Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

КУРСОВАЯ РАБОТА

Вычисление расстояния Громова–Хаусдорфа до некоторых дискретных решёток в $\mathbb{R}^n$
Computing Gromov–Hausdorff distance to certain discrete lattices in $\mathbb{R}^n$

Выполнил студент 5 курса

Михайлов И. Н.

Научный руководитель

д.ф.м.н., проф. А. А. Тужилин

Москва 2026

1. Введение

Расстояние Громова–Хаусдорфа — важная конструкция метрической геометрии, которая позволяет определить обобщённую псевдометрику на классе всех метрических пространств. Впервые это расстояние было введено Дэвидом Эдвардсом в 1975 году ([9]) и позднее стало знаменитым благодаря работе [10]. С историческими подробностями можно познакомиться в работе [17].

В работе [16] показано, что для произвольного подмножества X евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ условия $d_H(X,\mathbb{R}^n) < \infty$ и $d_{GH}(X,\mathbb{R}^n) < \infty$ эквивалентны. Поскольку расстояние Громова–Хаусдорфа до подмножества метрического пространства всегда не превосходит соответствующего расстояния Хаусдорфа, возникает серия естественных вопросов, среди которых можно выделить два ключевых:

1) для каких подмножеств метрического пространства (например, конечномерного нормированного пространства) достигается равенство расстояний Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа?

2) существуют ли оценки противоположного типа, то есть расстояния Хаусдорфа через расстояние Громова–Хаусдорфа сверху?

В работах [3], [12] показано, что равенство расстояний Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа достигается для большого количества подмножеств метрических деревьев. В частности, по теореме 9.2 из [12] для произвольного подмножества $A \subset \mathbb{R}$ с евклидовой метрикой выполнено равенство $d_{GH}(X,\mathbb{R}) = d_H(X,\mathbb{R})$. Также в работе [3] ставится вопрос о поиске многомерных примеров пространств и их достаточно плотных подмножеств, в которых достигается равенство расстояний Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа.

В работе [2] получен важный результат в направлении второго вопроса: показано, что для достаточно плотного подмножества X замкнутого риманова многообразия M выполнено неравенство $d_H(X,M) \le 2d_{GH}(X,M)$ (см. теорему 1a [2]). Данный результат обобщается в работе [1] до оценки такого типа в произвольном конечномерном нормированном пространстве, а в случае евклидовой и max-норм доказывается усиленное неравенство, в котором возникает константа Юнга (см. теорему 4).

В данной работе мы развиваем метод вычисления расстояния Громова–Хаусдорфа между $\mathbb{R}^n$ и некоторыми дискретными решётками в $\mathbb{R}^n$, использующий понятие асимптотической размерности. В качестве приложения мы показываем, что оценки из теоремы 4 достигаются в случае евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ на целочисленной решётке $\mathbb{Z}^2$ (то есть достигается равенство расстояний Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа между ними) и на треугольной решётке с отмеченными центрами (верхняя оценка из теоремы 4). Также в разделе 5 мы строим серию примеров ограниченных метрических пространств, в которых находятся дискретные подмножества, реализующие равенство расстояний Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа.

2. Основные определения и предварительные результаты

В данном разделе мы приводим определения основных используемых конструкций, вводим обозначения, а также формулируем вспомогательные результаты, которые понадобятся нам при доказательстве основных теорем.

2.1. Расстояние Громова–Хаусдорфа

Метрическим пространством называется произвольная пара $(X,\, d_X)$, где X — произвольное множество, $d_X : X \times X \to [0,\, \infty)$ — некоторая метрика на нём, то есть неотрицательная, симметричная функция, удовлетворяющая неравенству треугольника.

Расстояние между произвольными двумя точками x и y некоторого метрического пространства $(X,\, d_X)$, для краткости, мы часто будем обозначать через $|xy|$. Через $U_r^X(a) = \{x \in X : |ax| < r\}$, $B_r^X(a) = \{x \in X : |ax| \le r\}$ обозначим открытый и замкнутый шары с центром в точке a радиуса r в метрическом пространстве X. В тех случаях, когда понятно, в каком метрическом пространстве X рассматриваются шары, мы будем опускать верхний индекс. Для произвольного подмножества $A \subset X$ метрического пространства пусть $U_r(A) = \cup_{a\in A} U_r(a)$ — открытая r-окрестность A. Для непустых подмножеств $A \subset X$, $B \subset X$ положим $d(A,\, B) = \inf\bigl\{|ab| : a \in A,\, b \in B\bigr\}$.

Определение 1. Пусть A и B — непустые подмножества метрического пространства. *Расстоянием по Хаусдорфу* между A и B называется величина

$$d_H(A,\, B) = \inf\bigl\{r > 0 \colon A \subset U_r(B),\, B \subset U_r(A)\bigr\}.$$

Определение 2. Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных X и Y соответственно, назовём *реализацией пары* (X, Y).

Определение 3. *Расстоянием* $d_{GH}(X, Y)$ *по Громову-Хаусдорфу* между X и Y назовём точную нижнюю грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что $d_H(X', Y') \le r$.

Пусть теперь X, Y — непустые множества.

Определение 4. Каждое $\sigma \subset X \times Y$ называется *отношением* между X и Y.

Обозначим через $\mathcal{P}_0(X, Y)$ множество всех непустых отношений между X и Y.
Положим

$$\pi_X\colon X \times Y \to X,\ \pi_X(x, y) = x,$$
$$\pi_Y\colon X \times Y \to Y,\ \pi_Y(x, y) = y.$$

Определение 5. Отношение $R \subset X \times Y$ называется *соответствием*, если $\pi_X|_R$ и $\pi_Y|_R$ сюръективны.

Обозначим $\mathcal{R}(X, Y)$ множество соответствий между X и Y.

Определение 6. Пусть X, Y — метрические пространства, $\sigma \in \mathcal{P}_0(X, Y)$, тогда *искажением* σ называется величина

$$\operatorname{dis}\sigma = \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big|\colon (x, y), (x', y') \in \sigma\Big\}.$$

Предложение 1 ([7])**.** *Для любых метрических пространств* X *и* Y *выполняется равенство*

$$2d_{GH}(X, Y) = \inf\big\{\operatorname{dis} R\colon R \in \mathcal{R}(X, Y)\big\}.$$

Обозначим множество положительных вещественных чисел $\mathbb{R}_{>0}$.

Определение 7. Следуя [6], определим *стабилизатор* метрического пространства X следующим образом:

$$\operatorname{St} X = \big\{\lambda \in \mathbb{R}_{>0}\colon d_{GH}(\lambda X, X) = 0\big\}.$$

2.2. Асимптотическая размерность

В данном разделе n всегда натуральное число. Пусть X — произвольное метрическое пространство X.

Определение 8. Семейство $\mathcal{U}$ подмножеств X называется *равномерно ограниченным*, если существует такая константа $C > 0$, что для каждого подмножества U семейства $\mathcal{U}$ выполнено неравенство $\operatorname{diam} U \le C$.

Определение 9. *Кратностью* или *порядком* открытого покрытия $\mathcal{U}$ топологического пространства T называется наибольшее число пересекающихся в одной точке элементов этого покрытия.

Покрытие $\mathcal{U}$ *вписано* в покрытие $\mathcal{V}$, если для каждого $U \in \mathcal{U}$ найдётся такой $V \in \mathcal{V}$, что $U \subset V$.

Определение 10. Говорят, что *асимптотическая размерность пространства* X *не превосходит* n, и пишут $\operatorname{asdim} X \le n$, если для любого равномерно ограниченного открытого покрытия $\mathcal{V}$ пространства X найдётся такое равномерно ограниченное открытое покрытие $\mathcal{U}$ пространства X кратности $\le (n+1)$, что покрытие $\mathcal{V}$ вписано в $\mathcal{U}$. По определению $\operatorname{asdim} X = n$, если и только если $\operatorname{asdim} X \le n$ и $\operatorname{asdim} X \not\le n-1$.

Нам понадобится равносильное определение асимптотической размерности [5][Theorem 19 (2), p.7].

Определение 11. Семейство $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ подмножеств метрического пространства X называется *r-разделённым*, если $d(U_\alpha, U_\beta) > r$ для любых возможных индексов $\alpha \ne \beta$.

Определение 12. Условие $\operatorname{asdim} X \le n$ выполняется, если для любого положительного $r < \infty$ существуют r-разделённые семейства $\mathcal{U}^0, \dots \mathcal{U}^n$ равномерно ограниченных подмножеств X, образующие покрытие X.

Отметим, что, поскольку r в определении асимптотической размерности можно выбирать сколь угодно большим, достаточно рассматривать нестрого r-разделённые семейства подмножеств.

Теорема 1 ([15])**.** *Выполнено равенство* $\operatorname{asdim} \mathbb{R}^n = n$.

Поскольку любые две нормы на конечномерном векторном пространстве эквивалентны, получаем

Теорема 2. *Для произвольного* n*-мерного нормированного пространства* X *выполнено* $\operatorname{asdim} X = n$.

2.3. Ультраметризация

Определение 13. Метрическое пространство $(X,\, d_X)$ называется *ультраметрическим*, если и только если d_X удовлетворяет усиленному, ультраметрическому неравенству треугольника: для любых точек x, y, z пространства X выполнено $d_X(x,\, z) \le \max\bigl\{d_X(x,\, y),\, d_X(y,\, z)\bigr\}$.

Ультраметрика d_X, для которой не выполняется условие положительной определённости (то есть $d_X(x, y)$ бывает нулевым для $x \ne y$) называется *псевдоультраметрикой*, а соответствующее пространство — *псевдоультраметрическим.*

Следующая конструкция появилась в работах Кантора (подробности см. в [18][с. 312])

Определение 14. Для произвольного метрического пространства $(X,\, d_X)$ рассмотрим псевдоультраметрическое пространство $(X,\, u_X)$, где $u_X \colon X \times X \to \mathbb{R}$ определяется следующим образом

$$(x,\, x') \to u_X(x,\, x') := \inf\left\{\max_{0\le i\le n-1} d_X(x_i,\, x_{i+1})\colon x = x_0,\, \ldots,\, x_n = x' \text{ для некоторого } n \ge 1\right\}.$$

Определим $\mathbf{U}(X)$ как фактор $(X,\, u_X)$ по нулевым расстояниям, то есть по отношению эквивалентности $x \sim x' \iff u_X(x,\, x') = 0$. Пространство $\mathbf{U}(X)$ будем называть *ультраметризацией* пространства X.

Замечание 1. *Вопрос о том, когда u_X является ультраметрикой на исходном пространстве X без дополнительной факторизации по нулевым расстояниям был поставлен в [4]. Полный ответ получен в [13][Theorem 1].*

Определение 15. Пусть X — метрическое пространство. Последовательность точек $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$ в X назовём *цепью* (используется также термин *пунктир*), соединяющей a и b, и ε*-цепью*, соединяющей a и b, если $|x_k x_{k+1}| \le \varepsilon$ для всех $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Пространство X называется *связным по Кантору* ([13]) или *цепносвязным*, если для любых двух точек $x,\, x' \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует ε-цепь в X, соединяющая x и x'.

Замечание 2.

1) *Произвольное линейно связное метрическое пространство является цепносвязным.*

2) *Произвольное метрическое пространство X тогда и только тогда является цепносвязным, когда $\boldsymbol{U}(X) = \Delta_1$.*

Конструкция из определения 14 нужна нам, чтобы сформулировать очень полезную оценку снизу на расстояние Громова–Хаусдорфа между произвольными метрическими пространствами. Впервые эта оценка появилась и была обоснована для конечных метрических пространств в работе [8][Proposition 26], а в [14][Theorem 4] появилась формулировка для ограниченных метрических пространств, которая была использована для вычисления расстояния Громова–Хаусдорфа между окружностью S^1 с геодезической метрикой и множеством вершин правильного n-угольника, вписанного в неё, с индуцированной метрикой. Приведём общую формулировку этого утверждения.

Теорема 3 ([8], [14])**.** *Для любых метрических пространств X и Y выполняется неравенство*

$$d_{GH}(X,\, Y) \ge d_{GH}\bigl(\mathbf{U}(X),\, \mathbf{U}(Y)\bigr).$$

2.4. Константа Юнга

Материалы данного раздела взяты из совместной работы [1].

Пусть X — произвольное непустое ограниченное подмножество метрического пространства Z.

Определение 16. *Чебышевским радиусом* $R(X)$ множества X называется точная нижняя грань положительных чисел r, для которых X принадлежит замкнутому шару $\bar{B}(z; r)$, $z \in Z$:

$$R(X) = \inf\bigl\{r : \exists\, z \in Z,\, X \subset \bar{B}_r(z)\bigr\}.$$

Эквивалентное определение:

$$R(X) = \inf_{z\in Z}\sup_{x\in X} d_Z(z, x).$$

Для метрического пространства Z обозначим $\mathcal{B}_{>0}(Z)$ набор всех его ограниченных подмножеств положительного диаметра. Иначе говоря, $\mathcal{B}_{>0}(Z)$ состоит из всех ограниченных подмножеств $X \subset Z$, содержащих по крайней мере 2 различные точки. **В данном разделе мы всегда предполагаем, что $\mathcal{B}_{>0}(Z) \neq \emptyset$, то есть пространство Z содержит по крайней мере 2 различные точки.**

Определение 17. *Константной Юнга $J(Z)$ метрического пространства Z* называется величина

$$J(Z) = \sup_{X \in \mathcal{B}_{>0}(Z)} \frac{R(X)}{\operatorname{diam} X}.$$

То есть для произвольного $X \in \mathcal{B}_{>0}(Z)$ выполняется неравенство $R(X) \leq J(Z) \operatorname{diam} X$.

Отметим, что для произвольного метрического пространства Z выполняются неравенства $1/2 \leq J(Z) \leq 1$. Первое следует из неравенства треугольника, а второе вытекает из того факта, что шар радиуса $\operatorname{diam} X$ с центром в произвольной точке множества X содержит X целиком.

Для нормированного пространства V в силу однородности можно дать эквивалентное определение константы Юнга следующим образом. Обозначим $\mathcal{P}_1(V)$ множество всех подмножеств $X \subset V$, для которых $\operatorname{diam} X = 1$. Тогда

$$J(V) = \sup_{X \in \mathcal{P}_1(V)} R(X).$$

Определение 18. Пусть V — конечномерное нормированное пространство V. Будем говорить, что его норма *удовлетворяет свойству пересечения*, если для произвольного $r > 0$ найдётся такое $t > 0$, что для каждого $t' > t$ пересечение $V \setminus \bar{B}(0; t')$ с пересечением конечного числа шаров $\big\{B(x_i; r_i) : r_i \leq r\big\}$ либо пусто, либо стягиваемо (в частеости, связно).

В [1] показано, что свойством пересечения обладают евклидова и max-норма на $\mathbb{R}^n$ для произвольного n.

Приведём ключевую теорему из работы [1].

Теорема 4 ([1])**.** *Пусть V — конечномерное нормированное пространство,* $\dim V \geq 1$, $J \coloneqq J(V)$ *— константа Юнга V, а $X \subset V$ таково, что $d_H(X, V) < \infty$. Предположим, что V удовлетворяет свойству пересечения, тогда $d_{GH}(X, V) \geq \dfrac{1}{2J} d_H(X, V)$.*

Следствие 1 ([1])**.** *Для произвольного конечномерного векторного пространства V, снабжённого* max*-нормой, и произвольного его подмножества X, для которого $d_H(X, V) < \infty$, выполняется равенство $d_{GH}(X, V) = d_H(X, V)$.*

3. Новая оценка на d_{GH}

Теорема 5. *Пусть X, A — метрические пространства, причём* $\operatorname{asdim} X \geq n$, $\operatorname{St} X \neq \{e\}$. *Предположим, что существуют такие r-разделённые семейства $\mathcal{U}^1, \dots, \mathcal{U}^k$, $1 \leq k \leq n$ равномерно ограниченных подмножеств A, что $\cup_i \mathcal{U}^i$ покрывает A. Тогда $d_{GH}(A, X) \geq \frac{r}{2}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное соответствие $R \in \mathcal{R}(A, X)$. Предположим, что $\operatorname{dis} R < r$. Тогда существует $\varepsilon > 0$, для которого $\operatorname{dis} R < r - \varepsilon$.

Пусть $\mathcal{U}^i = \{U^i_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. Положим $V^i_\alpha = R(U^i_\alpha)$, $\mathcal{V}^i = \{V^i_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$.

Поскольку семейства $\mathcal{U}^i$, $i = 1, \dots, k$ равномерно ограниченны, найдётся такая константа $C > 0$, что $\operatorname{diam} U^i_\alpha < C$ при всех возможных значениях индексов i и α. Так как $\operatorname{dis} R < r - \varepsilon$, получаем, что $\operatorname{diam} V^i_\alpha < C + r - \varepsilon$. Значит, семейства $\mathcal{V}^i$ подмножеств X также равномерно ограниченны.

По предположению для всяких $\alpha \neq \beta$ и i выполнено неравенство $d(U^i_\alpha, U^i_\beta) > r$. Поскольку $\operatorname{dis} R < r - \varepsilon$, получаем, что $d(V^i_\alpha, V^i_\beta) > \varepsilon$. Следовательно, семейства $\mathcal{V}^1, \dots, \mathcal{V}^k$ являются ε-разделёнными в X.

Поскольку R — соответствие, а семейства $\mathcal{U}^i$, $i = 1, \dots, k$ образуют покрытие A, получаем, что семейства $\mathcal{V}^i$, $i = 1, \dots, k$ образуют покрытие X.

Так как $\operatorname{St} X \neq \{e\}$, найдётся $\lambda \in \operatorname{St} X$, $\lambda > 1$. Рассмотрим семейства $\lambda^n \mathcal{V}^1, \dots \lambda^n \mathcal{V}^k$ подмножеств λX, $n \in \mathbb{N}$. Эти семейства $(\lambda^n \varepsilon)$-разделённые и состоят из подмножеств, чьи диаметры не превосходят $\lambda^n(C + r - \varepsilon)$. Поскольку $d_{GH}(X, \lambda X) = 0$, найдётся соответствие $\tilde{R} \in \mathcal{R}(\lambda X, X)$ с $\operatorname{dis} R < \lambda^n \varepsilon/2$. Положим $W^i_\alpha = \tilde{R}(V^i_\alpha) \subset X$, $\mathcal{W}^i = \{W^i_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. Тогда каждое из семейств $\mathcal{W}^i$ является $\lambda^n \varepsilon/2$-разделённым и состоит из подмножеств, чьи диаметры не превосходят $\lambda^2(C + r - \varepsilon/2)$. Поскольку $\tilde{R}$ — соответствие, семейства $\mathcal{W}^i$ образуют покрытие X.

Заметим, что в силу произвольности $n \in \mathbb{N}$ мы показали, что

$$\operatorname{asdim} X \leq k - 1 < n,$$

по определению 12. Противоречие с условием $\operatorname{asdim} X \geq n$. $\square$

4. Расстояние между $\mathbb{R}^2$ и некоторыми ε-сетями в $\mathbb{R}^2$

В данном разделе мы покажем, что оценки из теоремы 4 достигаются в случае $\mathbb{R}^2$ с евклидовой метрикой.

Пример 1. Покажем, что $d_H(\mathbb{Z}^2, \mathbb{R}^2) = d_{GH}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{R}^2)$.

Так как $d_{GH}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{R}^2) \leq d_H(\mathbb{Z}^2, \mathbb{R}^2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, достаточно доказать, что для произвольного соответствия $R \in \mathcal{R}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{R}^2)$ выполненяется неравенство $\operatorname{dis} R \geq \sqrt{2}$.

Рассмотрим шахматную раскраску $\mathbb{Z}^2$ (см. рис. 1).

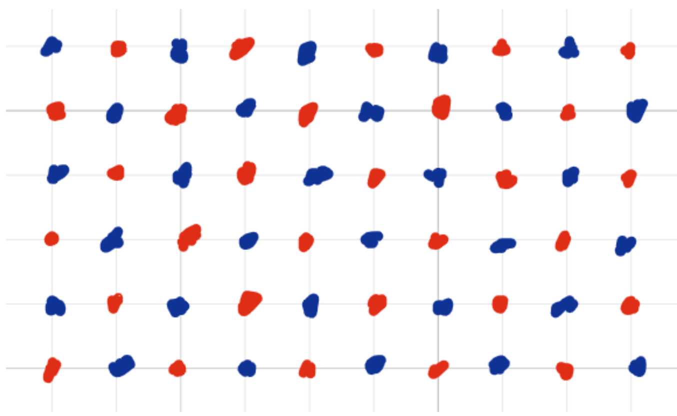

Рис. 1.

Заметим, что семейство красных точек и семейство синих точек оба являются $\sqrt{2}$-разделёнными. Поэтому, применяя теорему 5 для $X = \mathbb{R}^2$, $A = \mathbb{Z}^2$, получаем, что $d_{GH}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{R}^2) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит, $d_{GH}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{R}^2) = d_H(\mathbb{Z}^2, \mathbb{R}^2)$, что и требовалось доказать.

Отметим, что данный приём работает не только для дискретных решёток.

Пример 2. Рассмотрим следующее подмножество $A \subset \mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \cup_{n \in \mathbb{Z}} \{(n, y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Легко видеть, что $d_{GH}(A, \mathbb{R}^2) \leq d_H(A, \mathbb{R}^2) = \frac{1}{2}$.

Покроем A двумя 1-разделёнными равномерно ограниченными семействами подмножеств (см. рис. 2). Тогда по теореме 5 имеет место неравенство $d_{GH}(A, \mathbb{R}^2) \geq \frac{1}{2}$, откуда следует, что $d_{GH}(A, \mathbb{R}^2) = d_H(A, \mathbb{R}^2) = \frac{1}{2}$.

Пример 3. Покажем, что для треугольной решётки (с отмеченными центрами треугольников решётки — см. рис. 3) T на плоскости $\mathbb{R}^2$ с евклидовой нормой (длина стороны треугольника решётки равна 1) выполняется равенство $\frac{2}{\sqrt{3}} d_{GH}(T, \mathbb{R}^2) = d_H(T, \mathbb{R}^2)$.

Применяя теорему 3, получим, что $d_{GH}(T, \mathbb{R}^2) \geq d_{GH}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\Delta_{\mathbb{N}}, \Delta_1\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Здесь Δ_1 — одноточечное метрическое пространство, а $\Delta_{\mathbb{N}}$ — счётный симплекс диаметра 1.

Обратно, построим соответствие R_0, при котором каждой точке каждого равнобедренного треугольника с вершинами в двух вершинах треугольника решётки и его центре ставится в соответствие её ортогональная проекция на его основание. При таком соответствии расстояние между произвольной точкой и любой точкой, ей соответствующей, не превосходит $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Тем самым искажение данного соответствия не превосходит $\frac{\sqrt{3}}{3}$, откуда вытекает, что $d_{GH}(T, \mathbb{R}^2) \leq \frac{\sqrt{3}}{6}$. То есть $d_{GH}(T, \mathbb{R}^2) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Поскольку расстояние Хаусдорфа между T и $\mathbb{R}^2$ равно радиусу описанной окружности треугольника с вершинами в двух центрах соседних треугольников решётки T и их общей вершине, получаем, что $d_H(T, \mathbb{R}^2) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$. Тем самым, $d_H(T, \mathbb{R}^2) = \frac{2}{\sqrt{3}} d_{GH}(T, \mathbb{R}^2)$, что и реализует оценку из теоремы 4.

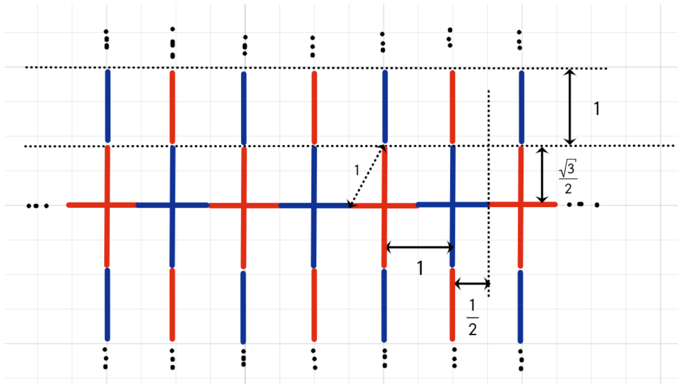

Рис. 2.

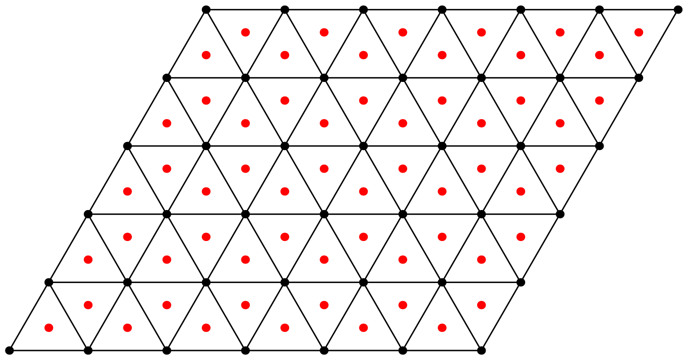

Рис. 3.

5. Расстояние до решёток в некоторых ограниченных метрических пространствах

5.1. Случай плоского тора

В данном разделе мы покажем, как аргумент из теоремы 5 можно адаптировать, для того чтобы построить решётку на плоском торе, для которой реализуется равенство расстояний Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа.

Положим $P = \big\{(x, y)\colon 0 \le x \le 2n,\ 0 \le y \le 2m\big\} \subset \mathbb{R}^2$, где $m, n \ge 3$. Склеивая противоположные стороны прямоугольника P естественным образом, получим плоский тор T. Пусть $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to T$ — естественная проекция. Отметим, что данное отображение является локально изометричным накрытием. Положим $\pi(\mathbb{Z}) = W \subset T$.

Теорема 6. *Выполняется равенство $d_{GH}(T, W) = d_H(T, W)$.*

Доказательство. Во-первых, $d_H(T, W) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Предположим, что доказываемое равенство неверно. Тогда существует соответствие $R \in \mathcal{R}(W, T)$ с $\operatorname{dis} R < \sqrt{2}$. Выберем $\varepsilon > 0$ настолько маленьким, чтобы оно удовлетворяло двум свойствам. Во-первых, $\operatorname{dis} R < \sqrt{2} - \varepsilon$. Во-вторых, для произвольной точки $p \in T$, выполнено $\pi^{-1}\big(B_\varepsilon(p)\big) = \sqcup_i B_i$, причём ограничение $\pi\colon B_i \to B_\varepsilon(p)$ является изометрией для каждого i. Отметим, что для выполнения второго условия достаточно выбрать $\varepsilon < \min\big\{\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\big\}$.

Рассмотрим шахматную раскраску W в два цвета (красный и синий). Обозначим красные точки x_i, $i = 1, \ldots 2mn$, и синие точки y_i, $1 \le i \le 2mn$. Определим семейство $\tilde{\mathcal{U}}^0$ всех одноточечных красных подмножеств $\{x_i\}$ и семейство $\tilde{\mathcal{U}}^1$ всех одноточечных синих подмножеств $\{y_i\}$. Тогда семейства $\tilde{\mathcal{U}}^0$ и $\tilde{\mathcal{U}}^1$ образуют покрытие W. Положим $U_i^0 = R(x_i)$, $U_i^1 = R(y_i)$. Тогда пусть $\mathcal{U}^0$ — семейство всех подмножеств U_i^0, а $\mathcal{U}^1$ — семейство всех подмножеств U_i^1. Поскольку R — соответствие, семейства $\mathcal{U}^0$, $\mathcal{U}^1$ образуют покрытие T. Так как $\tilde{\mathcal{U}}^0$ и $\tilde{\mathcal{U}}^1$ являются (нестрого) $\sqrt{2}$-разделёнными и $\operatorname{dis} R < \sqrt{2} - \varepsilon$, семейства $\mathcal{U}^0$ и $\mathcal{U}^1$ являются ε-разделёнными.

Для произвольного U_i^0 имеем $U_i^0 = R(x_i)$, причём $\operatorname{dis} R < \sqrt{2} - \varepsilon$, следовательно, $\operatorname{diam} U_0^i < \sqrt{2} - \varepsilon < \min\big\{\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\big\}$. Тогда в силу выбора ε получаем, что $\pi^{-1}(U_i^0) = \sqcup_i B_i$ и $\pi\colon B_i \to U_i^0$ является изометрией. Заметим, что для всяких $i \neq j$, B_j является образом B_i при параллельном переносе на некоторый вектор v вида $(2nk, 2ml)$, $k, l \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$d(B_i, B_j) = \inf\big\{\|x-y\|\colon x \in B_i,\ y \in B_j\big\} = \inf\big\{\|x-x'-v\|\colon x, x' \in B_i\big\} \geq \|v\| - \operatorname{diam} B_i \geq \min\{2n, 2m\} - \sqrt{2} > \varepsilon.$$

Рассмотрим семейство $\mathcal{V}^0$ всех подмножеств $B \subset \mathbb{R}^2$, для которых найдётся индекс i, для которого ограничение $\pi\colon B \to U_i^0$ является изометрией. Мы уже показали, что если оба отображения $\pi\colon B_1 \to U_i^0$ и $\pi\colon B_2 \to U_i^0$ являются изометриями, то $d(B_1, B_2) \geq \varepsilon$. Рассмотрим теперь ограничения $\pi\colon B_1 \to U_i^0$ и $\pi\colon B_2 \to U_j^0$, являющиеся изометриями. Заметим, что и для них выполняется $d(B_1, B_2) \geq \varepsilon$. Действительно, в противном случае найдутся точки $p \in B_1$, $q \in B_2$, для которых $|pq| \leq \varepsilon$. В силу выбора ε отсюда вытекает, что $|\pi(p)\pi(q)| = |pq| \leq \varepsilon$, что противоречит ε-разделённости U_i^0 и U_j^0 в T.

Таким образом, мы построили семейство $\mathcal{V}^0$ равномерно ограниченных (константой $\sqrt{2}$) подмножеств $\mathbb{R}^2$, являющееся ε-разделённым. Аналогично построим семейство $\mathcal{V}^1$ равномерно ограниченных подмножеств $\mathbb{R}^2$ по множествам U_i^1. Заметим, что $\mathcal{V}^0$ и $\mathcal{V}^1$ образуют покрытие $\mathbb{R}^2$.

Теперь достаточно получить противоречие с тем, что $\operatorname{asdim} \mathbb{R}^2$, рассматривая семейства $\lambda\mathcal{V}^0$, $\lambda\mathcal{V}^1$ для достаточно больших λ, как в доказательстве теоремы 5.

□

5.2. Решётки в ограниченных областях $\mathbb{R}^n$ в max-нормой

Наконец, приведём способ строить решётки в некоторых ограниченных областях $\mathbb{R}^n$, для которых расстояния Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа до всей области совпадают, не использующий асимптотическую размерность.

Рассмотрим $\mathbb{R}^n$ с произвольной нормой $\|\cdot\|$. Выберем произвольное непустое подмножество $V \subset \mathbb{R}^n$. Также для произвольного непустого подмножества $X \subset \mathbb{R}^n$, введём обозначение $\tilde{X} = \{x + v\colon x \in X,\ v \in V\}$.

Зафиксируем ограниченное подмножество I, для которого $\mathbb{R}^n \subset \tilde{I}$, и непустое подмножество $X \subset I$.

Теорема 7. *Предположим, что*

$$d_H(X, I) = d_H(\tilde{X}, \mathbb{R}^n), \quad d_{GH}(\tilde{X}, \mathbb{R}^n) = d_H(\tilde{X}, \mathbb{R}^n).$$

Тогда $d_{GH}(X, I) = d_H(X, I)$.

Доказательство. 1) Предположим, что доказываемое равенство неверно. Тогда существует соответствие $R \in \mathcal{R}(X, I)$ с $\operatorname{dis} R \leq 2d_H(X, I) - \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

2) Определим соответствие $\tilde{R} = \big\{(x + v, y + v)\colon v \in V,\ (x, y \in R)\big\} \in \mathcal{R}(\tilde{X}, \mathbb{R}^n)$ (Его проекция на $\mathbb{R}^n$ сюръективна, поскольку $\mathbb{R}^n \subset \tilde{I}$).

3) Чтобы оценить искажение соответствия $\tilde{R}$, заметим, что для расстояния между парами точек $(x_1 + a, x_2 + b)$ и $(y_1 + a, y_2 + b)$, где $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in \mathbb{I}$, $a, b \in V$ выполняется

$$\Big|\big\|x_1 + a - x_2 - b\big\| - \big\|y_1 + a - y_2 - b\big\|\Big| = \Big|\big\|(x_1 - x_2) + (a - b)\big\| - \big\|(y_1 - y_2) + (a - b)\big\|\Big| \leq$$
$$\leq \Big|\big\|x_1 - x_2\big\| - \big\|y_1 - y_2\big\|\Big| \leq \operatorname{dis} R < 2d_H(X, \mathbb{I}) - \varepsilon.$$

4) Следовательно, получаем, что

$$d_{GH}(\tilde{X}, \mathbb{R}^n) \leq d_{GH}(X, I) < d_H(X, I) - \frac{\varepsilon}{2} = d_H(\tilde{X}, \mathbb{R}^n) - \frac{\varepsilon}{2} = d_{GH}(\tilde{X}, \mathbb{R}^n) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Противоречие. □

Рассмотрим $\mathbb{R}^n$, наделённое max-нормой $\|\cdot\|_\infty$.

Следствие 2. *Рассмотрим произвольное подмножество $X \subset \mathbb{I} = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$, для которого существует такая точка $i \in \mathbb{I}$, что $d(i, X) = d_H(X, \mathbb{I}) < d(i, \partial\mathbb{I})$. Тогда $d_{GH}(X, \mathbb{I}) = d_H(X, \mathbb{I})$.*

Доказательство. По теореме 7 достаточно проверить, что для $\tilde{X} = \{x + z\colon x \in X, v \in \mathbb{Z}^2\}$ выполнено равенство $d_H(\tilde{X}, \mathbb{R}^2) = d_H(X, \mathbb{I})$, а также $d_{GH}(\tilde{X}, \mathbb{R}^2) = d_H(\tilde{X}, \mathbb{R}^2)$.

Последнее равенство выполнено в силу следствия 1.

Обоснуем первое равенство.

По построению выполняется неравенство $d_H(\tilde{X},\mathbb{R}^2) \le d_H(X,\mathbb{I})$. Предположим, что $d_H(\tilde{X},\mathbb{R}^2) < d_H(X,\mathbb{I})$. Поскольку

$$d_H(\tilde{X},\mathbb{R}^2) = \max\big\{\sup_{x\in\tilde{X}} \underbrace{d(x,\mathbb{R}^n)}_{=0},\ \sup_{a\in\mathbb{R}^2} d(a,\tilde{X})\big\} = \sup_{a\in\mathbb{R}^n} d(a,\tilde{X}),$$

для произвольного $a\in\mathbb{R}^n$ получаем, что $d(a,\tilde{X}) < d_H(X,\mathbb{I}) - \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Положим $a = i$. Тогда $d(i,X) = d(X,\mathbb{I})$, однако $d(i,\tilde{X}\setminus X) \ge d(i,\partial\mathbb{I}) \ge d(X,\mathbb{I})$. Значит, $d(i,\tilde{X}) \ge d_H(X,\mathbb{I})$. Однако, $d(i,\tilde{X}) \le d_H(X,\mathbb{I})$ — противоречие. □

Список литературы

[1] H. Adams + 8, *Gromov–Hausdorff distance and Jung constant of finite-dimensional normed spaces*, 2026 (to appear).

[2] H. Adams, F. Frick, S. Majhi, and N. McBride. Hausdorff vs Gromov–Hausdorff distances. *Discrete & Computational Geometry*, 2025.

[3] H. Adams, S. Majhi, F. Manin, Z. Virk, N. Zava, *Lower-bounding the Gromov–Hausdorff distance in metric graphs*, arXiv:2411.09182, 2024.

[4] J. M. Bayod, J. Martínez-Maurica, *Subdominant ultrametrics*, Proc. AMS, **109**:3 (1990), 829– 834.

[5] G. Bell, A. Dranishnikov, *Asymptotic Dimension*, Topology Appl. 155 (2008), 1265–1296.

[6] S. I. Bogataya, S. A. Bogatyy, V. V. Redkozubov, A. A. Tuzhilin, *Clouds in Gromov–Hausdorff Class: their completeness and centers*, ArXiv e-prints, arXiv:2202.07337, 2022.

[7] Burago D., Burago Yu., Ivanov S., A Course in Metric Geometry // Graduate Studies in Mathematics 33, AMS, 2001.

[8] G. E. Carlsson, F. Memoli, *Characterization, stability and convergence of hierarchical clustering methods*, J. Mach. Learn., vol. 11, № 47, 1425-1470, 2010.

[9] Edwards D., The structure of superspace // Studies in Topology, Academic Press, 1975.

[10] Gromov M., Groups of polynomial growth and expanding maps // Publications Mathematiques I.H.E.S., **53** 1981.

[11] Gromov M., Structures métriques pour les variétés riemanniennes // Textes Math. 1 (1981).

[12] A. O. Ivanov, I. N. Mikhailov, A. A. Tuzhilin, *Gromov–Hausdorff geometry of metric trees*, arXiv:2412.18888, 2024.

[13] Alex J. Lemin, *On ultrametrization of general metric spaces*, Proc. AMS **131**:3 (2002), 979-989.

[14] Sunhyuk Lim, Facundo Memoli, Zane Smith, The Gromov–Hausdorff distance between spheres // ArXiv e-prints, arXiv:2105.00611v5, 2022.

[15] Piotr W. Nowak, Guolinag Yu, *Large Scale Geometry*, 2012.

[16] I. N. Mikhailov, A. A. Tuzhilin, *When the Gromov–Hausdorff distance between finite-dimensional space and its subset is finite?*, Communications in Mathematical Research, Vol. 41 (2025), Iss. 1 : pp. 1–8.

[17] Tuzhilin A. A., Who invented the Gromov-Hausdorff Distance? // ArXiv e-prints, arXiv:1612.00728, 2016.

[18] S. Williard, *General topology*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1970.