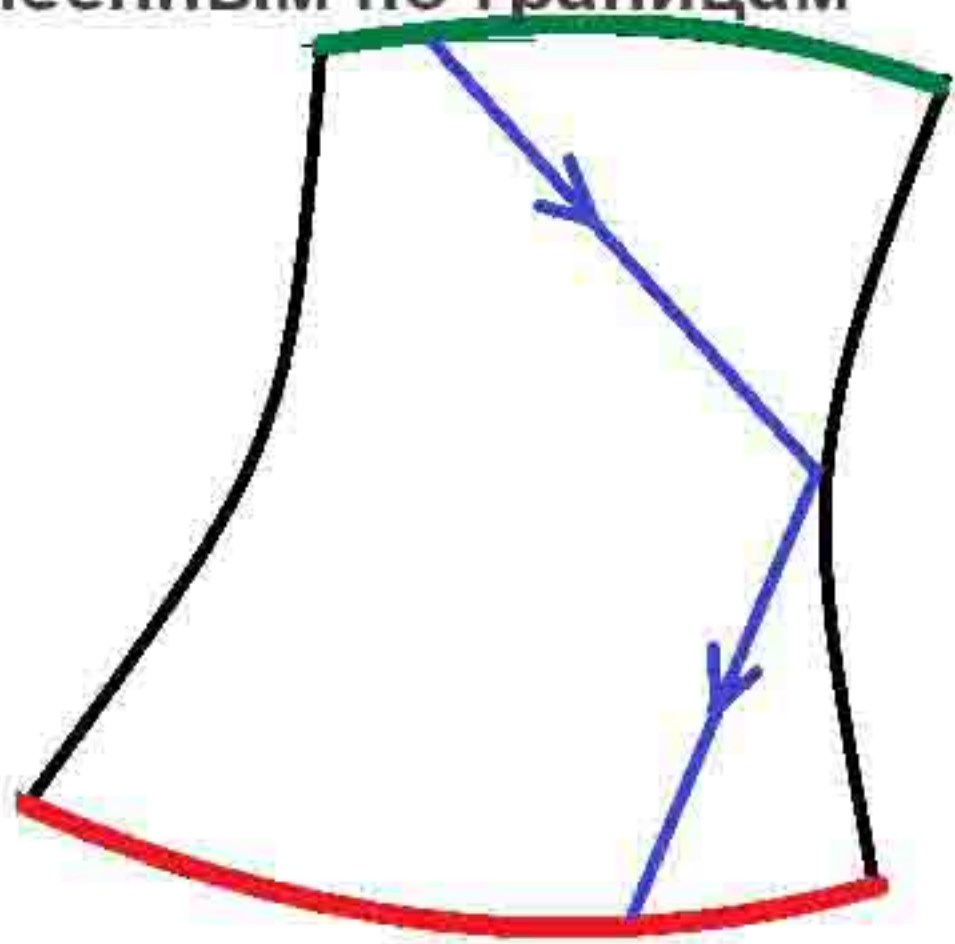
Оказывается, есть широкий класс топологических биллиардов, получающихся склейкой нескольких «интегрируемых» биллиардных столов по их границам. То есть некоторые граничные дуги софокусных квадрик отождествляются при помощи изометрий.

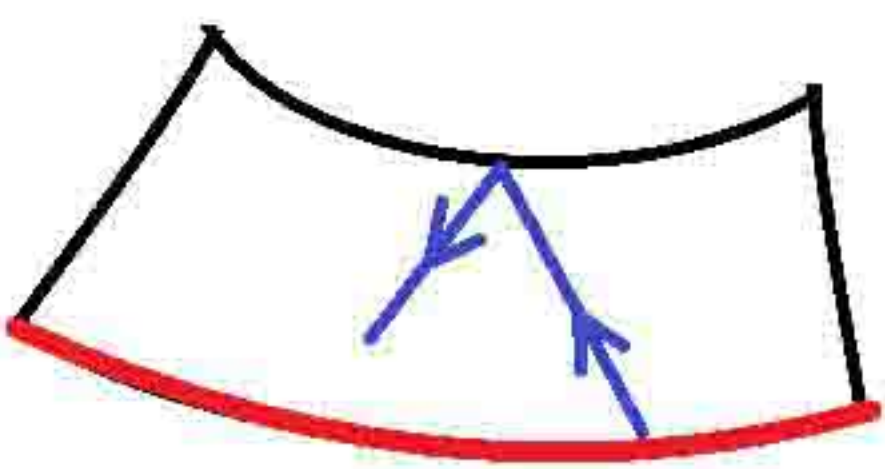


Оказывается, такие топологические биллиарды тоже «интегрируемы», обладают максимально богатой группой симметрий



показано, как шар движется по листам биллиарда, склеенным по границам

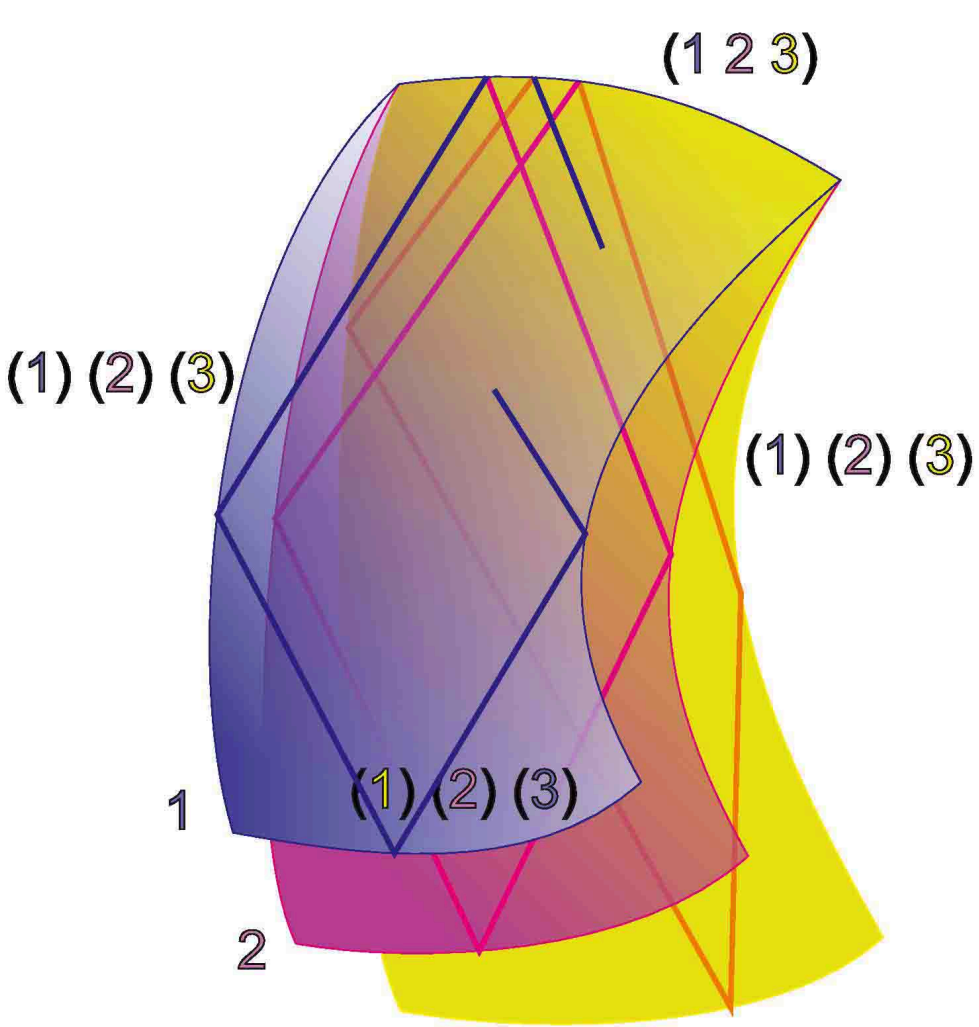


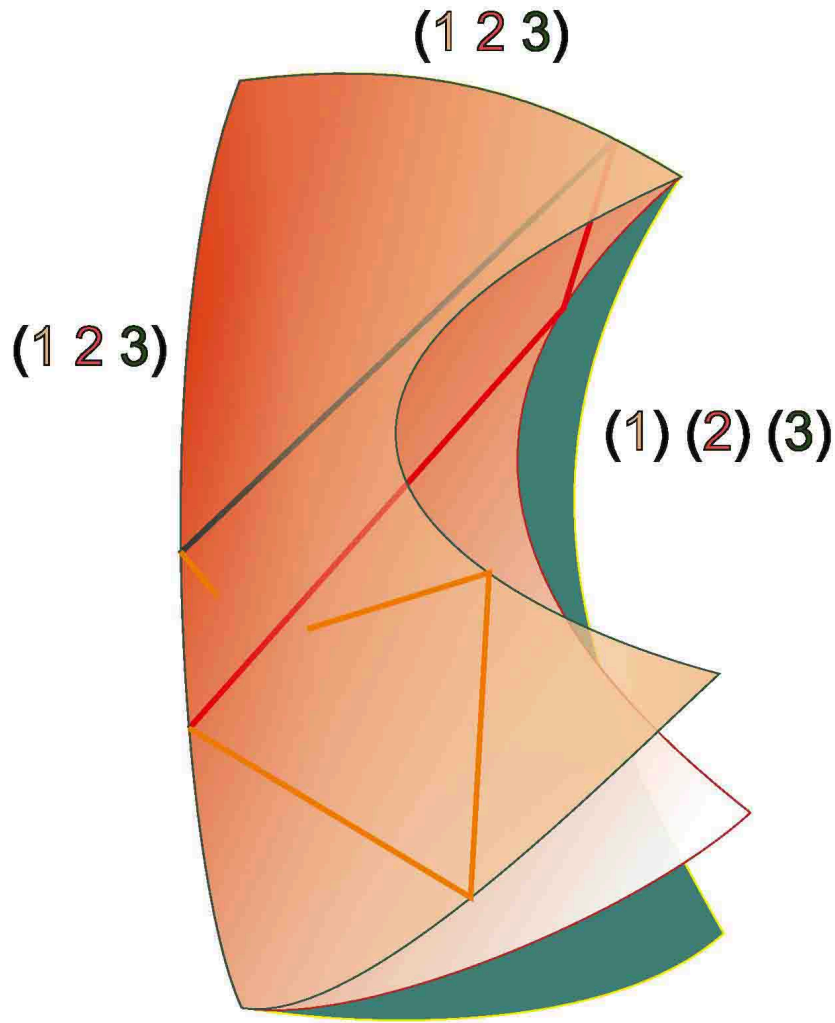


Биллиардная книжка.

Этот класс биллиардов введен Викторией Ведюшкиной

Здесь на одном ребре могут сходиться НЕСКОЛЬКО листов биллиарда





Переходы шара с листа другой лист диктуются перестановкой, заданной на ребре склейки. Если два таких ребра сходятся в одной вершине, две перестановки должны коммутировать

Программа изучения таких биллиардов и новые гипотезы в этом направлении были сформулированы А.Т.Фоменко. В частности, обнаружен ответ на следующий вопрос:

Что общего у биллиардной задачи и проблемы топологического описания решений интегрируемых систем на группах Ли и в физике

биллиарды (интегрируемые, т.е. обладающие богатыми симметриями)	интегрируемые системы на группах Ли и в математической физике
достаточно наглядное описание интегральных траекторий системы (биллиардного шара)	наглядное описание решений весьма сложно
устойчивые решения легко описываются и классифицируются	поиск устойчивых решений весьма сложен

Новый важный результат: оказывается, биллиарды моделируют ("воспроизводят") многие сложные случаи интегрируемости на группах Ли и в математической физике (В.В.Ведюшкина, А.Т.Фоменко).

ТЕМЫ КУРСОВЫХ РАБОТ

А) Построить топологические биллиарды, реализующие важные классы особенностей (бифуркаций) интегрируемых систем. Решение задач поможет освоить наглядные методы двумерной и трехмерной топологии, узнать базовые факты из теории особенностей (на стыке дифф.уравнений, алгебры и геометрии), физики и теории динамических систем. Знаменитые теоремы Лиувилля, Биркгофа, Шаля, Вальдхаузена, Эйлера, Лагранжа. Для начала работы достаточно знать, что такое двумерные поверхности и перестановки.

Руководители: академик А.Т.Фоменко, д.ф.м.н.В.В.Ведюшкина

1) Реализация особенностей интегрируемых систем с помощью биллиардов внутри областей, ограниченных эллипсами и гиперболами с общими фокусами, и их обобщений -- биллиардных книжек и биллиардов с добавленными потенциалами типа Гука.

2) Развивая уже построенные алгоритмы, предполагается реализовать важные классы вырожденных особенностей динамических систем.

3) Топология слоения Лиувилля выпуклых топологических биллиардов (и в продолжение биллиардных книжек) с различными потенциалами.

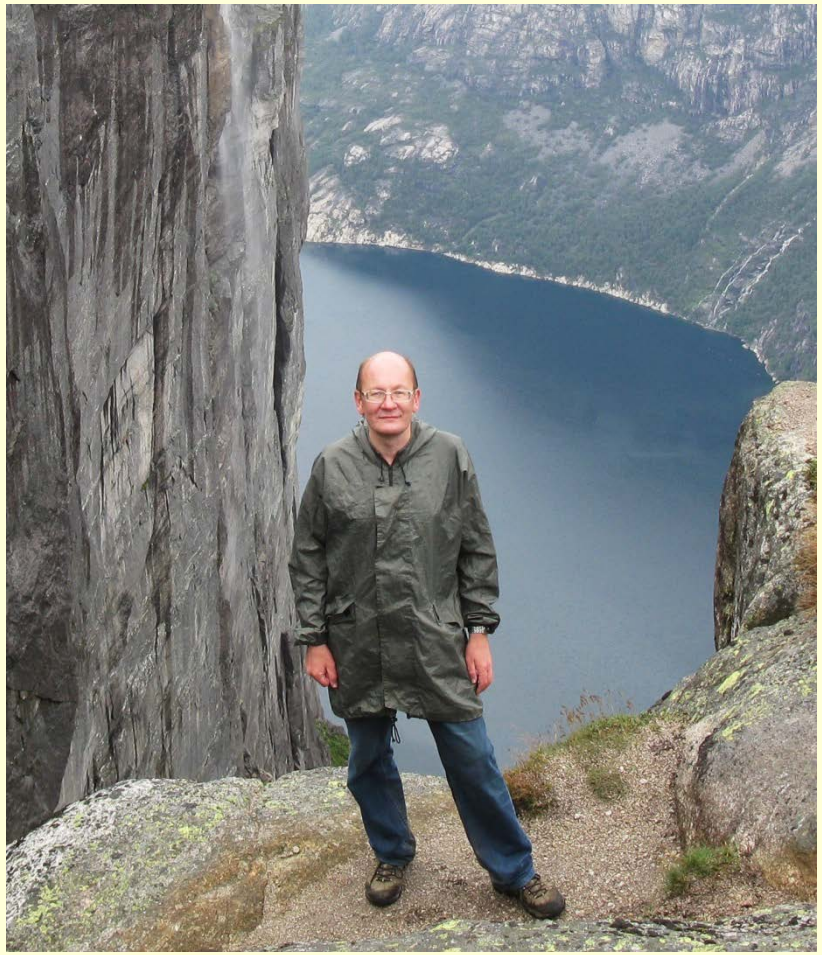
4) Классификация биллиардных книжек малой сложности. Здесь вопрос чисто алгебраический на перестановки.

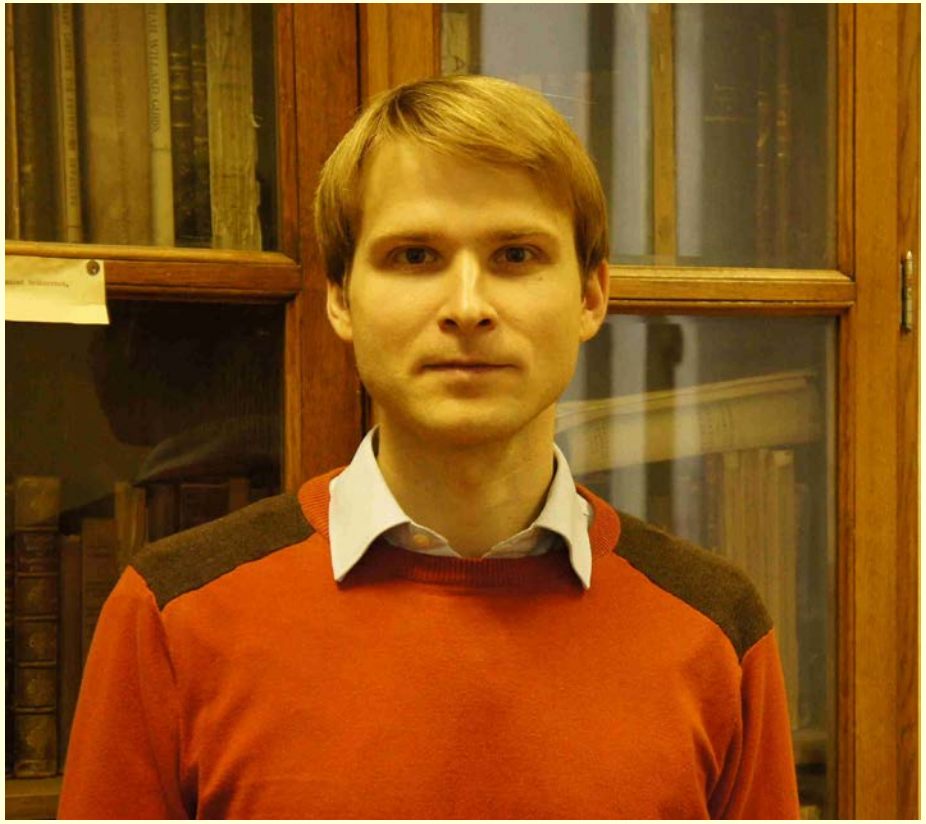
Б) Неевклидовы пространства и физические системы в них. Интегрируемые системы и их топология. Изучить аналоги (на случай неевклидовых пространств) ряда известных систем на алгебра Ли. Например: как описать эволюцию вращающейся юлы (волчок Лагранжа) если пространство псевдоевклидово? Решение первых задач возможно с минимумом подготовки (надо уметь считать определители и дифференцировать многочлены).

Руководители: академик А.Т.Фоменко, ассистент В.А.Кибкало

Отметим, что механика систем в неевклидовых пространствах начала рассматриваться еще в XIX веке, и в последние годы бурно развивается с применением топологических подходов, с развитием теории групп Ли, алгебр Ли и интегрируемых систем на их орбитах.

Геометрия и математическая физика.



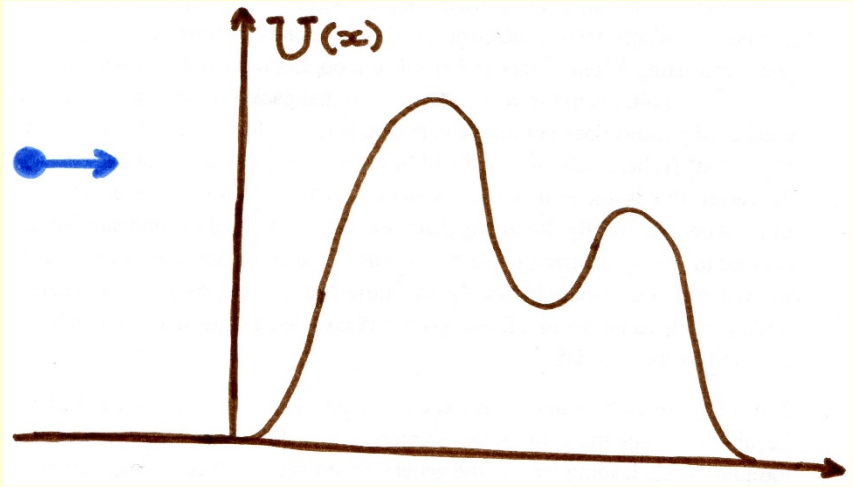


А.И.Шафаревич

А.А.Толченников

Пример 1. Комплексная геометрия в квантовой механике

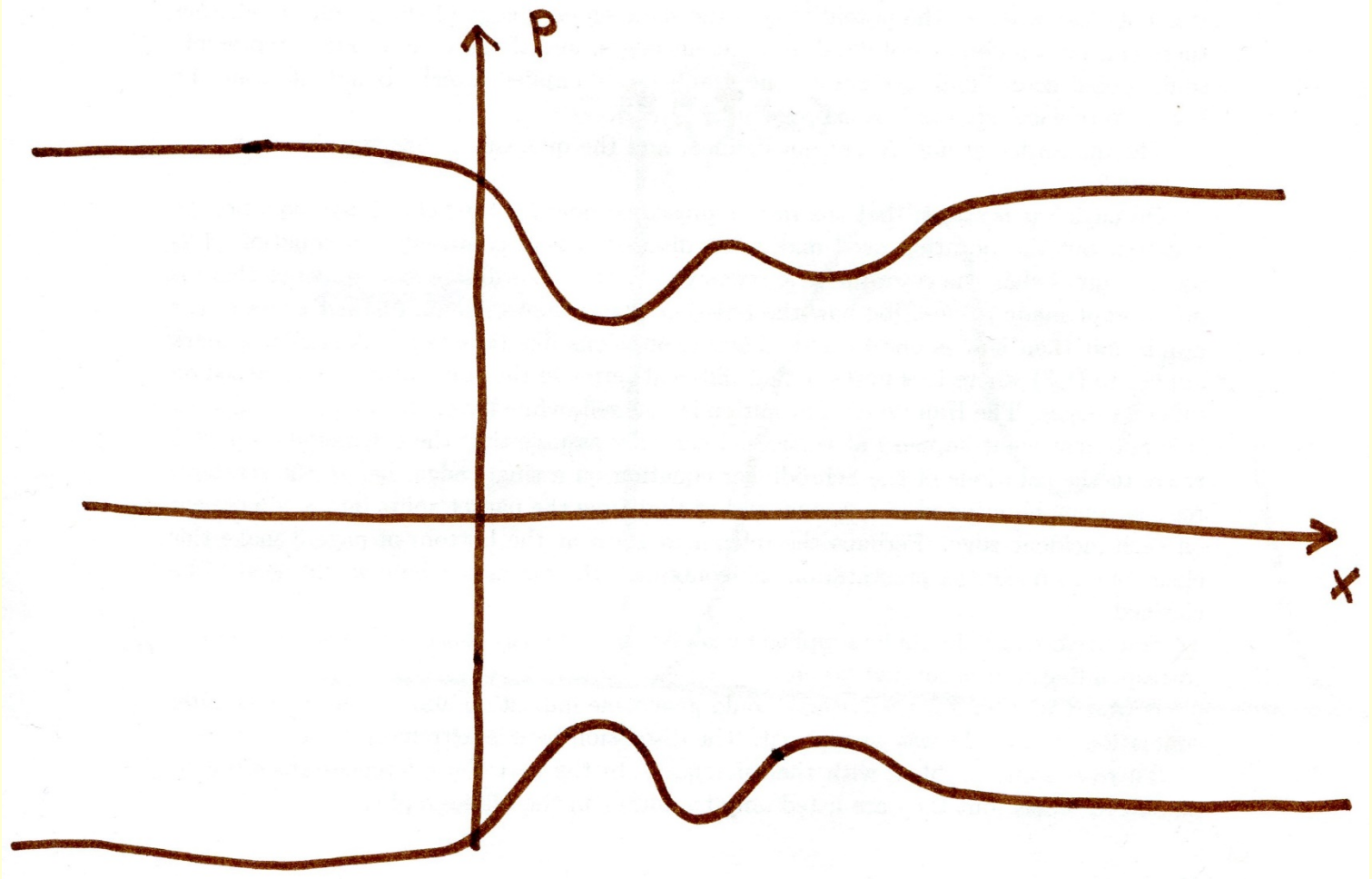
Одномерное движение классической частицы (шарик). Силы (потенциальная энергия) сосредоточены на отрезке.



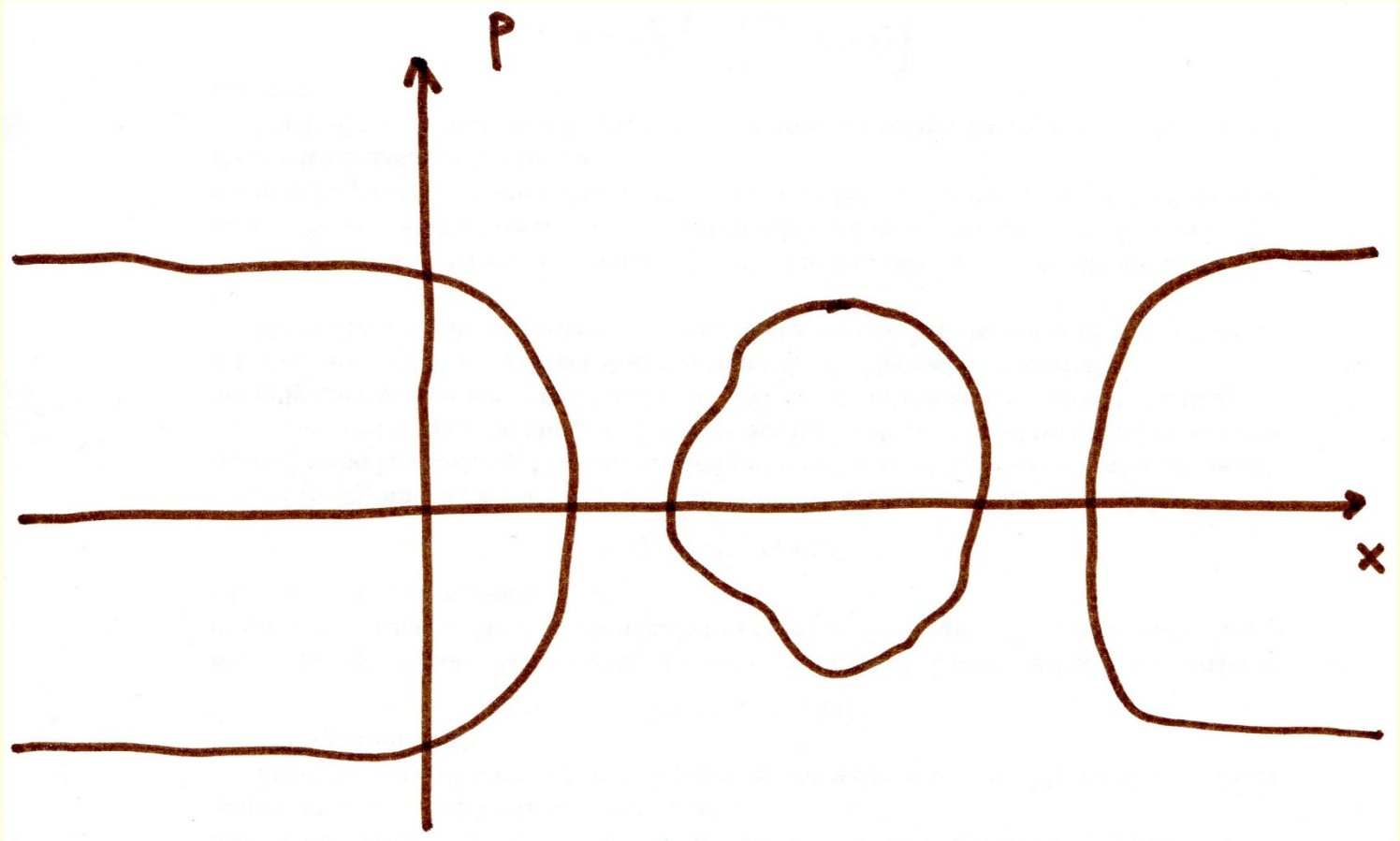
Поведение шарика определяется геометрией кривой постоянной энергии

$$\frac{p^2}{2} + U(x) = E$$

Прохождение: $E > \max U(x)$



Отражение: $E < \max U(x)$

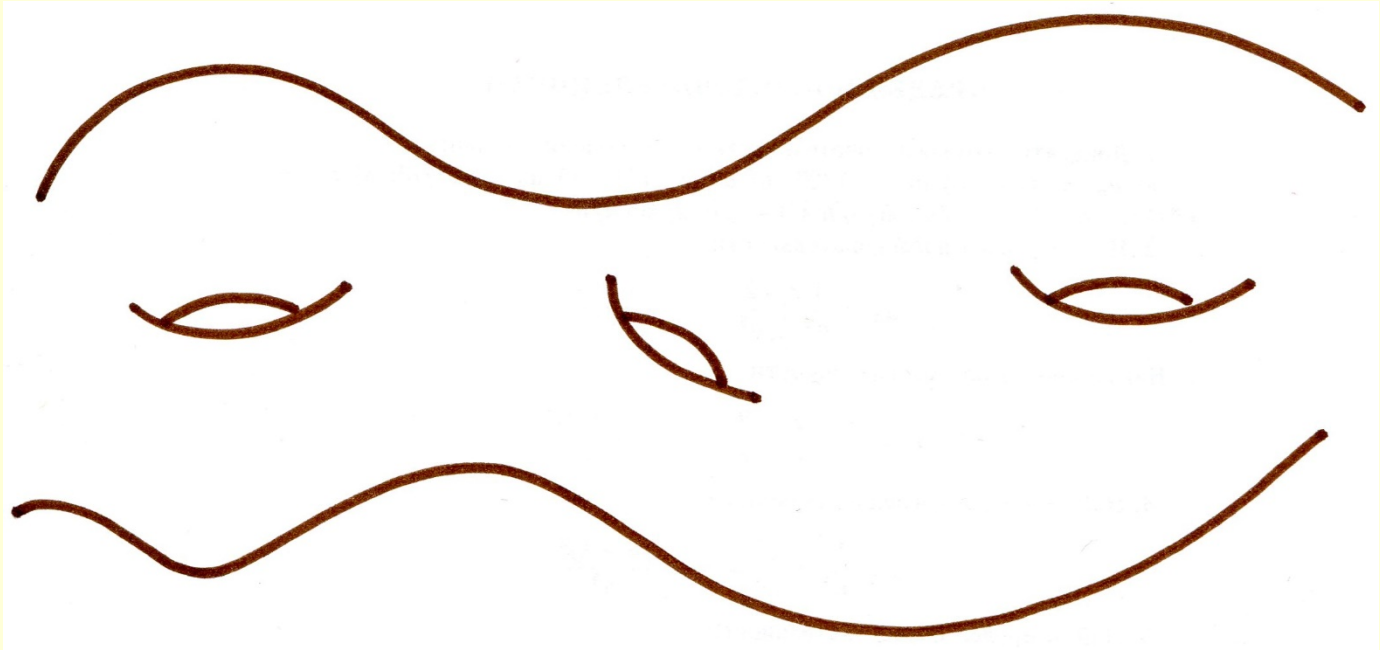


Движение квантовой частицы (электрона): геометрия комплексной кривой постоянной энергии

$$x = x_1 + ix_2 \qquad p = p_1 + ip_2$$

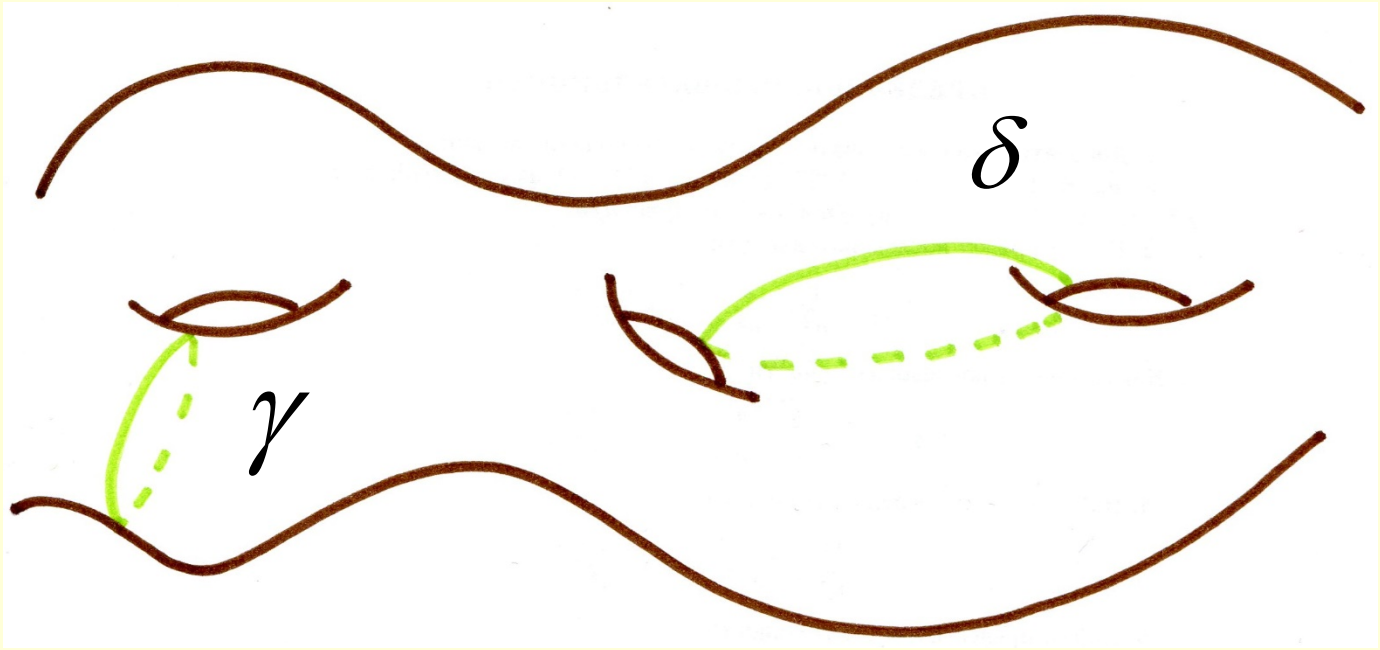
$$\frac{1}{2}(p_1^2 - p_2^2) + \mathrm{Re}U = E \qquad p_1 p_2 + \mathrm{Im}U = 0$$

Двумерная поверхность в четырехмерном пространстве



Ненулевая вероятность отражения и ненулевая вероятность прохождения.

Вычисление вероятностей: интегралы по циклам на поверхности.



В ситуации общего положения

$$|\tau|^2 = e^{-\frac{\rho}{h}}(1+O(h))$$

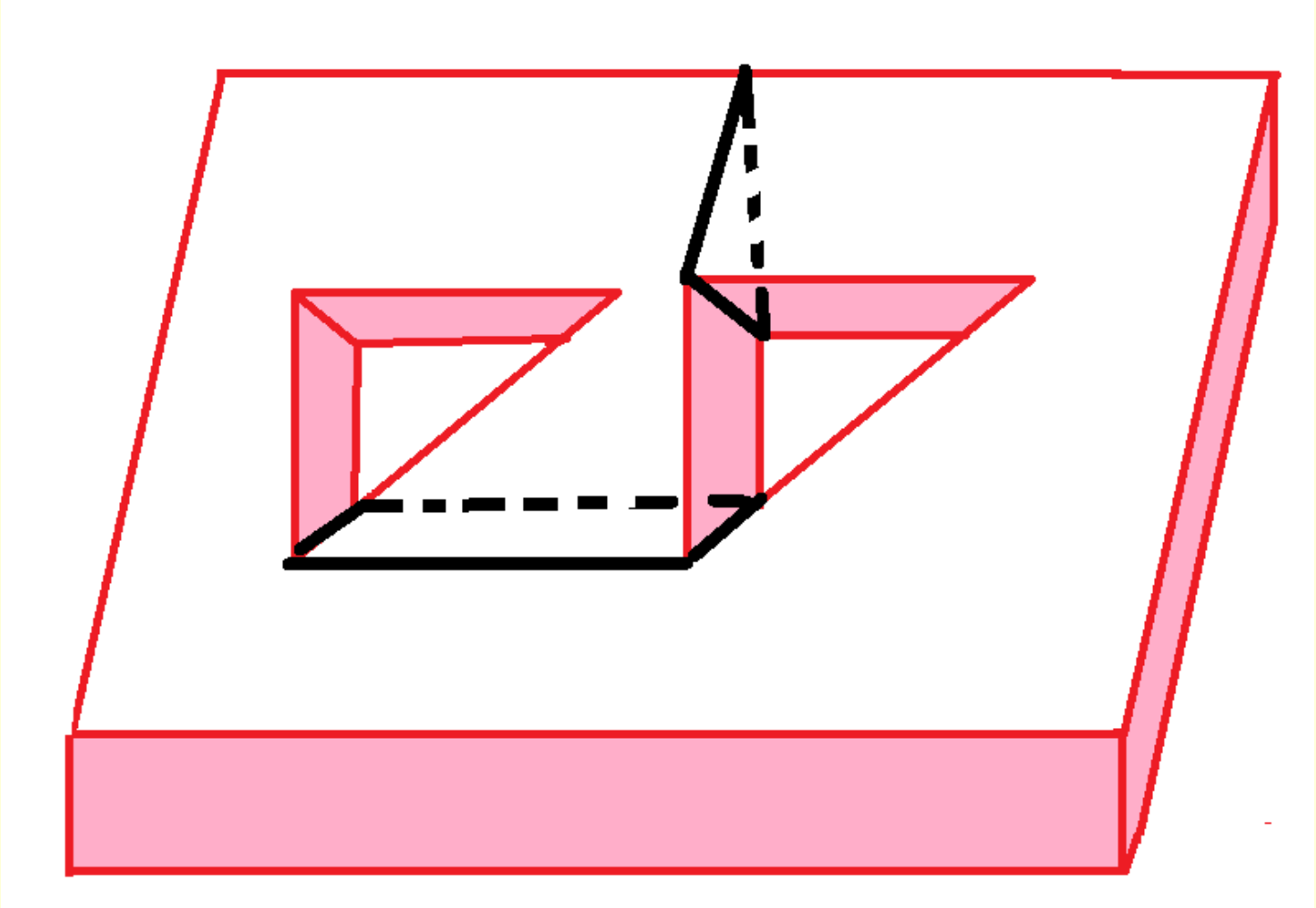
$$\rho = \mathrm{Im}\int_\gamma p dx$$

Резонансное туннелирование: если

$$\frac{1}{2\pi h}\int_\delta p dx = m + \frac{\mu}{4}$$ **, то**

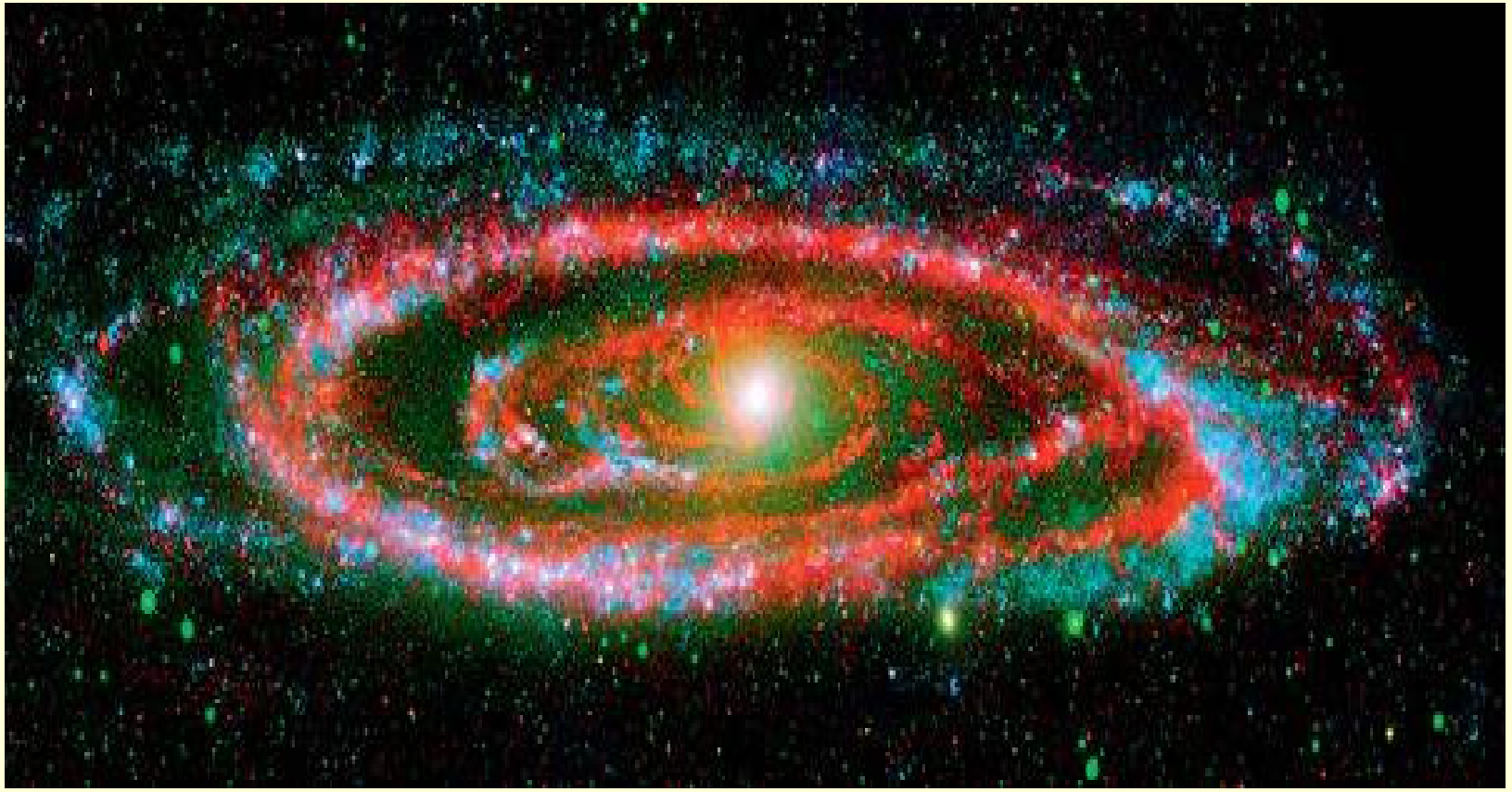
$$|\tau| = 1+O(h)$$

Те же интегралы: длины замкнутых геодезических на многогранной поверхности.

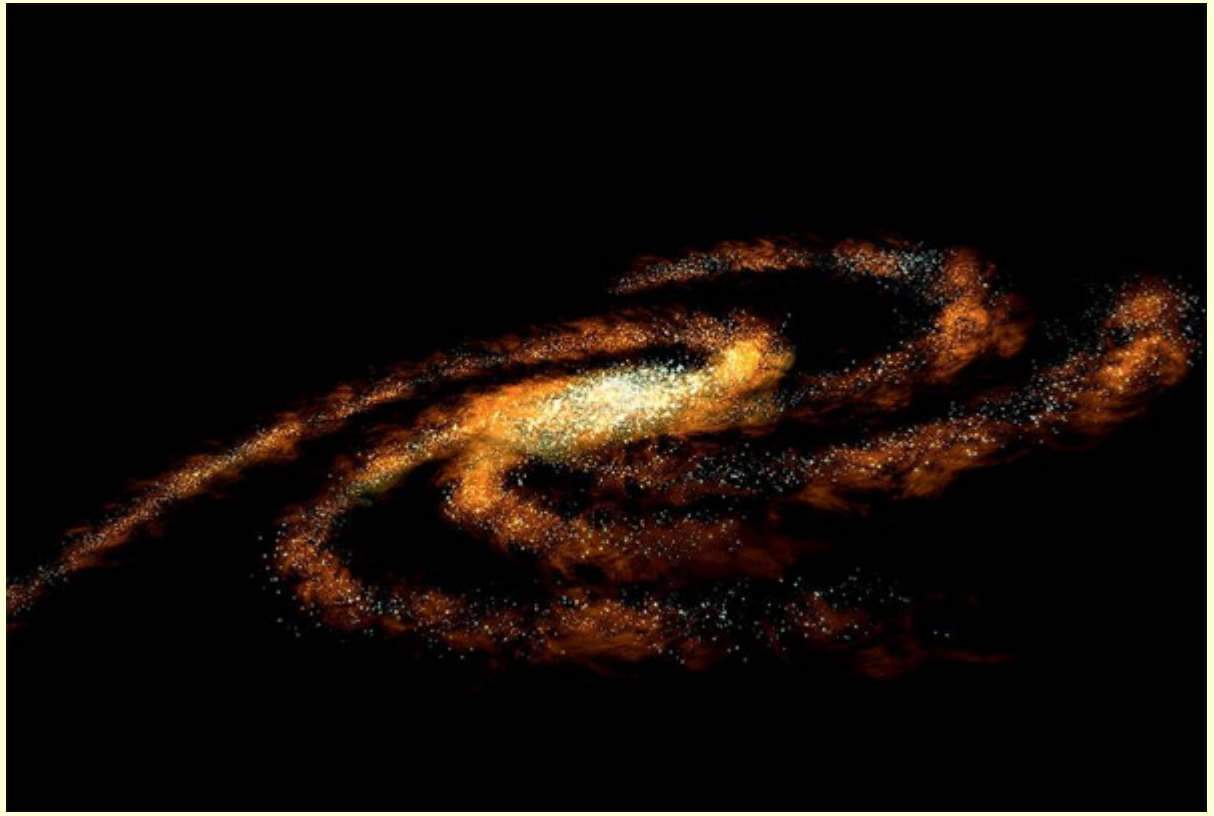


Пример 2. Магнитные поля в галактиках и звездах

Туманность Андромеды

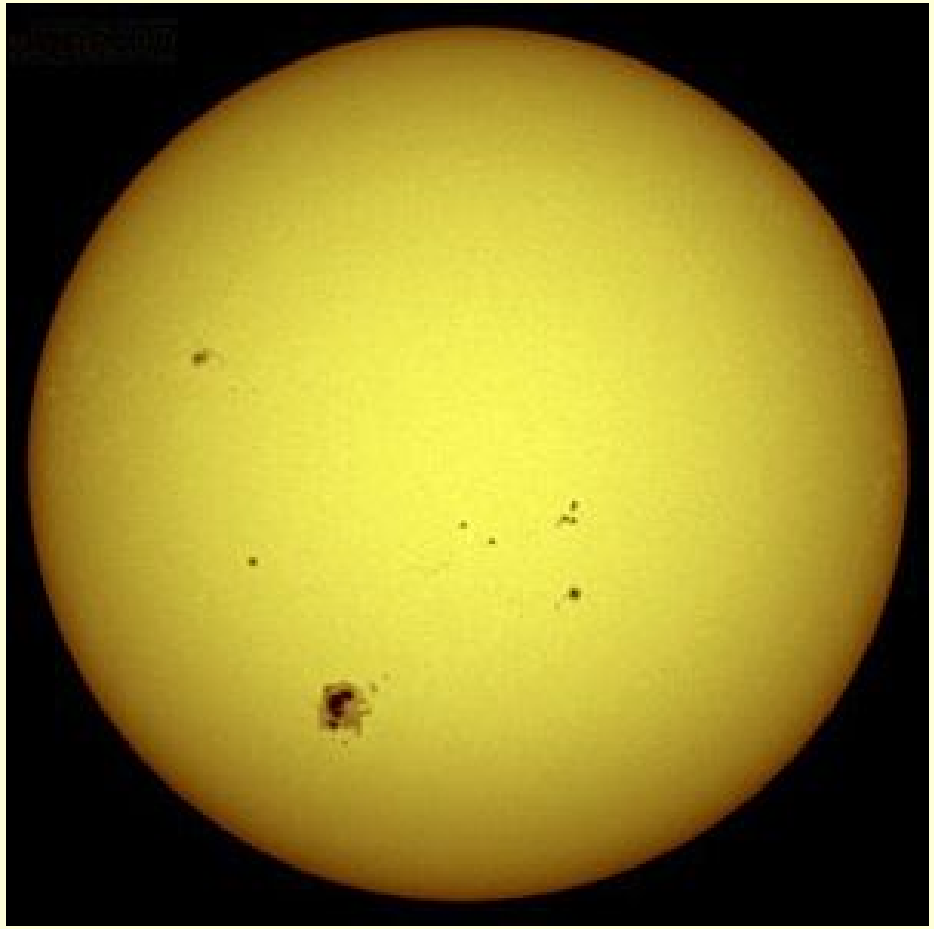


Млечный путь



Галактика «Скульптор»

Магнитные поля в фотосфере и пятна на Солнце



Рост и частота магнитного поля: спектр дифференциального оператора на двумерной поверхности.

$$LB = \varepsilon^2 \Delta B - \{v, B\} = \lambda B$$

$$(\nabla, v) = (\nabla, B) = 0$$

$$\varepsilon \to 0, \qquad x \in M -$$

двумерная поверхность галактики или звезды

Пусть поле скоростей направлено вдоль параллелей

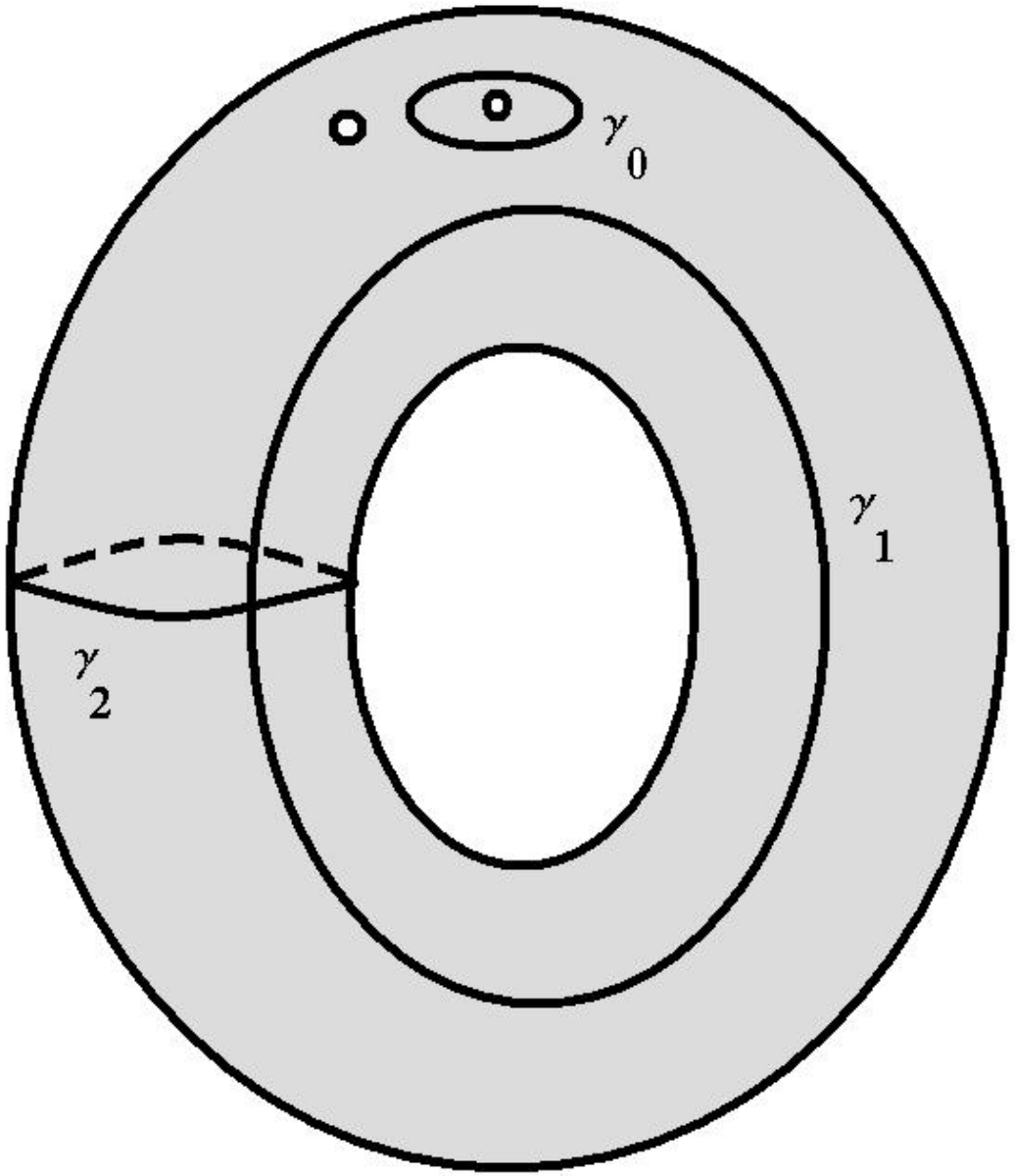
$$v = a(z)\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Риманова поверхность

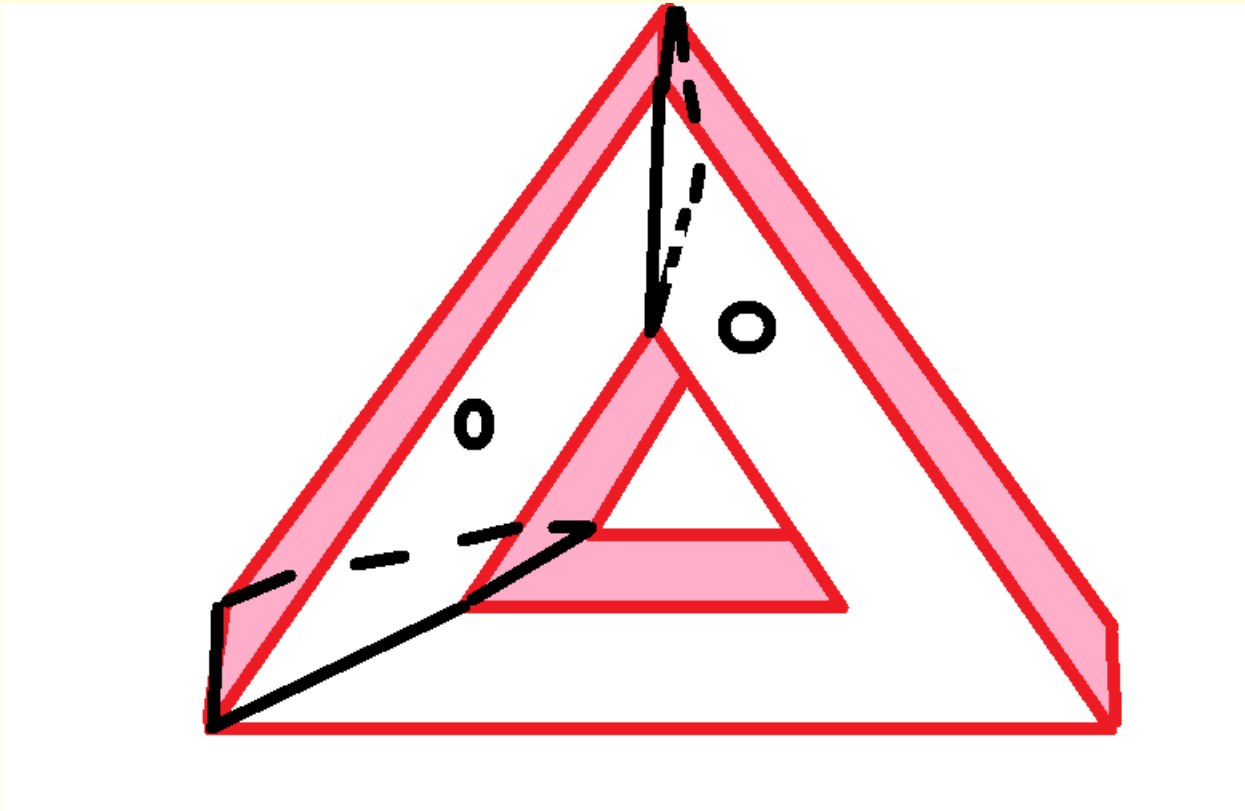
$$p^2 + ima(z) = \lambda$$

Собственные частоты магнитного поля

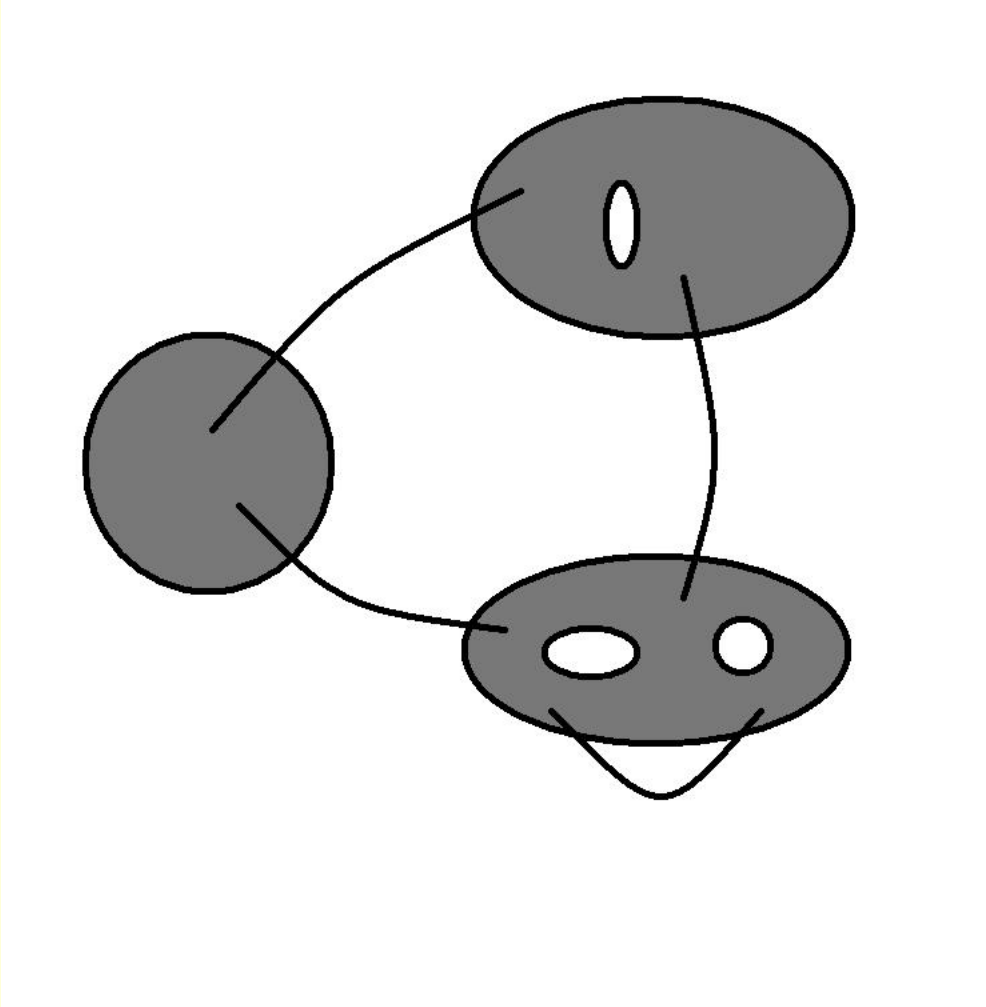
$$\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\gamma_j} pdz = n + \frac{\gamma}{2}$$

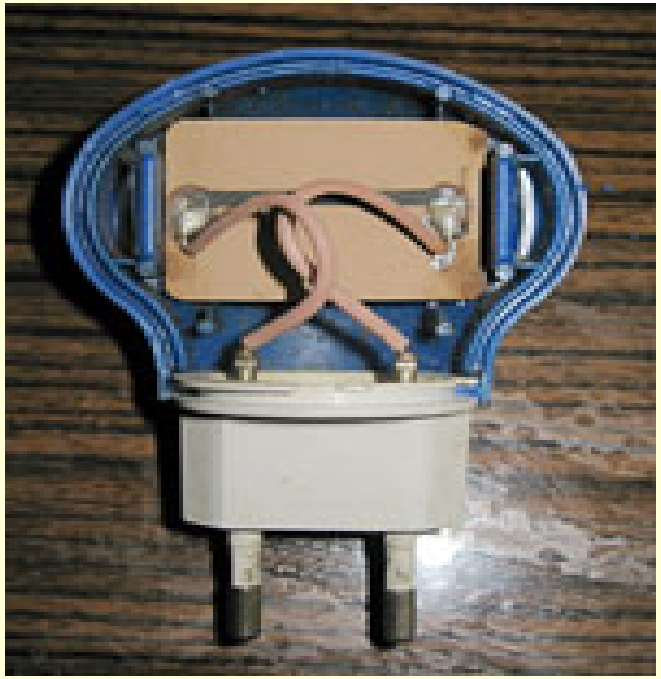

γ_0
γ_1
γ_2

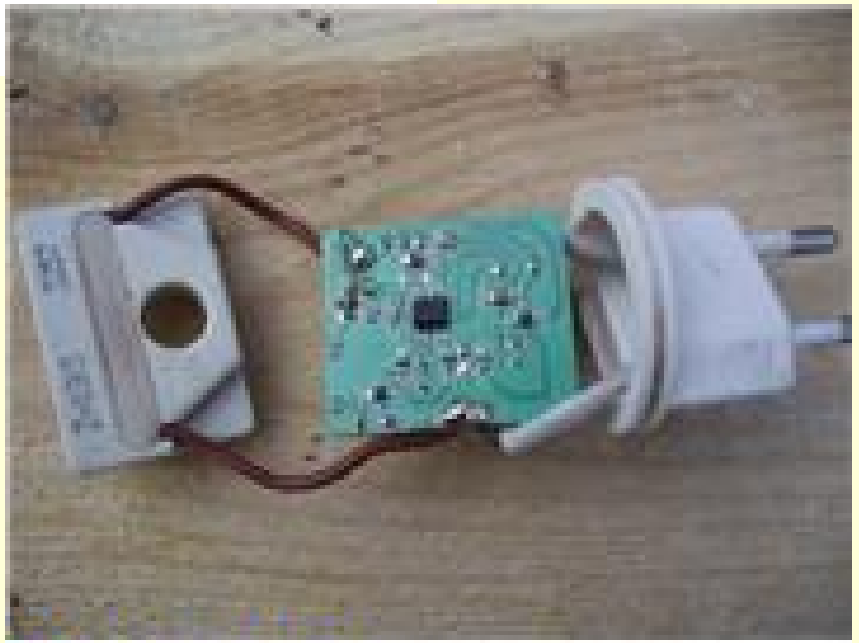
Условие целочисленности длины замкнутой геодезической на многогранной поверхности



Пример 3. Классическая и квантовая динамика и геометрия множеств переменной размерности.



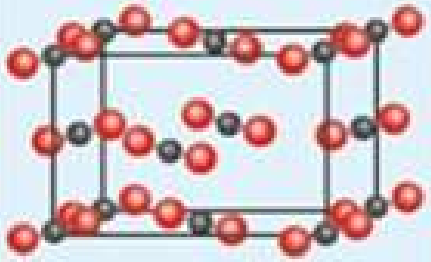




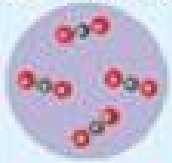
Увеличить

МОЛЕКУЛЯРНЫЕ

CO_2



Углекислый газ

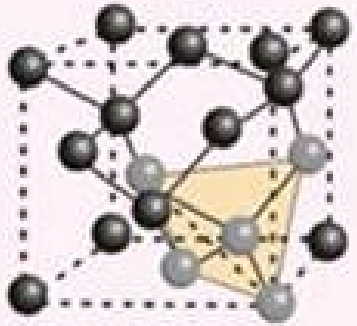


$t_{кип}$ −78 °C

Твердая двуокись углерода

АТОМНЫЕ

C

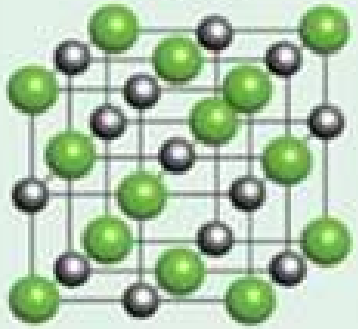


$t_{пл}$ 3500 °C
$t_{кип}$ 4200 °C

Алмаз

ИОННЫЕ

NaCl

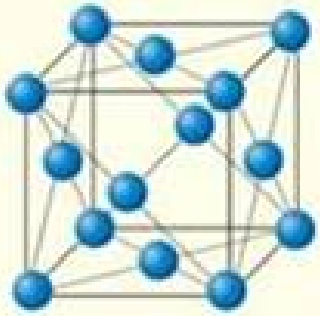


$t_{пл}$ 801 °C
$t_{кип}$ 1465 °C

Галит

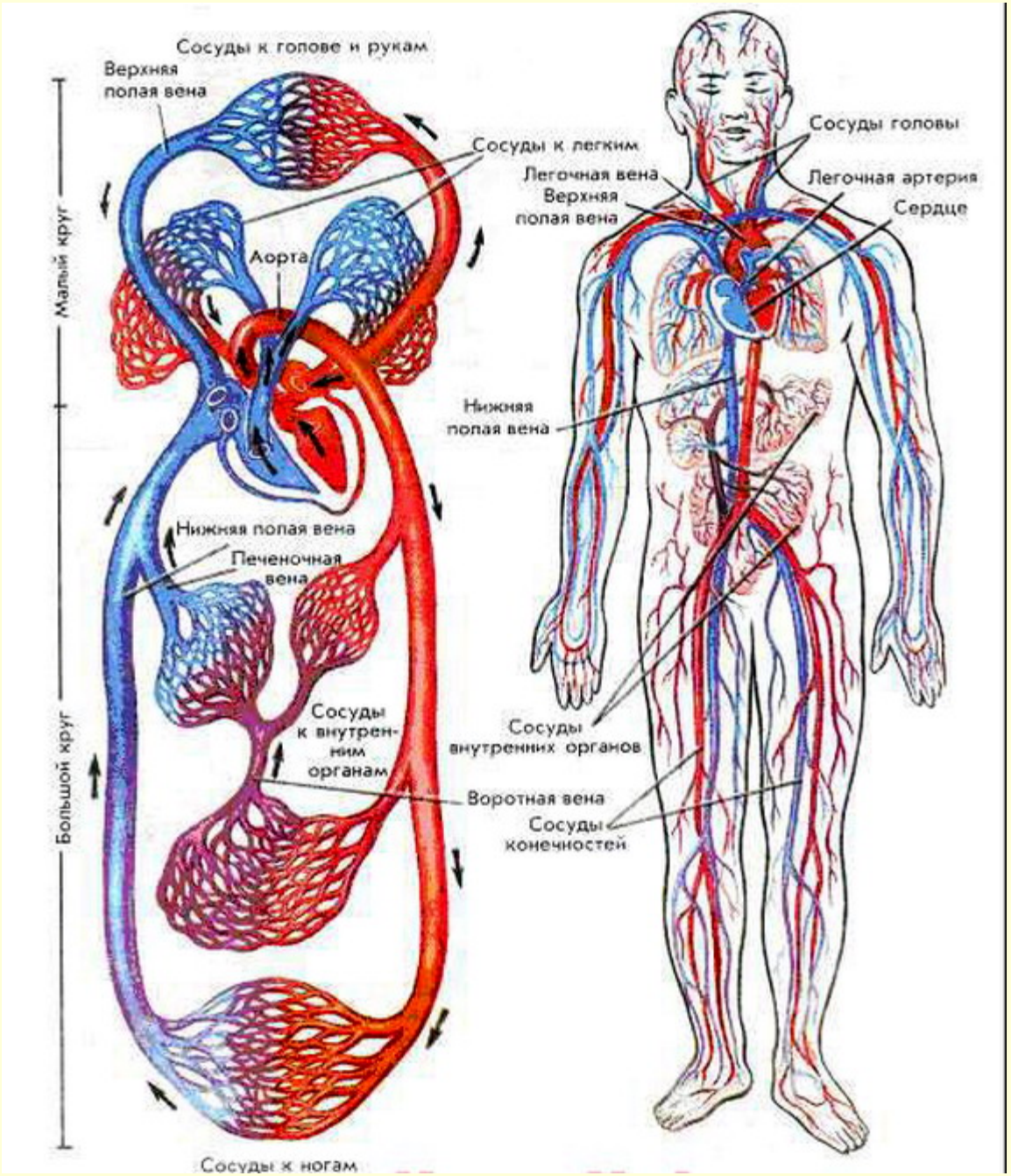
МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ

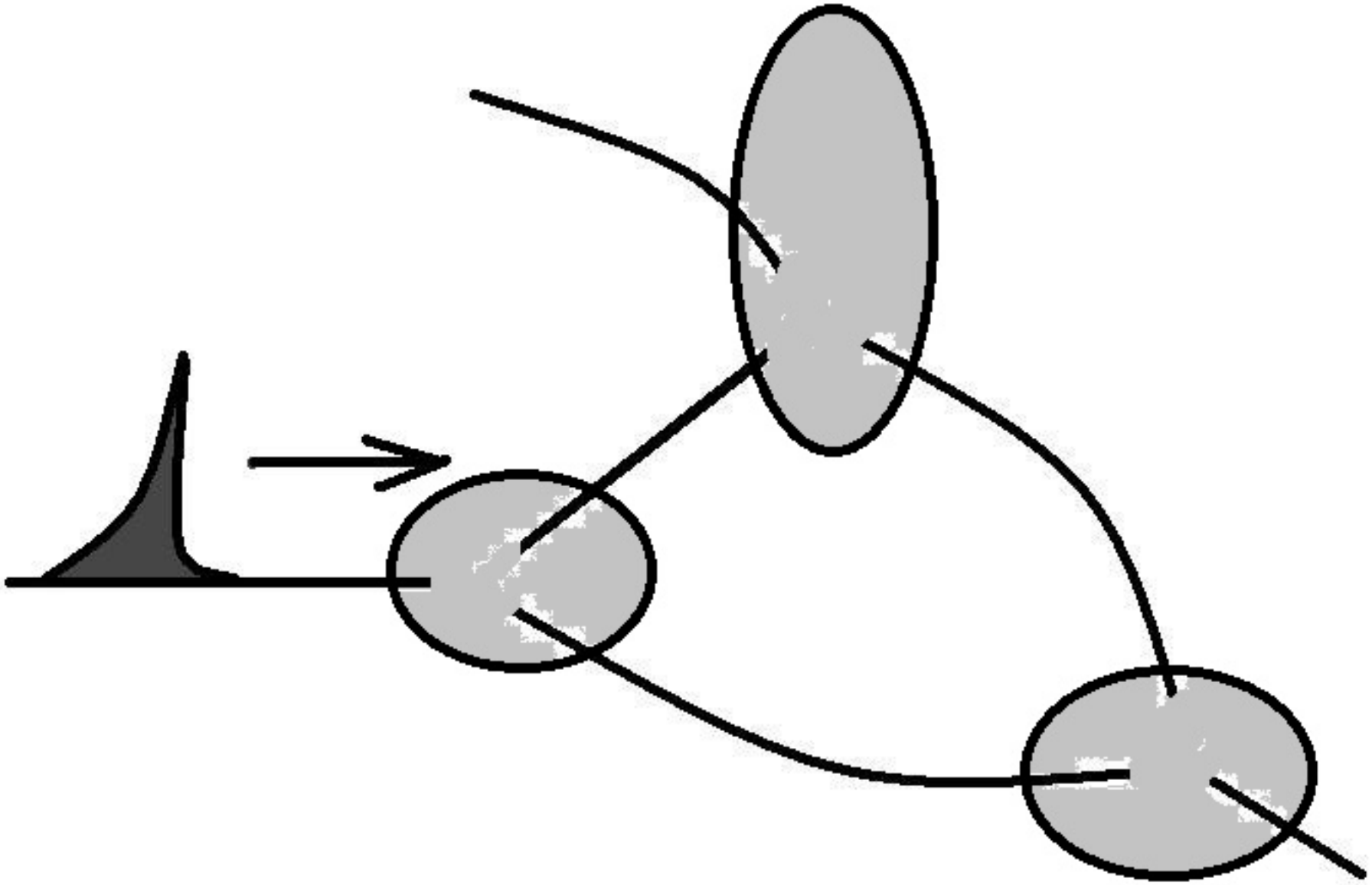
Cu



$t_{пл}$ 1083 °C
$t_{кип}$ 2567 °C

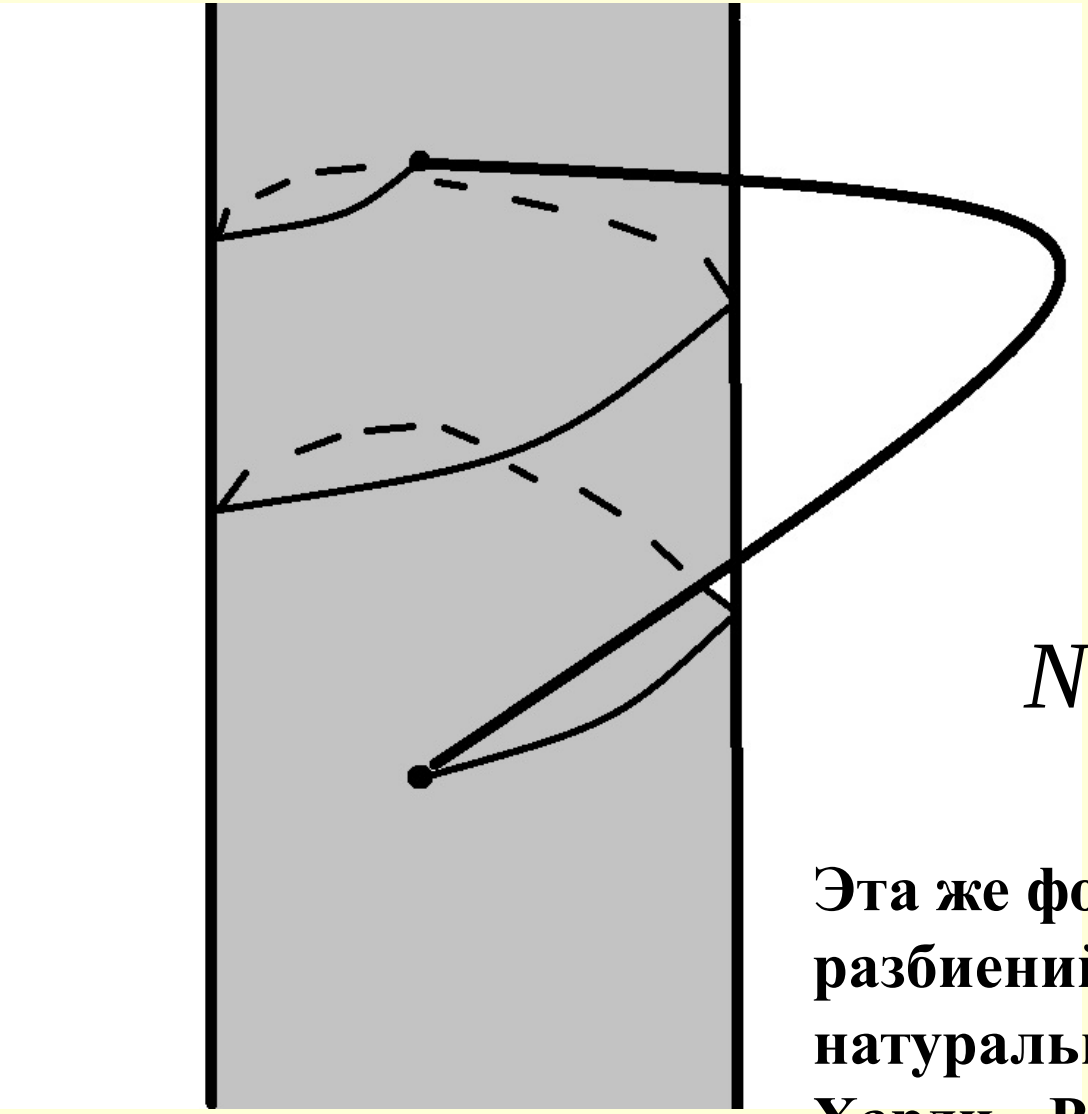
Медь


Сосуды к голове и рукам
Верхняя полая вена
Сосуды к легким
Аорта
Малый круг
Нижняя полая вена
Печеночная вена
Сосуды к внутренним органам
Воротная вена
Большой круг
Сосуды к ногам
Сосуды головы
Легочная вена
Легочная артерия
Верхняя полая вена
Сердце
Нижняя полая вена
Сосуды внутренних органов
Сосуды конечностей



Как меняется со временем число частиц?

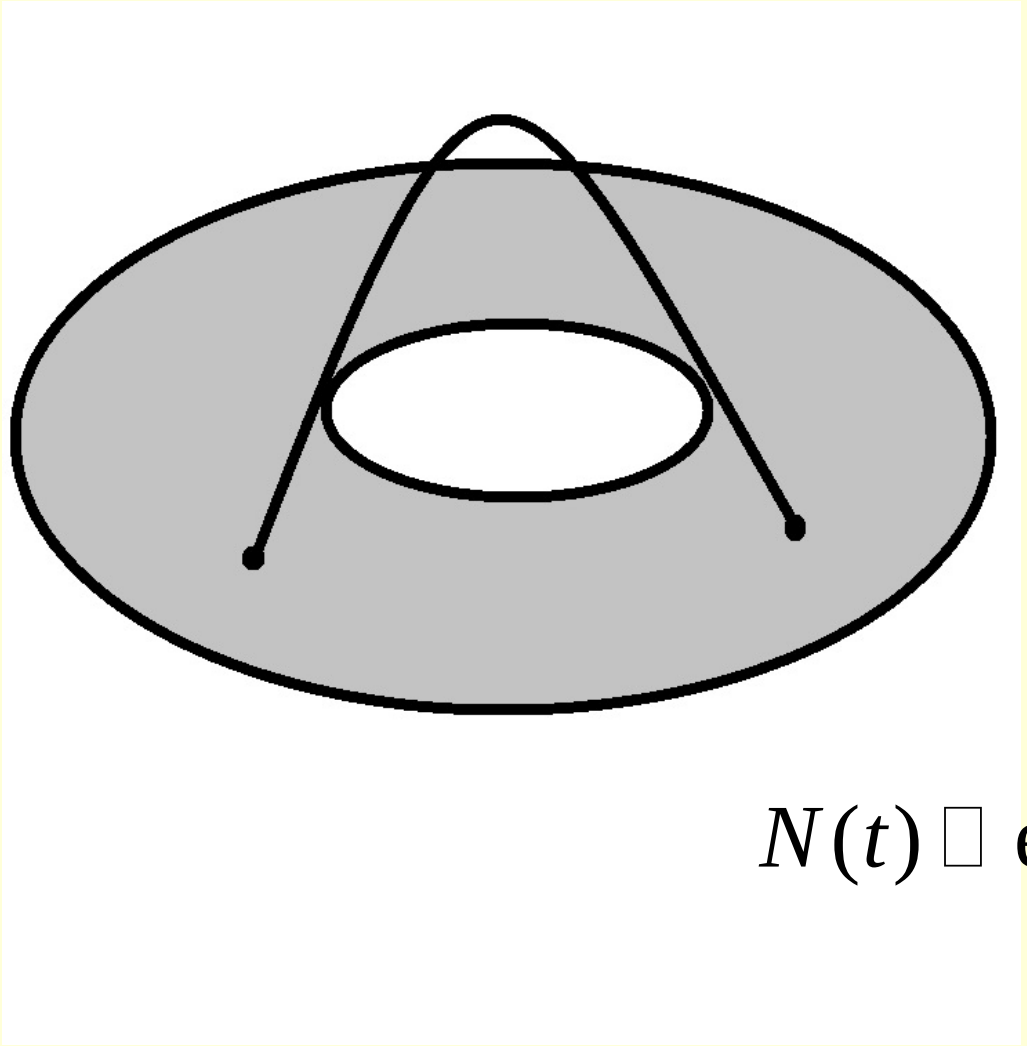
Цилиндр с приклеенным отрезком



$$N(t) \sim \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3R}}\pi t^{1/2}\right)$$

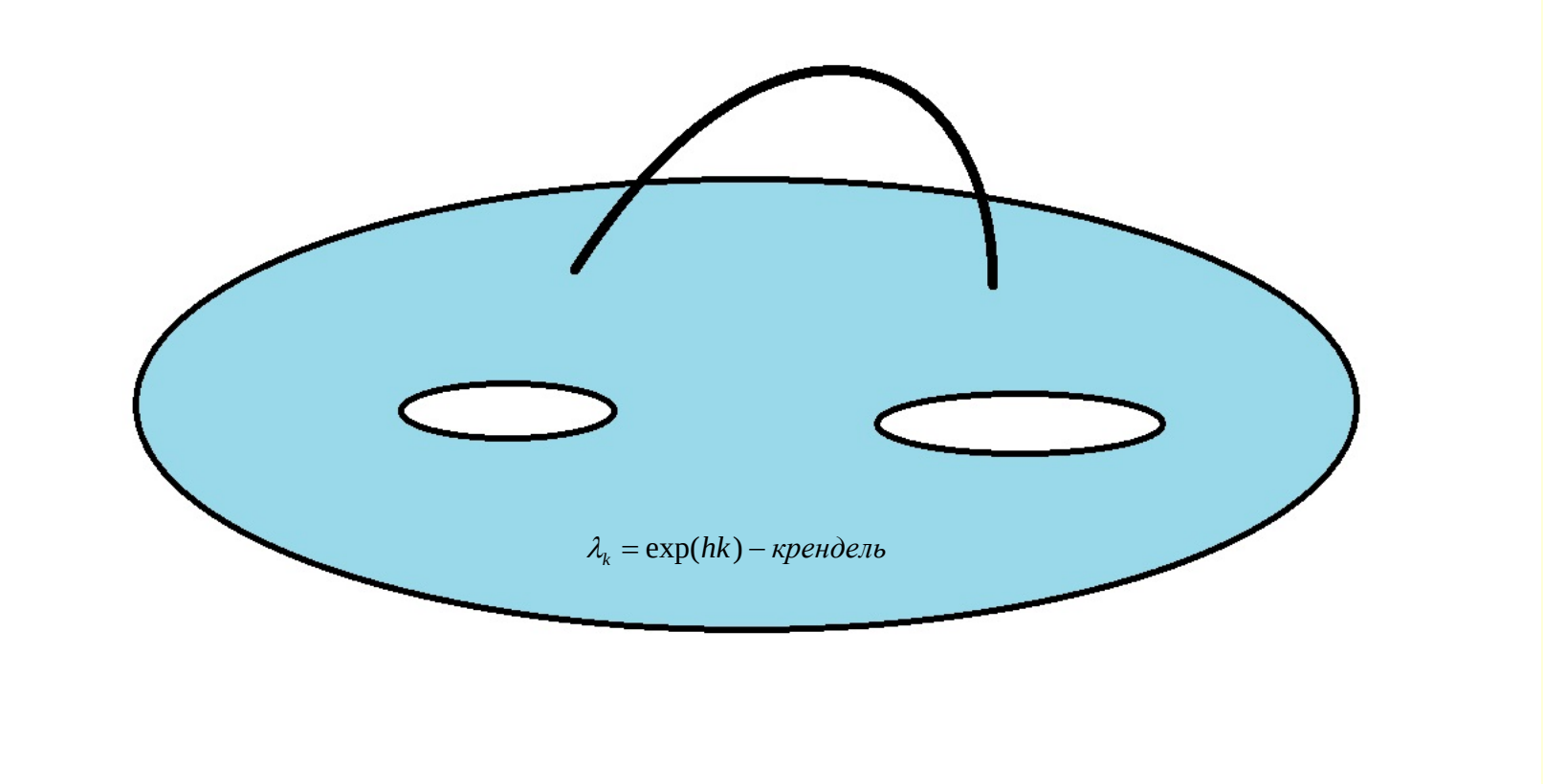
Эта же формула определяет число разбиений натурального числа t на натуральные слагаемые (теорема Харди - Рамануджана)

Тор с приклеенным отрезком



$$N(t) \sim \exp\left(3\sqrt[3]{\frac{5\pi}{8ab}\zeta(3)t^{2/3}}\right)$$

Крендель с приклеенным отрезком



$$N(t) \square \exp(ht)$$

Число натуральных решений неравенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k N_k \le t$$

$$\lambda_k = k - \textit{цилиндр}$$

$$\lambda_k = k^2 - \textit{тор}$$

$$\lambda_k = \exp(hk) - \textit{крендель}$$

Метрическая геометрия и геометрическая оптимизация.

А.О.Иванов

А.А.Тужилин

Д.П.Ильютко

Метрическая геометрия – геометрия метрических пространств

В дифференциальной геометрии ключевые соображения – соображения гладкости, т.е. дифференцируемости. Что можно делать, если есть только расстояние?

Геометрия гиперпространств – пространств подмножеств фиксированного метрического пространства или пространства пространств.

Феликс Хаусдорф – расстояние Хаусдорфа между подмножествами фиксированного метрического пространства X.
Пусть $A \subset X$ – непустое, $r > 0$, тогда

$$U(A, r) = \{x \in X : |xy| < r \text{ для некоторой точки } y \in A\}$$

– открытая r-окрестность A.

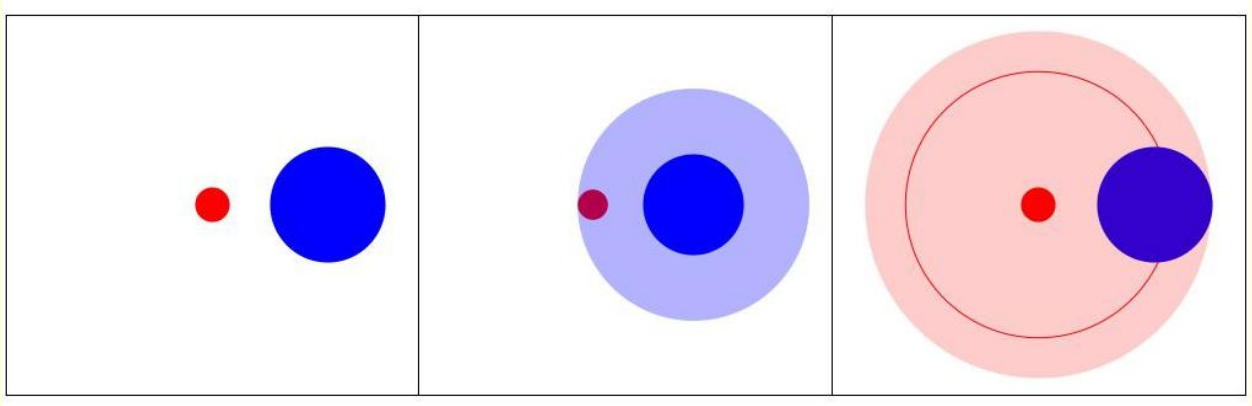
Для непустых $A, B \subset X$ величина

$$d_H(A, B) = \inf\{r : A \subset U(B, r) \text{ и } B \subset U(A, r)\}$$

называется расстоянием Хаусдорфа между A и B.

Расстояния Хаусдорфа и Громова-Хаусдорфа.

Пример: расстояние Хаусдорфа между кругами на плоскости

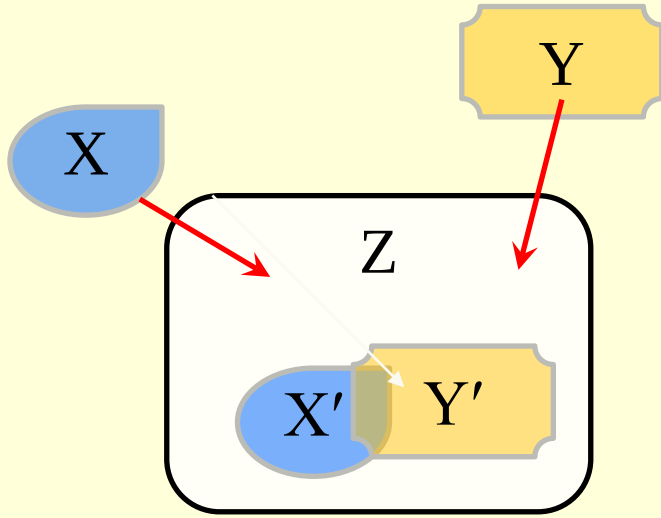


Пусть $\mathcal{GH}$ – собственный класс всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, $X, Y \in \mathcal{GH}$, тогда

$$d_{GH}(X, Y) = \inf\{r: d_H(X', Y') \le r;\ X', Y' \subset Z;\ Z \in \mathcal{GH};\ X \approx X';\ Y \approx Y'\},$$

где для метрических пространств U и V, $U \approx V$ означает, что U изометрично V.

Величина $d_{GH}(X, Y)$ называется расстоянием Громова-Хаусдорфа между метрическими пространствами X и Y.

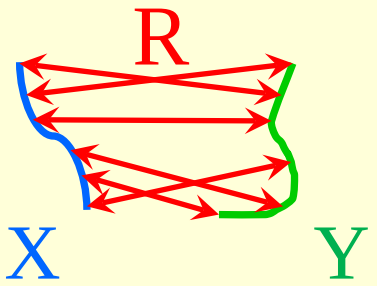


Соответствия и расстояние Громова-Хаусдорфа.

Подмножество $R \subset X \times Y$ называется соответствием, если
для каждого $x \in X$ имеется $y \in Y$ такой, что $(x, y) \in R$, и обратно,
для каждого $y \in Y$ имеется $x \in X$ такой, что $(x, y) \in R$
(т.е. R – сюръективное многозначное отображение).

Обозначим $\mathcal{R}(X, Y)$ множество всех соответствий между X и Y.

Пусть $X, Y \in \mathcal{GH}$ – метрические пространства, $R \in \mathcal{R}(X, Y)$, тогда искажением R называется величина

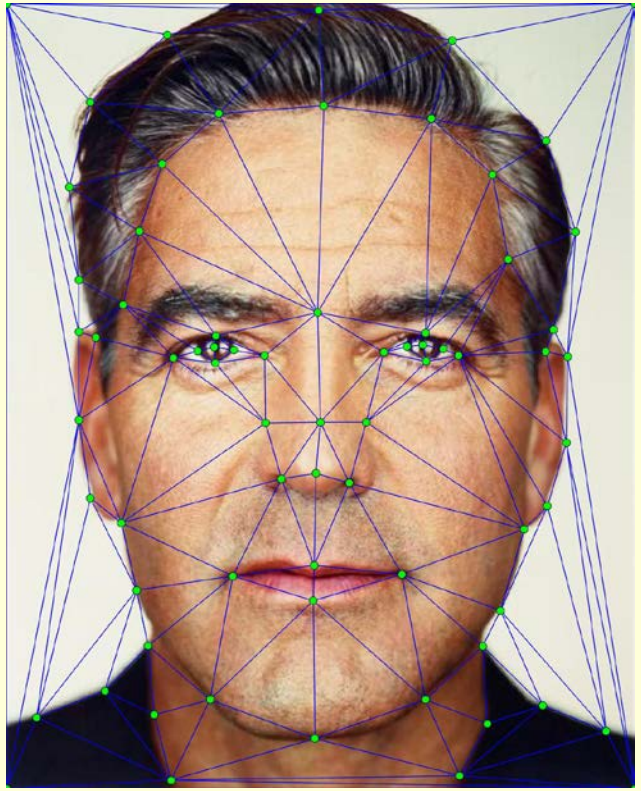
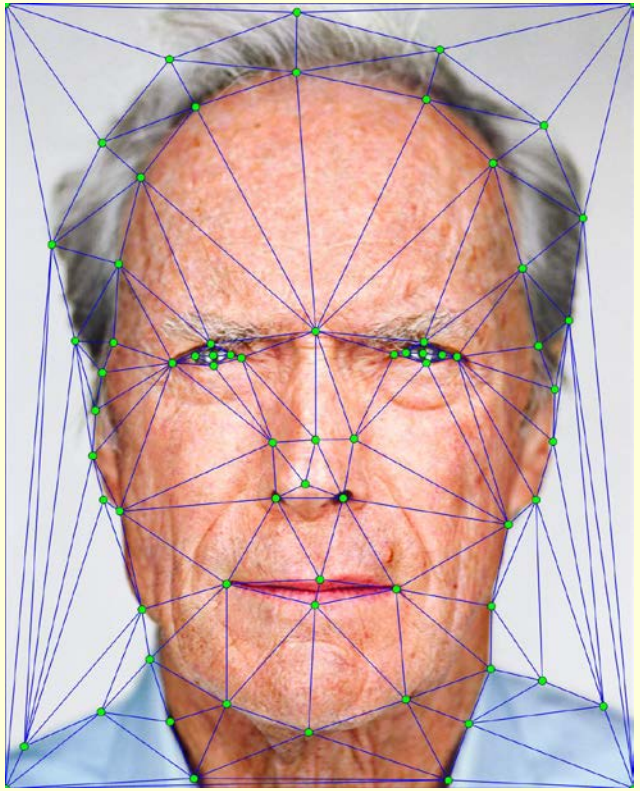
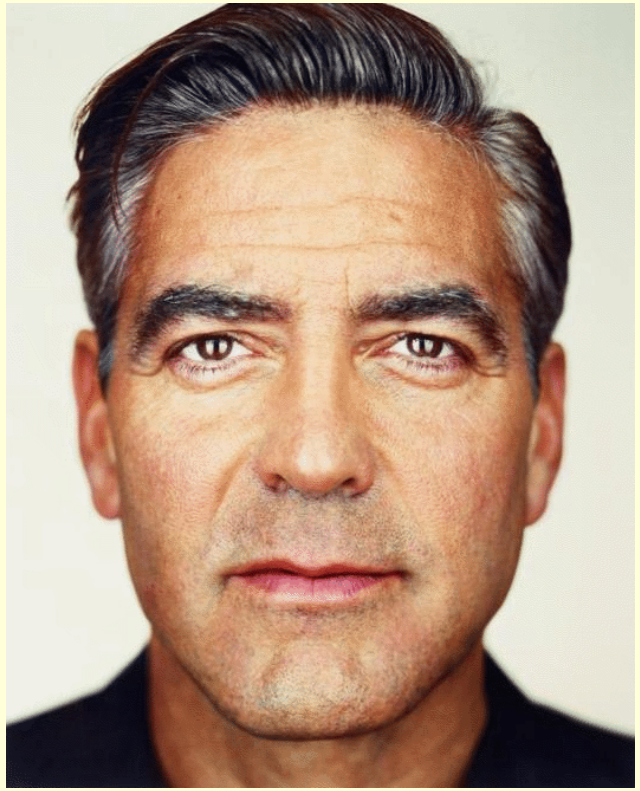


$$\operatorname{dis} R = \sup\{\,||xx'| - |yy'||\,:\,(x, y), (x', y') \in R\}.$$

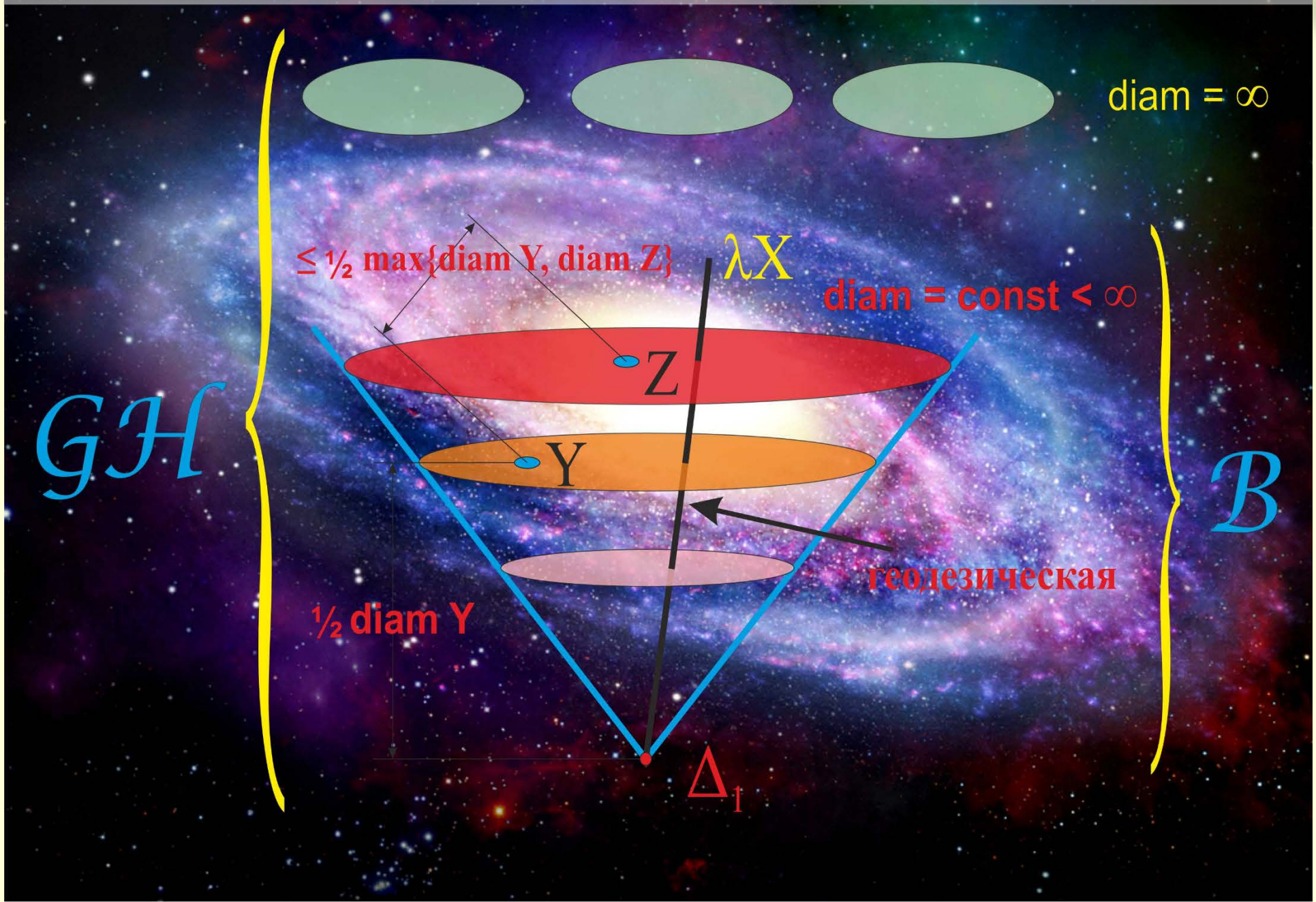
Теорема. Для любых метрических пространств X и Y выполняется

$$2\, d_{GH}(X,Y) = \inf\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X, Y)\}.$$

Морфинг

Геометрия класса $\mathcal{GH}$



Общая задача: изучить геометрию класса Громова-Хаусдорфа

Примеры конкретных задач:

- выяснить, являются ли сферы линейно связными (положительный ответ известен в некоторых частных случаях);
- выяснить, являются ли шары выпуклыми;
- всякое ли метрическое пространство сюда изометрично вкладывается (ответ положительный для ограниченных пространств);
- любые ли метрические пространства можно соединить кратчайшей кривой (ответ положительный для компактов);
- научиться явно вычислять расстояние Громова-Хаусдорфа между «популярными» пространствами, скажем, окружностью и сферой.

Геометрическая оптимизация

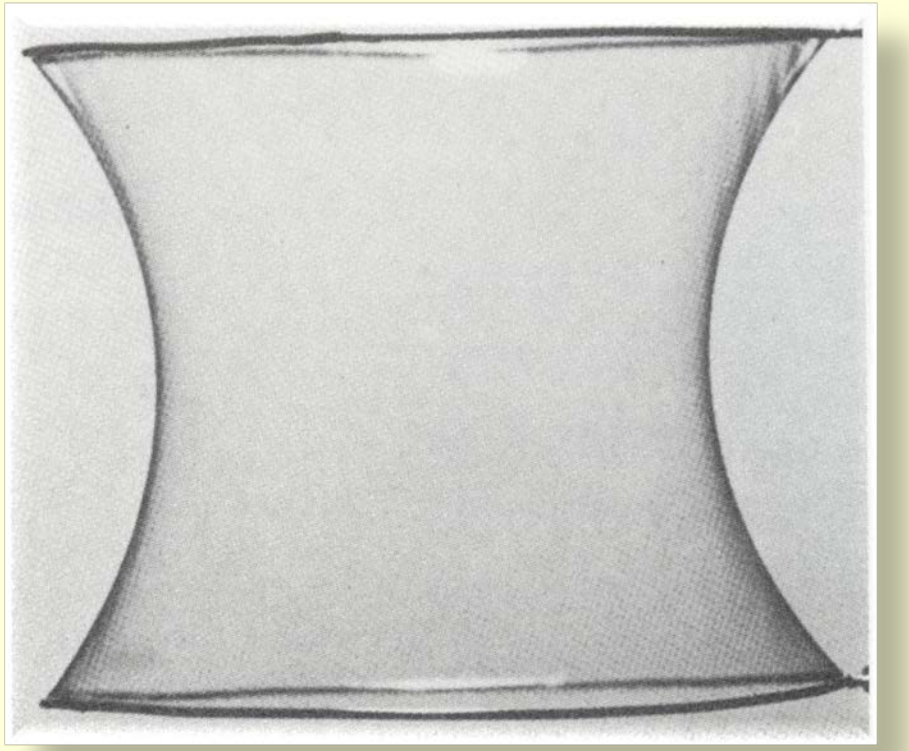
Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759)

*“Если в Природе происходит какое-либо изменение, то **действие**, необходимое для осуществления этого изменения, будет наименьшим из всех возможных”*

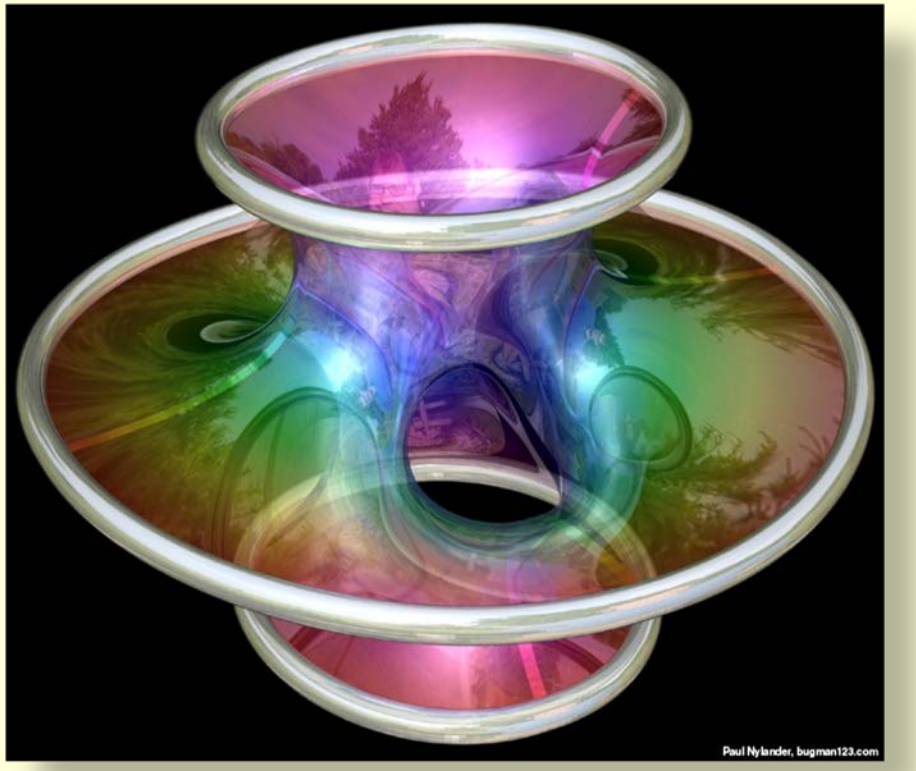
Мыльные пленки – экстремали функционала площади (минимальные поверхности).

Мыльные пленки минимизируют энергию поверхностного натяжения, которая пропорциональна площади пленки, поэтому они минимизируют площадь.

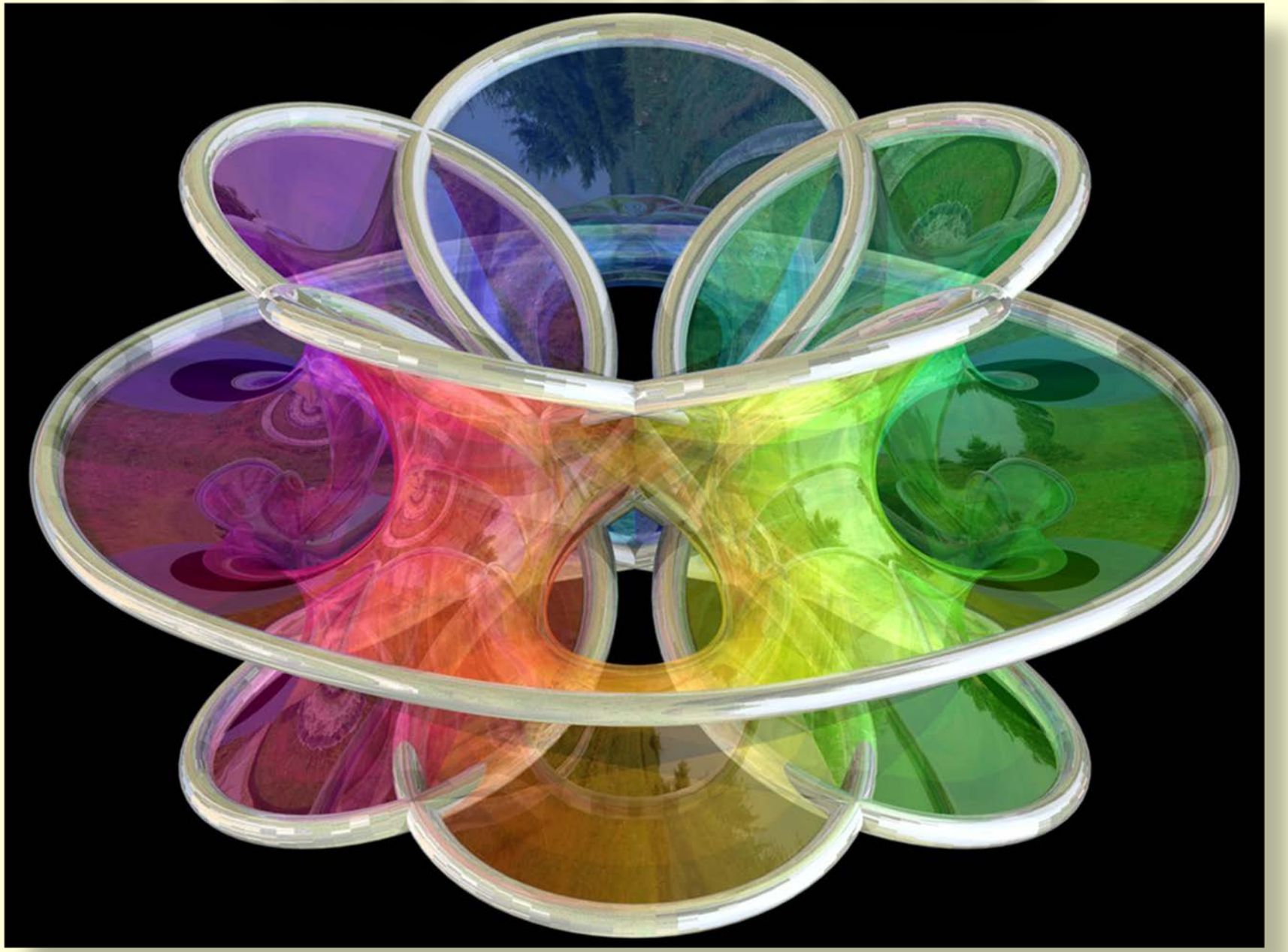
Катеноиды – единственные минимальные поверхности вращения.



Минимальная поверхность Коста.



Поверхность Ричмонда



Эволюция.

Расстояние между словами

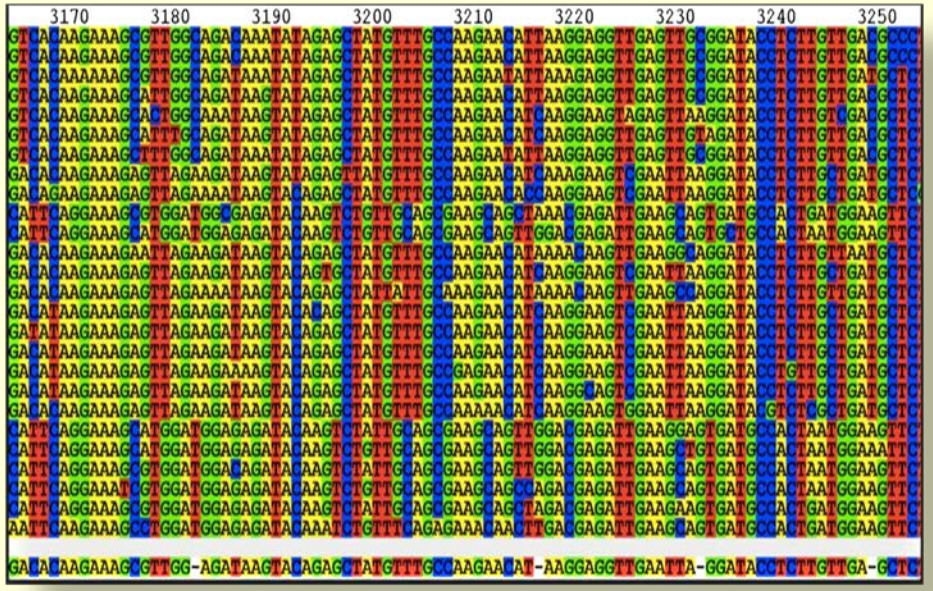
элементарные редакторские операции:

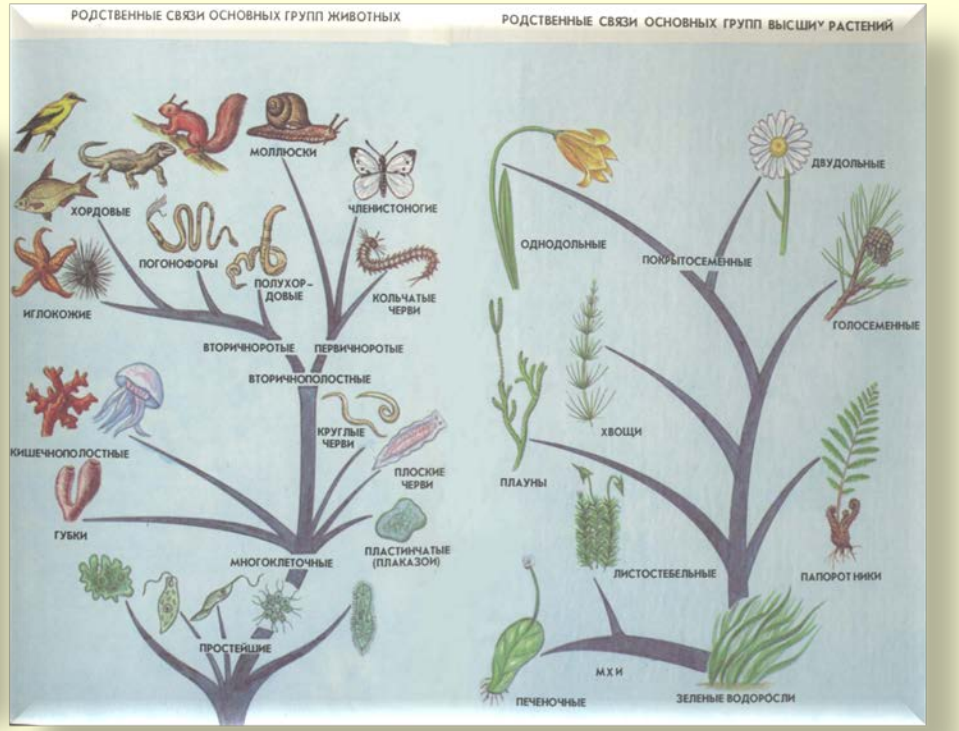
insertion: abcd → abxcd

deletion: abxcd → abcd

substitution: abxcd → abycd

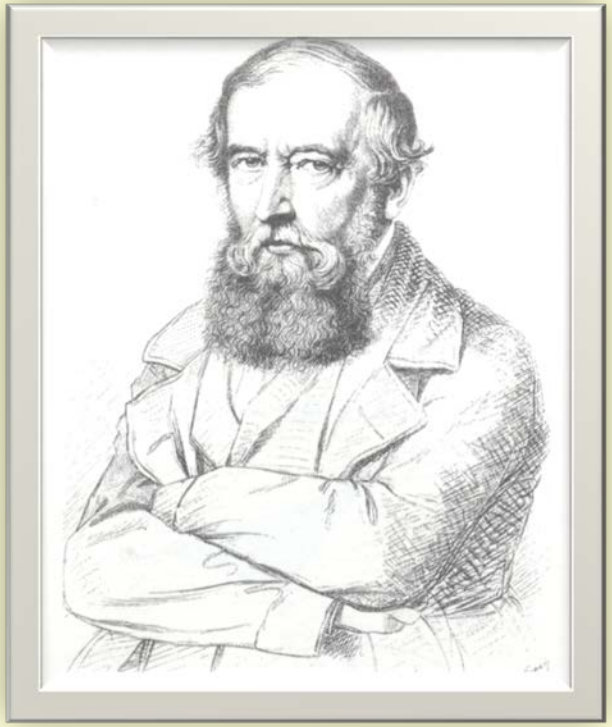
Расстояние Левенштейна между словами – наименьшее число элементарных операций, переводящих одно слово в другое.



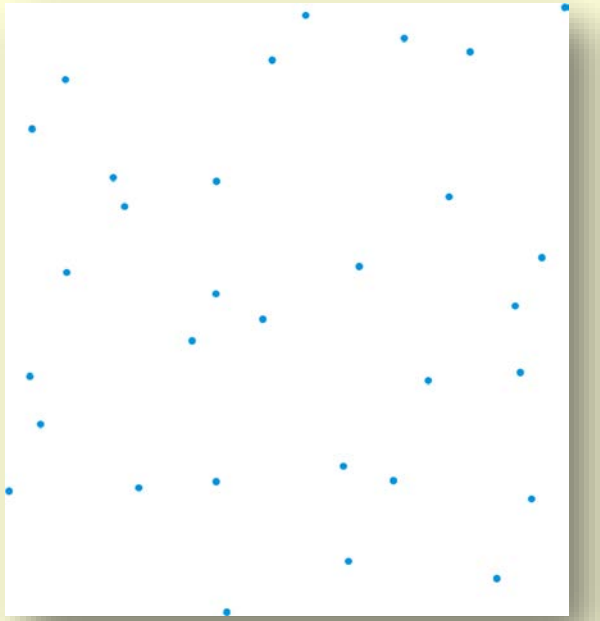


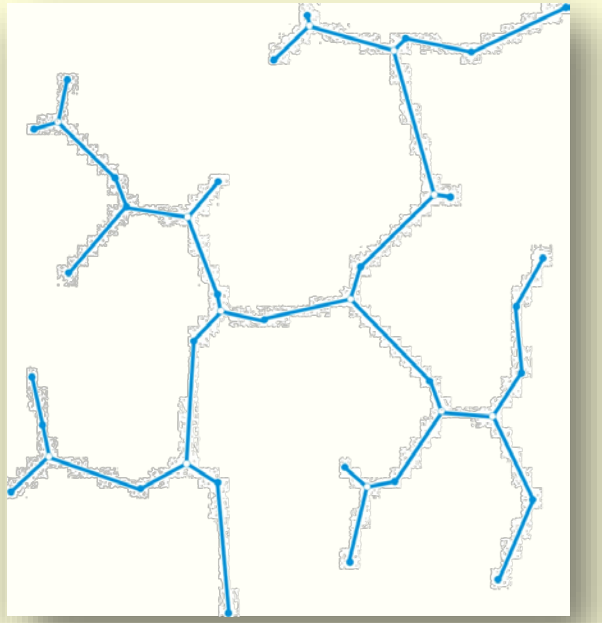
Проблема Штейнера

Построить кратчайшую сеть, соединяющую конечное множество точек плоскости, называемое границей.



Jacob Steiner
(1796-1863)

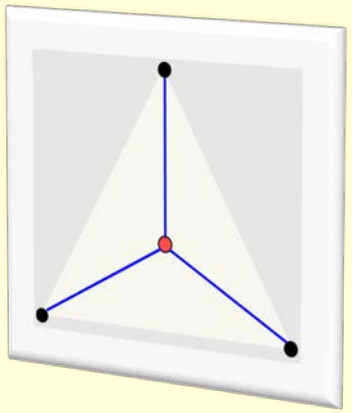
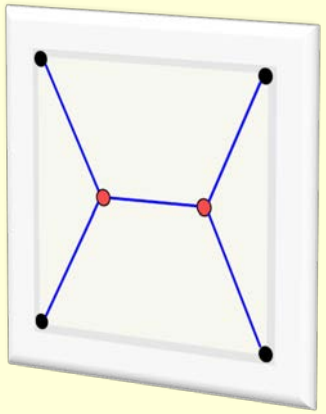
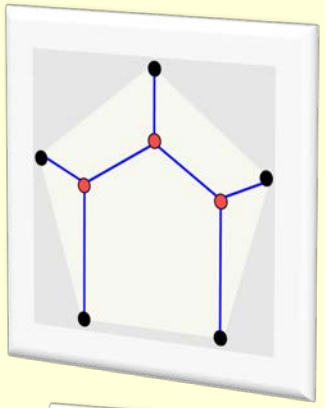
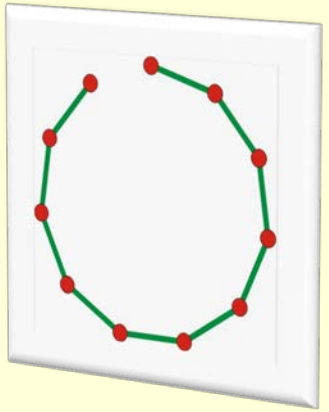
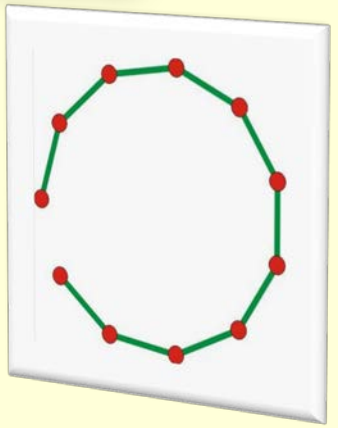


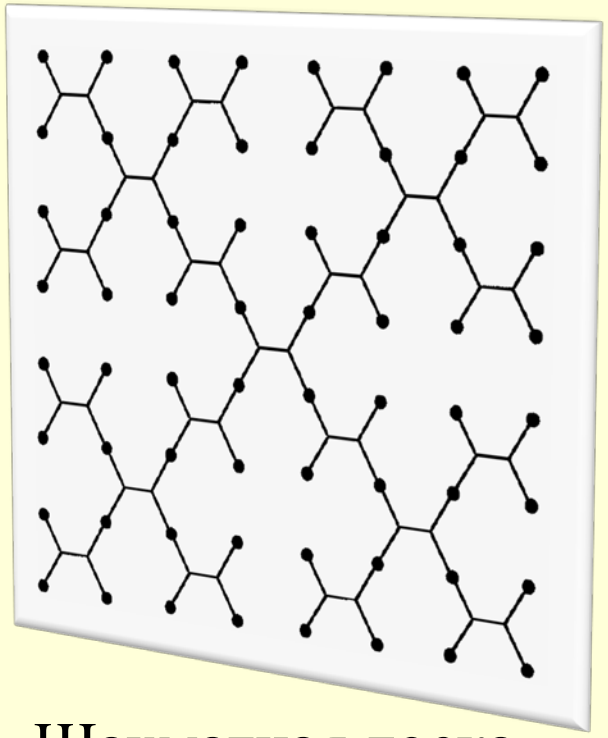


Кратчайшие сети называются
минимальными деревьями Штейнера
или кратчайшими деревьями

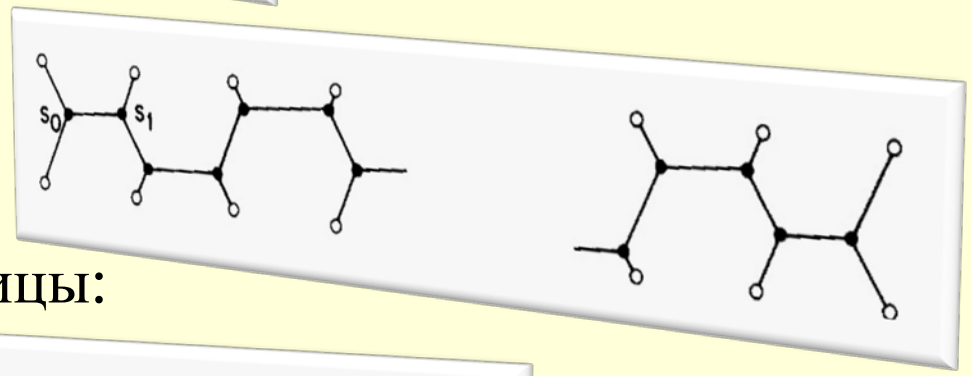
Примеры кратчайших деревьев

Правильные многоугольники:

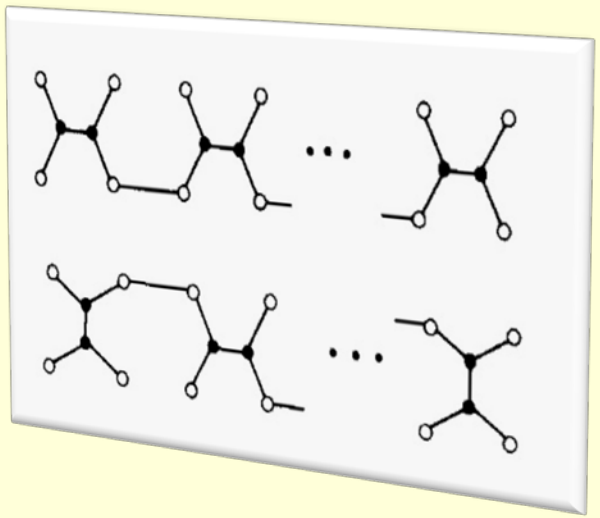








Шахматная доска



Лестницы:



Линия зигзага, точки на окружности, и т.д..

Кратчайшие деревья на манхеттенской плоскости (прямоугольная проблема Штейнера) и проектирование микросхем

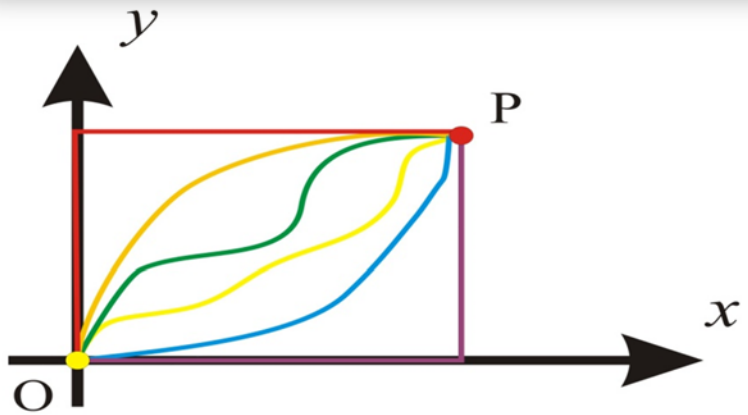
Для $A_1 = (x_1, y_1)$ и $A_2 = (x_2, y_2)$

Евклидово расстояние — это

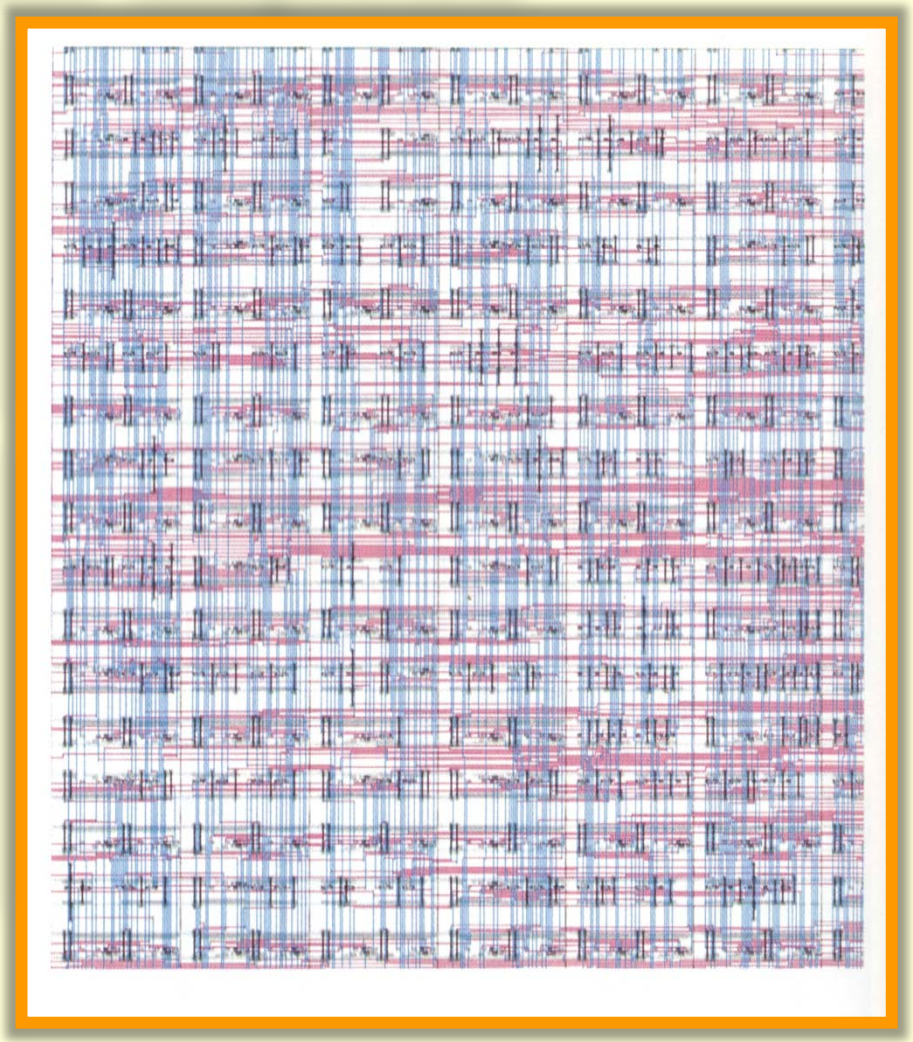
$$\rho_2(A_1, A_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Манхеттенское расстояие — это

$$\rho_1(A_1, A_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$



Все монотонные кривые, соединяющие O и P, имеют одинаковую манхеттенскую длину

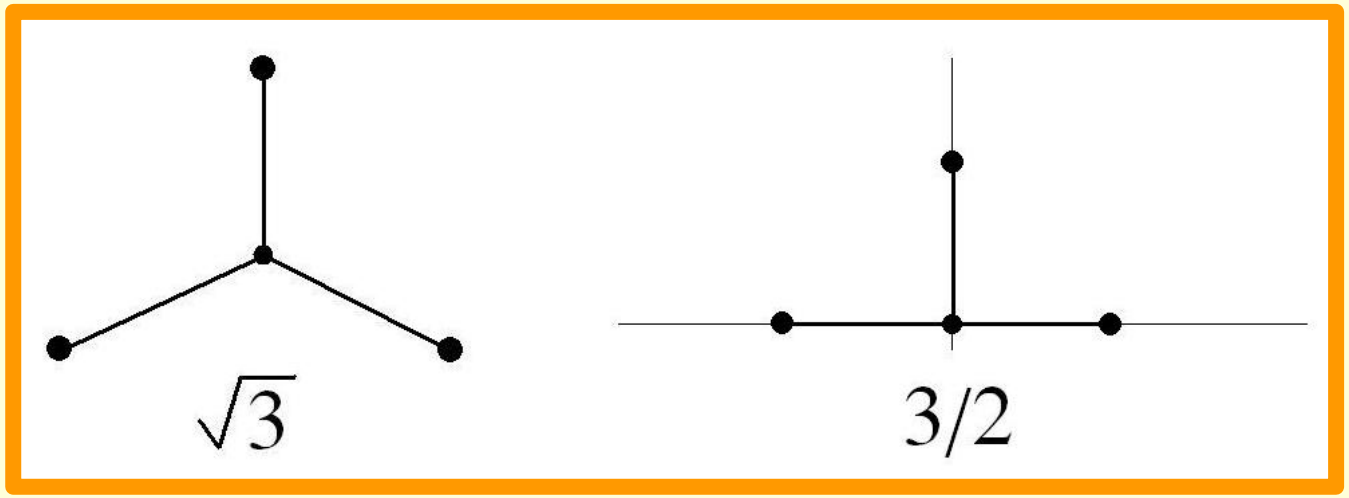


Минимальные заполнения или как укоротить кратчайшее дерево.

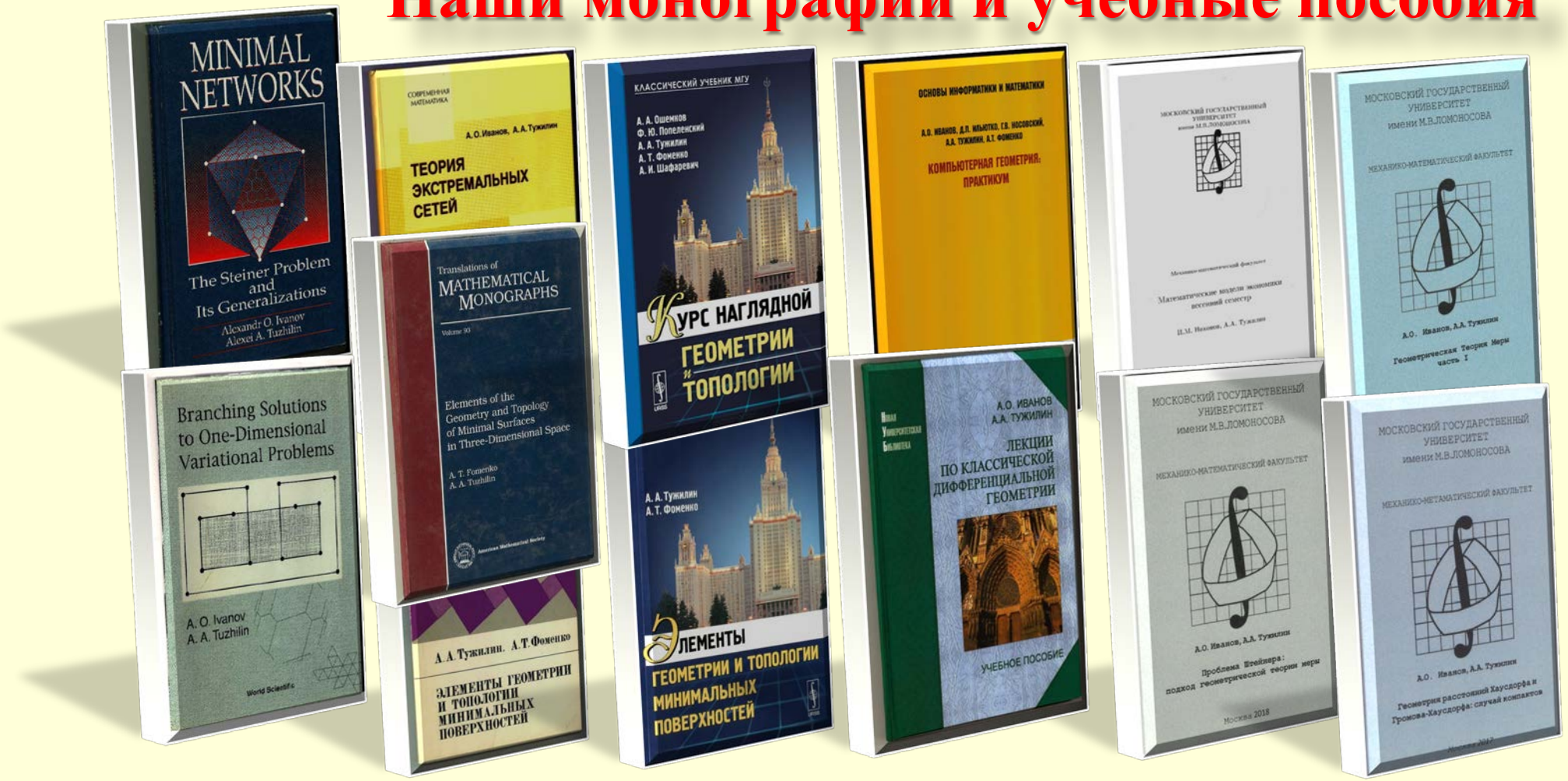
Рассмотрим данное граничное множество как конечное метрическое пространство M, вложим его в произвольное (компактное) метрическое пространство X с помощью изометрии f , и соединим $f(M)$ в X кратчайшим деревом.

Точная нижняя грань длин полученных кратчайших деревьев, взятая по всевозможным вложениям f , называется весом минимального заполнения метрического пространства X.

Задача тесно связана с геометрией многомерных многогранников.



Наши монографии и учебные пособия



Спецкурс:

А.О.Иванов, А.А.Тужилин «Метрическая геометрия: некоторые современные результаты», среда, 18:30, zoom.

Спецсеминар:

А.О.Иванов, А.А.Тужилин «Теория экстремальных сетей», среда, 16:45, zoom.

См. детали на сайте кафедры

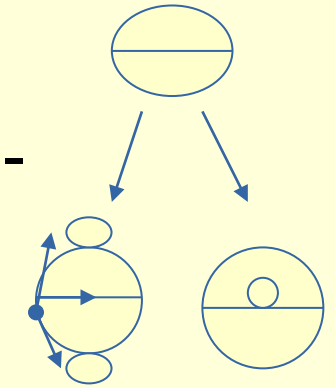
http://dfgm.math.msu.su

Геометрическая топология

Е.А.Кудрявцева

Геометрическая топология -

изучает «хорошие» отображения **f: M → N** (например, непрерывные или гладкие) и их **топологические инварианты** - т.е. свойства, не меняющиеся при любых «деформациях» отображения. **Геометрические методы.**

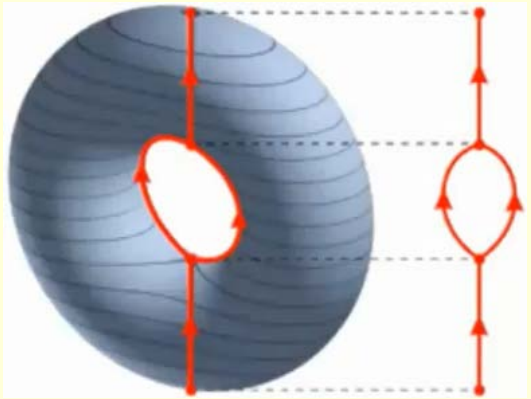


Задача 1. Пусть **f: M → N -** отображение графа **M** в поверхность **N**, являющееся погружением, т.е. для любого ребра **e** графа **M** его образ **f(e)** - регулярный путь (с ненулевой скоростью) на поверхности **N**, т.ч.векторы скорости любых двух ребер в их общей вершине не сонаправлены. Описать **топологический инвариант I = I(f)** на множестве погружений **f: M → N**, т.ч. **f** и **g** гомотопны в классе погружений <==> **I(f) = I(g)**.

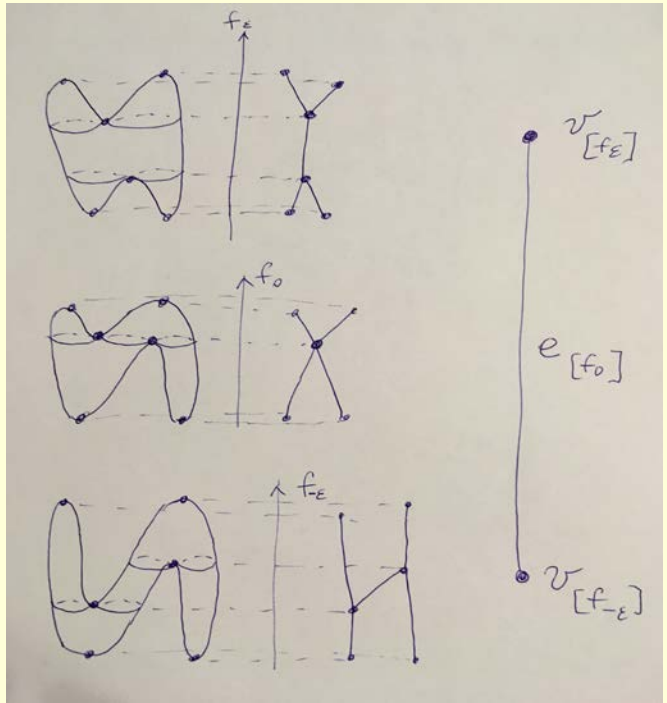
Ответ: *циклический порядок ребер в вершине, индекс самопересечения цикла* - для всех **N** кроме $\mathbf{RP^2}$ (аспирант Дмитрий Пермяков, публикация и диссертация к.ф.-м.н.), для $\mathbf{N = RP^2}$ (студент Максим Ивашковский, публикация и **лучший доклад** на конференции «Ломоносов-2017»).

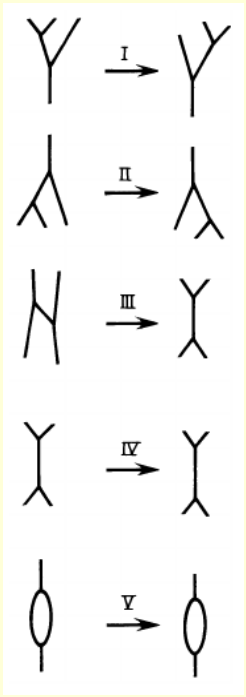
Дифференциальная топология: метод комплекса особенностей.

Пусть $M=M^2$ — двумерная поверхность, $f: M \to R$.



Морсовские критические точки: x^2+y^2, x^2-y^2, $-x^2-y^2$ (тип A_1). Более общие типы: A,D,E (студ. А. Оревкова, **пленарный доклад** на международной конференции «АГМА-2021» в Одессе).



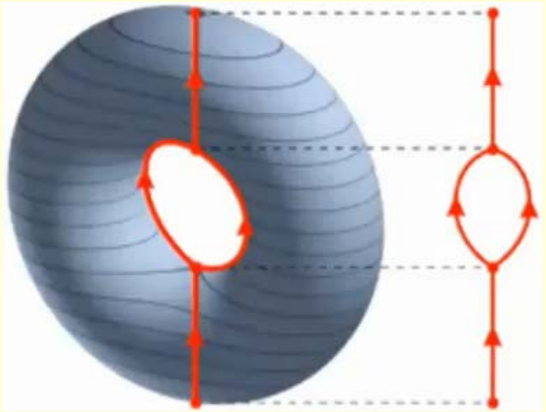


«Кодируем» любую функцию $f: M \to R$ ее **графом («молекулой»)** $W=W_f$ и набором окружностей $\gamma_a = \{f = a\}$ на M, а любую деформацию функций – с помощью **«элементарных перестроек» графа** (типов I—V).

Возникает комбинаторный объект - граф Г (**граф функций Морса**):
вершины ↔ $(W_f, \{[\gamma_a]\})$,
ребра ↔ их элем. перестройки.
Обобщение: **комплекс функций**.

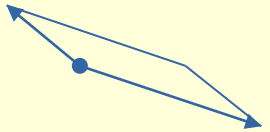
Задача 2. Описать граф/комплекс $Г=Г_n(M)$ функций Морса на M, где n — число критических точек.

Пример решения комбинаторной задачи 2:

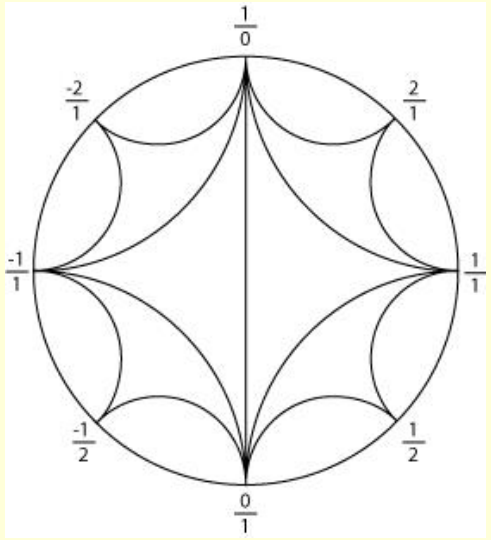


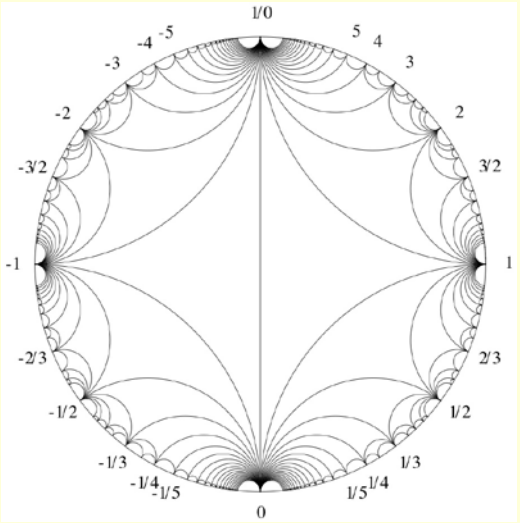
Найдем **граф функций $\Gamma=\Gamma_4(T^2)$** на двумерном торе $M=T^2$ с 4 морсовскими критич. точками.

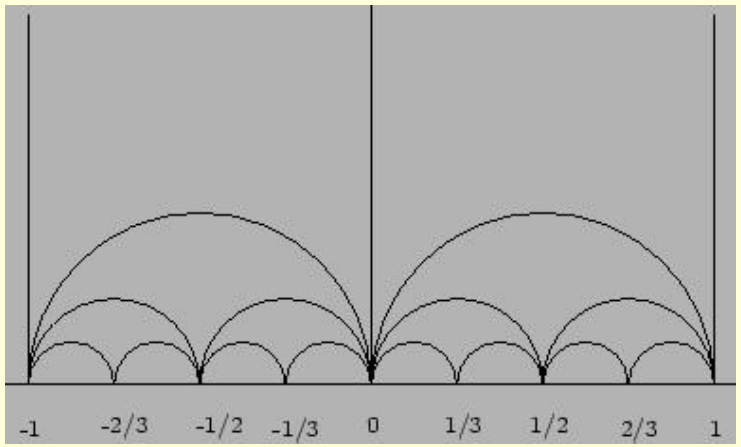
Простая замкнутая кривая $\gamma_a = \{f = a\}$ на торе T^2 задается целочисленным вектором **(a,b)**, или дробью **a/b**. Эти дроби «кодируют» вершины **Γ**.



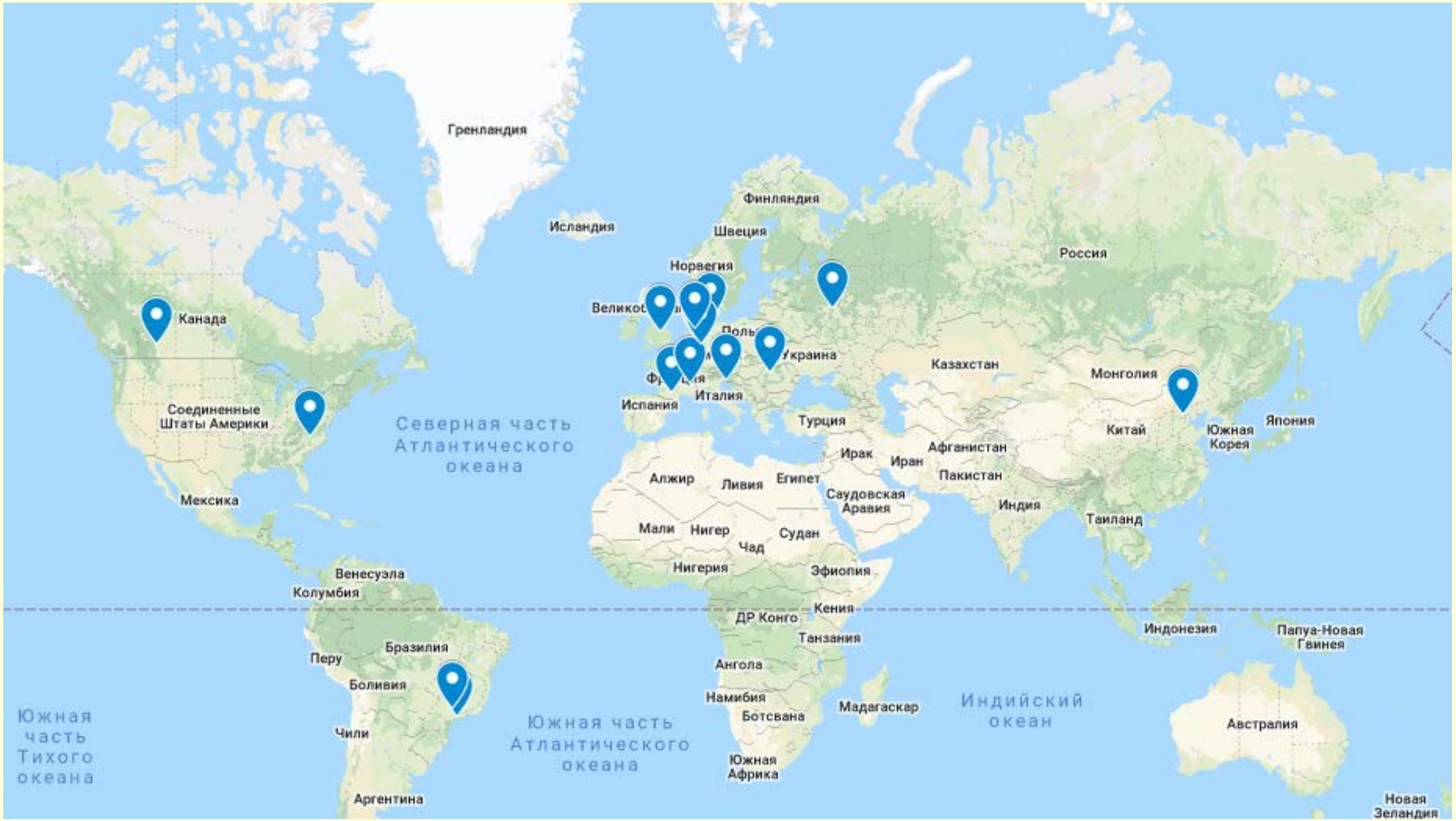
Ответ: **Γ** - граф Фарея. Вершины **Γ** — это все рациональные числа и **1/0**.
Две вершины **a/b** и **c/d** соединены ребром в графе **Γ** <==> **ad - bc = +-1**.







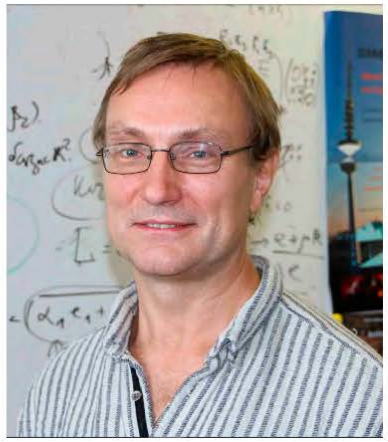
Совместные научные исследования



Симплектическая геометрия и топология

интегрируемые гамильтоновы системы

А.Т.Фоменко


А.В.Болсинов

Е.А.Кудрявцева

А.А.Ошемков

С.С.Николаенко

В.А.Кибкало

А.Ю.Коняев

Интегрируемые системы, их топологические, симплектические, алгебраические инварианты

- Топологический анализ интегрируемых систем (особенности, устойчивость, …)
- Симплектические инварианты лагранжевых слоений
- Алгебраические конструкции, связанные с интегрируемостью (бигамильтоновы системы, инварианты Жордана-Кронекера алгебр Ли, операторы Нийенхейса)

Статьи с описанием задач

[1] А.В.Болсинов, А.М.Изосимов, А.Ю.Коняев, А.А.Ошемков, “Алгебра и топология интегрируемых систем. Задачи для исследования”, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, **28** (2012), с. 119-191.

[2] A.V.Bolsinov, A.M.Izosimov, D.M.Tsonev, “Finite-dimensional integrable systems: A collection of research problems”, Journal of Geometry and Physics, **115** (2017), p. 2–15.

[3] A.V.Bolsinov, V.S.Matveev, E.Miranda, S.L.Tabachnikov, “Open problems, questions and challenges in finite-dimensional integrable systems”, Phil. Trans. R. Soc. A 376: 20170430 (2018), p. 1–40.

Лекции на сайте кафедры (http://dfgm.math.msu.su/lecturehall.php)

- Видеозапись и конспект (А.А.Ошемков, А.Ю.Коняев, Е.А.Кудрявцева, "Алгебра и топология интегрируемых систем“ - 2021)
- (2022-03-09) А.А. Ошемков "Обобщенная гипотеза Мищенко-Фоменко"
- (2022-03-09) А.Ю. Коняев "Геометрия Нийенхейса"
- (2022-03-09) Е.А. Кудрявцева "Топологический и геометрический подходы к изучению интегрируемых систем"
- (2022-03-09) В.А. Кибкало "Некомпактные слоения в интегрируемых системах"

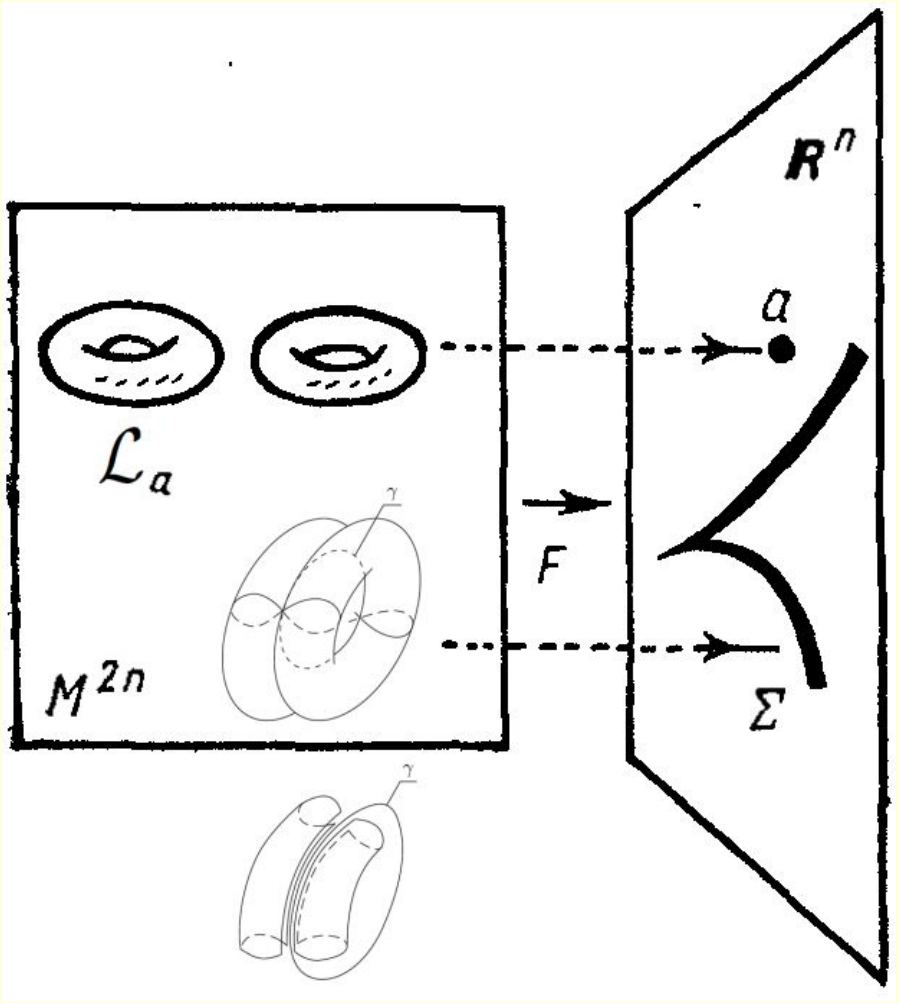
ПРИХОДИТЕ В ЧЕТВЕРГ, 31.03, В 16:45 НА КАФЕДРУ (ауд.16-19)

Интегрируемые системы, их топологические и симплектические инварианты

Проект «Топология и алгебра интегрируемых систем» http://dfgm.math.msu.su/RSF_project.php

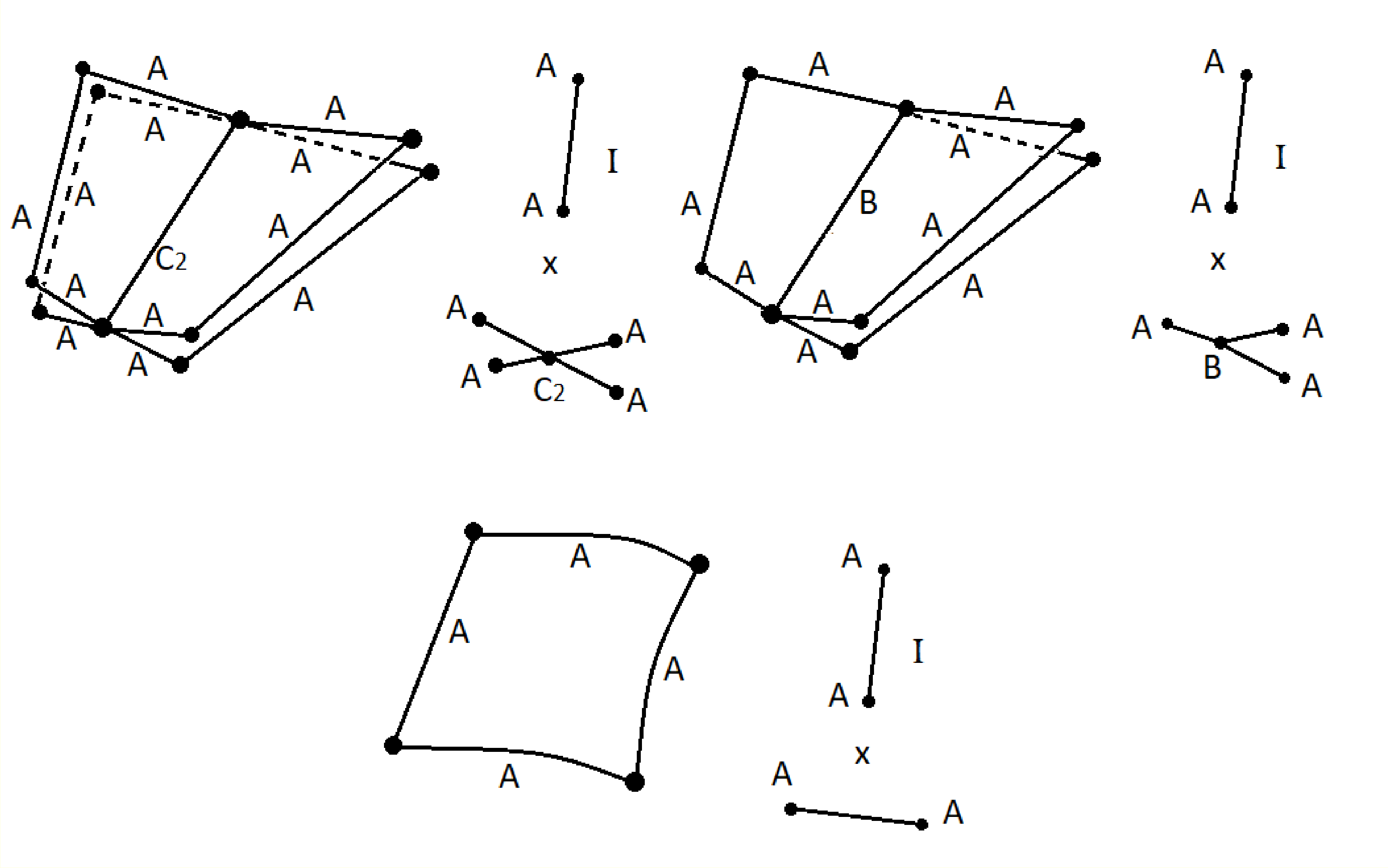
Интегрируемая система задана гладким отображением $F=(f_1,\dots,f_n)\colon M^{2n} \to R^n$, где $\{f_i, f_j\}=0$. Возникает **лагранжево слоение с особенностями**.

Слои — это связные компоненты L_a множеств уровня $\{F=a\}$. **Неособые компактные слои** — торы с квази-периодической динамикой.



Задача 1. Описать некомпактные слои (*Т. Леви-Чивита* для задачи Кеплера, *Е. Кудрявцева* для неполных потоков, *С. Николаенко* для полных потоков).

Задача 2. Описать все лагранжевы слоения с особенностями, имеющие **заданую базу** (т.е. **пространство слоев**):

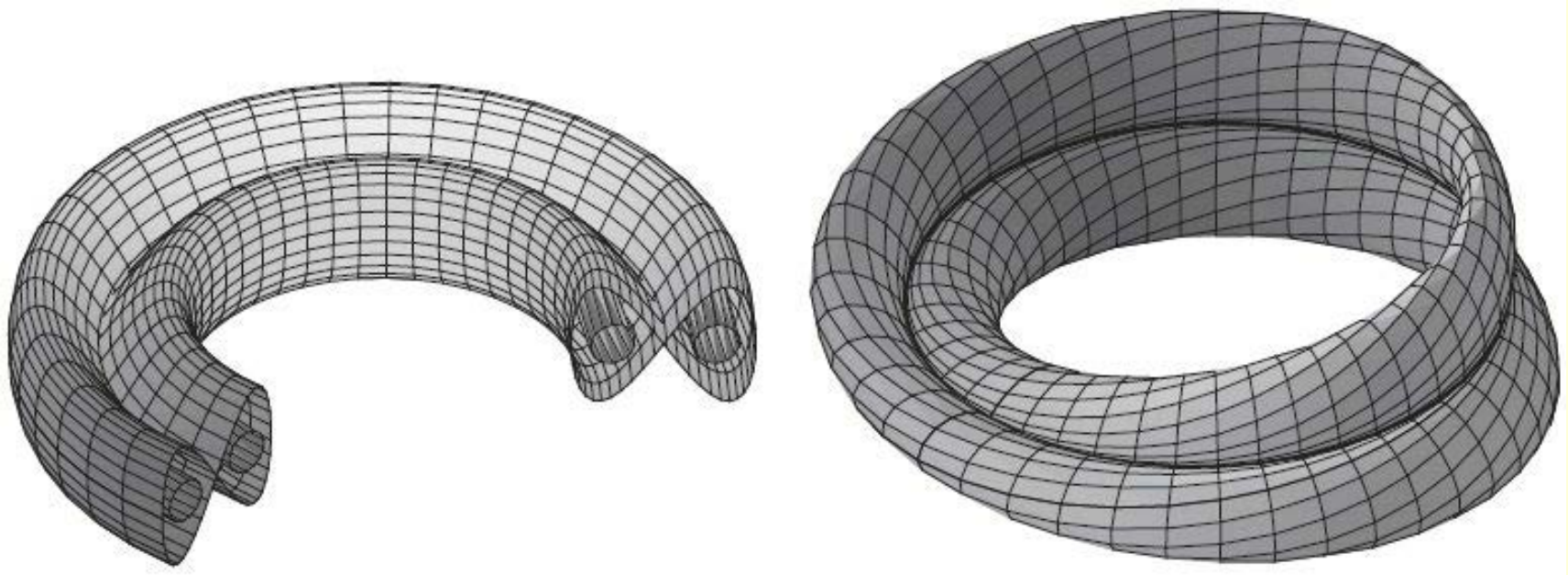


Задача 3. Описать все **структурно устойчивые** особенности.

Особый слой называется **структурно устойчивым**, если топология слоения сохраняется после любого (достаточно малого) интегрируемого возмущения системы.

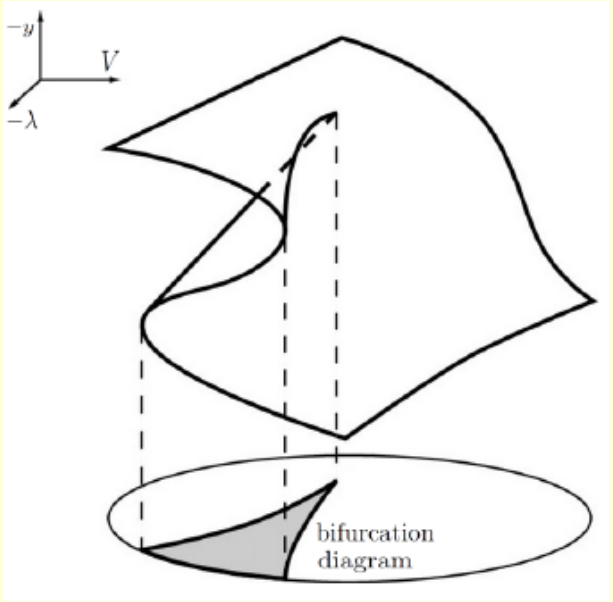
Примеры структурно устойчивых особых слоев

Пример 1. Невырожденные особые слои:



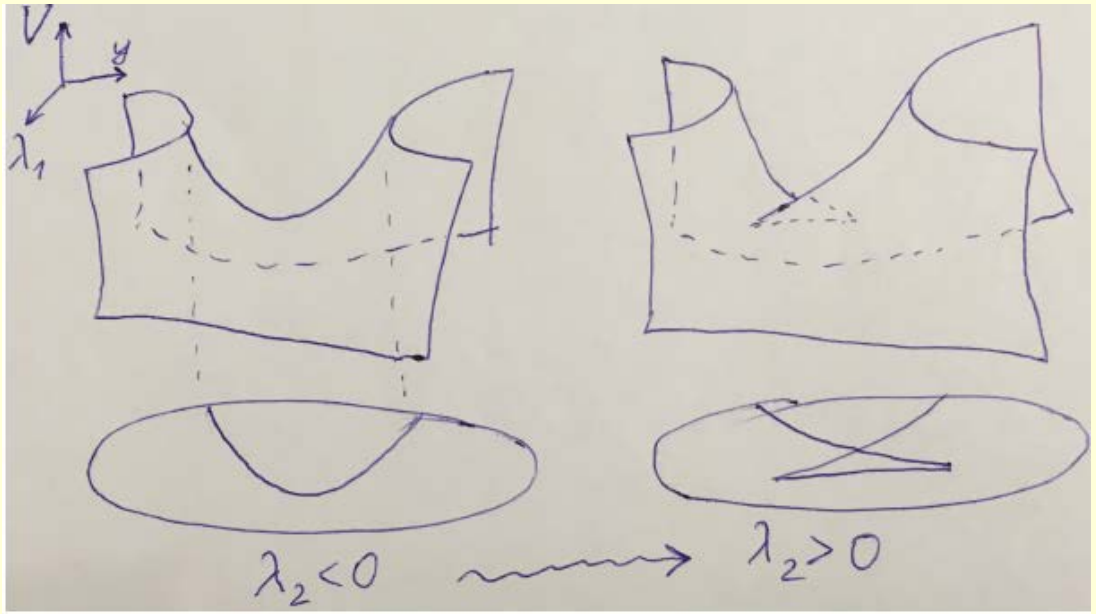
Пример 2. Параболические особые слои с резонансами (*В.В. Калашников*):

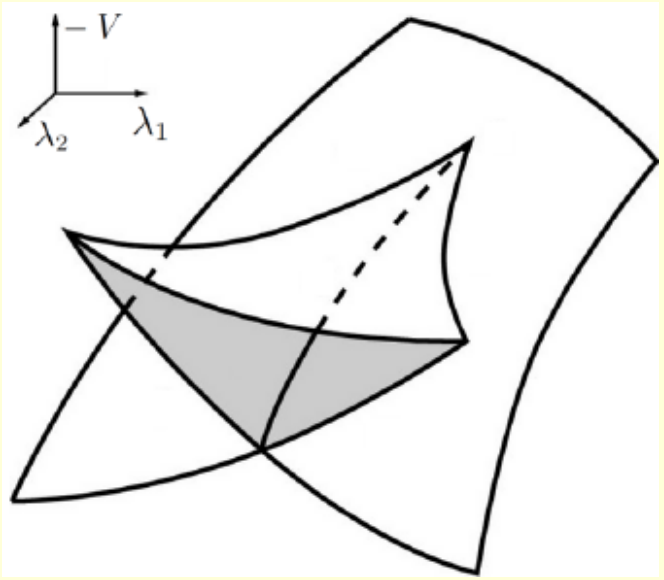
$V_\lambda(y) = y^3 + \lambda\, y$ - сборка Уитни.



Пример 3. Бифуркации параболических особых слоев с резонансами (студентка *Мария Онуфриенко*):

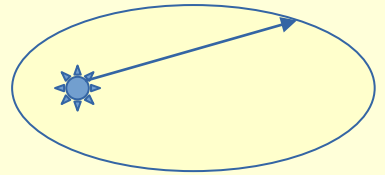
$V_\lambda(y) = y^4 - \lambda_2\, y^2 + \lambda_1\, y$ - ласточкин хвост.

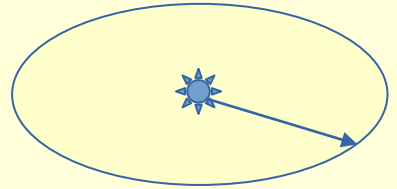




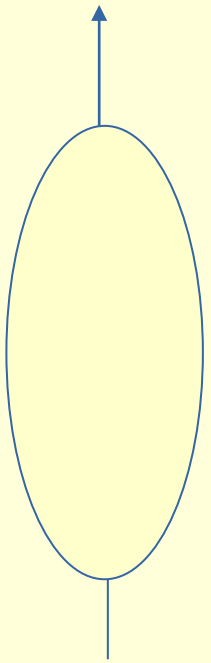
$F(x,y,\lambda,\phi) = (x^2 + V_\lambda(y), \lambda)$.

Задача 4. Описать все поверхности вращения с центральным потенциалом $\mathbf{V(|r|)}$, т.ч. уравнение Ньютона $\mathbf{d^2r/dt^2 = -grad\ V(|r|)}$ удовлетворяет следующим условиям (супер-интегрируемости):
(а) *все ограниченные неособые орбиты замкнуты*,
(б) *существует ограниченная неособая некруговая орбита*.





Решения:
1) евклидова плоскость $\mathbf{R^2}$ с гравитационным потенциалом $\mathbf{V(|r|) = -A/|r| + B}$ и упругим потенциалом $\mathbf{V(|r|) = A|r|^2 + B}$ (Бертран, 1873),
2) поверхности вращения *без экваторов* с гравитационным и упругим потенциалами (Дарбу 1877, Perlick 1992),
3) груши Таннери с нулевым потенциалом (А. Бессе 1978),



4) поверхности вращения *с экваторами* и центральным потенциалом (Е. Кудрявцева и *аспирант Д. Федосеев*, 2018),

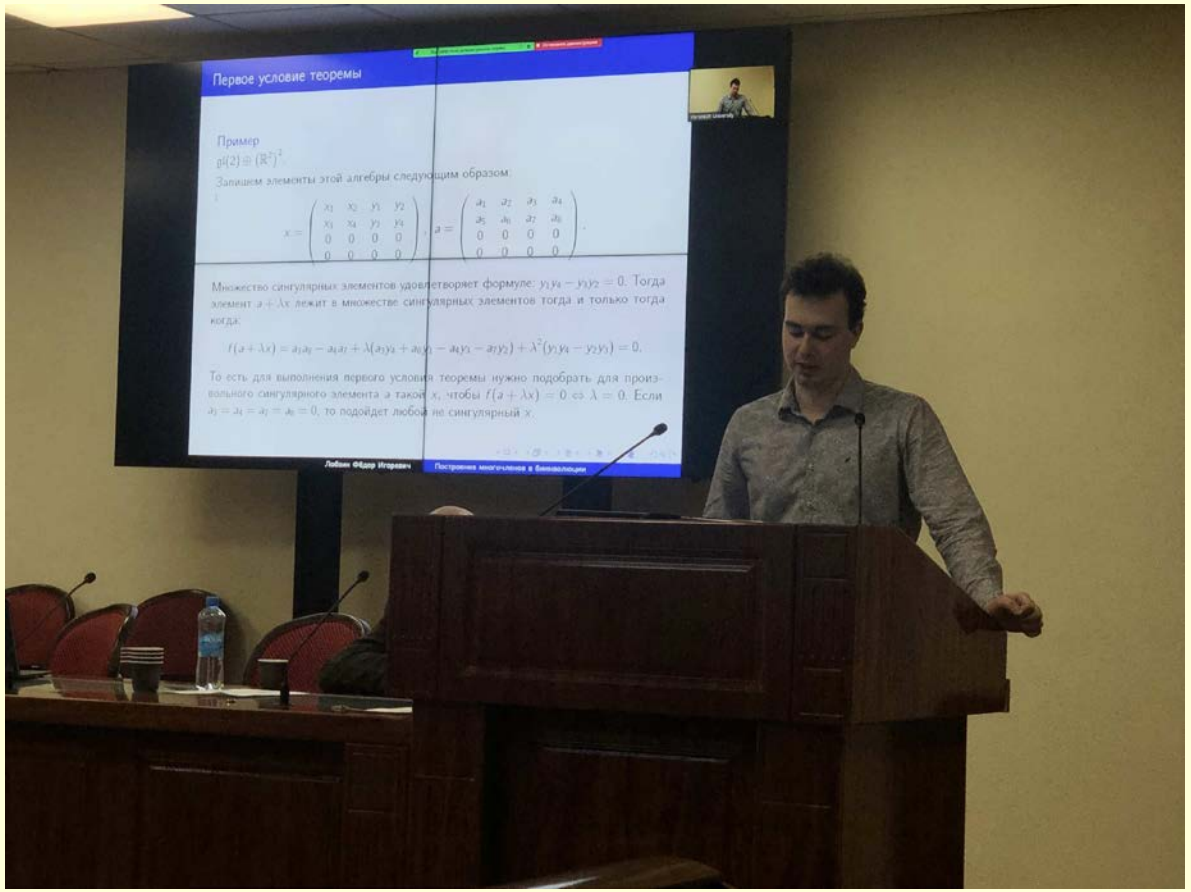
5) поверхности вращения с магнитным полем и нулевым потенциалом (Е. Кудрявцева и *студент С. Подлипаев*, 2019).

Достижения студентов и аспирантов кафедры

Лауреаты конкурса Мёбиуса: М. Онуфриенко (2022), А. Оревкова (2022), В. Трифонова (2021-2022) (рук. Е.А. Кудрявцева).
Грант РФФИ для аспирантов: К. Ворушилов (2020-2021), рук. А.А. Ошемков.

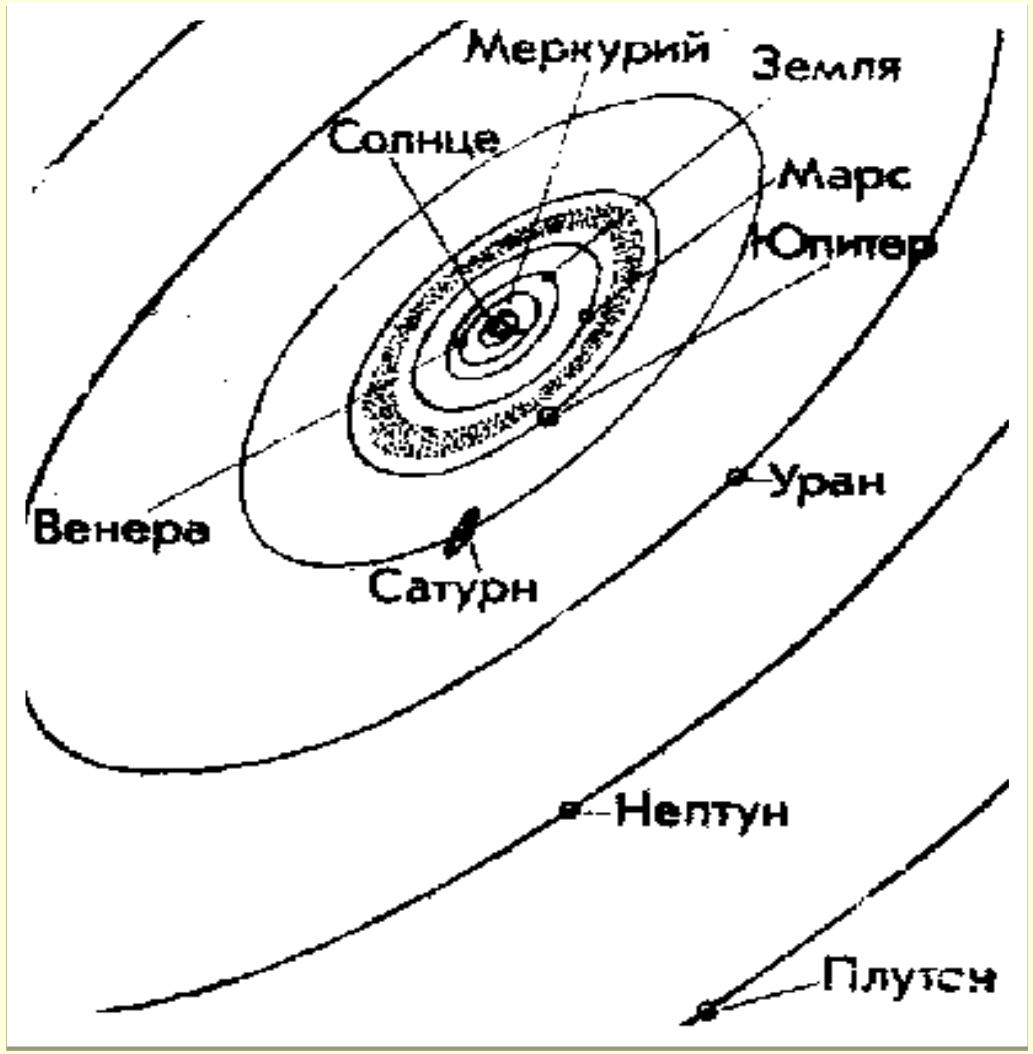
Наши студенты и аспиранты на конференциях

Конференция международных математических центров, Сочи, 2021: Ф. Лобзин (**на фото**), М. Онуфриенко.
3rd International Conference on Integrable Systems & Nonlinear Dynamics, 2021, Ярославль: Ф. Лобзин, М. Онуфриенко, Д. Акпан.
International Conference "Algebraic and Geometric Methods of Analysis", Одесса, 2021: А. Оревкова (**пленарный доклад**).



Геометрические методы в Небесной механике

Солнечная система:



Почти вся масса Солнечной системы (99,87%) сосредоточена **в Солнце**. Массы остальных тел – это **малые параметры** задачи.

Планеты обращаются вокруг Солнца по **почти круговым орбитам**, лежащим **приблизительно в одной плоскости**.

Проблема 1: Объяснить «люки» Кирквуда в поясе астероидов.

Сводится к изучению задачи 3 тел «**Солнце-Юпитер-астероид**».

Проблема 2: Объяснить «щели» в кольце Сатурна.

Кольцо Сатурна (Галилей 1610, Гюйгенс 1655) состоит из **отдельных частиц** (Максвелл).

Кольцевая структура состоит из **четырех концентрических колец,** отделенных друг от друга **резкими темными промежутками – щелями Кассини.**

Проблема щелей сводится к изучению системы **«Солнце-Сатурн-Мимас-частица** кольца Сатурна**»** (задачи 4 тел).

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

ПРИГЛАШАЕМ ВАС НА КАФЕДРУ!

Интегрируемые биллиарды.

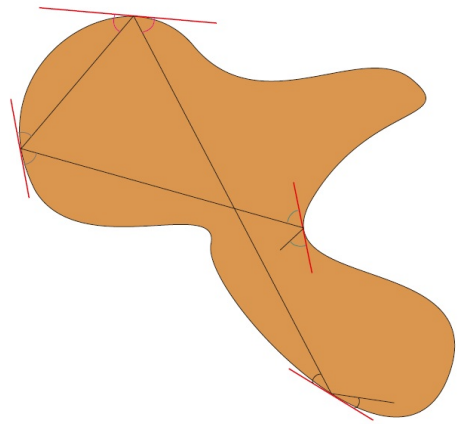
А.Т.Фоменко

В.В.Ведюшкина

В.А.Кибкало

Биллиард в области

- Плоская область ограничена гладкой кривой.
- Закон биллиарда: угол падения равен углу отражения.



$M^4 := \{(x, v) | \quad x \in \Omega, v \in T_x\mathbb{R}^2 \, , |v| > 0\}/\sim$

$(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \in P, \quad |v_1| = |v_2| \quad$ и $\quad v_1 - v_2 \perp T_{x_1}P.$

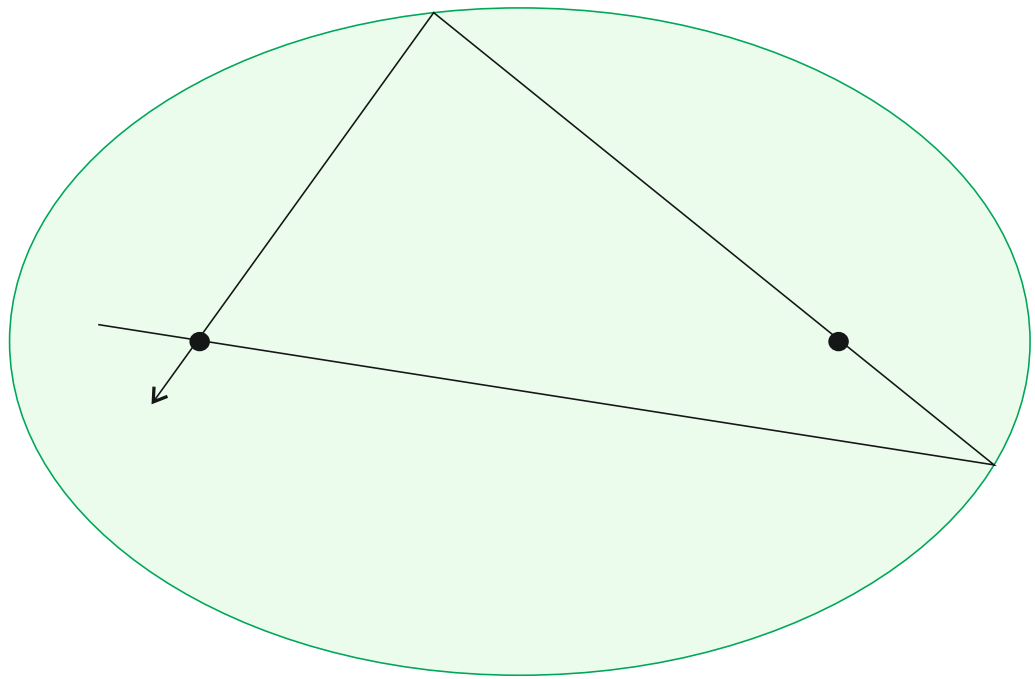
T_xP – касательная плоскость к границе области Ω в точке x

$|v|$ – евклидова длина вектора v

Биллиард. Прямоугольный биллиард.

Биллиард в окружности.

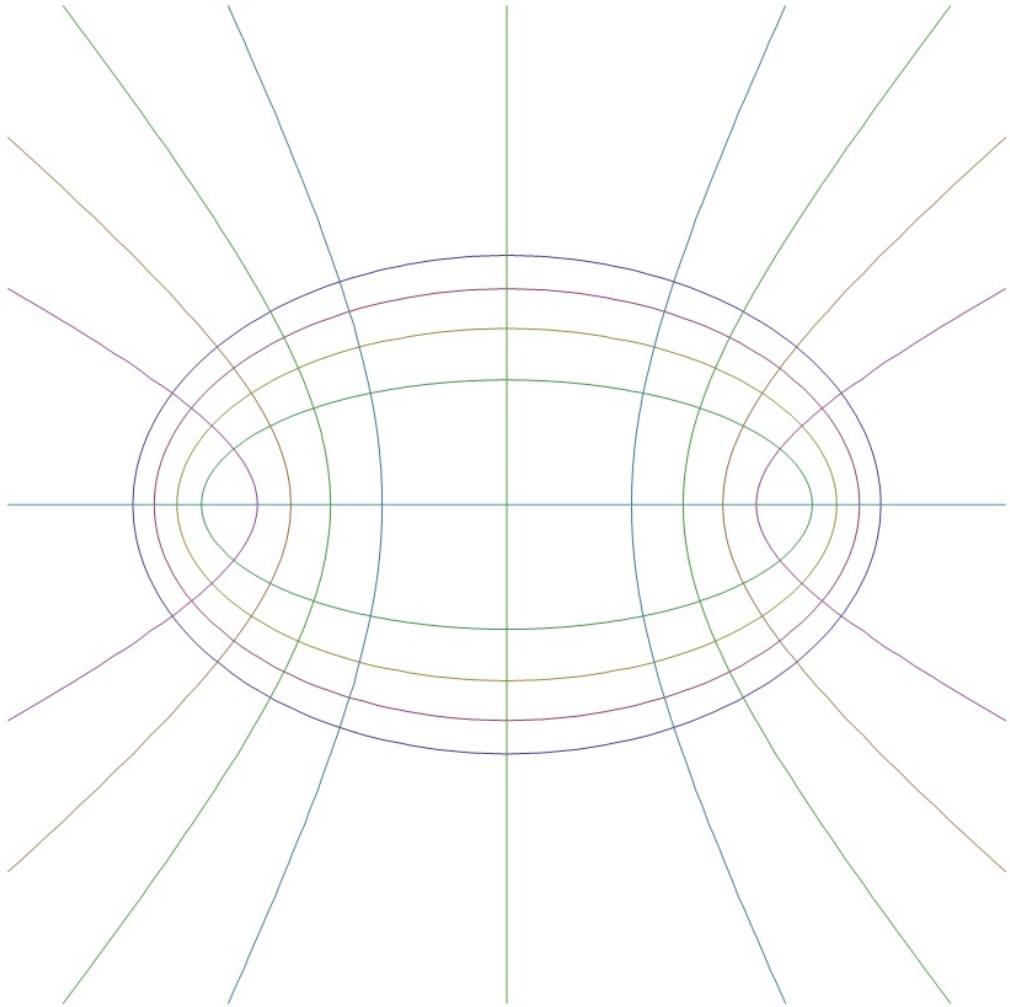
Оптическое свойство эллипса



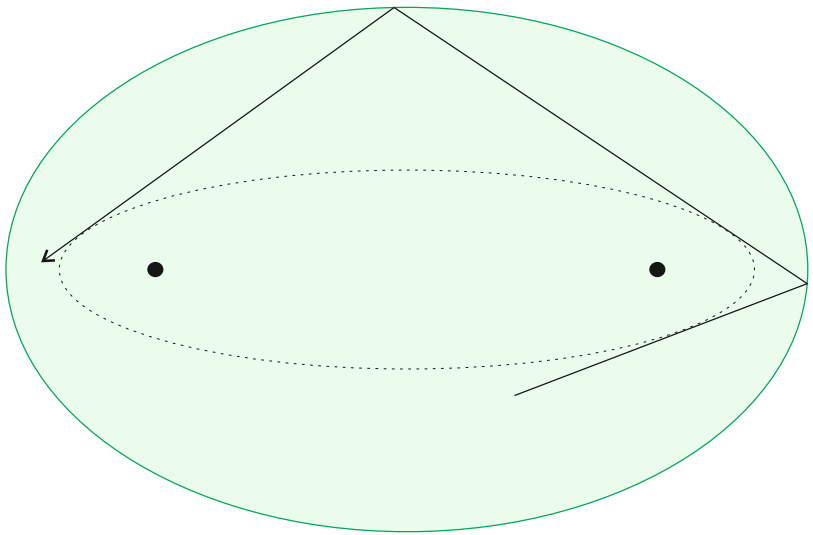
Софокусные эллипсы и гиперболы

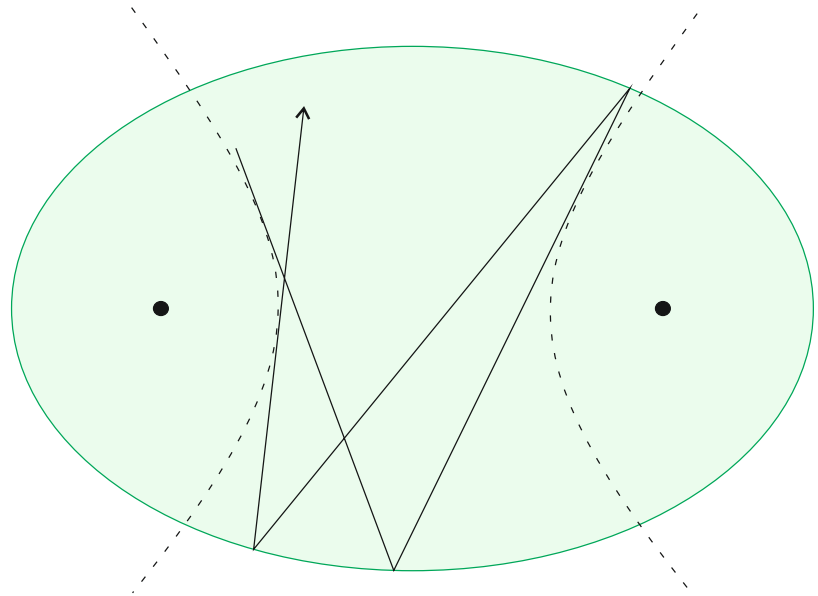
Семейство квадрик

$$(b-\lambda)x^2+(a-\lambda)y^2=(a-\lambda)(b-\lambda), \lambda \leq a$$



Биллиард в эллипсе интегрируем:
Звенья траектории лежат на прямых, касательных к некоторому эллипсу или к некоторой гиперболе, софокусных с граничным эллипсом.





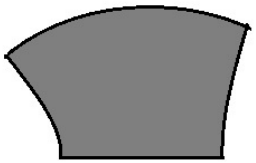
Гипотеза Биркгофа: интегрируемые плоские биллиарды

Гипотеза (**Дж. Биркгоф**). Биллиард в плоской компактной области с достаточно гладкой границей интегрируем, **если и только если** граница — эллипс или окружность.

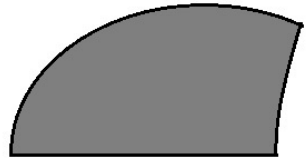
Доказательства нескольких версий гипотезы: в центральной печати:
◦ полиномиальная версия: А.А.Глуцюк, *21': J. of European Math. Soc.*
◦ локальная версия: В.Ю.Калошин, А.Соррентино, *18': Annals of Math*

Теорема (А.А.Глуцюк). Пусть кусочно-гладкая граница **плоского** биллиарда — не ломаная. Тогда он полином. интегрируем $\Leftrightarrow$ это софокусный и круговой биллиард.

A'_0

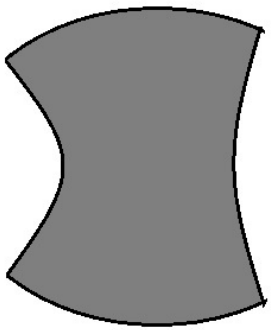


A'_1

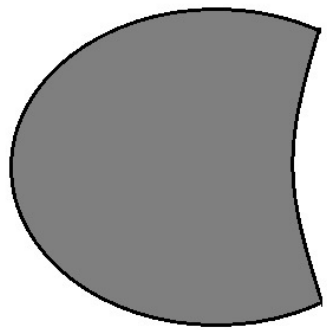


A'_2

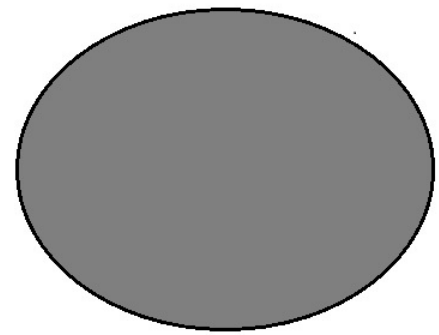
A_0

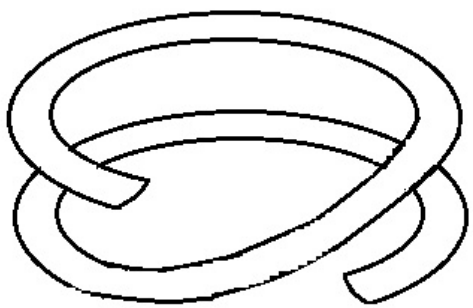


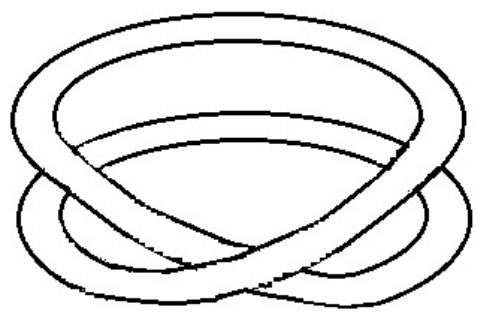
A_1



A_2



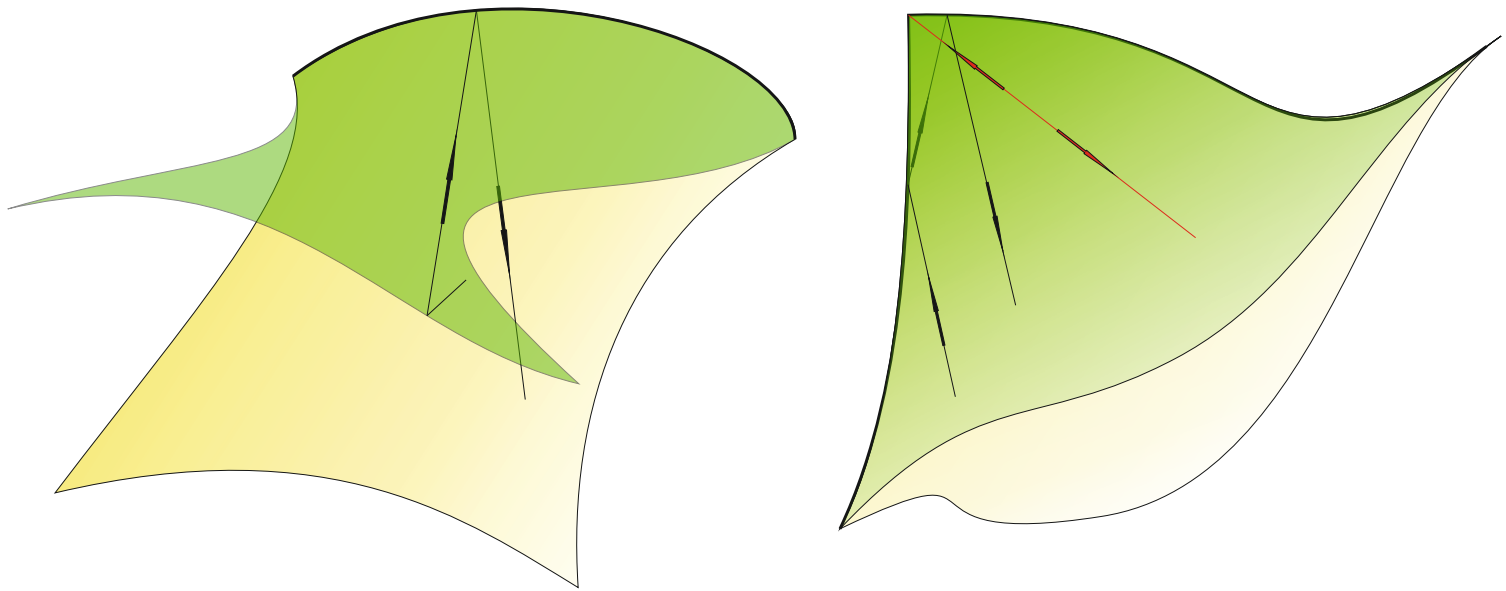




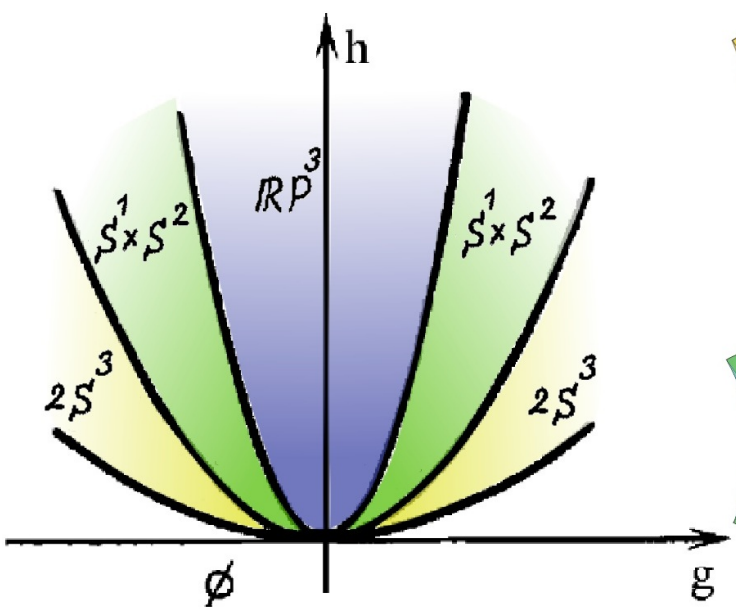
Топологический биллиард.

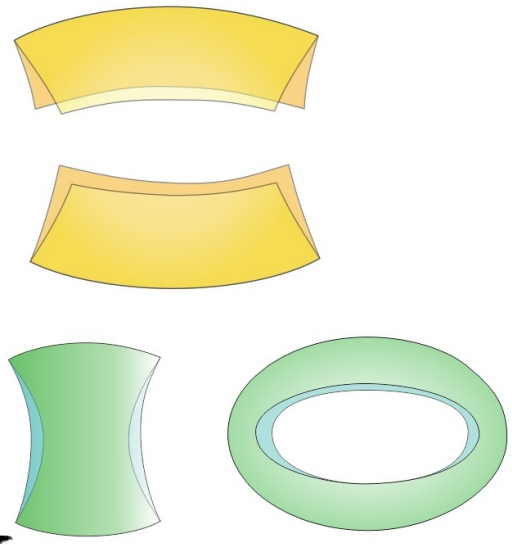
Определение

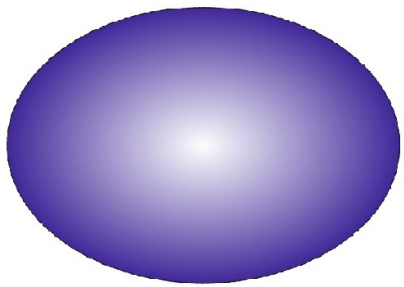
Ориентируемое, кусочно-гладкое двумерное многообразие, полученное изометричной склейкой элементарных биллиардов вдоль сегментов границ, так что в каждой вершине склейки сходилось одно, два или четыре ребра склейки.

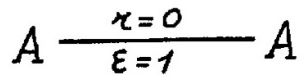


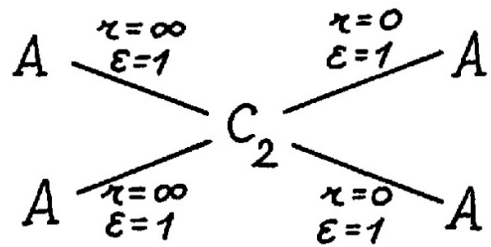
Случай Эйлера.

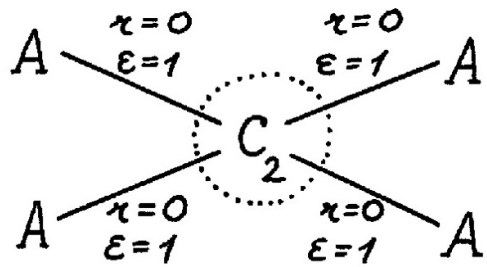




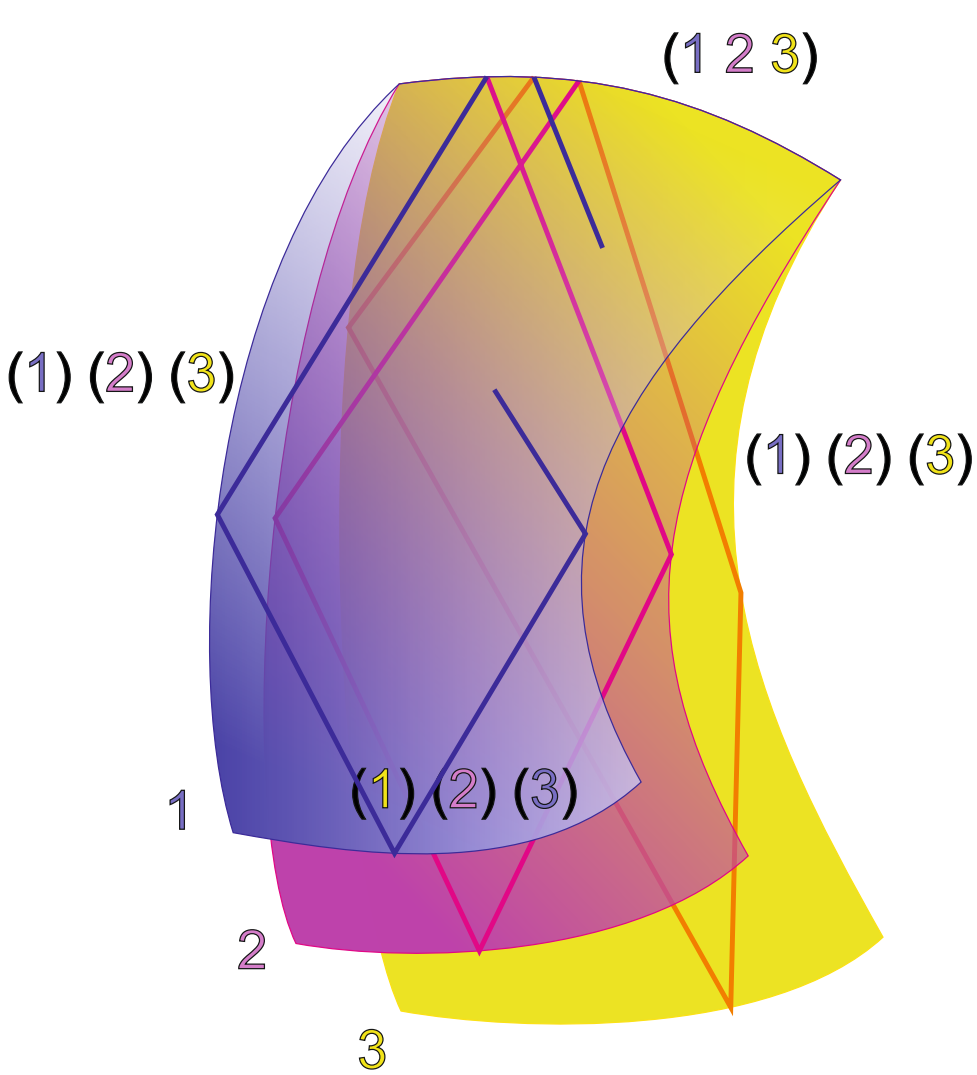


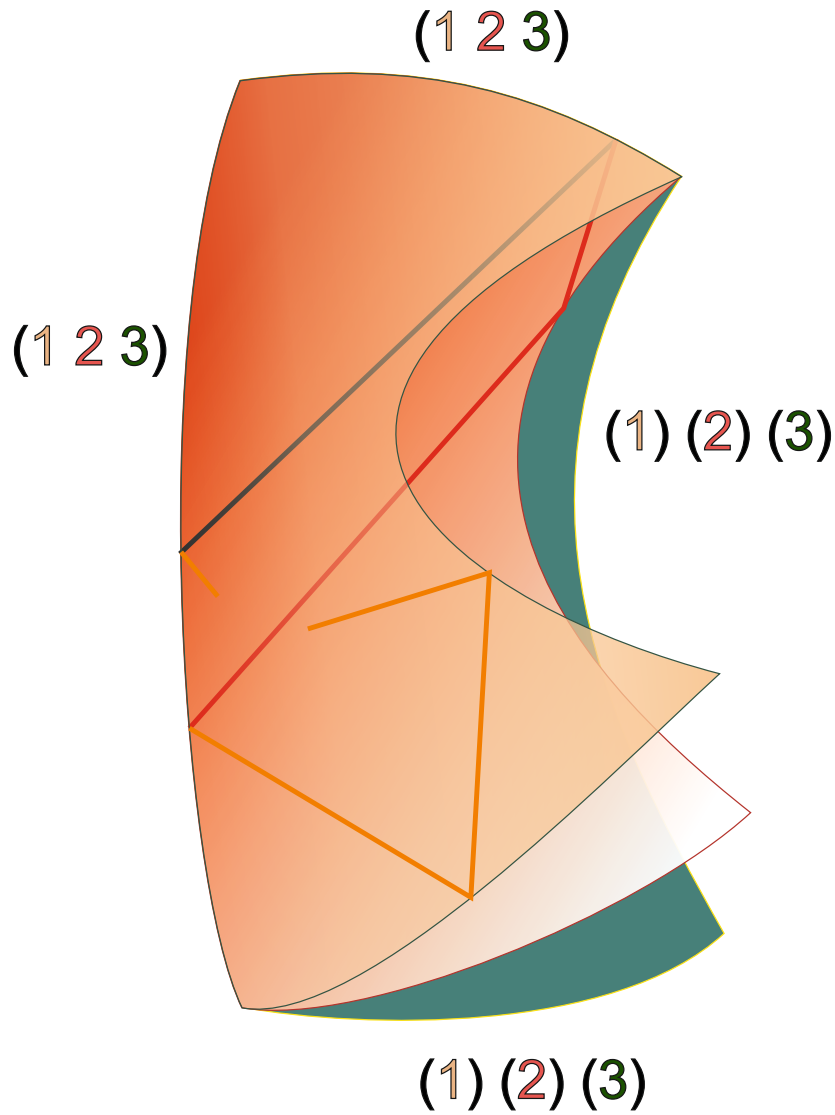




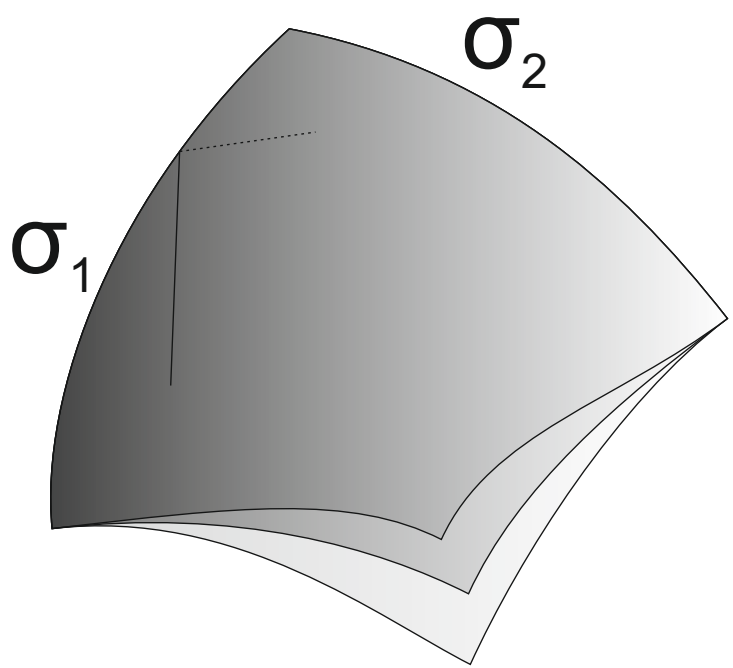


Биллиардная книжка.





а)



$$\sigma_1\sigma_2=\sigma_2\sigma_1$$

б)

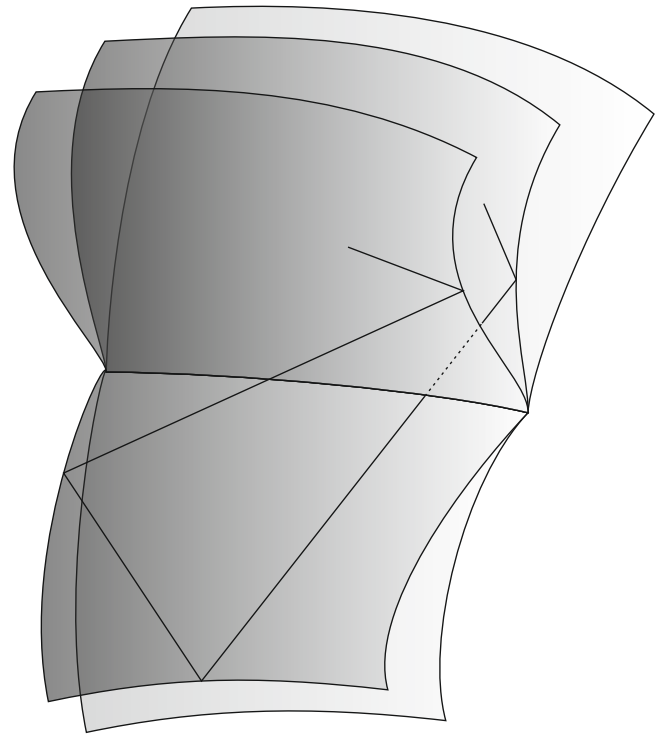


Рис.: Локальная структура окрестности вершины склейки биллиардной книжки.

Новые задачи в теории интегрируемых биллиардов

1. Классификация биллиардных книжек. Изучение пар, троек, четверок коммутирующих перестановок с особыми свойствами.
2. Связь биллиардных книжек и теории инвариантов Фоменко-Цишанга: моделирование особенностей, систем динамики твердого тела, геодезических потоков
3. Комбинирование с дополнительными силами/условиями: потенциалы, магнитное поле, метрика Минковского...
4. Новые типы интегрируемых биллиардов: биллиарды с проскальзыванием, эволюционные биллиарды.

Компьютерная геометрия

Г.В.Носовский

Д.П.Ильютко

Компьютерная геометрия

Представление геометрических образов на мониторе компьютера с возможностями:

- быстрого перерасчета в реальном времени (=> используются лишь рациональные функции);
- быстрого вычисления локальных дифференциально геометрических характеристик (кривизны, кручения, касательной плоскости, главных кривизн и главных направлений);
- произвольного масштабирования без потери плавности линий (визуальной гладкости);
- точного представления кривых и поверхностей 2-го порядка;
- удобного способа управления (редактирования) кривых и поверхностей пользователем, в том числе - локального управления заданным участком без изменения окружения, гладкого сопряжения между собой, деления на части и т.п.

Компьютерная геометрия

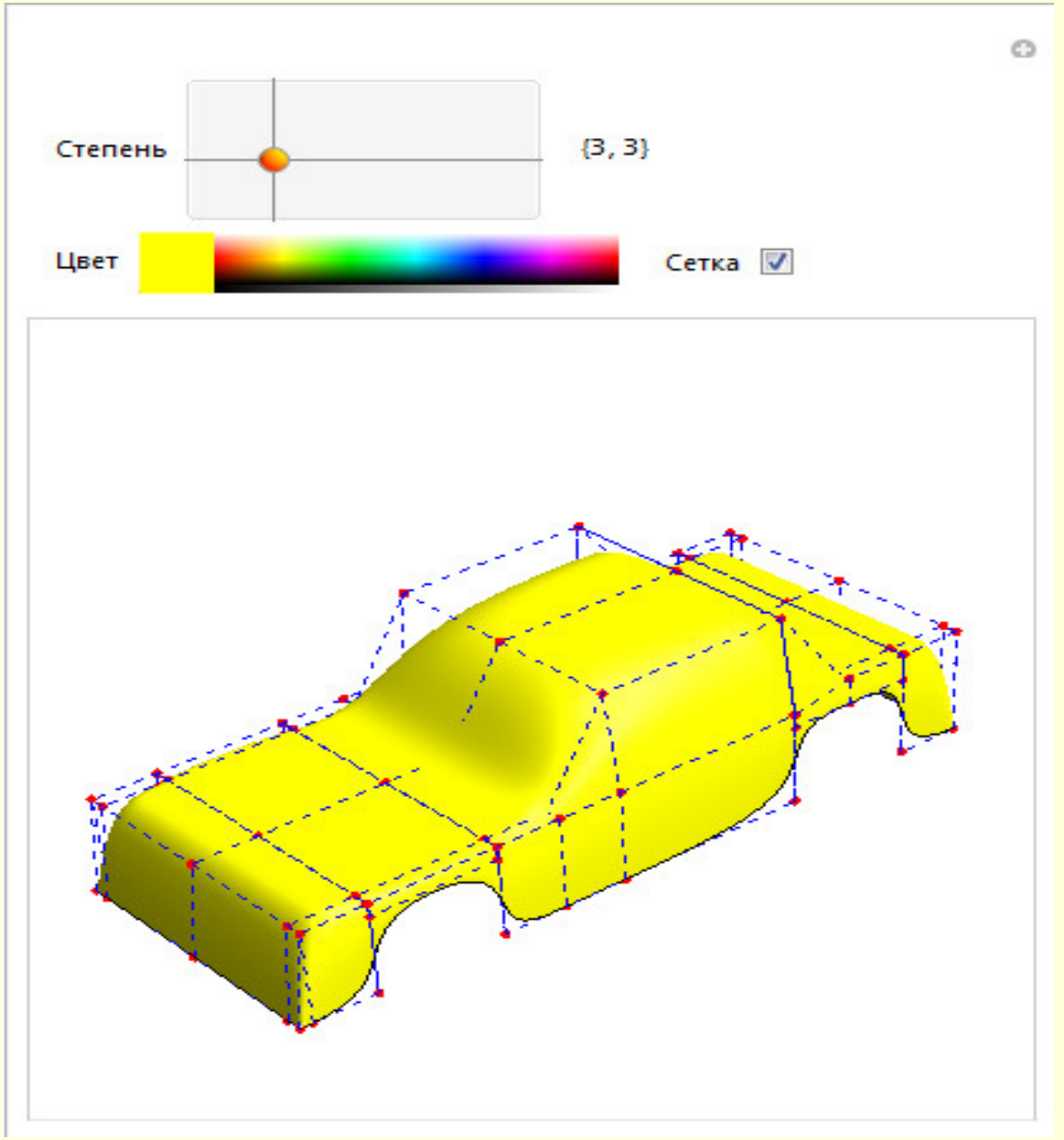
- **Классические подходы:**

  - сплайны: Эрмита, кубические, составные, псевдоупругие и т.д.;
  - поверхности Кунса и их обобщения (поверхности, затягивающие заданный остов из кривых);
  - треугольные поверхности, триангуляции.

- **Подходы современной компьютерной геометрии:**

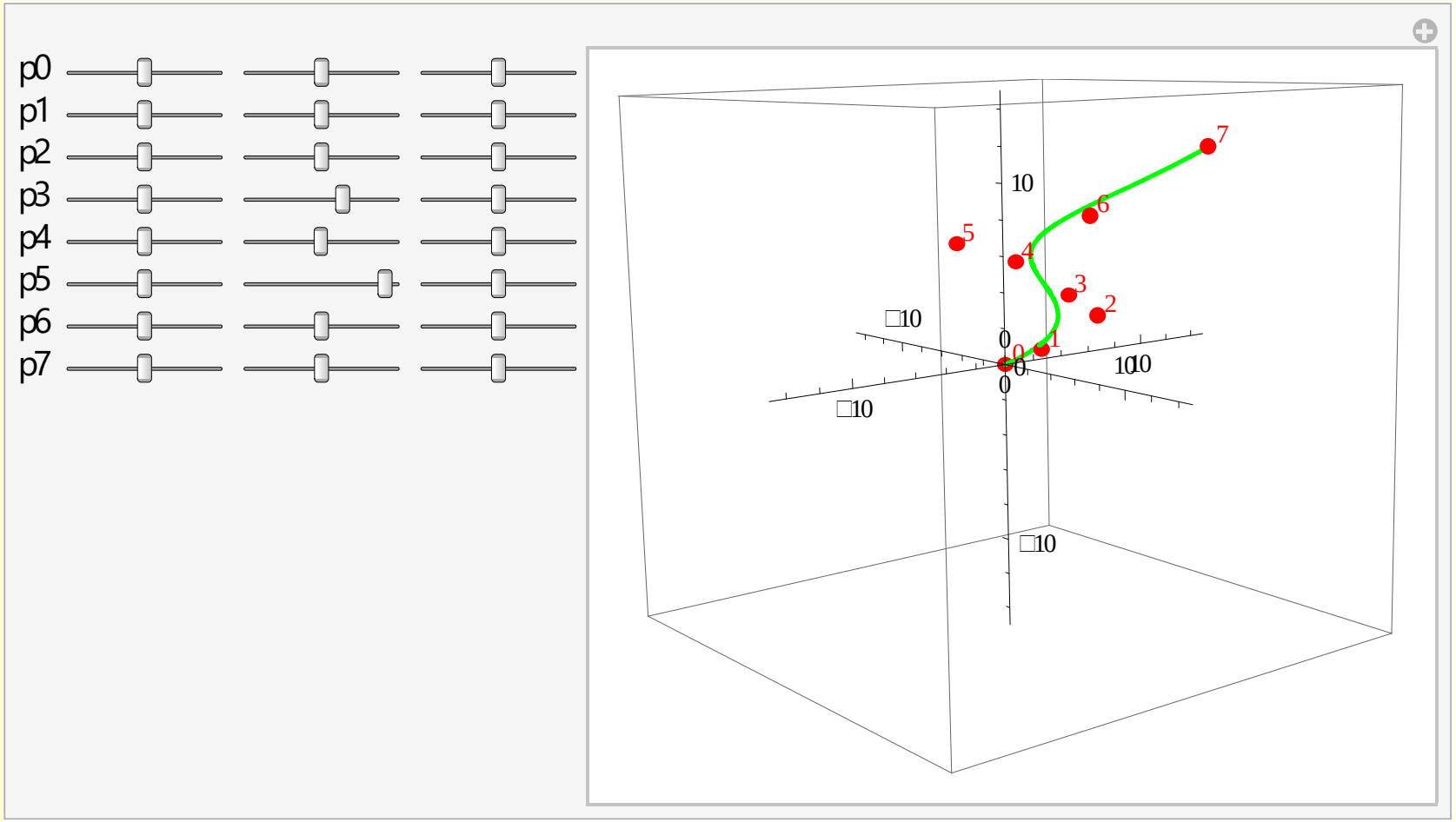
  - кривые и поверхности Безье - основаны на полиномах Бернштейна;
  - *B*-кривые и *B*-поверхности (NURBS) – основаны на разделенных разностях и обладающие расширенным множеством управляющих параметров с возможностью локального редактирования.

Компьютерная геометрия



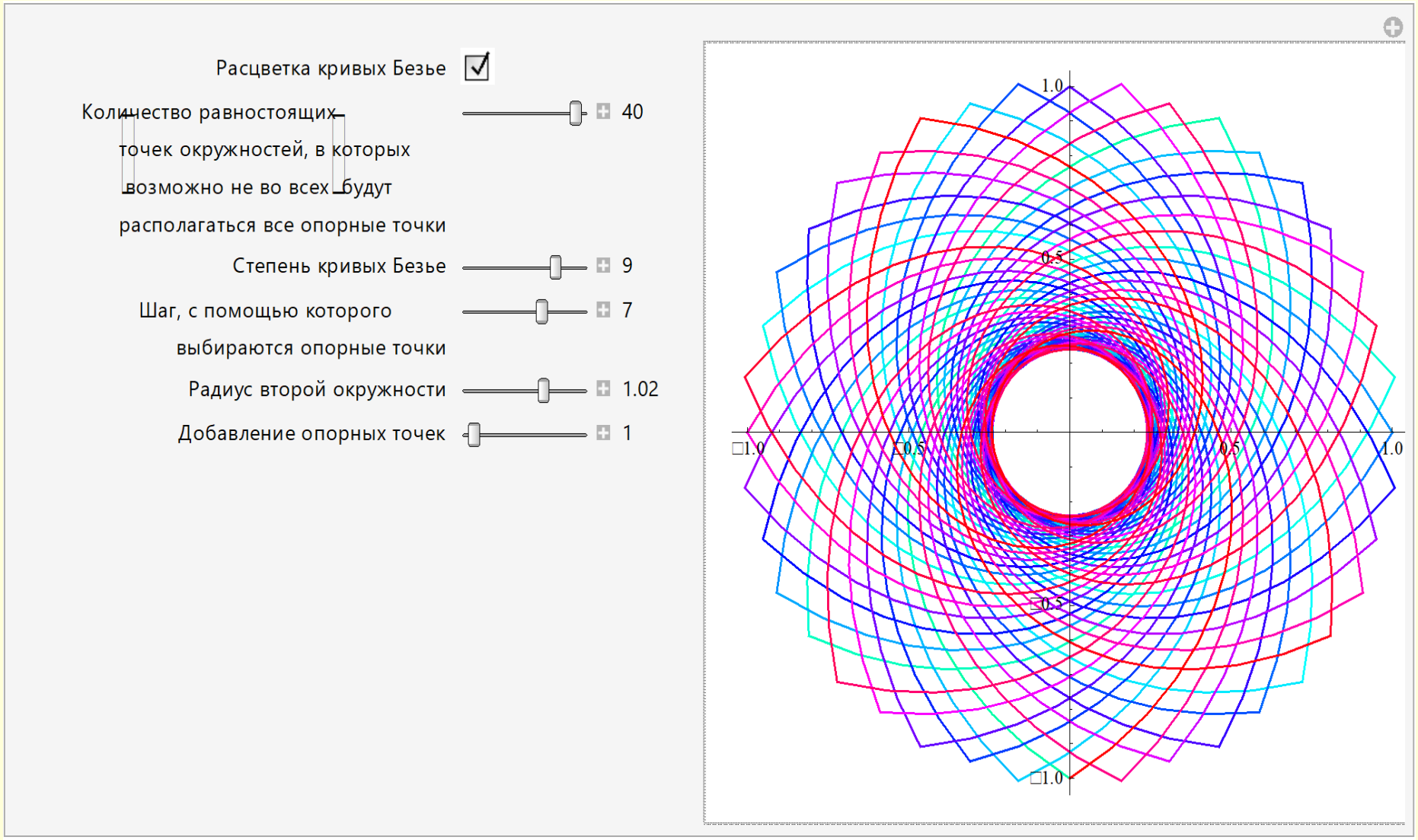
Компьютерная геометрия

Пример: пространственная кривая Безье, построенная по 8-ми опорным точкам

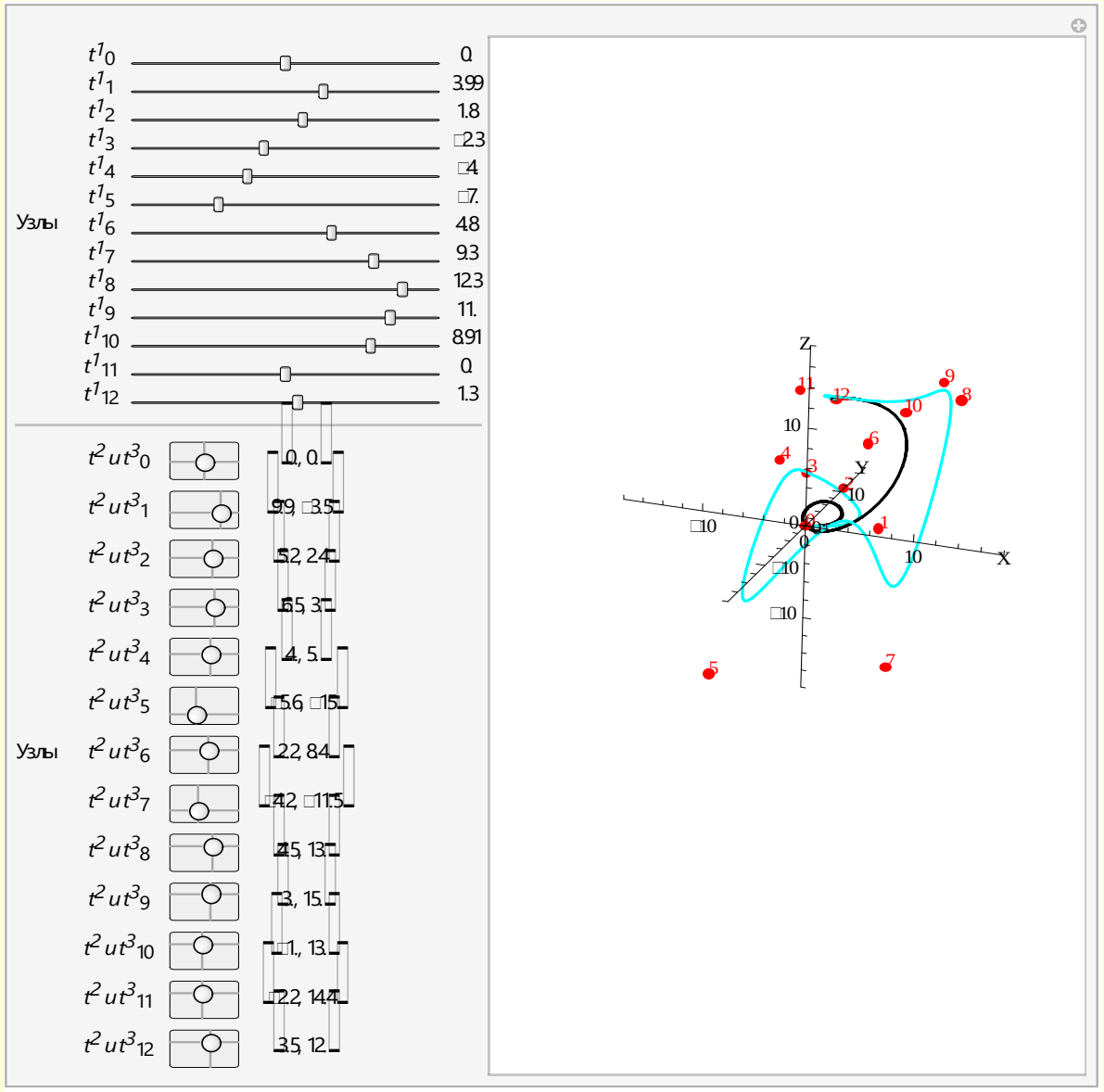


Компьютерная геометрия

Пример: использование кривых Безье для создания художественных образов



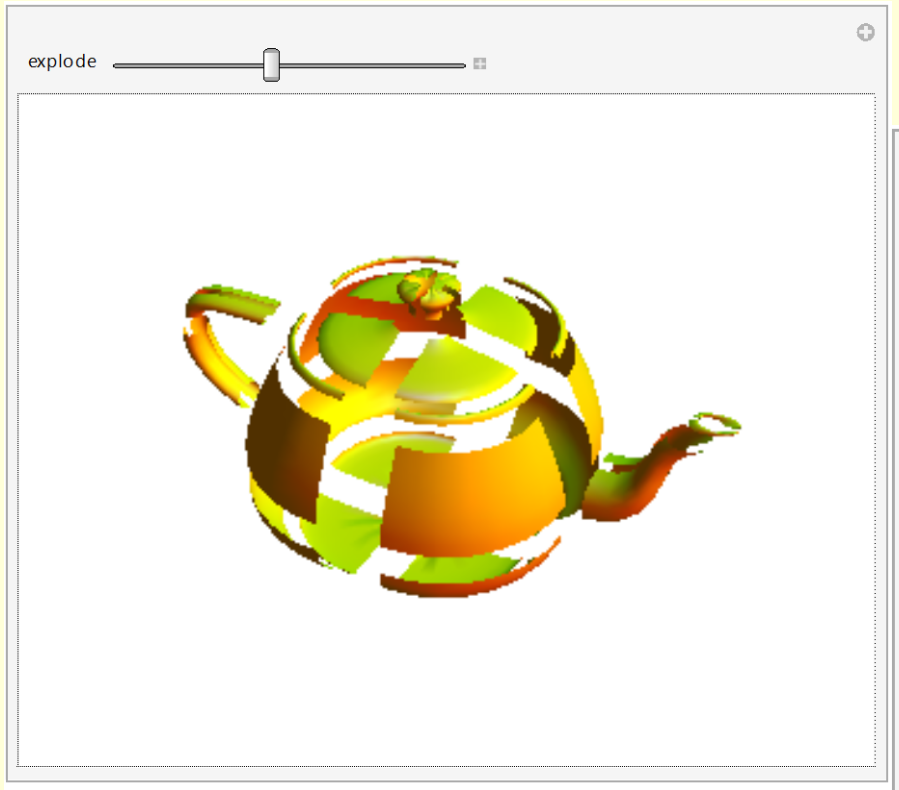
Компьютерная геометрия

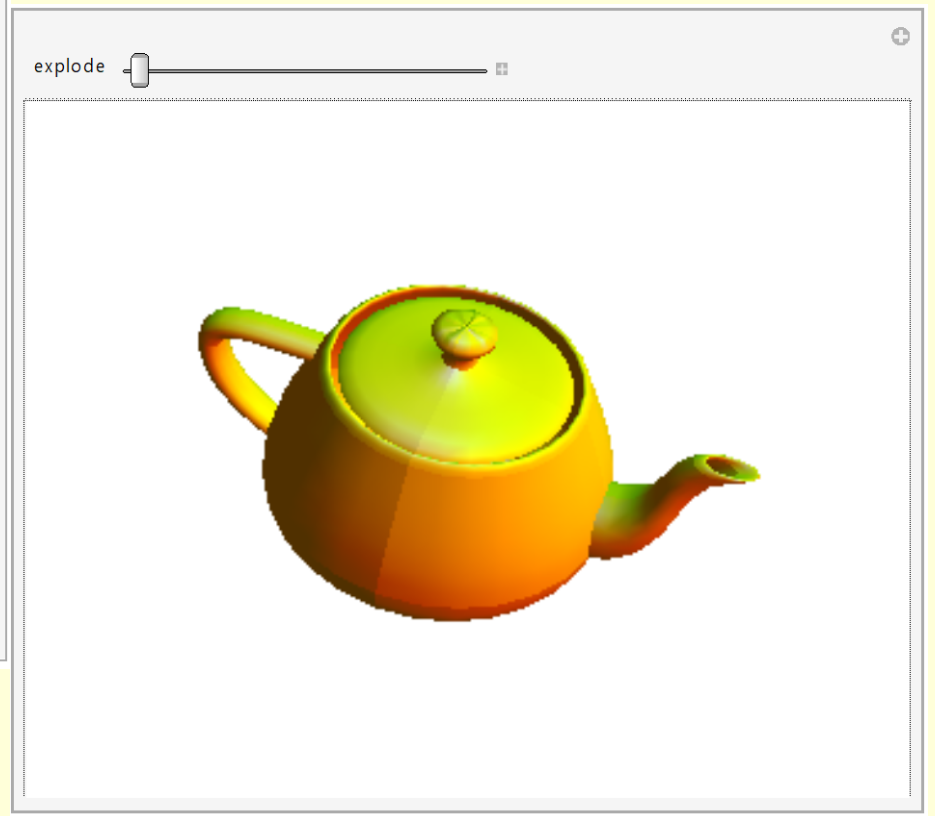


B-кривая в пространстве с автоматическим выбором узлов в сравнении с кривой Безье, построенной по тем же опорным точкам. Обратите внимание насколько более послушно ведет себя *B*-кривая при управлении опорными точками, чем кривая Безье. Кривая Безье по-другому учитывает влияние опорных точек на кривую, и при управлении опорными точками ведет себя гораздо более вязко, чем *B*-кривая.

Компьютерная геометрия

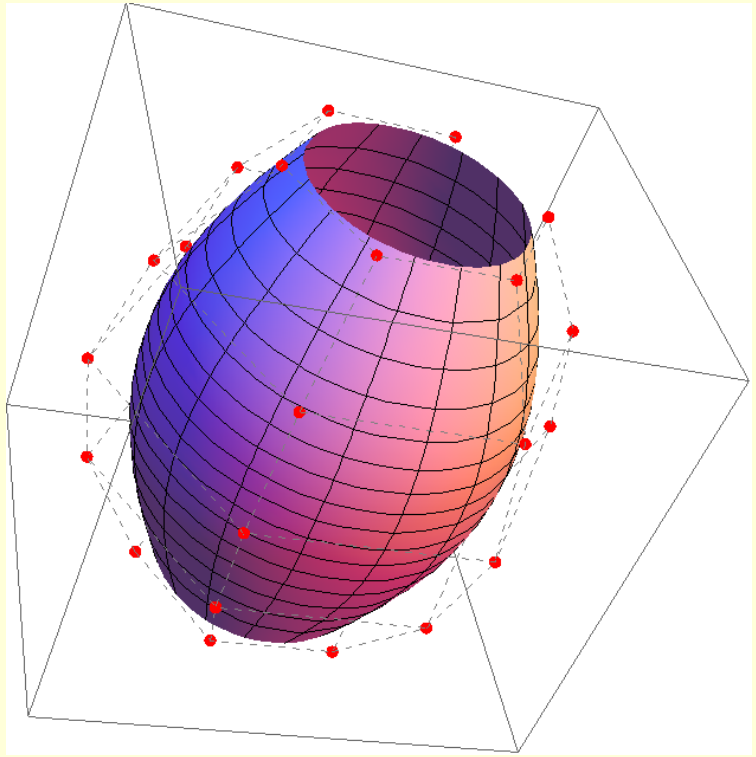
Чайник, созданный с помощью поверхностей Безье

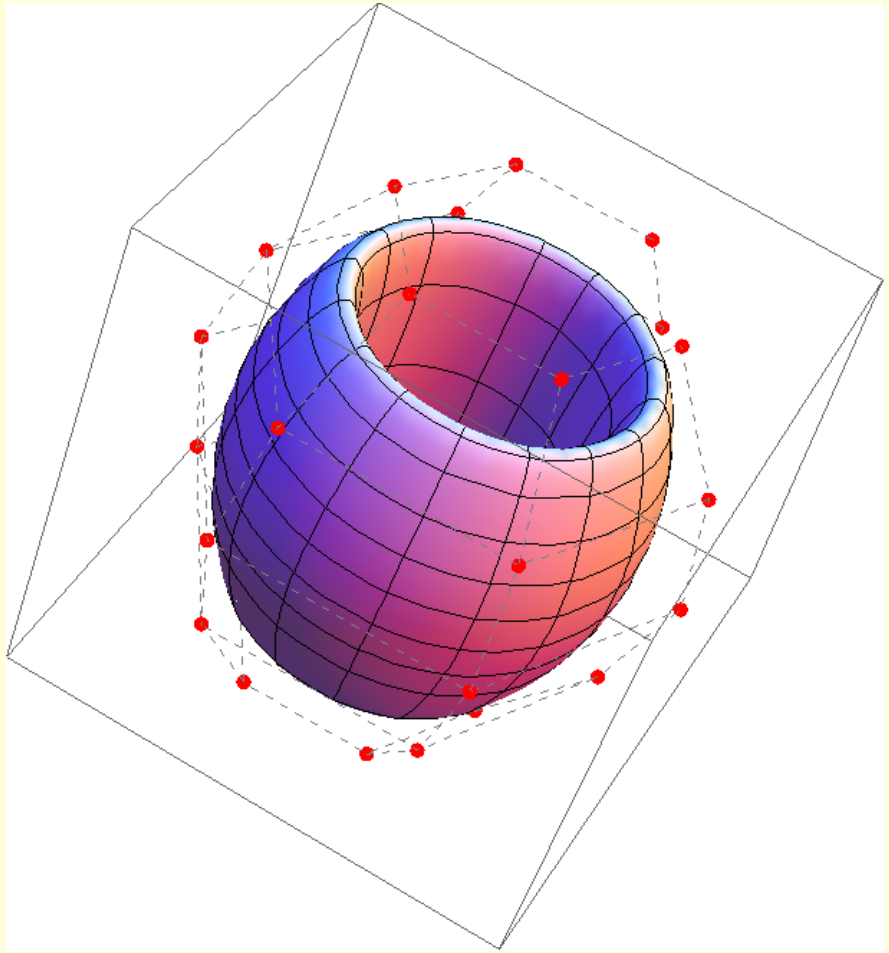




Компьютерная геометрия

B-поверхности. Для обеих поверхностей задан одинаковый остов опорных точек, но первая поверхность замкнута только по одному координатному направлению, а вторая - по каждому





СПЕЦКУРС

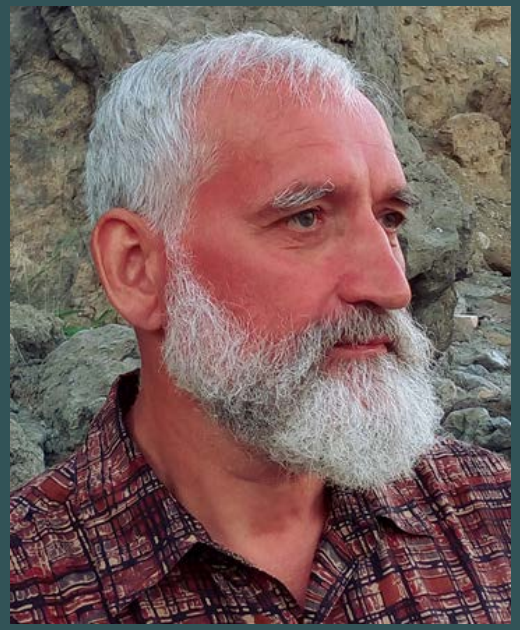
Г.В.Носовский и Д.П.Ильютко

“Компьютерная геометрия”

пон. 18:30, ауд. 12-07

Геометрия
в обработке изображений и анализе данных
Г.В.Носовский, А.Ю.Чекунов
и, временами, остальные ☺

Наши коллеги



Глеб Носовский:

доцент каф. ДГиП, к.ф.м.н. (по теор. вероятности)
дифф.геометрия, компьютерная геометрия, матстатистика, стохастический анализ, распознавание образов и контуров, комп. зрение, анализ данных

Алексей Чекунов

ассистент каф. вычмата, выпускник каф. ДГиП.
Компьютерное зрение, распознавание контуров, обработка изображений, C/C++, параллельное программирование (CUDA), анализ данных

Компьютерные методы и геометрия

- Моделирование
- Обработка изображений: поиск линий границы
- Кластеризация и распознавание: manifold conjecture

Компьютерные методы и геометрия

- ## Моделирование

  визуализация моделей инженерных объектов, решений различных уравнений и систем,
  их аппроксимация «удобными» кривыми и поверхностями (напр. Поверхности Безье)

- ## Обработка изображений: поиск линий границы

  обработка цветового изображения методами дифференциальной геометрии
  помогает эффективно и четко отыскать **границы** изображенных на нем объектов

- ## Кластеризация и распознавание: manifold conjecture

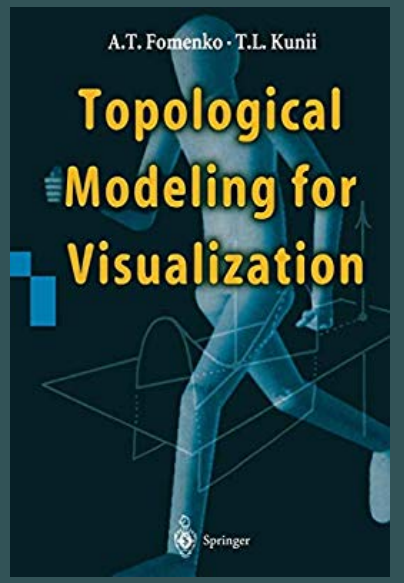
  геометрия многомерного датасета: большая часть точек – возле многообразий малой размерности.
  Изучение этих многообразий возникает в практических задачах наших индустриальных партнеров

Компьютерные методы на кафедре ДГиП

А.Т.Фоменко и T.Kunii,

профессор унив-та Токио, основатель унив. Aizu

- Взаимодействие с Aizu Univ., Япония, 90-е гг. : совместные исследования, конференции, несколько выпускников работают там много лет
- 2000-10е годы: (подробнее тут в разделе «Сингапур») Работа над прикладными задачами (кластеризация облака точек, инженерные задачи), лекции: Носовский, Тужилин
- 2011-13: работа в лаборатории «Дискетная и вычислительная геометрия», ее рук. проф. Герберт Эдельсбруннер (Австрия) – изобрел persistent homology
- 2010-е: биохимия: анализ пространственной структуры белков (А.Тужилин, Ф.Попеленский, в сотрудничестве с биофаком МГУ: проф. К.В.Шайтан)
- 2009-н.в.: Курс компьютерной геометрии на мехмате МГУ
- 2016-н.в.: обработка изображений, алгоритмы выделения контуров (Г.Носовский, А.Чекунов, студ. С.Подлипаев)
- 2020-н.в.: работа по хоз. договорам с внешними партнерами: применение компьютерной и метрической геометрии к анализу данных, обработке выхода нейросети (А.Иванов, Г.Носовский, Ф.Попеленский, А.Чекунов, Д.Федосеев, В.Кибкало)



Методы поиска границ на картинке

Классические (Canny etc**)**

- 1. Переводим изображение в grayscale (оттенки серого)
- 2. сглаживаем (гауссовы фильтры)
- 3. считаем градиент (или d^2)
- 4. выбираем «ключевые точки»
- 5. доп. подсчеты для конкретной задачи

Geometric Coding (GC)

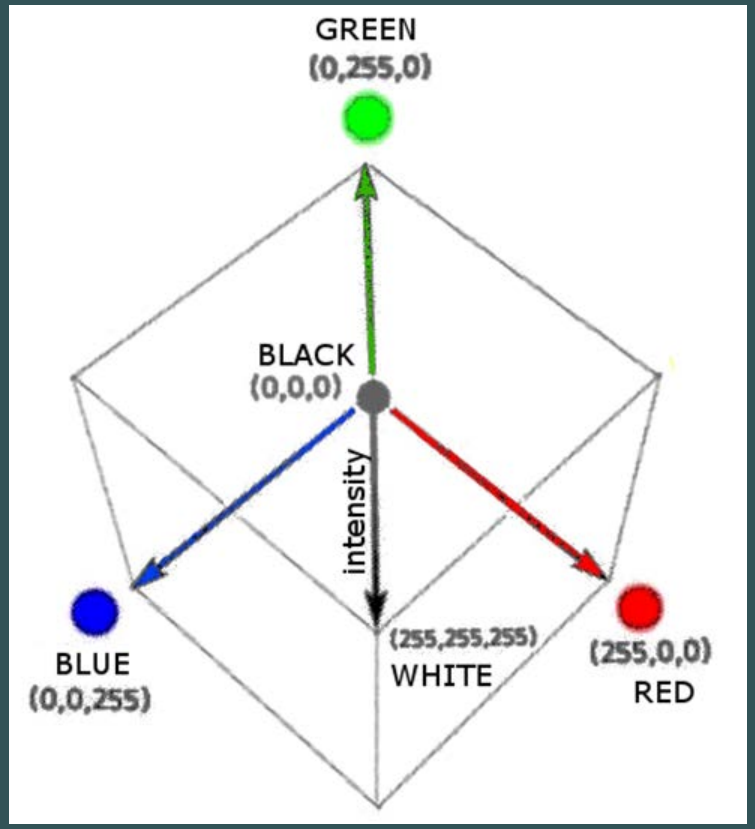
- 1. Строим дискретную поверхность в R^3 по пикселям цветного изображения
- 2. Аппроксимируем ее **поверхностью Безье** – будет гладкая M^2 в R^3
- 3. Подбор функции от геометрических характеристик M^2:
  – главных кривизн λ_1, λ_2,
  – элементов, det I или II фунд. форм

Цветовое пространство RGB

- **RGB-гамма**

Значение в точке цифрового изображения представляется в виде вектора в трехмерном кубе.

Длина вектора кодирует интенсивность, а его направление - цвет.

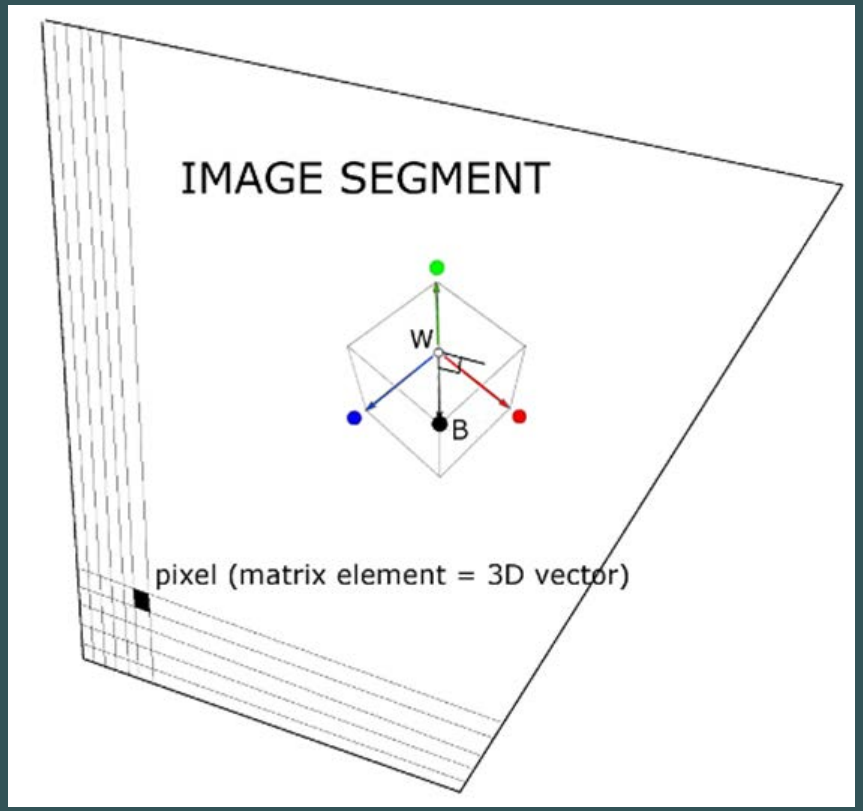


ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ КОДИРОВАНИЕ: Шаг 1

Помещаем в каждую ячейку цветного цифрового изображения RGB куб (его размер подбирается).

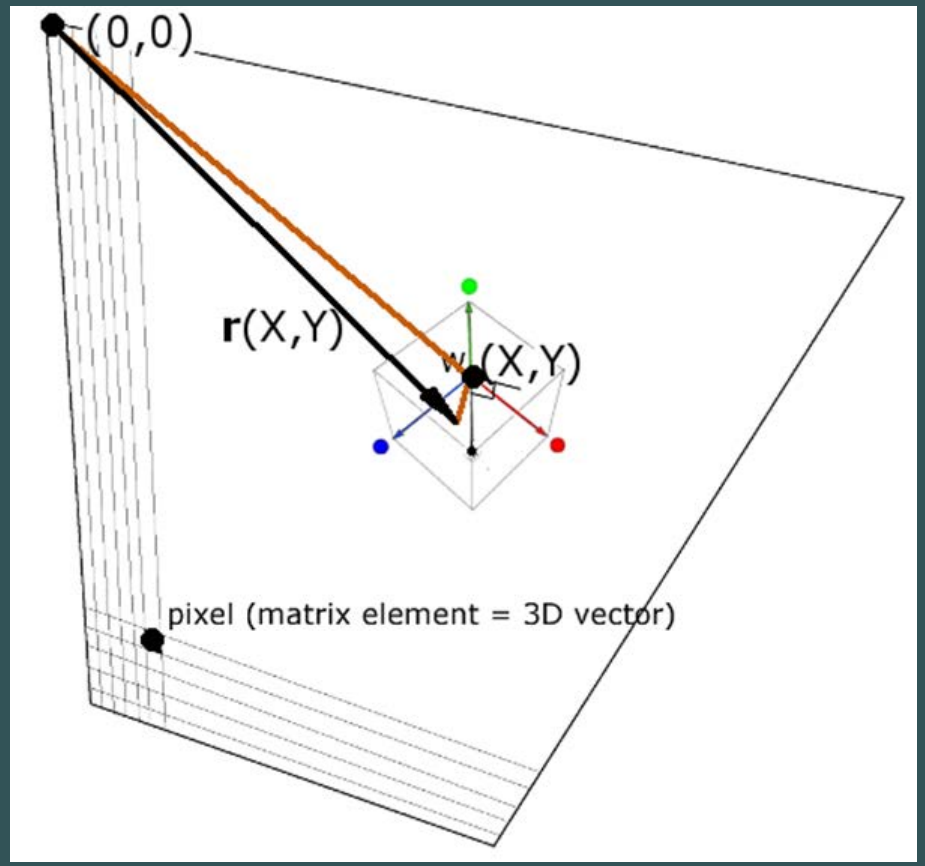
Отмечаем в нем конец вектора, соответствующего значению в этой ячейке.

Получается цифровая (поточечно заданная) 2-мерная поверхность в 3-мерном пространстве



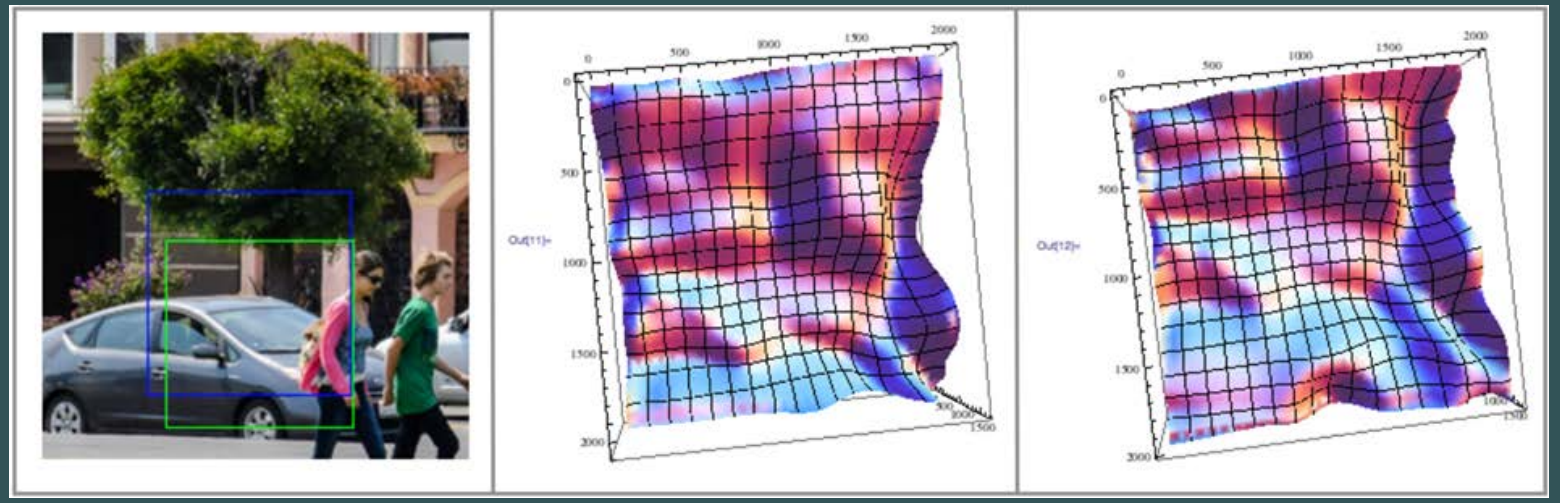
ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ КОДИРОВАНИЕ

Радиус-вектор кодирующей поверхности



Геометрическое кодирование: построение поверхности

- Шаг 1: цветное изображение без потери информации кодируется в виде двумерной поверхности.
- Шаг 2: эта поверхность сглаживается для подавления шума, например, при помощи **поверхности Безье.**



Примеры функций от главных кривизн (λ_1, λ_2) и метрического тензора G

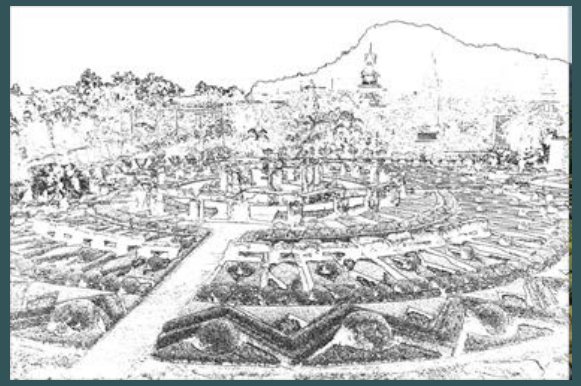
Шаг 3: Применяем их к полученной поверхности

- $f_0(\lambda_1, \lambda_2) = c||\lambda_1| - |\lambda_2||,$ $f_1(\lambda_1, \lambda_2) = c|\lambda_{max}|/\lambda_{min}^2,$
- $f_2(\lambda_1, \lambda_2) = c(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = c(H^2 - 4K),$
- $f_3(\lambda_1, \lambda_2) = c(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 = cH^2(H^2 - 4K),$
- $f_4(\lambda_1, \lambda_2) = c(|\lambda_1| - |\lambda_2|)^2 = \begin{cases} c(H^2 - 4K), K \geq 0; \\ cH^2, K < 0, \end{cases}$
- $f_5(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2}{\lambda_1^2 \times \lambda_2^2} = H^2(H^2 - 4K)/K^2 = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} - 2,$
- $f_6(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{(|\lambda_1| - |\lambda_2|)^2}{H^2} = \begin{cases} 1 - \frac{4K}{H^2}, K \geq 0; \\ 1, K < 0, \end{cases}$ $f_7(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^3}{\lambda_1^2 \times \lambda_2^2} = \frac{H^3}{K^2},$

- $h_1(k_1, k_2) = G,$ $h_2(G) = \begin{cases} (G-1)^2, & G \geq 1; \\ \frac{1}{G} - 1, & G < 1, \end{cases}$ $h_3(k_1, k_2) = \frac{(k_1 + k_2)^2}{k_1 k_2}.$

Геометрическое Кодирование (GC) и алгоритм Canny

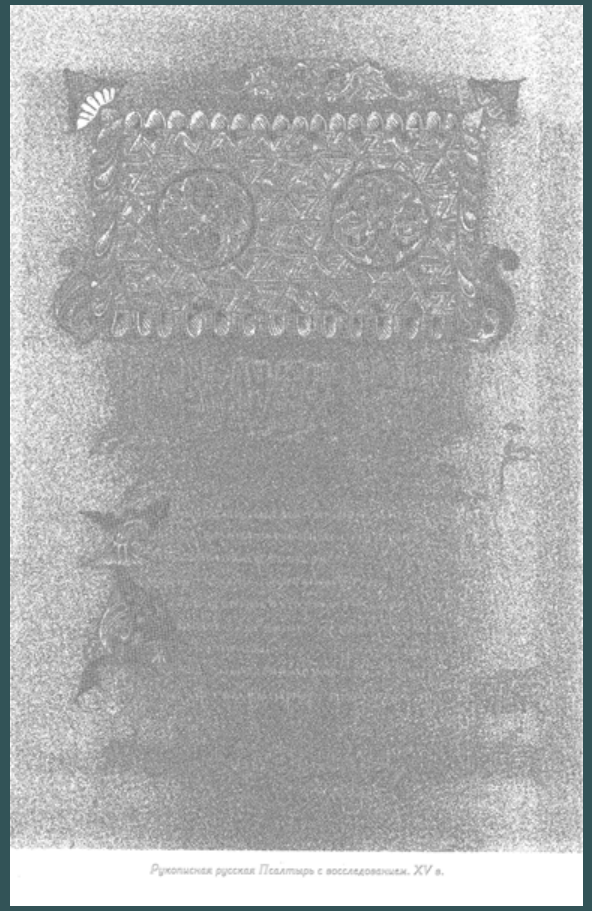
GC в RGB-гамме



Canny

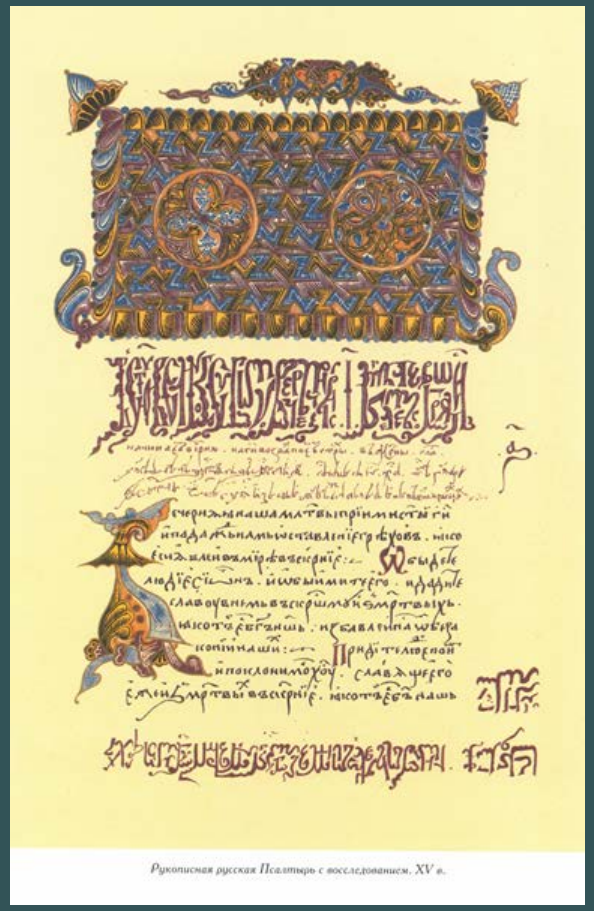
GC в тонах серого
Grayscale

Canny



Рукописная русская Псалтырь с восследованием. XV в.

Оригинал



Рукописная русская Псалтырь с восследованием. XV в.

Geometric Coding

Рукописная русская Псалтырь с восследованием. XV в.

Дальнейшие развития и приложения

- 1. распараллеливание (А.Чекунов)
- 2. Удаление фона с фотографии с выделением основного объекта
- 3. Автоматическая работа алгоритма: выбор оптимальных функций в разных ситуациях
- 4. Реализация алгоритма «в железе», на уровне схемы из функциональных элементов

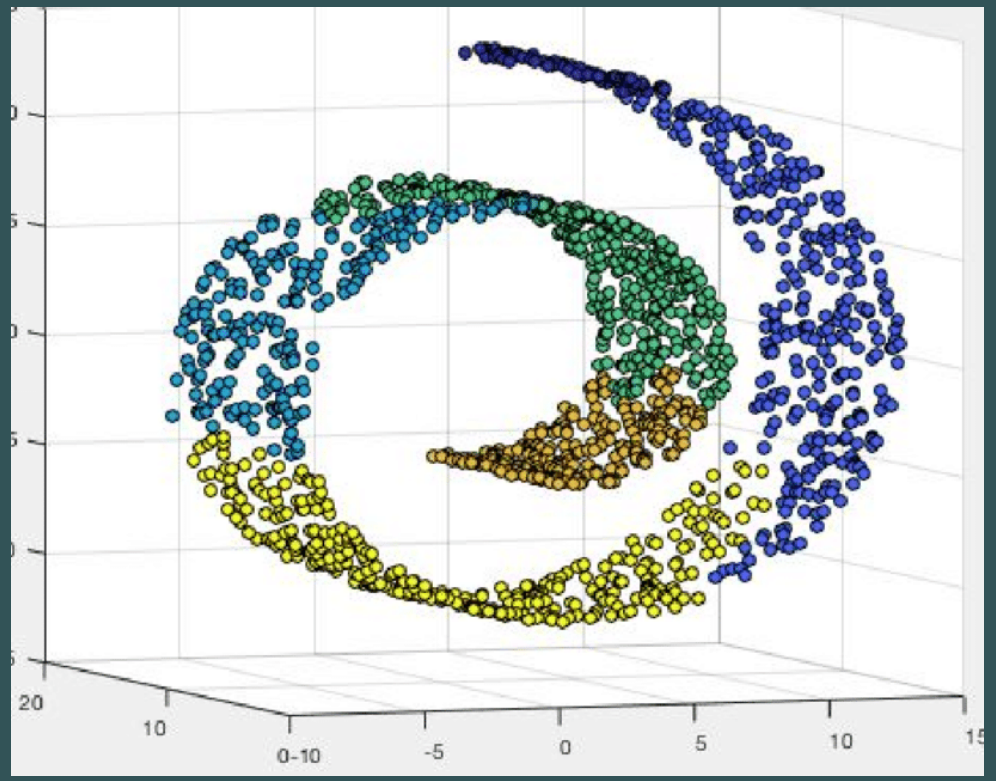
Доклад Г.В.Носовского на воркшопе по анализу данных, Красная Поляна, 2019 г.

Гипотеза о многообразии

- Опыт изучения многих датасетов (набор векторов большой размерности) показывает: они обычно распределены не случайно, а сосредоточены «вблизи» некоторой поверхности (многообразия) малой размерности.
- Много геометрических вопросов: оценить (и понизить) размерность этой поверхности, ввести на ней расстояние, представить в «удобном» для программной обработки виде, определить, гладкая ли она и.т.п.
- **Пример** задачи о распознавании (из реального проекта, так что без конкретики) :
  Было много изображений каждого из нескольких объектов
  (точнее, результат их обработки нейросетью – длинный вектор).
- Дан еще один вектор: какому из объектов принадлежит?
- Идея: векторы каждого объекта собраны вблизи некоторой «части» пов-ти.
  К какой из них вектор ближе (**в метрике на поверхности**) – такой будет объект.
- Вопрос сведен к геометрии: найти поверхность и метрику на ней по датасету.

Иллюстрация: стандартный датасет Swissroll

- Это стандартный датасет «Swissroll». Он задан в 3-мерном пространстве. А его истинная размерность – 2
- (Условно): точки разных цветов – результат обработки нейросетью изображений разных объектов.
- Добавили вектор. Распознавание: к какому классу отнести его?
- Надо взять «ближайшие» к нему вектора из датасета и их класс. Но близость – не в R^3, а по поверхности M^2. Надо ввести на пов-ти метрику



Как оценить размерность поверхности?

1. Размерность по Минковскому

- Это понятие возникло в геометрии фракталов: что есть его размерность?
- Опыт говорит, что оно хорошо применимо к датасетам (box-counting алгоритм).
- Для практики делаем некие модификации, оптимизируем и распараллеливаем код

2. Геометрия и теория вероятности

- Как оказалось, геометрические свойства поверхности связаны с конкретными характеристиками распределений
- Вам известны мат. ожидание, дисперсия и.т.п.. Эти несколько сложнее, но вполне обозримы.
- По некоторым формулам удается оценить размерность поверхностей для реальных датасетов.

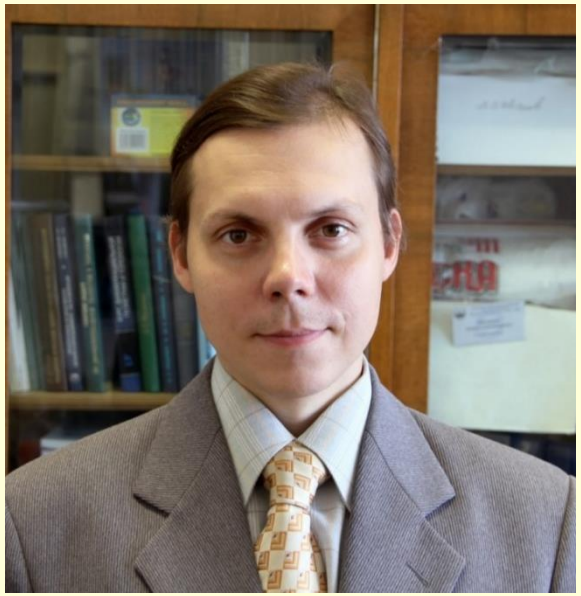
Резюме

- Изучается геометрия и топология многомерных объектов, по-видимому, во-многом отличных от «привычных» гладких поверхностей.
- При этом возникают как теоретические, так и практические вопросы, развиваются новые методы и подходы, применимые к широкому классу задач.
- Работа идет с реальными данными и задачами, интересными нашим партнерам, в том числе в рамках контрактов и договоров.
- Если Вам интересно программирование или практическое применение геометрических методов к реальным вычислительным задачам –

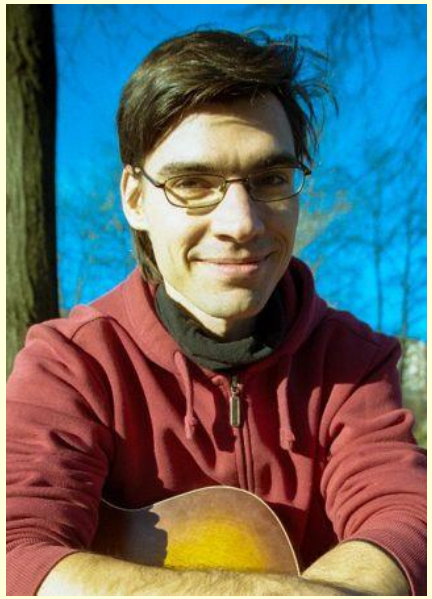
Будем рады сотрудничеству!

Маломерная топология и теория графов

Д.П.Ильютко

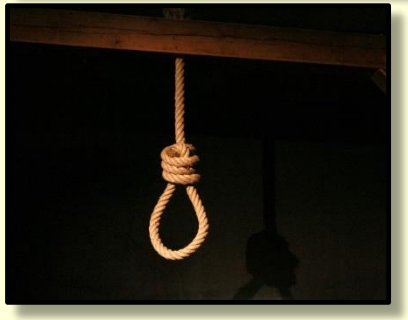


И.М.Никонов



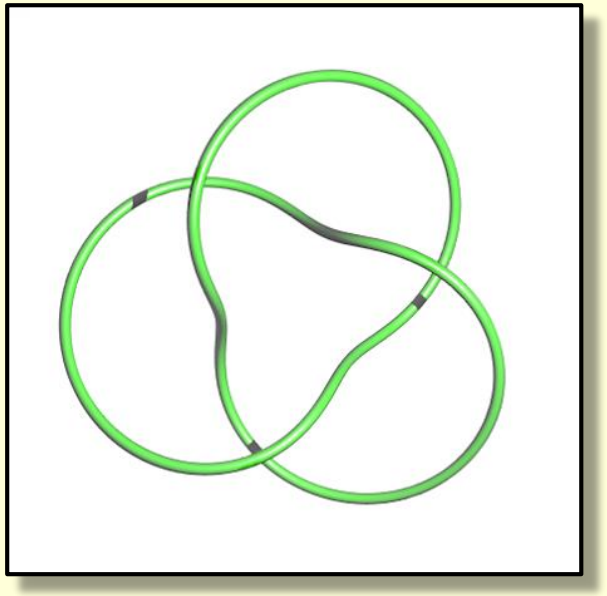
Д.А. Федосеев

Узлы

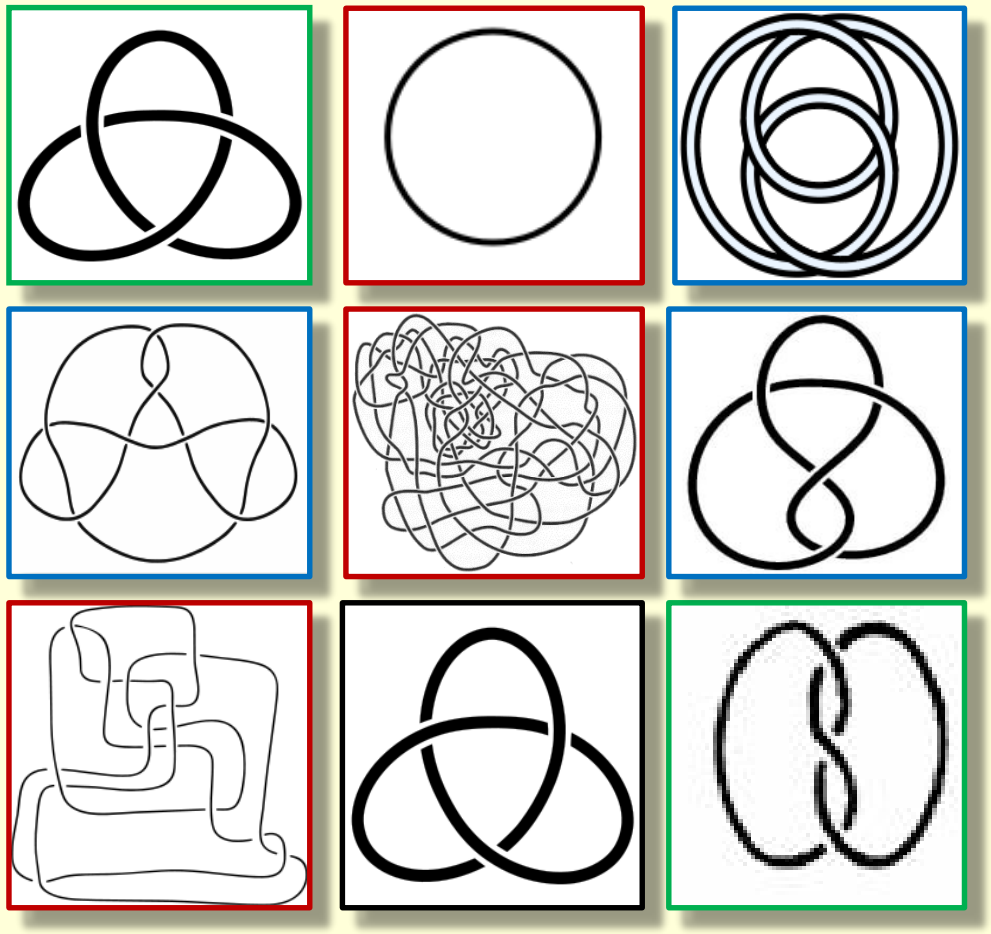


Теория узлов

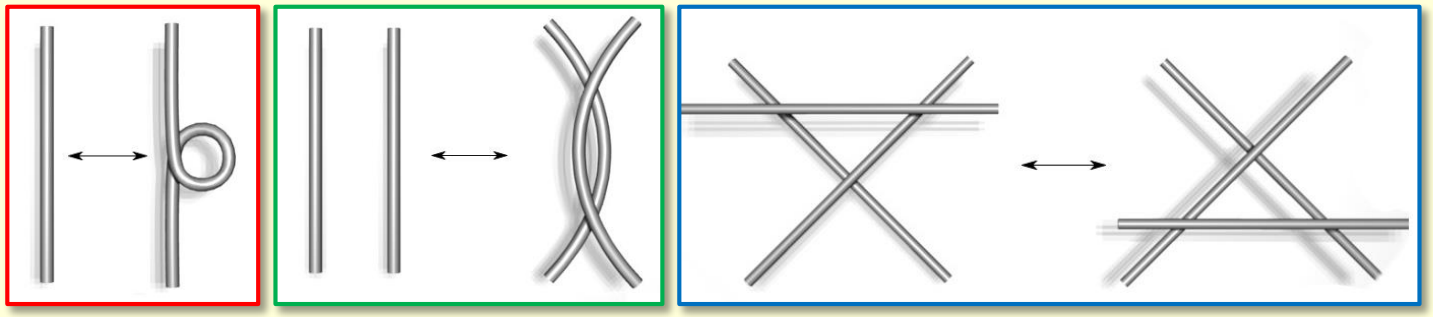
Замкнутая кривая в трехмерном пространстве без самопересечений

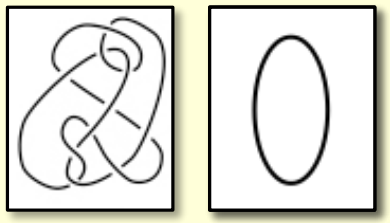


Основная проблема теории узлов

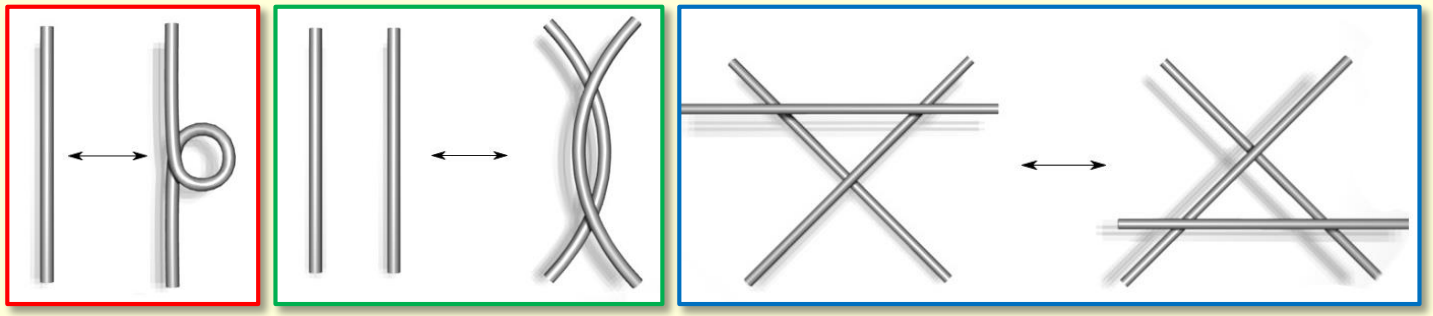


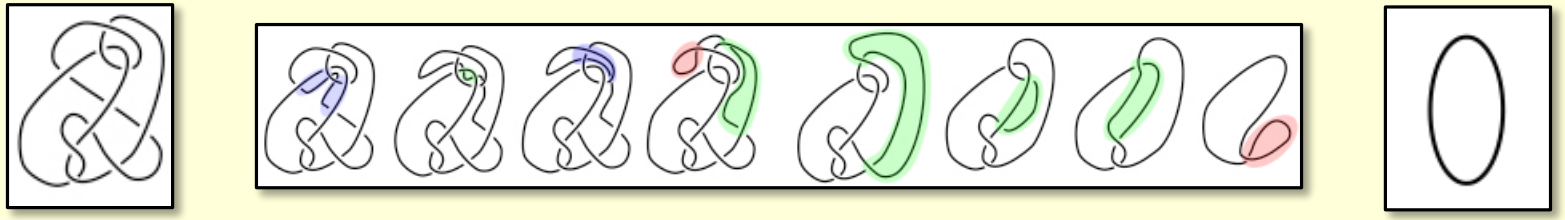
Движения Рейдемейстера



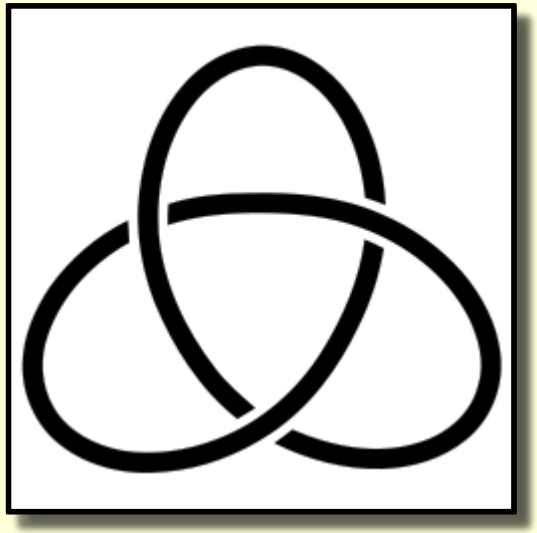


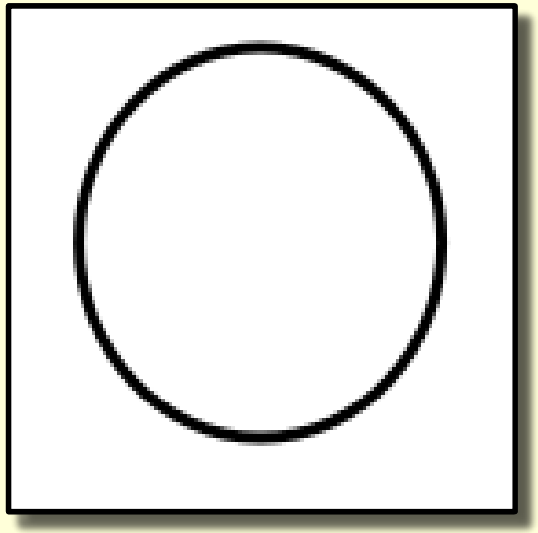
Движения Рейдемейстера



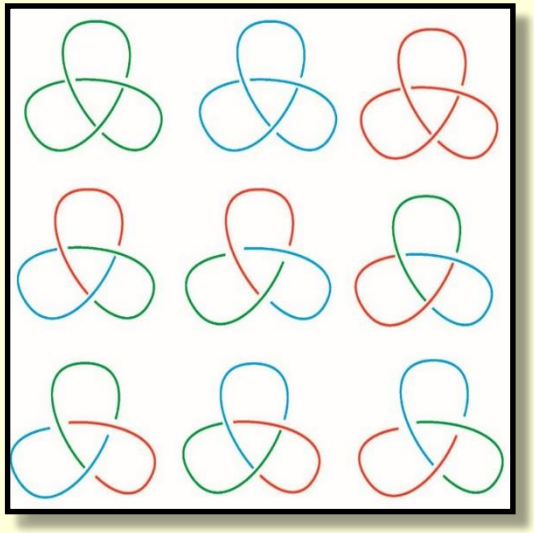


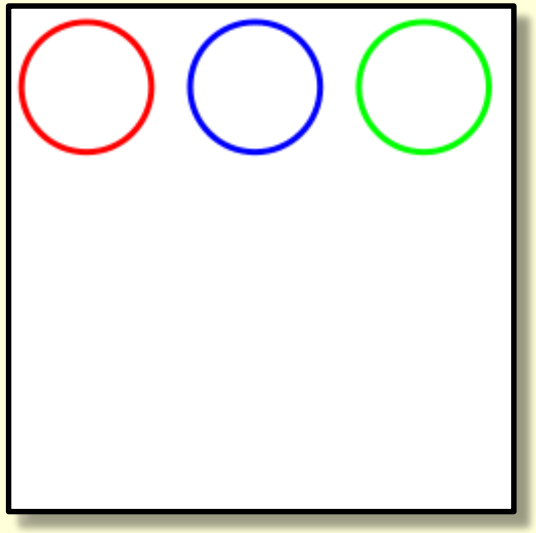
Инварианты узлов





Инварианты узлов





9 ≠ **3**

Граф-узлы

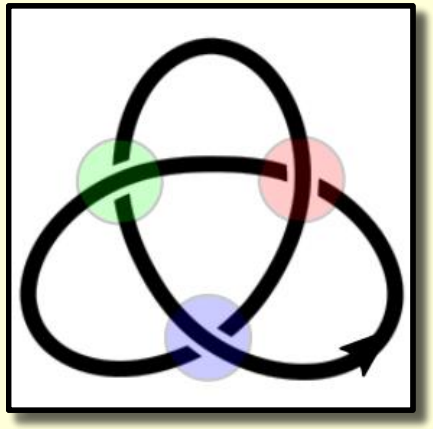
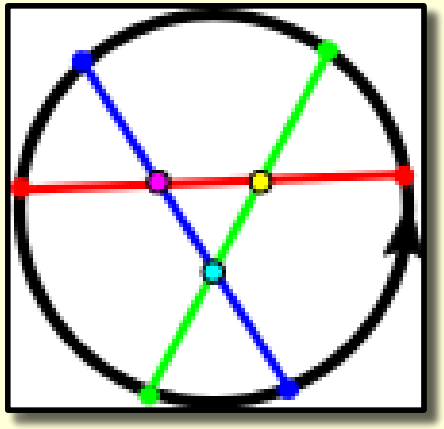
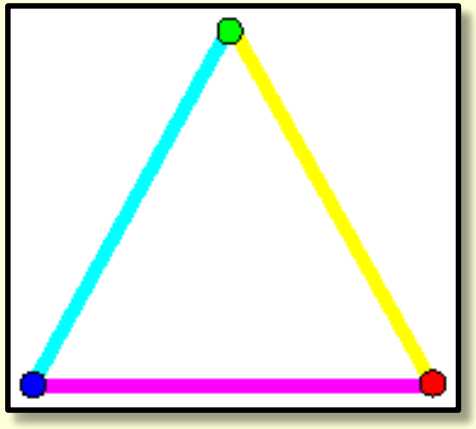


диаграмма узла

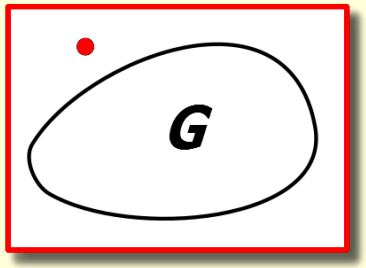


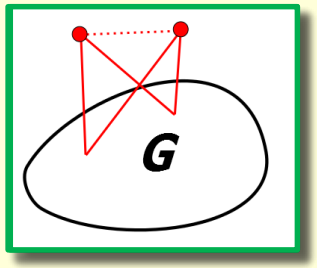
гауссова диаграмма

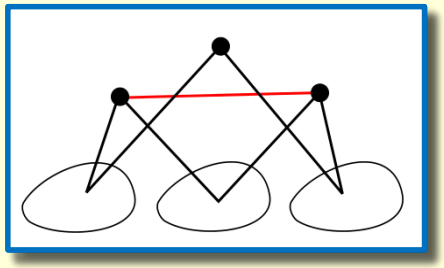


граф-узел

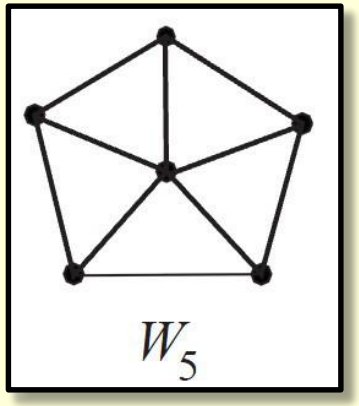
Движения Рейдемейстера для граф-узлов

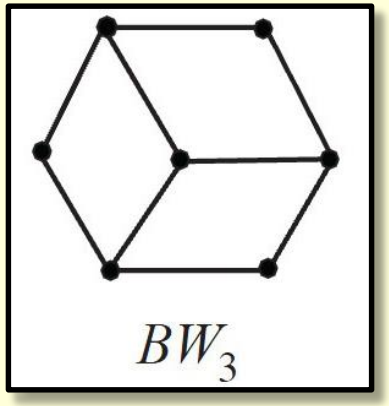


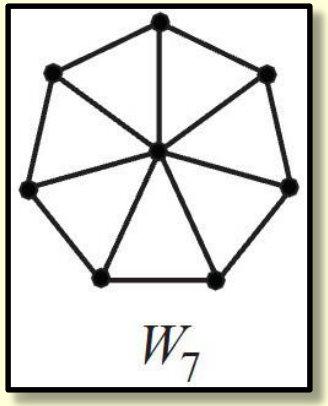




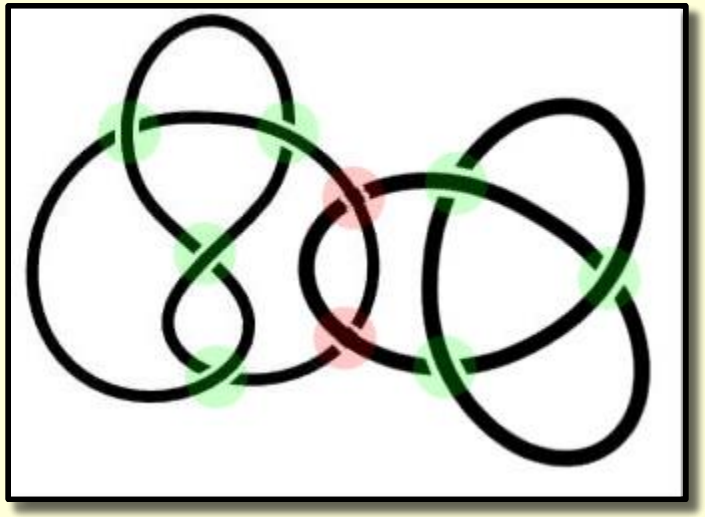
Нереализуемые графы





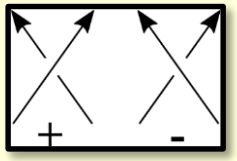


Четность узлов

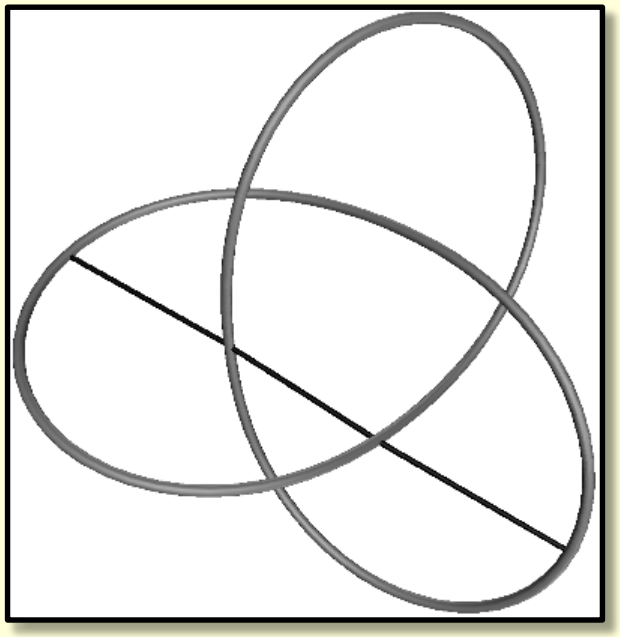


Аксиома четности: сумма четностей перекрестков, участвующих в движении Рейдемейстера, равна нулю.

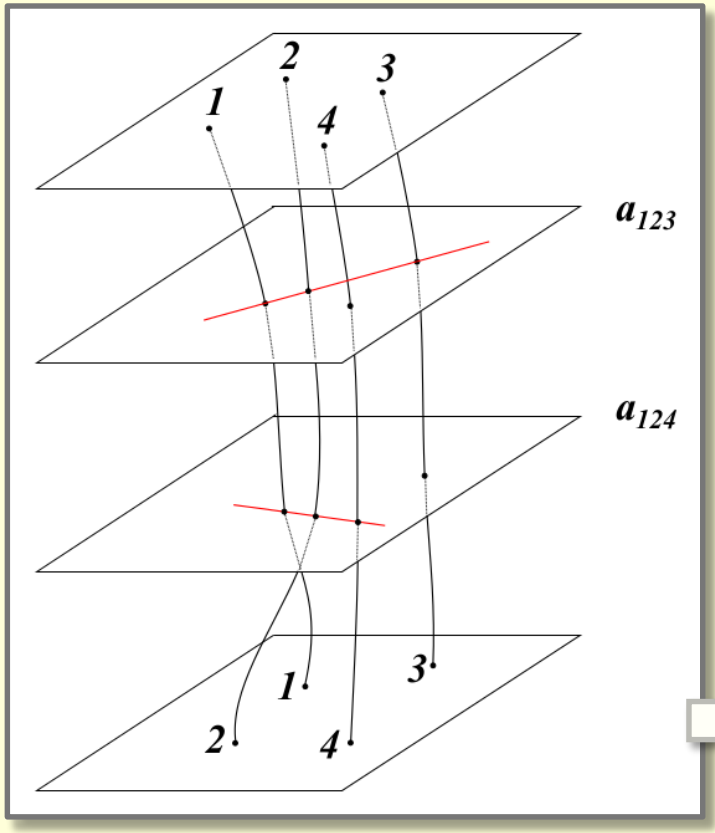
Индекс зацепления $lk = \sum_{c \text{ нечетный}} \operatorname{sgn}(c)$



Квадрисеканта



Группы G_n^k



G_n^k описывает динамику n точек в $\mathbb{R}^k$

Роль движений Рейдемейстера играют тождества в группе G_n^k

Косе соответствует произведение $a_{123}a_{124} \in G_3^2$

СПЕЦСЕМИНАР

Д.П.Ильютко, С.Ким, В.О.Мантуров, И.М.Никонов, Д.А.Федосеев

“Узлы и теория представлений”

пн. 18:30, online

Алгебраическая топология.

И.М.Никонов

Ф.Ю.Попеленский

Г.И.Шарыгин

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ

Идея сравнивать геометрические объекты (многообразия, топологические пространства, симплициальные комплексы, клеточные пространства), используя их алгебраические инварианты, лежит в основе алгебраической топологии. Она позволила найти решения многих очень важных для математики проблем. Вот несколько простых примеров.

1. Шуточный пример. Почему существует барабан? Почему при ударах по мембране диск не «схлопывается» на обод? Есть математическое объяснение.

Теорема

Не существует непрерывного отображения f диска D^n на граничную окружность S^1, при котором точки окружности неподвижны.

Это утверждение равносильно следующему

Теорема (Теорема Брауэра о неподвижной точке)

Любое непрерывное отображение диска D^n в себя имеет неподвижную точку.

В отличие от оригинального доказательства Брауэра, стандартный инструмент алгебраической топологии — гомологии — дает очень простое доказательство.

От противного, предположим, что существует непрерывное отображение $f : D^n \to S^{n-1} = \partial D^n$, неподвижное на границе. Обозначим через $i : S^{n-1} \to D^n$ тождественное вложение сферы на границу шара. Тогда с одной стороны, композиция $f \circ i : S^{n-1} \to S^{n-1}$ тождественна и поэтому задает тождественное отображение в целочисленных гомологиях

$$(f \circ i)_* : H_{n-1}(S^{n-1}) \to H_{n-1}(S^{n-1})$$

$$(f \circ i)_* = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

С другой стороны, $f \circ i : S^{n-1} \to S^{n-1}$ является композицией отображений в диск и из диска, поэтому в гомологиях мы имеем композицию

$$f_* \circ i_* : H_{n-1}(S^{n-1}) \to H_{n-1}(D^n) \to H_{n-1}(S^{n-1})$$

т.е.

$$f_* \circ i_* : \mathbb{Z} \to 0 \to \mathbb{Z},$$

это отображение в 0 и тождественным быть не может. Противоречие.

Пример 2. Какие бывают «числовые системы», т.е. на каких конечномерных векторных пространствах над $\mathbb{R}$ можно задать структуру поля? Ответ дает теорема Фробениуса: $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Если отказаться от коммутативности умножения, то к этому списку добавятся кватернионы $\mathbb{H}$.

Это алгебраический результат.

Более общий вопрос, чем тот, что обсуждается в теореме Фробениуса такой: для каких n на векторном пространстве размерности n вообще существует структура билинейное умножение с делением? Здесь от умножения не требуется ни ассоциативности, ни коммутативности, ни существования единицы. И как ни странно, ответ на этот вопрос дает именно алгебраическая топология.

Теорема (Адамс, 1960, 1962)

Алгебры с делением существуют только в размерностях $1, 2, 4, 8$.

Отметим, что вопрос об алгебрах с делением тесно связан с вопросом, для каких размерностей n на сфере S^{n-1} существует $n-1$ линейно независимых векторных полей, а также с вопросом, в каких случаях так называемый инвариант Хопфа равен 1.

Исходное доказательство Адамса было очень непростым.

Не очень сложно доказать, что если такая алгебра с делением существует, то n должно иметь вид 2^k.

Но если сначала построить топологическую K–теорию, то можно дать остроумное доказательство этого факта, которое займет не больше странички текста (Адамс, 1962).

3. Еще пример теоремы из алгебры, которая доказывается топологическими методами.

Теорема

Подгруппа свободной группы сама свободна.

Очень простое доказательство получается с помощью накрытий:
У любого графа фундаментальная группа свободна, и наоборот, любая свободная группа является фундаментальной группой некоторого графа.
Подруппа фундаментальной группы задает накрытие.
Накрытие графа — тоже граф, фундаментальная группа которого, конечно же, свободна.

Пример 4. Спиноры.

Многочисленные открытия начала XX-го века в физике микромира удостаивались Нобелевских премий. Но одно — открытие спина — не отмечено Нобелевской премией — слишком много людей сделали вклад в развитие гипотезы существования спина.

Существование спина тесно связано с тем, что у группы вращений фундаментальная группа изоморфна $\mathbb{Z}/2$

5. Какие бывают многообразия? В прошлом году курсе «Наглядной геометрии и топологии» мы познакомились с двумерными поверхностями и доказали теорему классификации замкнутых двумерных поверхностей: они полностью определяются родом и ориентируемостью.
Что происходит в высоких размерностях? Уже можно точно сказать, что размерности 3 и 4 стоят особняком. Начиная с размерности 5 многообразия становятся проще для понимания.

Вот несколько теорем, которые уже являются классическими:

на семимерной сфере есть несколько гладких структур — т.е. имеется набор гладких многообразий гомеоморфных обычной сфере S^7, но попарно различных с гладкой точки;

существуют многообразия, на которых вообще нет никакой гладкой структуры;

на $\mathbb{R}^4$ существует континуум различных гладких структур;

Здесь уместно поставить многоточие ...

Некоммутативная геометрия.

И.М.Никонов

Ф.Ю.Попеленский

Г.И.Шарыгин

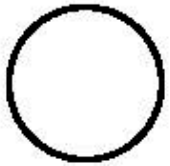
Что такое „некоммутативное пространство“?

$$\longleftrightarrow \qquad C^\infty(\mathbb{R})$$

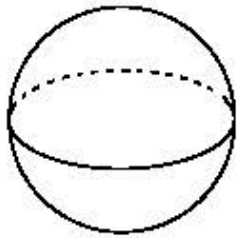
$$x = 5 \qquad \longleftrightarrow \qquad \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f(5) = 0\}$$

Основная идея современной геометрии: пространства полностью определяются своими алгебрами функций.

Часто все можно записать чисто алгебраически:



$$\longleftrightarrow \{x^2+y^2=1\} \longleftrightarrow \mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1)$$



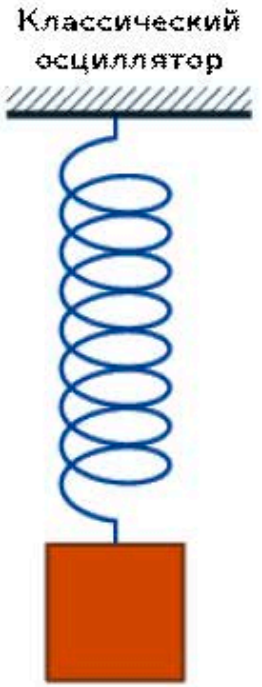
$$\longleftrightarrow \{x^2+y^2+z^2=1\} \longleftrightarrow \mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2+z^2-1)$$

Такой подход помогает, например, находить число рациональных точек на кривых и поверхностях.

В квантовой физике работают с некоммутативными алгебрами, чтобы описать эксперимент.

Пример:

1-мерный классический осциллятор, энергия



$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}\omega m q^2$$

q, p – координата и импульс системы.

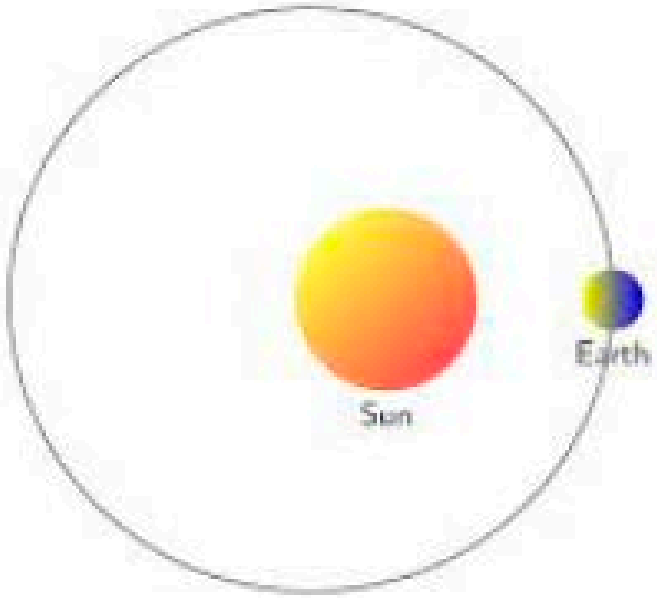
Для квантового осциллятора нужно, чтобы *квантовый* момент $\hat{p}$ не был переставновочен с ее же координатой $\hat{q}$ (возможное объяснение: при измерениях в микромире мы портим величины):

$$\hat{p}\hat{q} - \hat{q}\hat{p} = \hbar.$$

$\hbar = 6.626068 \times 10^{-342}/$ – постоянная Планка.

Квантование

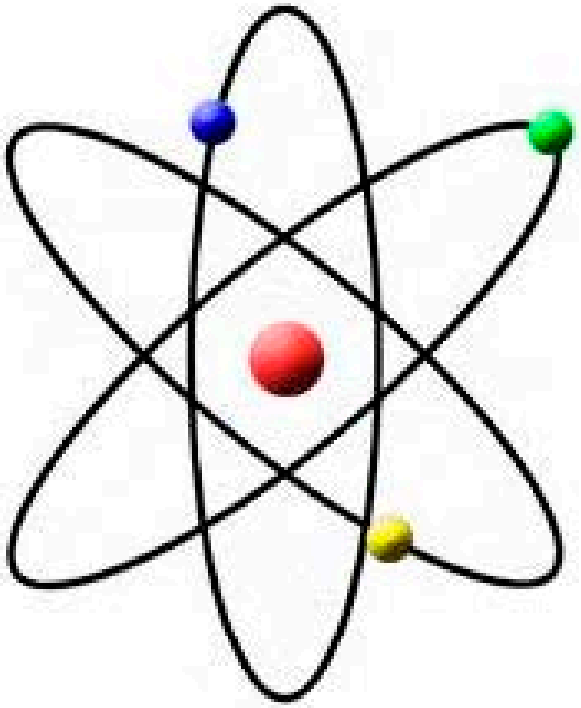
Классическая система



$$\dot{f} = \{H, f\}$$

уравнения Гамильтона

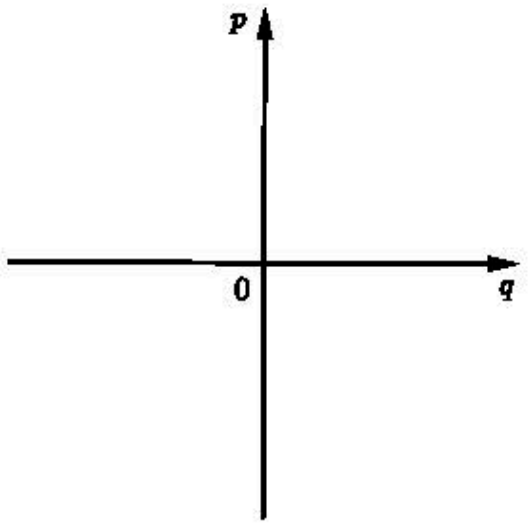
Квантовая система



$$i\hbar\frac{df}{dt} = [H, f]$$

уравнения Гейзенберга

Получаем вопрос:



$$\longleftrightarrow \quad \mathbb{R}[p, q]$$

$$??? \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{R}\langle \hat{p}, \hat{q} \rangle / (\hat{p}\hat{q} - \hat{q}\hat{p} - \hbar).$$

Удовлетворительного ответа на такой вопрос в настоящее время не существует.
Однако не думая о левой части, можно работать с алгеброй так, как будто слева что-то есть. Так получаются многочисленные полезные в физике и не только результаты.

Это и есть основная идея некоммутативной геометрии!

Деформационное квантование

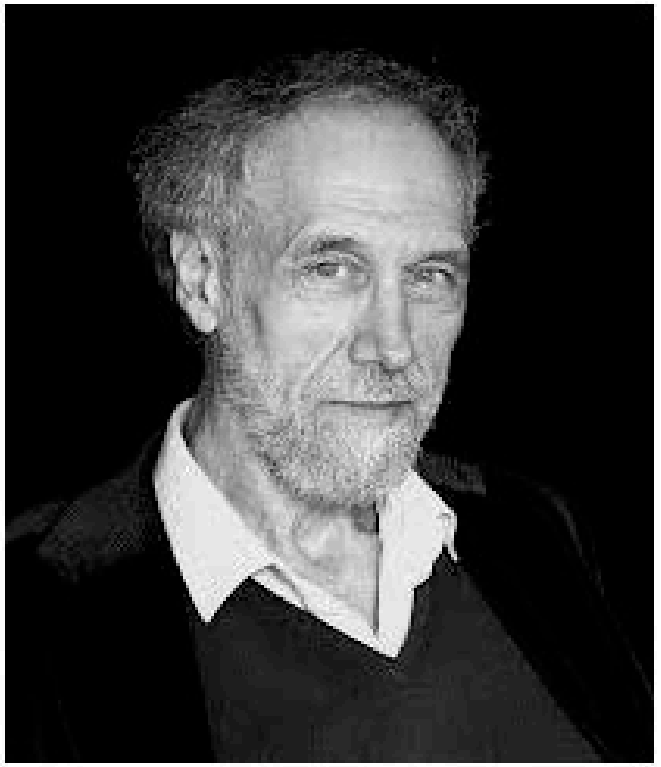
$$[f,g] = \hbar\{f,g\} + \hbar^2 a_2(f,g) + \dots$$

$\{f,g\}$ — скобка Пуассона

Максим Концевич

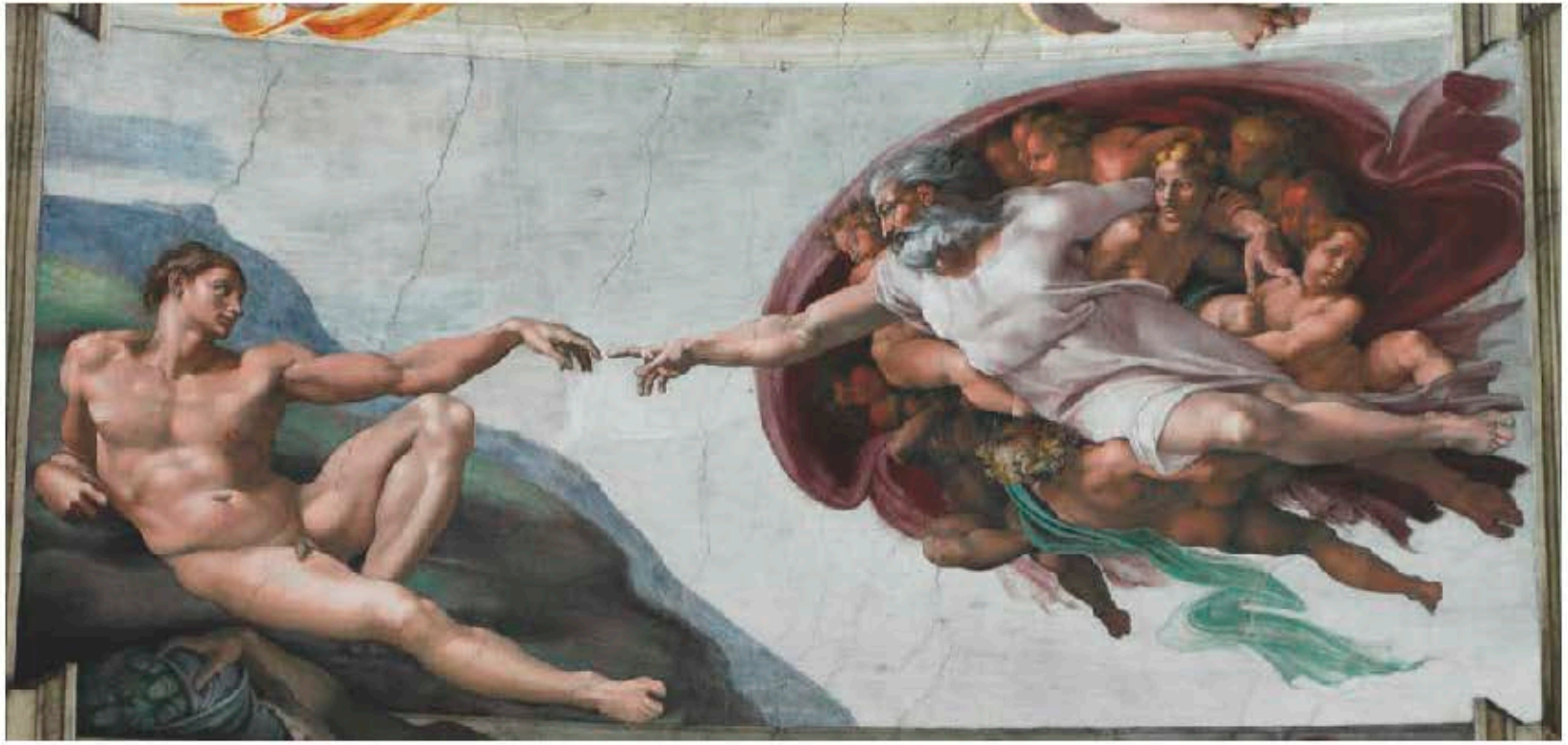
Гипотеза Баума–Конна

$$\mu_i^\Gamma : RK_i^\Gamma(\underline{E}\Gamma) \xrightarrow{\sim} K_i(C_r^*\Gamma)$$



Ален Конн — крестный отец некоммутативной геометрии

Гипотеза Баума–Конна



Алгебраическая геометрия и ее приложения

А. Б. Жеглов, В. В. Пржиялковский

Алгебраическая геометрия

Алгебраическая геометрия — один из самых глубоких, развитых, сложных и распространенных разделов математики. Она связана с дифференциальной и симплектической геометрией, топологией, комплексным и функциональным анализом, алгеброй, теорией категорий, дискретной математикой, теорией вероятности, статистикой, теорией игр, компьютерной алгеброй, криптографией, математической физикой и многими другими областями.

Объект изучения классической алгебраической геометрии — системы полиномиальных уравнений и их решения.

Старт классической алгебраической геометрии был дан Виетом и Декартом. Паскаль и Дезарг развили проективную геометрию. Начало систематической алгебраической геометрии — XIX век. В дальнейшем алгебраическая геометрия развивалась благодаря итальянской школе, известной своей красотой. Большой вклад внес, с алгебраической точки зрения, Гильберт.

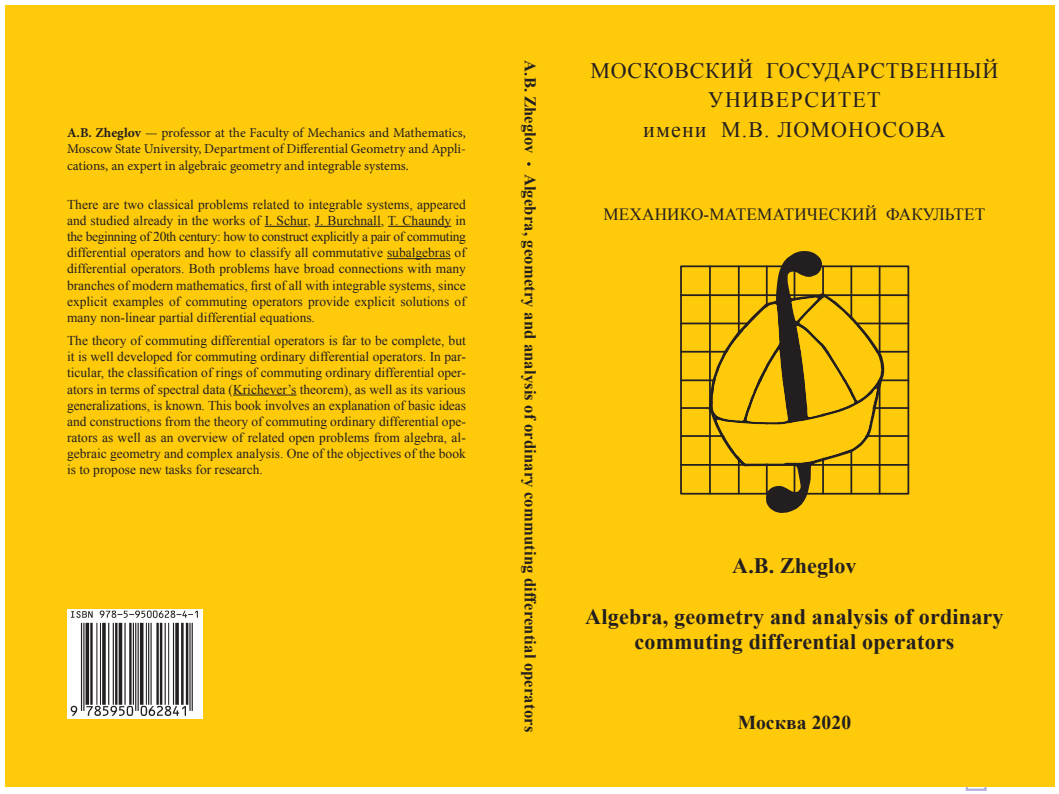
Алгебраическая геометрия

Расцвет алгебраической геометрии: XX век. В середине века революцию совершила французская школа. Бурный расцвет алгебраической геометрии в 60-80-е годы. Большую роль в нем сыграла советская (а потом и российская) школа алгебраической геометрии, основанная И. Р. Шафаревичем. Его учениками и "научными потомками" являются ученики Аракелов, Голод, Долгачёв, Исковских, Кострикин, Манин, Мойшезон, Орлов, Паршин, Прохоров, Тюрин, Шокуров; большинство из них работали на мехмате. Филдсовские медали за последние тридцать лет: Дринфельд (1990), Мори (1990), Бордчердс (1998), Концевич (1998), Лаффорг (2002), Воеводский (2002), Окуньков (2006), Тяу (2010), Биркар (2018), Шольце (2018). С 2003 года (даты основания) премию Абеля получили Серр, Атья, Делинь, Ленглендс.
Одним из важнейших центров алгебраической геометрии в мире является Москва.

Алгебраическая геометрия

А. Б. Жеглов: научные интересы:

- Алгебраическая геометрия квантовых интегрируемых систем.
- Многомерное соответствие Кричевера.
- Алгебро-геометрические точные решения нелинейных уравнений, алгебраическая теория уравнения КП.



Алгебраическая геометрия

В. В. Пржиялковский: научные интересы:

- Бирациональная геометрия: многообразия Фано, рациональность, группы автоморфизмов.
- Методы торической геометрии и взвешенные полные пересечения.
- Алгебро-геометрические аспекты зеркальной симметрии. Топологическая зеркальная симметрия и зеркальная симметрия вариаций структур Ходжа. Торические модели Ландау–Гинзбурга. Численные и когомологические гипотезы зеркальной симметрии.

Более подробную презентацию и видеолекцию смотрите 7 апреля на нашем лектории, см. также прошлогоднюю запись на нашем сайте :
http://dfgm.math.msu.su/

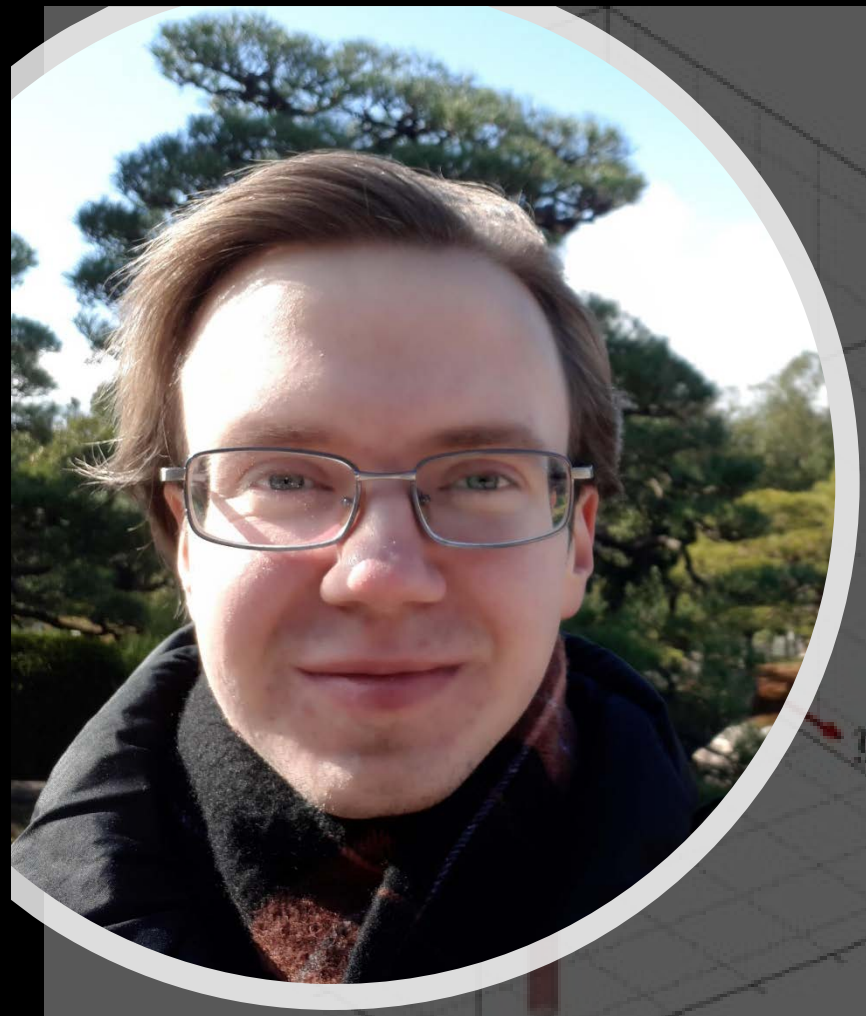
Алгебраическая геометрия

Что изучать

- Элементарное введение: М. Рид, “Алгебраическая геометрия для всех”; Дж. Харрис “Алгебраическая геометрия. Начальный курс”.
- Более основательное: И. Р. Шафаревич, “Основы алгебраической геометрии”.
- Основной учебник: Р. Хартсхорн, “Алгебраическая геометрия”.

Где изучать

- Курс алгебраической геометрии на мехмате.
- Спецкурсы по алгебраической геометрии.
- Спецкурсы НОЦ МИАН.
- Семинары Шафаревича и Исковских в МИАН.



В.А.Кибкало

Механика
в псевдо-евклидовом пространстве:

пример того, как простые соображения
отвечают на сложный вопрос

Неевклидовы пространства и движение в них

- Простой пример: линейное пространство $R^2(x, y)$ со скалярным произведением

$$\langle A, B \rangle = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y \quad \text{евклидово}$$

$$\langle A, B \rangle = A_x \cdot B_x - A_y \cdot B_y \quad \text{псевдо - евклидово}$$

Неевклидовы пространства и движение в них

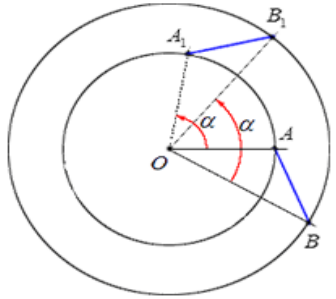
- Дано: линейное пространство (например, $R^2(x, y)$) со скалярным произведением

$$\langle A, B\rangle = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y \quad \text{евклидово}$$

$$\langle A, B\rangle = A_x \cdot B_x - A_y \cdot B_y \quad \text{псевдо - евклидово}$$

- **Движения**: замены координат, которые сохраняют эту билинейную форму.

- **Примеры.** Евклидов поворот и Гиперболический поворот



$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$ch^2\alpha - sh^2\alpha = 1 \qquad \begin{pmatrix} ch\,\alpha & -sh\,\alpha \\ sh\,\alpha & ch\,\alpha \end{pmatrix}$$

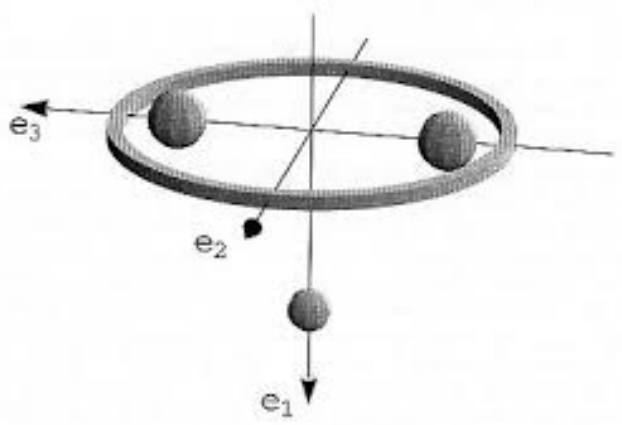
Движение твердого тела

- **Твердое тело**: расстояния между точками постоянны при движении
- **Интегрируемость**: у **интегрируемой системы** (**ИС**; движение мат. точек, тел итп) есть функции, которые сохраняются с течением времени (законы сохранения: например, энергии)

Движение твердого тела

- **Твердое тело**: расстояния между точками постоянны при движении
- **Интегрируемость**: у **интегрируемой системы** (**ИС**; движение мат. точек, тел итп) есть функции, которые сохраняются с течением времени (законы сохранения: например, энергии)
- Задача **Ковалевской:** в R^3 есть твердое тело с закрепленной точкой, действует сила тяжести) волчок в R^3 задается *шестью* числами: 3 координаты x_1 , x_2 , x_3 и 3 скорости J_1 , J_2 , J_3

Схематичное изображение волчка



4 независимых первых интеграла системы:

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$f_2 = x_1 J_1 + x_2 J_2 + x_3 J_3$$

$$H = J_1^2 + J_2^2 + 2\,J_3^2 + 2\,x_1$$

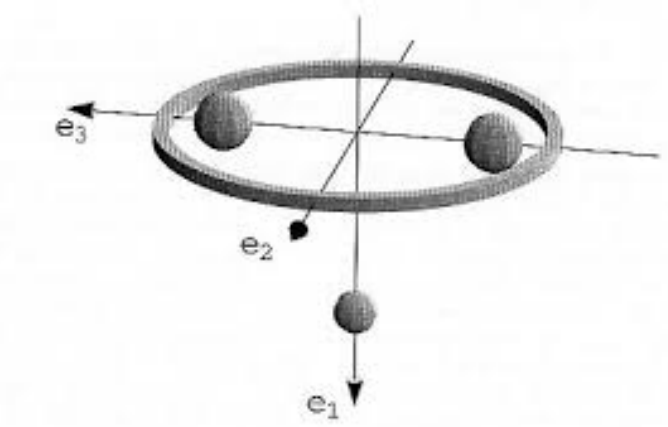
энергия H

$$K = (J_1^2 - J_2^2 - 2\,x_1)^2 + (2\,J_1 J_2 + 2x_2)^2$$

Движение твердого тела

- **Твердое тело**: расстояния между точками постоянны при движении
- **Интегрируемость**: у **интегрируемой системы** (**ИС**; движение мат. точек, тел итп) есть функции, которые сохраняются с течением времени (законы сохранения: например, энергии)
- Задача **Ковалевской:** в R^3 есть твердое тело с закрепленной точкой, действует сила тяжести) волчок в R^3 задается *шестью* числами: 3 координаты x_1 , x_2 , x_3 и 3 скорости J_1 , J_2 , J_3

Схематичное изображение волчка



4 независимых первых интеграла системы:

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$f_2 = x_1 J_1 + x_2 J_2 + x_3 J_3$$

$$H = J_1^2 + J_2^2 + 2\,J_3^2 + 2\,x_1$$

энергия H

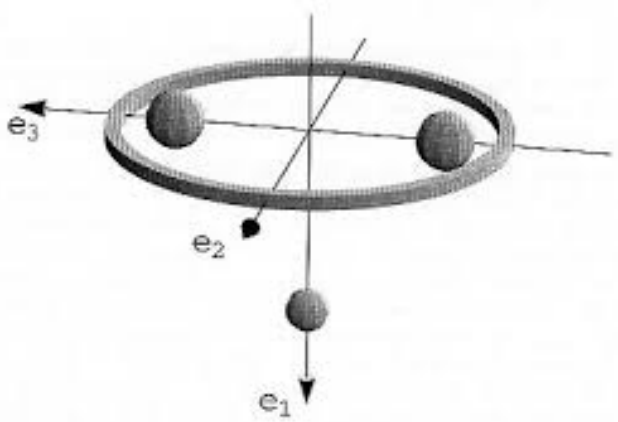
$$K = (J_1^2 - J_2^2 - 2\,x_1)^2 + (2\,J_1 J_2 + 2x_2)^2$$

- Много *похожих* **ИС:** есть проще, есть сложнее: Эйлера, Лагранжа, Клебша…

Движение твердого тела

- **Твердое тело**: расстояния между точками постоянны при движении
- **Интегрируемость**: у **интегрируемой системы** (**ИС**; движение мат. точек, тел итп) есть функции, которые сохраняются с течением времени (законы сохранения: например, энергии)
- Задача **Ковалевской:** в R^3 есть твердое тело с закрепленной точкой, действует сила тяжести) волчок в R^3 задается *шестью* числами: 3 координаты x_1 , x_2 , x_3 и 3 скорости J_1 , J_2 , J_3

Схематичное изображение волчка



4 независимых первых интеграла системы:

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$f_2 = x_1 J_1 + x_2 J_2 + x_3 J_3$$

$$H = J_1^2 + J_2^2 + 2\,J_3^2 + 2\,x_1$$

энергия H

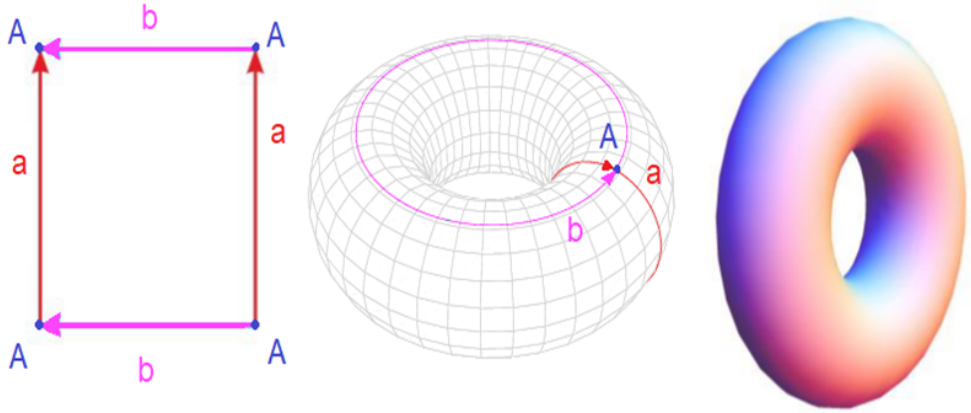
$$K = (J_1^2 - J_2^2 - 2\,x_1)^2 + (2\,J_1 J_2 + 2x_2)^2$$

- **Вопрос**: как устроен совместный уровень: множество в R^6, где $f_1 = a$, $f_2 = b$, $H = h$, $K = k$

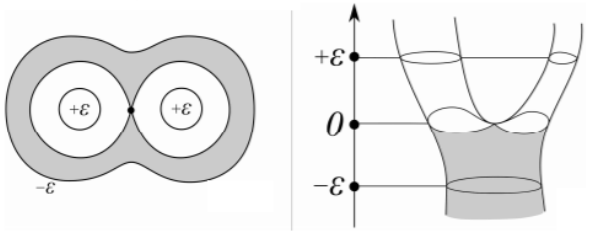
Ответ: все они компактны (т.е. ограничены), и почти все связные уровни – двумерные торы

Двумерный тор (напоминание)

- Поверхность «бублика», или склейка квадрата по его сторонам.
- Он же – произведение двух окружностей $S^1 \times S^1$
- Центральный объект в теории интегрируемых гамильтоновых систем: -
  - почти все неособые совместные уровни интегралов – торы
  - а особые – их перестройки торов (1-мерный аналог: $S^1 \to$ "8" $\to 2S^1$



тор -- типичный неособый уровень интегрируемой системы



Простейшая седловая бифуркация системы на R^2

особый уровень функции $g = 0$ -- восьмерка

и близкие неособые окружности

одна S^1 при $g<0$ (до биф-ции), две S^1 при $g>0$ (после)

Справа: отложим по оси z в R^3 значение ф-ии g(x,y)

Система Ковалевской в псевдоевклидовом простр-ве

- Псевдоевклидово R_1^3: $(A,B) = A_1B_1 + A_2B_2 - A_3B_3$
- Функции (3 первых интеграла) меняются (и |x|,|J| не огранич. при $f_1 = a,\ H = h$)
- $f_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$, $f_2 = x_1J_1 + x_2J_2 - x_3J_3$ $H = J_1^2 + J_2^2 - 2J_3^2 + 2x_1$

  интеграл $K = (J_1^2 - J_2^2 - 2x_1)^2 + (2J_1J_2 + 2x_2)^2$ сохранился:
- **Ответ** на непростой вопрос о компактности (ограниченности) совместного уровня *X функций* $f_1 = a, f_2 = b, H = h, K = k$ дают 2 простых соображения

Система Ковалевской в псевдоевклидовом простр-ве

- Псевдоевклидово R^3_1: $(A,B) = A_1B_1 + A_2B_2 - A_3B_3$
- Функции (3 первых интеграла) меняются (и |x|,|J| не огранич. при $f_1 = a,\ H = h$),
- $f_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$, $f_2 = x_1J_1 + x_2J_2 - x_3J_3$, $H = J_1^2 + J_2^2 - 2J_3^2 + 2x_1$

  интеграл $K = (J_1^2 - J_2^2 - 2x_1)^2 + (2J_1J_2 + 2x_2)^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$ сохранился
- **Ответ** на непростой вопрос о компактности (ограниченности) совместного уровня *X функций* $f_1 = a, f_2 = b, H = h, K = k$ дают 2 простых соображения:
- **1.** перейдем к полярным координатам: $J_1 = r\cos\beta, J_2 = r\sin\beta$,

  $\xi_1 = \sqrt{K}\cos\alpha,\ \xi_2 = \sqrt{K}\sin\alpha$. Замена x_1, x_2 от ξ_1, ξ_2 биективна (т.к. линейна)

Система Ковалевской в псевдоевклидовом простр-ве

- Псевдоевклидово R^3_1: $(A,B) = A_1B_1 + A_2B_2 - A_3B_3$
- Функции (3 первых интеграла) меняются (и |x|,|J| не огранич. при $f_1 = a,\ H = h$),
- $f_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2\ ,\ \ f_2 = x_1J_1 + x_2J_2 - x_3J_3,\ \ H = J_1^2 + J_2^2 - 2J_3^2 + 2x_1$

  интеграл $K = (J_1^2 - J_2^2 - 2x_1)^2 + (2J_1J_2 + 2x_2)^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$ сохранился
- **Ответ** на непростой вопрос о компактности (ограниченности) совместного уровня *X функций* $f_1 = a, f_2 = b, H = h, K = k$ дают 2 простых соображения:
- **1.** перейдем к полярным координатам: $J_1 = r\cos\beta, J_2 = r\sin\beta$,

  $\xi_1 = \sqrt{K}\cos\alpha,\ \xi_2 = \sqrt{K}\sin\alpha$ и линейная замена x_1, x_2 от ξ_1, ξ_2
- **Свели к вопросу**: ограничена ли в $R^3(r,\alpha,\beta)$ поверхность *f(r, α, β) = 0* для **f(r)** – многочлен по **r** (deg f = 4) с переменными коэф-ми от **(α, β)**, меняющимися на торе (квадрате $[\mathbf{0}, \mathbf{2\pi}]$ x$[\mathbf{0}, \mathbf{2\pi}]$ = **T**). Свели задачу к поверхности нулей **одного** многочлена

Система Ковалевской в псевдоевклидовом простр-ве

- Псевдоевклидово R^3_1: $(A,B) = A_1B_1 + A_2B_2 - A_3B_3$
- Функции (3 первых интеграла) меняются (и |x|,|J| не огранич. при $f_1 = a,\ H = h$),
- $f_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$, $f_2 = x_1J_1 + x_2J_2 - x_3J_3$, $H = J_1^2 + J_2^2 - 2J_3^2 + 2x_1$

  интеграл $K = (J_1^2 - J_2^2 - 2x_1)^2 + (2J_1J_2 + 2x_2)^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$ сохранился
- **Ответ** на непростой вопрос о компактности (ограниченности) совместного уровня *X функций* $f_1 = a, f_2 = b, H = h, K = k$ дают 2 простых соображения:
- **1.** переход к полярным координатам: $J_1 = r\cos\beta, J_2 = r\sin\beta$

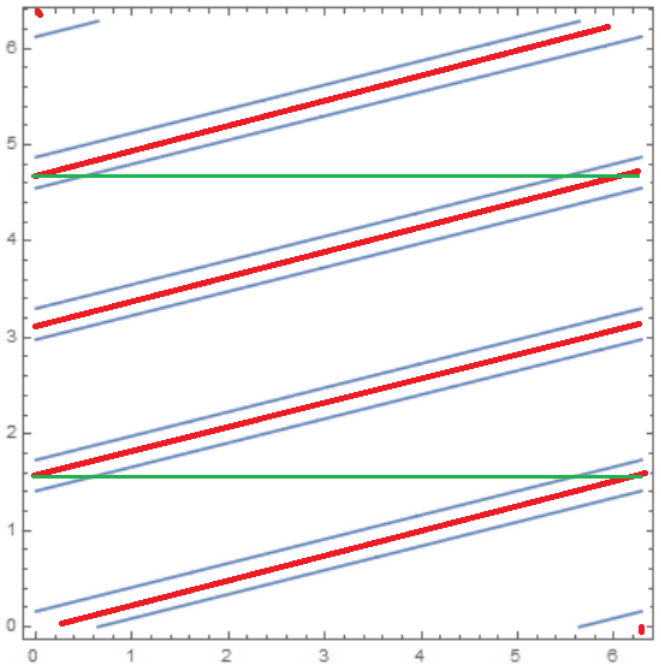
  $\xi_1 = \sqrt{K}\cos\alpha,\ \xi_2 = \sqrt{K}\sin\alpha$ и линейная замена x_1, x_2 от ξ_1, ξ_2.
- **Свели к вопросу**: ограничена ли в $R^3(r,\alpha,\beta)$ поверхность *f(r, α, β) = 0* для **f(r)** – многочл. по **r** (deg f = 4) с переменными коэф-ми (непр. по **(α, β)**), меняются на торе (квадрате $[\mathbf{0}, \mathbf{2\pi}]$ **x**$[\mathbf{0}, \mathbf{2\pi}]$ = **T**). Свели задачу к поверхности нулей **одного** многочлена
- **2.** $r_m \to \infty$ при $f(r_m, \alpha_m, \beta_m)$=0 $\Rightarrow$ у ф-и *f* **меньше** корней в т.$(\alpha_\infty, \beta_\infty) \in T \Rightarrow$ там падает *deg f*: if на всем *T* старш.коэф.f >ε, то корни огр-ны (непр. ф-и (α, β) на компакте *T)*

Где на торе-квадрате $[0,2\pi]^2$ падает *deg* многочлена *f(r)*

Старший член f(r) при r^4: $-2h+\sqrt{K}\cos(\alpha-4\beta)$

Коэффициент f(r) при r^3 : $b\cos\beta$

β



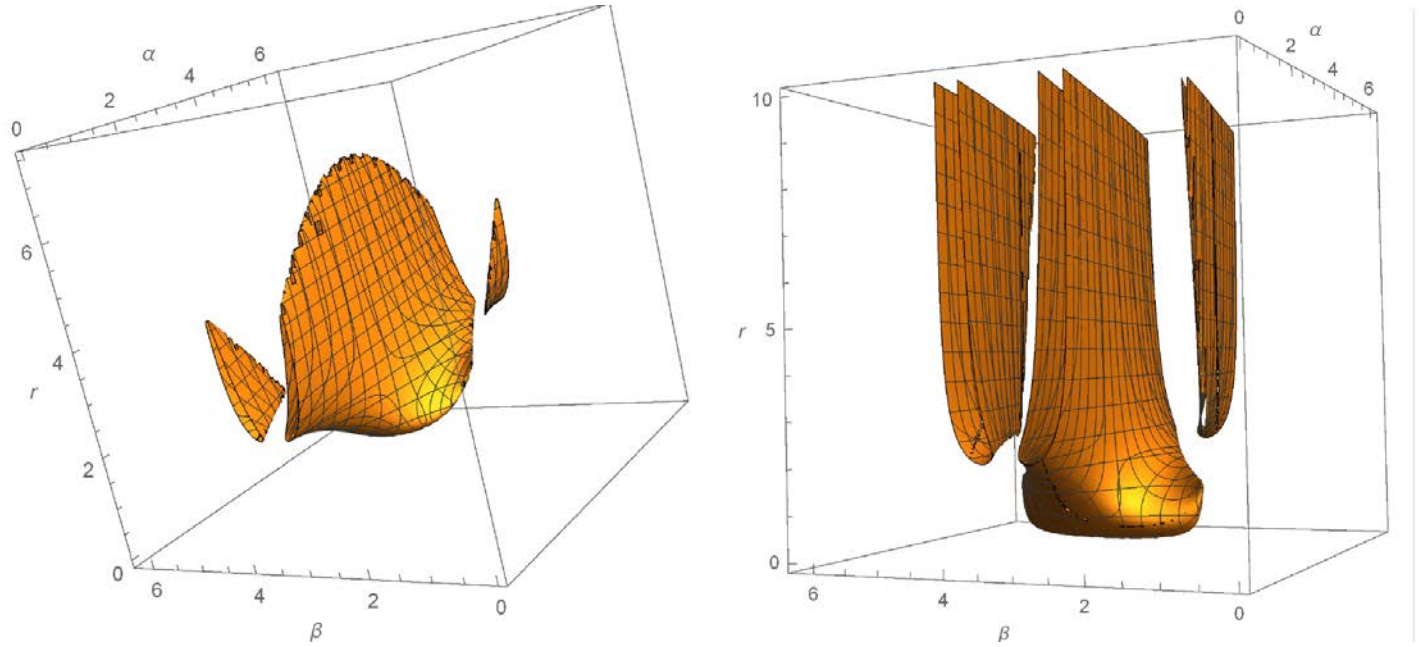
α

Ответ: *критерий компактности совместного уровня*

- $K< H^2 \to \deg f \equiv 4$ на $[0,2\pi]^2$ не падает. Уровень *X* **компактен** (ограничен и замкнут).
- При K ≥ 4H^2: точки падения степени мн-на f есть. При K= это красная линия, при K> две синих линии При b≠0 (не вблизи зеленой): падение будет ровно на 1. Уровень *X* **некомпактен** (после несложной дополнительной проверки: когда из падения степени следует неограниченность поверхности и уровня *X*)

- **Итог:** при угловым моменте $f_2 = b \neq 0$ простыми средствами получен полный ответ

Вид совместного уровня X в $R\text{^}3(\alpha, \beta, r)$



- Визуализация в системе Wolfram Mathematica
  (для наглядности и проверки полученного ответа)

Лекторий “Современная геометрия”

В этих лекциях мы подробнее рассказываем о наших задачах, методах, а также их приложениях к другим областям математики, к физике, механике, биологии, IT

Видео и материалы лежат на сайте кафедры dfgm.math.msu.su,
нашей группе Вконтакте vk.com/diffgeometry и на гугл-диске goo.su/4EsV

- Лекция 1: А.Т.Фоменко, В.В.Ведюшкина
- Лекция 2: А.О.Иванов, А.А.Тужилин,
- Лекция 3: Е.А.Кудрявцева,А.Ю.Коняев, А.А.Ошемков
- Лекция 4: А.Б.Жеглов, В.В.Пржиялковский,
- Лекция 5: Д.П.Ильютко, И.М.Никонов, Д.А.Федосеев
- Лекция 6: Ф.Ю.Попеленский, Г.И.Шарыгин
- Лекция 7: А.И.Шафаревич, А.А.Толченников (to appear)
- Лекция 8: Г.В.Носовский, А.Ю.Чекунов (to appear)