**Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова**

Механико-математический факультет

Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

КУРСОВАЯ РАБОТА

Расстояние Громова–Хаусдорфа между произведениями метрических пространств
The Gromov–Hausdorff distance between products of metric spaces

Выполнил студент 3 курса
Абдуллаев Э. А.
Научный руководитель
д.ф.м.н., проф. А. А. Тужилин

Москва 2026

Содержание

Введение

Пространство Громова–Хаусдорфа $\mathcal{M}$, состоящее из всех непустых метрических компактов, рассматриваемых с точностью до изометрии, является одним из центральных объектов современной метрической геометрии.

Основы этого подхода заложил Ф. Хаусдорф в работе [1], предложив метрику для замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства. Позже Д. Эдвардс [2] и М. Громов [3] расширили эту идею на совокупность всех метрических пространств через изометрические вложения, что привело к созданию расстояния Громова–Хаусдорфа.

Несмотря на то, что для общего случая эта функция может принимать бесконечные значения, на множестве $\mathcal{M}$ она является метрикой. Доказано, что полученное пространство Громова–Хаусдорфа является линейно связным, полным, сепарабельным и геодезическим [3, 4, 5].

Тем не менее прямое вычисление расстояния Громова–Хаусдорфа представляет собой NP-трудную [6, 7] задачу, так как требует минимизации искажения по всем возможным соответствиям между пространствами. В связи с этим фундаментальное значение приобретает поиск двусторонних оценок для конкретных классов метрических пространств.

Вопросы вычисления и оценки расстояния Громова–Хаусдорфа для различных классов метрических пространств подробно изучены во многих работах. Например, Г. Адамсом [8] и Ф. Мемоли [9] были получены оценки для сфер, а в работах [10, 11] развита техника, позволившая вычислить расстояния для широкого класса объектов, включая симплексы и ультраметрические пространства. В работе [12] с помощью числа Борсука приведены достаточные условия для достижимости верхней оценки (то есть когда расстояние Громова–Хаусдорфа между двумя метрическими пространствами равно половине максимума их диаметров). Примерами также являются вычисления расстояния Громова–Хаусдорфа между отрезком и окружностью [13] и между $\mathbb{Z}^2$ и $\mathbb{R}^2$ с евклидовой метрикой [14].

Концепция непрерывного расстояния Громова–Хаусдорфа получила свое современное развитие в работе [9]. Важным этапом развития теории стали работы С. А. Богатого и А. А. Тужилина [15] по изучению свойств непрерывного расстояния Громова–Хаусдорфа. Альтернативный вариант непрерывного расстояния Громова–Хаусдорфа рассматривается также в работе [16] в контексте сравнения динамических систем. При этом авторы используют конструкцию, не обладающую свойством неравенства треугольника, что определяет специфику их подхода.

Настоящая работа посвящена получению оценок расстояния Громова–Хаусдорфа между l^p-произведениями метрических пространств. В разделе 2 получены двусторонние оценки для l^p-произведений в общем случае и часть этих результатов перенесена на непрерывное расстояние Громова–Хаусдорфа. В разделе 3 верхняя оценка улучшена для линейных l^p-произведений и приведены достаточные условия, когда эта оценка становится точной. В частности, приведены примеры для l^1-произведений и для плоских торов, когда получена формула для вычисления расстояния. В разделе 4 рассматривается расстояние Громова–Хаусдорфа между метрическим пространством и его l^∞-произведением с самим собой и доказано, что для любого метрического пространства X плотности $d(X)$ расстояние Громова–Хаусдорфа между ним и его l^∞-произведением (в котором число множителей соответствует $d(X)$) равно половине его диаметра. В частности, если пространство X сепарабельно, то расстояние Громова–Хаусдорфа между ним и его счетным l^∞-произведением равно половине его диаметра. В разделе 5 приводится пример применения этих результатов для топологического расстояния Громова–Хаусдорфа.

Благодарности

Автор выражает благодарность научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору А. А. Тужилину и доктору физико-математических наук, профессору А. О. Иванову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

1 Основные определения и предварительные результаты

Расстояние Громова–Хаусдорфа является стандартной метрикой на множестве изометрических классов непустых компактных метрических пространств.

Пусть $\mathcal{GH}$ — класс всех непустых метрических пространств, $\mathcal{M} \subset \mathcal{GH}$ — класс всех компактных метрических пространств. Для произвольных $X, Y \in \mathcal{GH}$ обозначим через d_X и d_Y их метрики, а через $\operatorname{diam}(X) = \sup_{x,y\in X} d_X(x,y)$ — диаметр пространства. Под *соответствием* между X и Y понимается подмножество $R \subset X \times Y$, проекции которого на X и Y являются сюръективными. Множество всех соответствий между X и Y будем обозначать $\mathcal{R}(X,Y)$.

Искажением соответствия $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ называется величина

$$\operatorname{dis} R = \sup\big\{|d_X(x,x') - d_Y(y,y')| : (x,y),(x',y') \in R\big\}.$$

Тогда расстояние Громова–Хаусдорфа определяется как

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X,Y)\}.$$

Далее, следуя [9], [15] определим непрерывное расстояние Громова–Хаусдорфа d^c_{GH}. Для пары непрерывных отображений $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$ определим их искажения и *коискажение*:

- $\operatorname{dis}(f) = \sup_{x,x'\in X} |d_X(x,x') - d_Y(f(x),f(x'))|$;
- $\operatorname{dis}(g) = \sup_{y,y'\in Y} |d_Y(y,y') - d_X(g(y),g(y'))|$;
- $\operatorname{codis}(f,g) = \sup_{x\in X, y\in Y} |d_X(x,g(y)) - d_Y(f(x),y)|$.

Расстояние $d^c_{GH}(X,Y)$ определяется как

$$d^c_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf_{f,g}\max\{\operatorname{dis} f, \operatorname{dis} g, \operatorname{codis}(f,g)\},$$

где инфимум берется по всем непрерывным отображениям $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$.

В дальнейшем, говоря о свойствах расстояния Громова–Хаусдорфа, мы следуем [4], [15].

Для произвольного метрического пространства (X, d_X) определим *диаметр*

$$\operatorname{diam}(X) = \sup_{x,\tilde{x}\in X} d(x,\tilde{x}).$$

Для любых ограниченных метрических пространств X, Y справедлива следующая оценка:

$$\frac{1}{2}|\operatorname{diam}(X) - \operatorname{diam}(Y)| \le d_{GH}(X,Y) \le d^c_{GH}(X,Y) \le \frac{1}{2}\max\{\operatorname{diam}(X), \operatorname{diam}(Y)\}.$$

Обозначим $\{pt\}$ — метрическое пространство, состоящее из одной точки. Тогда для любого метрического пространства X справедливо равенство

$$d_{GH}(X, \{pt\}) = d_{GH}^c(X, \{pt\}) = \frac{1}{2}\operatorname{diam}(X).$$

Для любых $X, Y \in \mathcal{GH}$ и произвольных отображений $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$ обозначим $R_{f,g} = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \cup \{(g(y), y) \mid y \in Y\}$, тогда $R_{f,g} \in \mathcal{R}(X, Y)$.

Предложение 1.1 ([15])**.** *Для любых $X, Y \in \mathcal{GH}$ и произвольных отображений $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$ выполняется*

$$\operatorname{dis}(R_{f,g}) = \max\{\operatorname{dis}(f), \operatorname{dis}(g), \operatorname{codis}(f, g)\}.$$

Определение 1.2. Пусть $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^\infty$ — последовательность метрических пространств, причем $\sum_{n=1}^\infty (\operatorname{diam}(X_n))^p < \infty$, где $1 \le p < \infty$. Тогда на декартовом произведении $\prod_{n=1}^\infty X_n$ введем метрику

$$d\bigl(\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty\bigr) = \left(\sum_{n=1}^\infty \bigl(d_n(x_n, y_n)\bigr)^p\right)^{1/p}$$

и полученное метрическое пространство $(l^p)\prod_n X_n$ будем называть *l^p-произведением* пространств X_n.

Замечание 1.3. Пусть $\{(X_{n,m}, d_{X_{n,m}})\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ — семейство метрических пространств, причем $\sum_{n,m=1}^\infty \operatorname{diam}(X_{n,m})^p < \infty$, где $1 \le p < \infty$. Тогда следующие пространства изометричны:

$$(l^p)\prod_{n=1}^\infty\left((l^p)\prod_{m=1}^\infty (X_{n,m}, d_{X_{n,m}})\right) = (l^p)\prod_{n,m=1}^\infty (X_{n,m}, d_{X_{n,m}}).$$

Определение 1.4. Пусть $\{(X_\alpha, d_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ — произвольное семейство метрических пространств, причем $\sup_{\alpha\in A}\operatorname{diam}(X_\alpha) < \infty$. Тогда на декартовом произведении $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ введем метрику

$$d\bigl(\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}, \{y_\alpha\}_{\alpha\in A}\bigr) = \sup_{\alpha\in A} d_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$$

и полученное метрическое пространство $(l^\infty)\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ будем называть *l^∞-произведением* пространств X_α.

Обозначение 1.5. Для произвольного множества A обозначим через $\#A$ его мощность.

Обозначение 1.6. Для произвольного кардинального числа κ обозначим Δ_κ метрическое пространство мощности $\#\Delta_\kappa = \kappa$, у которого все ненулевые расстояния равны 1.

2 Общие оценки расстояний между произведениями

Начнем с простого наблюдения.

Лемма 2.1. *Пусть $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, +\infty)$ — последовательность подмножеств вещественной прямой. Положим $A = \sum_{n=1}^\infty A_n := \bigl\{\sum_{n=1}^\infty a_n \mid a_n \in A_n\bigr\}$. Тогда $\sup A = \sum_{n=1}^\infty \sup A_n$ и $\inf A = \sum_{n=1}^\infty \inf A_n$.*

Следующая лемма оценивает расстояние Громова–Хаусдорфа между произведениями метрических пространств через расстояние между их компонентами.

Лемма 2.2. *Пусть $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{(Y_n, \varrho_n)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательности метрических пространств, причем $\sum_{n=1}^{\infty}\big(\operatorname{diam}(X_n)\big)^p < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\big(\operatorname{diam}(Y_n)\big)^p < \infty$, где $1 \le p < \infty$. Для любых $R_n \in \mathcal{R}(X_n, Y_n)$ мы можем воспринимать декартово произведение $R = \prod_n R_n$ как соответствие в $\mathcal{R}\big((l^p)\prod_n X_n, (l^p)\prod_n Y_n\big)$. Тогда*

$$\operatorname{dis}(R) \le \left(\sum_n \big(\operatorname{dis}(R_n)\big)^p\right)^{1/p}.$$

Доказательство. Положим $(X, d_X) = (l^p)\prod_n (X_n, d_n)$ и $(Y, d_Y) = (l^p)\prod_n (Y_n, d_n)$. Тогда получаем, что

$$\operatorname{dis}(R) = \operatorname{dis}\left(\prod_n R_n\right) = \sup_{(x,y),(\tilde{x},\tilde{y})\in R}\big|d_X(x,\tilde{x}) - d_Y(y,\tilde{y})\big| =$$
$$= \sup_{(x,y),(\tilde{x},\tilde{y})\in R}\Big|\|\{d_n(x_n,\tilde{x}_n)\}_{n=1}^{\infty}\|_{l^p} - \|\{\varrho_n(y_n,\tilde{y}_n)\}_{n=1}^{\infty}\|_{l^p}\Big| \le$$
$$\le \sup_{(x,y),(\tilde{x},\tilde{y})\in R}\|\{d_n(x_n,\tilde{x}_n) - \varrho_n(y_n,\tilde{y}_n)\}_{n=1}^{\infty}\|_{l^p},$$

где последнее неравенство представляет собой неравенство $\big|\|a\| - \|b\|\big| \le \|a - b\|$ для l^p-нормы и векторов $a_n = d_n(x_n, \tilde{x}_n)$, $b_n = \varrho_n(y_n, \tilde{y}_n)$.

Положим

$$A_n = \Big\{\big|d_n(x_n,\tilde{x}_n) - \varrho_n(y_n,\tilde{y}_n)\big|^p \;\Big|\; (x_n,y_n),(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n)\in R_n\Big\},$$
$$A = \Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\big|d_n(x_n,\tilde{x}_n) - \varrho_n(y_n,\tilde{y}_n)\big|^p \;\Big|\; (x,y),(\tilde{x},\tilde{y})\in R\Big\}.$$

Применяя лемму 2.1, получаем, что

$$\operatorname{dis}(R) \le \sup_{(x,y),(\tilde{x},\tilde{y})\in R}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|d_n(x_n,\tilde{x}_n) - \varrho_n(y_n,\tilde{y}_n)|^p\right)^{1/p} =$$
$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sup_{(x_n,y_n),(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n)\in R_n}\big|d_n(x_n,\tilde{x}_n) - \varrho_n(y_n,\tilde{y}_n)\big|\right)^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\big(\operatorname{dis}(R_n)\big)^p\right)^{1/p}.$$

□

Лемма 2.3. *Пусть $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{(Y_n, \varrho_n)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательности метрических пространств, причем $\sum_{n=1}^{\infty}\big(\operatorname{diam}(X_n)\big)^p < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\big(\operatorname{diam}(Y_n)\big)^p < \infty$, где $1 \le p < \infty$. Тогда*

$$d_{GH}\left((l^p)\prod_n X_n,\ (l^p)\prod_n Y_n\right) \le \left(\sum_n \big(d_{GH}(X_n, Y_n)\big)^p\right)^{1/p}.$$

Доказательство. Положим $(X,d_X)=(l^p)\prod_n (X_n,d_n)$ и $(Y,d_Y)=(l^p)\prod_n (Y_n,d_n)$. Для любого $\varepsilon>0$ рассмотрим $R_n\in\mathcal{R}(X_n,Y_n)$ такие, что

$$\big\|\{\operatorname{dis}(R_n)\}_{n=1}^\infty\big\|_{l^p}\le 2\big\|\{d_{GH}(X_n,Y_n)\}_{n=1}^\infty\big\|_{l^p}+\varepsilon.$$

Положим $R=\prod_{n=1}^\infty R_n\in\mathcal{R}(X,Y)$. Тогда по определению расстояния Громова–Хаусдорфа и по лемме 2.2 получаем

$$2d_{GH}(X,Y)\le\operatorname{dis}(R)\le\big\|\{\operatorname{dis}(R_n)\}_{n=1}^\infty\big\|_{l^p}\le 2\big\|\{d_{GH}(X_n,Y_n)\}_{n=1}^\infty\big\|_{l^p}+\varepsilon.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получаем нужное. □

Пример 2.4. Рассмотрим два прямоугольника на евклидовой плоскости: $X=(l^2)[0,A]\times[0,B]$ и $Y=(l^2)[0,C]\times[0,D]$. Тогда $2d_{GH}([0,A],[0,C])=|A-C|$ и $2d_{GH}([0,B],[0,D])=|B-D|$. Из предыдущей леммы получаем, что $2d_{GH}(X,Y)\le\sqrt{(A-C)^2+(B-D)^2}$.

Теперь получим обратную оценку.

Лемма 2.5. *Пусть $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{Y_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательности метрических пространств, причем $\sum_{n=1}^\infty\big(\operatorname{diam}(X_n)\big)^p<\infty$ и $\sum_{n=1}^\infty\big(\operatorname{diam}(Y_n)\big)^p<\infty$, где $1\le p<\infty$. Тогда*

$$\sup_n\Bigg(d_{GH}(X_n,Y_n)-\frac12\bigg(\sum_{m\ne n}\big(\operatorname{diam}(X_m)\big)^p\bigg)^{1/p}-\frac12\bigg(\sum_{m\ne n}\big(\operatorname{diam}(Y_m)\big)^p\bigg)^{1/p}\Bigg)\le$$
$$\le d_{GH}\bigg((l^p)\prod_n X_n,\ (l^p)\prod_n Y_n\bigg).$$

Доказательство. Положим $X=(l^p)\prod_n X_n$ и $Y=(l^p)\prod_n Y_n$. Заметим, что произвольное соответствие $R\in\mathcal{R}(X,Y)$ можно спроектировать на $X_n\times Y_n$ и получить соответствие $P_n^R\in\mathcal{R}(X_n,Y_n)$. Иными словами, пара $(\hat{x}_n,\hat{y}_n)$ содержится в P_n^R, если и только если существует пара $(x,y)\in R$ такая, что $x_n=\hat{x}_n$ и $y_n=\hat{y}_n$. Далее будем обозначать метрику в пространствах X_n, Y_n, X и Y через d_{X_n}, d_{Y_n}, d_X и d_Y соответственно. Тогда

$$d_{GH}(X_n,Y_n)=\frac12\inf_{R\in\mathcal{R}(X_n,Y_n)}\operatorname{dis}(R)=\frac12\inf_{R\in\mathcal{R}(X,Y)}\operatorname{dis}(P_n^R)=$$
$$=\frac12\inf_{R\in\mathcal{R}(X,Y)}\sup_{\substack{(x,y)\in R\\(\tilde{x},\tilde{y})\in R}}\big|d_{X_n}(x_n,\tilde{x}_n)-d_{Y_n}(y_n,\tilde{y}_n)\big|=$$
$$=\frac12\inf_{R\in\mathcal{R}(X,Y)}\sup_{\substack{(x,y)\in R\\(\tilde{x},\tilde{y})\in R}}\Big|\big(d_X(x,\tilde{x})-d_Y(y,\tilde{y})\big)+\big(d_{X_n}(x_n,\tilde{x}_n)-d_X(x,\tilde{x})\big)+\big(d_Y(y,\tilde{y})-d_{Y_n}(y_n,\tilde{y}_n)\big)\Big|.$$

Сначала оценим получившееся выражение по неравенству треугольника. Затем распишем неравенство $\big|\|a\|_{l^p}-\|b\|_{l^p}\big|\le\|a-b\|_{l^p}$, записанное сначала для $a_m=d_{Y_m}(x_m,\tilde{x}_m)$ и $b_m=d_n(x_n,\tilde{x}_n)$ при $m=n$ и $b_m=0$ при $m\ne n$, а потом для $a_m=d_{Y_m}(y_m,\tilde{y}_m)$ и $b_m=d_n(y_n,\tilde{y}_n)$

при $m=n$ и $b_m=0$ при $m\neq n$. Таким образом, получаем

$$
\begin{aligned}
d_{GH}(X_n,Y_n) \le \frac{1}{2}\inf_{R\in\mathcal{R}(X,Y)} \sup_{\substack{(x,y)\in R\\(\tilde x,\tilde y)\in R}} \bigl|d_X(x,\tilde x)-d_Y(y,\tilde y)\bigr| + \\
+\frac{1}{2}\sup_{\substack{x,\tilde x\in X\\ y,\tilde y\in Y}}\left(\left|\Bigl(\sum_{m=1}^{\infty}\bigl(d_{X_m}(x_m,\tilde x_m)\bigr)^p\Bigr)^{1/p}-d_{X_n}(x_n,\tilde x_n)\right|+\right.\\
\left.+\left|\Bigl(\sum_{m=1}^{\infty}\bigl(d_{Y_m}(y_m,\tilde y_m)\bigr)^p\Bigr)^{1/p}-d_{Y_n}(y_n,\tilde y_n)\right|\right)\le\\
\le d_{GH}(X,Y)+\frac{1}{2}\sup_{\substack{x,\tilde x\in X\\ y,\tilde y\in Y}}\left(\sum_{m\neq n}\bigl(d_{X_m}(x_m,\tilde x_m)\bigr)^p\right)^{1/p}+\sup_{\substack{x,\tilde x\in X\\ y,\tilde y\in Y}}\frac{1}{2}\left(\sum_{m\neq n}\bigl(d_{Y_m}(y_m,\tilde y_m))\bigr)^p\right)^{1/p}\le\\
\le d_{GH}(X,Y)+\frac{1}{2}\left(\sum_{m\neq n}\bigl(\operatorname{diam}(X_m)\bigr)^p\right)^{1/p}+\frac{1}{2}\left(\sum_{m\neq n}\bigl(\operatorname{diam}(Y_m)\bigr)^p\right)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

Итак, для каждого n мы получили

$$
d_{GH}(X_n,Y_n)-\frac{1}{2}\left(\sum_{m\neq n}\bigl(\operatorname{diam}(X_m)\bigr)^p\right)^{1/p}-\frac{1}{2}\left(\sum_{m\neq n}\bigl(\operatorname{diam}(Y_m)\bigr)^p\right)^{1/p}\le d_{GH}(X,Y),
$$

что доказывает лемму. □

Пример 2.6. Пусть X,Y – метрические пространства одинакового диаметра $\operatorname{diam}(X)=\operatorname{diam}(Y)=\alpha<1/2$ и пусть $\kappa\neq\kappa'$ — два разных кардинальных числа. Обозначим $\Delta=\Delta_\kappa$ и $\Delta'=\Delta_{\kappa'}$. Хорошо известно, что $2d_{GH}(\Delta,\Delta')=1$. Положим $X_1=\Delta,\ X_2=X,\ Y_1=\Delta',\ Y_2=Y$. Тогда по лемме 2.5 получаем

$$
\begin{aligned}
2d_{GH}\bigl((l^p)\ X\times\Delta,(l^p)\ Y\times\Delta'\bigr)=2d_{GH}((l^p)X_1\times X_2,(l^p)Y_1\times Y_2)\ge\\
\ge 2d_{GH}(X_1,Y_1)-\operatorname{diam}(X_2)-\operatorname{diam}(Y_2)>1-2\alpha.
\end{aligned}
$$

Отметим, что в этом случае из простой оценки $0=\bigl|\operatorname{diam}((l^p)\ X\times\Delta)-\operatorname{diam}((l^p)\ Y\times\Delta')\bigr|\le 2d_{GH}\bigl((l^p)\ X\times\Delta,(l^p)\ Y\times\Delta'\bigr)$ ничего не следует (то есть эта оценка тривиальна).

Из двух приведенных выше лемм получается теорема.

Теорема 2.7. *Пусть $\{X_n\}_{n=1}^\infty$, $\{Y_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательности метрических пространств, причем $\sum_{n=1}^\infty\bigl(\operatorname{diam}(X_n)\bigr)^p<\infty$ и $\sum_{n=1}^\infty\bigl(\operatorname{diam}(Y_n)\bigr)^p<\infty$, где $1\le p<\infty$. Тогда*

$$
\begin{aligned}
\sup_n\left(d_{GH}(X_n,Y_n)-\frac{1}{2}\left(\sum_{m\neq n}\bigl(\operatorname{diam}(X_m)\bigr)^p\right)^{1/p}-\frac{1}{2}\left(\sum_{m\neq n}\bigl(\operatorname{diam}(Y_m)\bigr)^p\right)^{1/p}\right)\le\\
\le d_{GH}\left((l^p)\prod_n X_n,\ (l^p)\prod_n Y_n\right)\le\left(\sum_{n=1}^\infty\bigl(d_{GH}(X_n,Y_n)\bigr)^p\right)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

Аналогичным образом доказывается следующая теорема.

Теорема 2.8. *Пусть* $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *— произвольные семейства метрических пространств, причем* $\sup_{\alpha\in A}\operatorname{diam}(X_\alpha)<\infty$ *и* $\sup_{\alpha\in A}\operatorname{diam}(Y_\alpha)<\infty$. *Тогда*

$$\sup_{\alpha\in A}\Big(d_{GH}(X_\alpha,Y_\alpha)-\frac{1}{2}\sup_{\beta\neq\alpha}\operatorname{diam}(X_\beta)-\frac{1}{2}\sup_{\beta\neq\alpha}\operatorname{diam}(Y_\beta)\Big)\le$$

$$\le d_{GH}\left((l^\infty)\prod_{\alpha\in A}X_\alpha,\ (l^\infty)\prod_{\alpha\in A}Y_\alpha\right)\le\sup_{\alpha\in A}d_{GH}(X_\alpha,Y_\alpha).$$

Замечание 2.9. Отметим, что в теореме 2.8 верхняя оценка справедлива для произвольных (даже неограниченных) метрических пространств, что видно из доказательства.

Определение 2.10 ([4])**.** Пусть X,Y — метрические пространства. Отображение $f\colon X\to Y$ назовем *липшицевым*, если существует такое $C\ge 0$, что $d_Y(f(x_1),f(x_2))\le C d_X(x_1,x_2)$ для всех $x_1,x_2\in X$. Любое подходящее значение C называется константной Липшица отображения f. Минимальная константа Липшица называется *растяжением* f и обозначается $\operatorname{dil}(f)$.

Замечание 2.11. (1) Рассмотрим отображение $\mathcal{T}_p$, которое сопоставляет каждому компактному метрическому пространству X его квадрат, $\mathcal{T}_p\colon\mathcal{M}\to\mathcal{M},\ X\mapsto(l^p)X\times X$. Тогда это отображение является $2^{1/p}$-липшицевым и, в частности, непрерывным. Более того, растяжение $\operatorname{dil}(\mathcal{T}_p)=2^{1/p}$.

(2) Отображение

$$\mathcal{T}_\infty\colon X\mapsto(l^\infty)\prod_{\alpha\in A}X$$

1-липшицево и, в частности, непрерывно. Более того, растяжение $\operatorname{dil}(\mathcal{T}_\infty)=1$.

Доказательство. Обоснуем первый пункт (второй получается аналогично). Поскольку, согласно 2.3, $d_{GH}((l^p)X\times X,(l^p)Y\times Y)\le 2^{1/p}d_{GH}(X,Y)$, то отображение $\mathcal{T}_p$ является липшицевым с констаной $C\ge 2^{1/p}$. Осталось предъявить компактные метрические пространства X,Y такие, что $d_{GH}((l^p)X\times X,(l^p)Y\times Y)=2^{1/p}d_{GH}(X,Y)$. Это будет заведомо выполнено, если, например, $X=\{pt\}$, а Y — произвольный метрический компакт. □

2.1 Замечания к теореме: случай непрерывного расстояния Громова–Хаусдорфа

Перенесем часть полученных результатов на случай непрерывного расстояния Громова–Хаусдорфа d^c_{GH}.

Следующее предложение в этом случае действительно дословно переносится для d^c_{GH}.

Предложение 2.12. *Пусть* $(X_1,d_{X_1})\dots,(X_N,d_{X_N})$ *и* $(Y_1,d_{Y_1})\dots,(Y_N,d_{Y_N})$*— конечные последовательности метрических пространств. Пусть* $1\le p<\infty$, *обозначим* $X=(l^p)X_1\times\dots\times X_N,\ Y=(l^p)Y_1\times\dots\times Y_N$. *Тогда*

$$d^c_{GH}(X,Y)\le\left(\sum_n\big(d^c_{GH}\big(X_n,Y_n\big)\big)^p\right)^{1/p}.$$

Доказательство. Будем действовать аналогично доказательству леммы 2.3. Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим непрерывные отображения $f_n\colon X_n \to Y_n,\ g_n\colon Y_n \to X_n$ такие, что

$$\big\|\{\max\{\operatorname{dis}(f_n),\operatorname{dis}(g_n),\operatorname{codis}(f_n,g_n)\}\}_{n=1}^N\big\|_{l^p} \le 2\big\|\{d_{GH}^c(X_n,Y_n)\}_{n=1}^N\big\|_{l^p}+\varepsilon.$$

Положим $R = R_{f_1,g_1}\times\cdots\times R_{f_N,g_N} \in \mathcal{R}(X,Y)$. Определим непрерывные отображения $f\colon X \to Y,\ (x_1,\dots,x_N)\mapsto (f_1(x_1),\dots,f_n(x_n))$ и $g\colon Y\to X,\ (y_1,\dots,y_n)\mapsto (g_1(y_1),\dots g_n(y_n))$. Тогда по определению расстояния Громова–Хаусдорфа и по лемме 2.2 получаем

$$\begin{aligned}2d_{GH}^c(X,Y) &\le \max\{\operatorname{dis}(f),\operatorname{dis}(g),\operatorname{codis}(f,g)\} \le \operatorname{dis}(R) \le \big\|\{\operatorname{dis}(R_{f_n,g_n})\}_{n=1}^N\big\|_{l^p} = \\ &= \big\|\{\max\{\operatorname{dis}(f_n),\operatorname{dis}(g_n),\operatorname{codis}(f_n,g_n)\}\}_{n=1}^N\big\|_{l^p} \le 2\big\|\{d_{GH}^c(X_n,Y_n)\}_{n=1}^N\big\|_{l^p}+\varepsilon.\end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получаем нужное. $\square$

Теперь обобщим это на случай произвольных последовательностей.

Лемма 2.13. *Пусть $\{(X_n,d_n)\}_{n=1}^\infty$ — последовательность метрических пространств, причем $\sum_{n=1}^\infty\big(\operatorname{diam}(X_n)\big)^p<\infty$, где $1\le p<\infty$. Тогда*

$$d_{GH}^c\bigg((l^p)\prod_{n=1}^\infty X_n,\ (l^p)\prod_{n=1}^N X_n\bigg) \le \frac12\bigg(\sum_{n=N+1}^\infty\big(\operatorname{diam}(X_n)\big)^p\bigg)^{1/p}.$$

В частности,

$$\lim_{N\to\infty} d_{GH}^c\bigg((l^p)\prod_{n=1}^\infty X_n,\ (l^p)\prod_{n=1}^N X_n\bigg) = 0.$$

Доказательство. Положим $\tilde X_1 = \tilde Y_1 = (l^p)\prod_{n=1}^N X_n,\ \tilde X_2 = (l^p)\prod_{n=N+1}^\infty X_n,\ \tilde Y_2 = \{pt\}$. Поскольку $d_{GH}^c(\tilde X_1,\tilde Y_1)=0$, то по предложению 2.12 и на основании замечания 1.3 верно

$$\begin{aligned}d_{GH}^c\bigg((l^p)\prod_{n=1}^\infty X_n,\ (l^p)\prod_{n=1}^N X_n\bigg) &= d_{GH}^c\big((l^p)\tilde X_1\times\tilde X_2,(l^p)\tilde Y_1\times\tilde Y_2\big) \le d_{GH}^c(\tilde X_2,\tilde Y_2) = \\ &= d_{GH}^c\bigg((l^p)\prod_{n=N+1}^\infty X_n,\{pt\}\bigg) = \frac12\operatorname{diam}\bigg((l^p)\prod_{n=N+1}^\infty X_n\bigg) = \frac12\bigg(\sum_{n=N+1}^\infty\big(\operatorname{diam}(X_n)\big)^p\bigg)^{1/p}.\end{aligned}$$

$\square$

Теорема 2.14. *Пусть $\{(X_n,d_n)\}_{n=1}^\infty$, $\{(Y_n,\varrho_n)\}_{n=1}^\infty$ — последовательности метрических пространств, причем $\sum_{n=1}^\infty\big(\operatorname{diam}(X_n)\big)^p<\infty$ и $\sum_{n=1}^\infty\big(\operatorname{diam}(Y_n)\big)^p<\infty$, где $1\le p<\infty$. Тогда*

$$d_{GH}^c\bigg((l^p)\prod_{n=1}^\infty X_n,\ (l^p)\prod_{n=1}^\infty Y_n\bigg) \le \bigg(\sum_{n=1}^\infty\big(d_{GH}^c\big(X_n,Y_n\big)\big)^p\bigg)^{1/p}.$$

Доказательство. Поскольку для конечных произведений это уже доказано в лемме 2.13, то по неравенству треугольника получаем при $N \to \infty$, что

$$d^c_{GH}\left((l^p)\prod_{n=1}^{\infty} X_n,\ (l^p)\prod_{n=1}^{\infty} Y_n\right) \le d^c_{GH}\left((l^p)\prod_{n=1}^{N} X_n,\ (l^p)\prod_{n=1}^{N} Y_n\right)+$$

$$d^c_{GH}\left((l^p)\prod_{n=1}^{\infty} X_n,\ (l^p)\prod_{n=1}^{N} X_n\right) + d^c_{GH}\left((l^p)\prod_{n=1}^{\infty} Y_n,\ (l^p)\prod_{n=1}^{N} Y_n\right) \le$$

$$\le \left(\sum_{n=1}^{\infty}(d^c_{GH}(X_n, Y_n))^p\right)^{1/p} + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\big(\mathrm{diam}(X_n)\big)^p\right)^{1/p} + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\big(\mathrm{diam}(Y_n)\big)^p\right)^{1/p},$$

где последние два слагаемых стремятся к нулю. □

Замечание 2.15. Для l^∞-произведений дело обстоит несколько сложнее. Ясно, что для конечных последовательностей метрических пространств

$$(X_1, d_{X_1}), \dots, (X_N, d_{X_N});\ (Y_1, d_{Y_1}), \dots, (Y_N, d_{Y_N})$$

будет выполнено

$$d^c_{GH}((l^\infty)X_1 \times \dots \times X_N, (l^\infty)Y_1 \times \dots \times Y_N) \le \max\{d^c_{GH}(X_1, Y_1), \dots d^c_{GH}(X_N, Y_N)\},$$

однако в случае бесконечного l^∞-произведения доказательство предыдущего предложения дословно перенести не получится (возникнет проблема, что последние два слагаемых перестанут стремиться к нулю). Если добавить дополнительное условие, что $\mathrm{diam}(X_n) \to 0$ и $\mathrm{diam}(Y_n) \to 0$, то будет верна оценка

$$d^c_{GH}\left(\prod_{n=1}^{\infty} X_n,\ \prod_{n=1}^{\infty} Y_n\right) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} d^c_{GH}(X_n, Y_n).$$

Гипотеза 2.16. Предположим, что для произвольных последовательностей метрических пространств $\{(X_n, d_{X_n}\}_{n\in\mathbb{N}},\ \{(Y_n, d_{Y_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ выполнено $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}(X_n) < \infty$ и $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}(Y_n) < \infty$. Тогда будет ли верной оценка

$$d^c_{GH}\left(\prod_{n=1}^{\infty} X_n,\ \prod_{n=1}^{\infty} Y_n\right) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} d^c_{GH}(X_n, Y_n)$$

l^∞-произведений в общем случае?

3 Оценка расстояния для линейных произведений

В этом разделе мы рассмотрим более частный случай и для него улучшим оценку, полученную в лемме 2.3.

3.1 Несколько лемм

Замечание 3.1. Пусть заданы произвольные непрерывные функции $f\colon K \times A \to \mathbb{R}$ и $g\colon K \times A \to \mathbb{R}$, где K, A — произвольные непустые метрические компакты. Рассмотрим их как семейства непрерывных отображений $\{f_a\}_{a \in A}$ и $\{g_a\}_{a \in A}$, определенных на пространстве непрерывных функций $\mathcal{C}(K)$, где на $\mathcal{C}(K)$ задана sup-норма. Также рассмотрим непрерывные отображения $F, G\colon \mathcal{C}(K) \to \mathbb{R}$. Предположим, что на всюду плотном множестве параметров $a \in B \subset A$ выполнено равенство $F(f_a) = G(g_a)$. Тогда это равенство будет верно для всех $a \in A$.

Доказательство. Действительно, функция f непрерывна на компакте $K \times A$, следовательно, она равномерно непрерывна. Поскольку в силу равномерной непрерывности f и g отображения $a \mapsto F(f_a)$ и $a \mapsto G(g_a)$ непрерывны и по предположению совпадают на всюду плотном множестве B, то нужное равенство будет выполнено при всех $a \in A$. □

Лемма 3.2. *Рассмотрим функцию $\xi\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, заданную следующим образом:*

$$\xi(x) = \left|(x+1)^p - (\alpha x + \beta)^p\right|,$$

где $\alpha, \beta > 0$ — положительные параметры и $0 < p \le 1$. Тогда для всякого $T > 0$ выполнено

$$\sup_{x \in [0,T]} \xi(x) = \max\{\xi(0), \xi(T)\}.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\beta \le 1$. Действительно, если $\beta \ge 1$, то имеем

$$\xi(x) = \beta^p \left| \Big(\frac{x}{\beta} + \frac{1}{\beta}\Big)^p - \Big(\frac{\alpha x}{\beta} + 1\Big)^p \right|$$

и, делая замену $t = \alpha x/\beta$, получаем

$$\xi(t) = \beta^p \left| (t+1)^p - \Big(\frac{t}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\Big)^p \right|,$$

где теперь $1/\beta \le 1$. Также будем считать, что $p < 1$, так как случай $p = 1$ тривиален.

Обозначим $\eta(x) = (x+1)^p - (\alpha x + \beta)^p$, тогда $\xi(x) = |\eta(x)|$. Заметим, что производная

$$\eta'(x_0) = p(x_0+1)^{p-1} - p\alpha(\alpha x_0 + \beta)^{p-1} = 0 \iff x_0 = \frac{\beta - \alpha^{\frac{1}{1-p}}}{\alpha^{\frac{1}{1-p}} - \alpha}.$$

Согласно замечанию 3.1, нам достаточно доказать лемму на всюду плотном множестве параметров (α, β, p, T), поэтому мы можем считать, что все знаменатели в ходе вычислений не обращаются в нуль. Теперь мы рассмотрим два случая:

(1) Пусть точка x_0 либо не существует, либо $x_0 \le 0$. Поскольку мы предположили, что $\beta \le 1$, то этому случаю соответствует либо $\alpha \ge 1$, либо $\beta \ge \alpha^{\frac{1}{1-p}}$.

(2) Пусть теперь точка x_0 существует и $x_0 > 0$. Тогда получается, что

$$0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < \alpha^{\frac{1}{1-p}}.$$

Следовательно,
$$\left(\frac{\beta-\alpha}{\alpha^{\frac{1}{1-p}}-\alpha}\right)^{p-2}>0.$$
Заметим, что функция $\eta(x)$ не обращается в нуль на $[0,+\infty)$. Действительно,
$$\eta(x)=0 \iff x=\frac{\beta-1}{1-\alpha}<0.$$
Поскольку $\eta(0)=1-\beta^p>0$, то для всех $x\in[0,+\infty)$ выполнено $\xi(x)=\eta(x)>0$.
Для завершения доказательства достаточно проверить, что $\eta''(x_0)>0$. Итак,
$$\eta''(x)=p(p-1)(x+1)^{p-2}-\alpha^2p(p-1)(\alpha x+\beta)^{p-2}$$
и
$$\eta''(x_0)=p(p-1)\left(\frac{\beta-\alpha}{\alpha^{\frac{1}{1-p}}-\alpha}\right)^{p-2}\left(1-\alpha^{\frac{1}{1-p}}\right)<0,$$
то есть в точке x_0 будет локальный минимум.

$\square$

Следствие 3.3. *Рассмотрим функцию* $\xi\colon[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, *заданную следующим образом*:
$$\xi(x)=\left|(x+1)^{1/p}-(\alpha x+\beta)^{1/p}\right|,$$
где $\alpha,\beta>0$ *— положительные параметры и* $1\le p<\infty$. *Тогда для всякого* $T>0$ *выполнено*
$$\sup_{x\in[0,T]}\xi(x)=\max\{\xi(0),\xi(T)\}.$$

Доказательство. Это немедленно следует из 3.2 заменой p на $1/p$. $\square$

Лемма 3.4. *Рассмотрим функцию* $\xi\colon[0,T_1]\times\dots\times[0,T_N]\to\mathbb{R}$, *заданную следующим образом*:
$$\xi(\varkappa)=\xi(\varkappa_1,\dots,\varkappa_N)=\left|\left(A+\sum_{n=1}^N|a_n\varkappa_n|^p\right)^{1/p}-\left(B+\sum_{n=1}^N|b_n\varkappa_n|^p\right)^{1/p}\right|,$$
где $a_1,\dots,a_N\ge0$, $b_1,\dots,b_N\ge0$ *— произвольный набор,* $A,B\ge0$ *и* $1\le p<\infty$. *Тогда*
$$\sup_{\varkappa\in[0,T_1]\times\dots\times[0,T_N]}\xi(\varkappa)=\max_{\varkappa\in\{0,T_1\}\times\dots\times\{0,T_N\}}\xi(\varkappa)=$$
$$=\max_{S\subset\{1,\dots,N\}}\left|\left(A+\sum_{n\in S}|T_na_n|^p\right)^{1/p}-\left(B+\sum_{n\in S}|T_nb_n|^p\right)^{1/p}\right|.$$

Доказательство. Достаточно доказать только первое равенство, так как второе равенство очевидно. Как и в лемме 3.2, согласно замечанию 3.1, будем считать без ограничения общности, что $a_1,\dots,a_N>0$, $b_1,\dots,b_N>0$, $A,B>0$.

Пусть $N = 1$, тогда

$$\xi(\varkappa) = \left|(a^p\varkappa^p + A)^{1/p} - (b^p\varkappa^p + B)^{1/p}\right| = A^{1/p}\left|\Big(\frac{a^p\varkappa^p}{A} + 1\Big)^{1/p} - \Big(\frac{b^p\varkappa^p}{A} + \frac{B}{A}\Big)^{1/p}\right|,$$

и, делая замену

$$x = \frac{a^p\varkappa^p}{A},\ \alpha = \frac{b^p}{a^p},\ \beta = \frac{B}{A},$$

сводим этот случай к следствию 3.3.

Пусть теперь $N > 1$. Доказываем индукцией по N, пусть для $N-1$ верно. Итак, применяя при каждом фиксированном $\varkappa_N = \varkappa_N^* \in [0,\ T_N]$ предположение индукции для функции $\tilde{\xi}(\varkappa_1, \dots, \varkappa_{N-1}) := \xi(\varkappa_1, \dots, \varkappa_{N-1}, \varkappa_N^*)$, получаем, что выполнено

$$\sup_{\varkappa\in[0,\ T_1]\times\dots\times[0,\ T_{N-1}]} \xi(\varkappa_1, \dots, \varkappa_{N-1}, \varkappa_N^*) = \max_{(\varkappa_1,\dots\varkappa_{N-1})\in\{0,\ T_1\}\times\dots\times\{0,\ T_{N-1}\}} \xi(\varkappa_1, \dots, \varkappa_{N-1}, \varkappa_N^*).$$

Применяя при фиксированных $\varkappa_1^*, \dots \varkappa_{N-1}^*$ предположение индукции для $N = 1$ и для функции $\xi^*(\varkappa_N) = \xi(\varkappa_1^*, \dots \varkappa_{N-1}^*, \varkappa_N)$, получаем, что

$$\sup_{\varkappa_N\in[0,T_N]} \xi^*(\varkappa_1^*, \dots, \varkappa_{N-1}^*, \varkappa_N) = \max\{\xi(\varkappa_1^*, \dots, \varkappa_{N-1}^*, 0),\ \xi(\varkappa_1^*, \dots, \varkappa_{N-1}^*, T_N)\}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\sup_{\varkappa\in[0,T_1]\times\dots\times[0,T_N]} \xi(\varkappa_1, \dots, \varkappa_N) &= \sup_{\varkappa_N^*\in[0,T_N]}\ \sup_{\varkappa\in[0,T_1]\times\dots\times[0,T_{N-1}]} \xi(\varkappa_1, \dots, \varkappa_{N-1}, \varkappa_N^*) = \\
&= \sup_{\varkappa_N^*\in[0,T_N]}\ \max_{\varkappa\in\{0,T_1\}\times\dots\times\{0,T_{N-1}\}} \xi(\varkappa_1, \dots, \varkappa_{N-1}, \varkappa_N^*) = \\
&= \max_{\varkappa^*\in\{0,T_1\}\times\dots\times\{0,T_{N-1}\}}\ \sup_{\varkappa_N\in[0,T_N]} \xi(\varkappa_1^*, \dots, \varkappa_{N-1}^*, \varkappa_N) = \\
&= \max_{\varkappa^*\in\{0,T_1\}\times\dots\times\{0,T_{N-1}\}} \max\{\xi(\varkappa_1^*, \dots, \varkappa_{N-1}^*, 0),\ \xi(\varkappa_1^*, \dots, \varkappa_{N-1}^*, T_N)\} = \\
&= \max_{\varkappa\in\{0,T_1\}\times\dots\times\{0,T_N\}} \xi(\varkappa).
\end{aligned}$$

□

Предложение 3.5. (1) *Пусть $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$, $b = \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$ — две последовательности, $1 \le p < \infty$. Определим функцию $\xi_p\colon [0,1]^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, заданную следующим образом:*

$$\xi_p(\varkappa) = \left|\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n\varkappa_n|^p\Big)^{1/p} - \Big(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n\varkappa_n|^p\Big)^{1/p}\right|.$$

Тогда

$$\sup_{\varkappa\in[0,1]^{\mathbb{N}}} \xi_p(\varkappa) = \sup_{\varkappa\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \xi_p(\varkappa) = \sup_{S\subset\mathbb{N}} \left|\Big(\sum_{n\in S}|a_n|^p\Big)^{1/p} - \Big(\sum_{n\in S}|b_n|^p\Big)^{1/p}\right|.$$

(2) *Пусть $a = \{a_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $b = \{b_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — такое семейство чисел, что $\sup_{\alpha\in A} a_\alpha < \infty$ и $\sup_{\alpha\in A} b_\alpha < \infty$. Определим функцию $\xi_\infty\colon [0,1]^A \to \mathbb{R}$, заданную следующим образом:*

$$\xi_\infty(\varkappa) = \left|\sup_{\alpha\in A}|a_\alpha\varkappa_\alpha| - \sup_{\alpha\in A}|b_\alpha\varkappa_\alpha|\right|.$$

Тогда

$$\sup_{\varkappa\in[0,1]^A}\xi_\infty(\varkappa)=\sup_{\varkappa\in\{0,1\}^A}\xi_\infty(\varkappa)=\sup_{S\subset A}\left|\sup_{\alpha\in S}|a_\alpha|-\sup_{\alpha\in S}|b_\alpha|\right|.$$

Доказательство. (1) Обозначим

$$\xi_p^{(N)}(\varkappa)=\left|\left(\sum_{n=1}^N|a_n\varkappa_n|^p\right)^{1/p}-\left(\sum_{n=1}^N|b_n\varkappa_n|^p\right)^{1/p}\right|.$$

Пусть $\varkappa=\{\varkappa_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — фиксированный элемент. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует $N\in\mathbb{N}$ такой, что $|\xi_p(\varkappa)-\xi_p^{(N)}(\varkappa)|<\varepsilon$. По лемме 3.4 получается, что

$$\xi_p(\varkappa)\le\varepsilon+\xi_p^{(N)}(\varkappa)\le\varepsilon+\sup_{\varkappa\in[0,1]^N}\xi_p^{(N)}(\varkappa)=\varepsilon+\sup_{\varkappa\in\{0,1\}^N}\xi_p^{(N)}(\varkappa)\le\varepsilon+\sup_{\varkappa\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}}\xi_p(\varkappa).$$

Устремляя $\varepsilon\to0$, получаем нужное.

(2) Пусть $\varkappa=\{\varkappa^*_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — фиксированный элемент. Тогда для любого наперед заданного $\varepsilon>0$ найдутся α,β такие, что

$$\xi_\infty(\varkappa^*)\le\big||a_\alpha||\varkappa^*_a|-|b_\beta||\varkappa^*_\beta|\big|+\varepsilon.$$

Рассмотрим два случая.

(a) Пусть $\alpha\neq\beta$. Без ограничения общности будем считать, что $|a_\alpha||\varkappa^*_\alpha|\ge|b_\beta||\varkappa^*_\beta|$. Тогда рассмотрим $\varkappa'=\{\varkappa'_\gamma\}_{\gamma\in A}\in\{0,1\}^A$ такой, что $\varkappa'_\gamma=1$ при $\gamma=\alpha$ и $\varkappa'_\gamma=0$ при $\gamma\neq\alpha$. Тогда

$$\xi_\infty(\varkappa^*)\le\big||a_\alpha||\varkappa^*_a|-|b_\beta||\varkappa^*_\beta|\big|+\varepsilon\le$$
$$\le\big||a_\alpha||\varkappa'_a|-|b_\beta||\varkappa'_\beta|\big|+\varepsilon\le\xi_\infty(\varkappa')+\varepsilon\le\sup_{\varkappa\in\{0,1\}^A}\xi_\infty(\varkappa)+\varepsilon.$$

(b) Пусть $\alpha=\beta$. Рассмотрим $\varkappa'=\{\varkappa'_\gamma\}_{\gamma\in A}\in\{0,1\}^A$ такой, что что $\varkappa'_\gamma=1$ при $\gamma=\alpha$ и $\varkappa'_\gamma=0$ при $\gamma\neq\alpha$. Тогда

$$\xi_\infty(\varkappa^*)\le|\varkappa^*_\alpha|\big||a_\alpha|-|b_\alpha|\big|+\varepsilon\le|\varkappa'_\alpha|\big||a_\alpha|-|b_\alpha|\big|+\varepsilon\le\xi_\infty(\varkappa')+\varepsilon\le\sup_{\varkappa\in\{0,1\}^A}\xi_\infty(\varkappa)+\varepsilon.$$

Переходя к пределу $\varepsilon\to0$, получаем

$$\xi_\infty(\varkappa^*)\le\sup_{\varkappa\in\{0,1\}^A}\xi_\infty(\varkappa).$$

□

3.2 Основные теоремы

Обозначение 3.6. Напомним, что для произвольного метрического пространства (X,d) и для любого $\lambda>0$ мы обозначаем $\lambda(X,d)$ метрическое пространство $(X,\lambda d)$, где метрика определяется равенством $(\lambda d)(x,y):=\lambda d(x,y)$. Для краткости дальше будем обозначать X вместо (X,d) и λX вместо $\lambda(X,d)$.

Обозначение 3.7. Для любого $1 \le p \le \infty$ положим

$$l^p_+ = \big\{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^p \big| \ (\forall n \in \mathbb{N})\ (x_n \ge 0)\big\}.$$

Определение 3.8. Пусть $(X_n, d_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность метрических пространств диаметра $\operatorname{diam}(X_n) = 1$. Пусть $1 \le p < \infty$. Для любого $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^p_+$ определим *линейное произведение* $(X, d_X) = (l^p)\prod_{n=1}^{\infty} a_n(X_n, d_{X_n})$.

Предложение 3.9. (1) *Пусть $1 \le p < \infty$. Рассмотрим $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — фиксированную последовательность метрических пространств, пусть $\operatorname{diam}(W_n) = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $a, b \in l^p_+$.*

Обозначим

$$X = (l^p)\prod_{n=1}^{\infty} a_n W_n,\ \ Y = (l^p)\prod_{n=1}^{\infty} b_n W_n.$$

Рассмотрим отображение $f\colon X \to Y$, заданное по правилу $f\colon \{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Тогда

$$\operatorname{dis}(f) = \sup_{S\subset\mathbb{N}} \left|\left(\sum_{n\in S}|a_n|^p\right)^{1/p} - \left(\sum_{n\in S}|b_n|^p\right)^{1/p}\right|.$$

(2) *Рассмотрим $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — любое семейство метрических пространств, у которого $\operatorname{diam}(W_\alpha) = 1$ для всех $\alpha \in A$. Пусть $a = \{a_\alpha\}_{\alpha\in A}, a_\alpha \ge 0$ и $b = \{b_\alpha\}_{\alpha\in A}, b_\alpha \ge 0$ таковы, что $\sup_{\alpha\in A} a_\alpha < \infty$, $\sup_{\alpha\in A} b_\alpha < \infty$.*

Обозначим

$$X = (l^\infty)\prod_{\beta\in A} a_\beta W_\beta,\ \ Y = (l^\infty)\prod_{\beta\in A} b_\beta W_\beta.$$

Рассмотрим отображение $f\colon X \to Y$, заданное по правилу $f\colon \{w_\alpha\}_{\alpha\in A} \mapsto \{w_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

Тогда

$$dis(f) = \sup_{S\subset A}\Big|\sup_{\beta\in S} a_\beta - \sup_{\beta\in S} b_\beta\Big|.$$

Доказательство. Будем доказывать только пункт 1, пункт 2 получается аналогично. Используя определение искажения отображения и предложение 3.5 и обозначив $\varkappa_n = d_{W_n}(w_n, \tilde{w}_n)$, получаем

$$\operatorname{dis}(f) = \sup_{x,\tilde{x}\in X}\big|d_X(x,\tilde{x}) - d_Y(f(x), f(\tilde{x}))\big| =$$

$$= \sup_{\substack{w=\{w_n\}_{n=1}^{\infty}\in X\\ \tilde{w}=\{\tilde{w}_n\}_{n=1}^{\infty}\in X}} \left|\left(\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\ d_{W_n}(w_n,\tilde{w}_n)\big)^p\right)^{1/p} - \left(\sum_{n=1}^{\infty}\big(b_n\ d_{W_n}(w_n,\tilde{w}_n)\big)^p\right)^{1/p}\right| \le$$

$$\le \sup_{\varkappa\in[0,1]^{\mathbb{N}}}\left|\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n\varkappa_n|^p\right)^{1/p} - \left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n\varkappa_n|^p\right)^{1/p}\right| = \sup_{S\subset\mathbb{N}}\left|\left(\sum_{n\in S}|a_n|^p\right)^{1/p} - \left(\sum_{n\in S}|b_n|^p\right)^{1/p}\right|.$$

Заметим, что в предыдущей цепочке неравенств неравенство на самом деле обращается в равенство. Действительно, рассмотрим некоторое фиксированное подмножество $S^* \subset \mathbb{N}$ и зафиксируем произвольный $\varepsilon > 0$. Рассмотрим конечный набор чисел $0 \le D_1, \dots, D_N < 1$ такой, что $\left|\left(\sum_{n\in S^*} |a_n|^p\right)^{1/p} - \|\{a_n D_n\}_{n=1}^N\|_{l^p}\right| < \varepsilon/2$ и $\left|\left(\sum_{n\in S^*} |b_n|^p\right)^{1/p} - \|\{b_n D_n\}_{n=1}^N\|_{l^p}\right| < \varepsilon/2$. Тогда

$$\left|\left(\sum_{n\in S^*} |a_n|^p\right)^{1/p} - \left(\sum_{n\in S^*} |b_n|^p\right)^{1/p}\right| \le \left|\left(\sum_{n=1}^{N} |a_n D_n|^p\right)^{1/p} - \left(\sum_{n=1}^{N} |b_n D_n|^p\right)^{1/p}\right| + \varepsilon.$$

Заметим, что мы можем выбрать $D_1, \dots D_N$ таким образом, что для каждого n для некоторых $w_n^*, \tilde{w}_n^* \in W_n$ выполнено $D_n = d_{W_n}(w_n^*, \tilde{w}_n^*)$. Тогда по построению получаем

$$\left|\left(\sum_{n\in S^*} |a_n|^p\right)^{1/p} - \left(\sum_{n\in S^*} |b_n|^p\right)^{1/p}\right| \le$$
$$\left|\left(\sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n\ d_{W_n}(w_n^*, \tilde{w}_n^*)\big)^p\right)^{1/p} - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \big(b_n\ d_{W_n}(w_n^*, \tilde{w}_n^*)\big)^p\right)^{1/p}\right| + \varepsilon,$$

что обосновывает нужное равенство и доказывает предложение. □

Из этого предложения вытекает следующая теорема.

Теорема 3.10. (1) *Пусть* $1 \le p < \infty$. *Рассмотрим* $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *— фиксированную последовательность метрических пространств, пусть* $\mathrm{diam}(W_n) = 1$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$. *Пусть* $a, b \in l^p_+$.

Обозначим

$$X = (l^p) \prod_{n=1}^{\infty} a_n W_n,\ \ Y = (l^p) \prod_{n=1}^{\infty} b_n W_n.$$

Тогда

$$2d_{GH}(X, Y) \le \sup_{S\subset\mathbb{N}} \left|\left(\sum_{n\in S} |a_n|^p\right)^{1/p} - \left(\sum_{n\in S} |b_n|^p\right)^{1/p}\right|.$$

(2) *Рассмотрим* $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *— любое семейство метрических пространств, у которого* $\mathrm{diam}(W_\alpha) = 1$ *для всех* $\alpha \in A$. *Пусть* $a = \{a_\alpha\}_{\alpha\in A}, a_\alpha \ge 0$ *и* $b = \{b_\alpha\}_{\alpha\in A}, b_\alpha \ge 0$ *таковы, что* $\sup_{\alpha\in A} a_\alpha < \infty$, $\sup_{\alpha\in A} b_\alpha < \infty$.

Обозначим

$$X = (l^\infty) \prod_{\beta\in A} a_\beta W_\beta,\ \ Y = (l^\infty) \prod_{\beta\in A} b_\beta W_\beta.$$

Тогда

$$2d_{GH}(X, Y) \le \sup_{S\subset A} \left|\sup_{\beta\in S} a_\beta - \sup_{\beta\in S} b_\beta\right|.$$

Доказательство. Действительно, в обозначениях 3.9 верно $2d_{GH}(X, Y) \le \mathrm{dis}(f)$. □

Теорема 3.11. (1) *Пусть* $1 \le p < \infty$. *Рассмотрим* $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *— фиксированную последовательность метрических пространств, причем для всех* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено* $\mathrm{diam}(W_n) = 1$. *Пусть* $a, b \in l^p_+$ *такие, что*

$$\sup_{S\subset\mathbb{N}} \left| \left(\sum_{n\in S} |a_n|^p\right)^{1/p} - \left(\sum_{n\in S} |b_n|^p\right)^{1/p} \right| \le \big| \|a\|_{l^p} - \|b\|_{l^p} \big|.$$

Тогда

$$2d_{GH}\left((l^p)\prod_{n=1}^{\infty} a_n W_n,\ (l^p)\prod_{n=1}^{\infty} b_n W_n \right) = \big| \|a\|_{l^p} - \|b\|_{l^p} \big|.$$

(2) *Пусть* $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *— произвольное семейство метрических пространств, у которого для всех* $\alpha \in A$ *верно* $\mathrm{diam}(W_\alpha) = 1$. *Пусть* $a = \{a_\alpha\}_{\alpha\in A}, a_\alpha \ge 0$, $b = \{b_\alpha\}_{\alpha\in A}, b_\alpha \ge 0$ *такие, что* $\sup_{\alpha\in A} a_\alpha < \infty$, $\sup_{\alpha\in A} b_\alpha < \infty$. *Предположим, что*

$$\sup_{S\subset A} \big| \sup_{\beta\in S} a_\beta - \sup_{\beta\in S} b_\beta \big| \le \big| \sup_{\beta\in A} a_\beta - \sup_{\beta\in A} b_\beta \big|.$$

Тогда

$$2d_{GH}\left((l^\infty)\prod_{\beta\in A} a_\beta W_\beta,\ (l^\infty)\prod_{\beta\in A} b_\beta W_\beta \right) = \big| \sup_{\beta\in A} a_\beta - \sup_{\beta\in A} b_\beta \big|.$$

Доказательство. Докажем первый пункт, второй пункт аналогичен. Итак, обозначим $X = (l^p)\prod_{n=1}^{\infty} a_n W_n$, $Y = (l^p)\prod_{n=1}^{\infty} b_n W_n$ и заметим, что $\mathrm{diam}(X) = \|a\|_{l^p}$ и что $\mathrm{diam}(Y) = \|b\|_{l^p}$. По теореме 3.10 и на основании оценки

$$\big|\mathrm{diam}(X) - \mathrm{diam}(Y)\big| \le 2d_{GH}(X, Y)$$

получаем, что $2d_{GH}(X, Y) = \big| \|a\|_{l^p} - \|b\|_{l^p} \big|$. □

Замечание 3.12. Отметим, что теоремы 3.10 и 3.11 верны и для произвольных конечных произведений, так как всегда можно формально доопределить остальные множители так: $X_n = Y_n = \{pt\}$ или $X_\alpha = Y_\alpha = \{pt\}$.

Следствие 3.13. *Пусть* W_n *— любая последовательность метрических пространств, причем* $\mathrm{diam}(W_n) = 1$. *Пусть* $a, b \in l^1_+$ *таковы, что для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *верно* $a_n \le b_n$. *Тогда*

$$2d_{GH}\left((l^1)\prod_{n=1}^{\infty} a_n W_n,\ (l^1)\prod_{n=1}^{\infty} b_n W_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n).$$

Доказательство. Условие $a_n \le b_n$ автоматически гарантирует выполнение условий теоремы 3.11. □

Обозначение 3.14. Обозначим через S^1 метрическое пространство, являющееся окружностью с внутренней метрикой, причем $\mathrm{diam}(S^1) = 1$.

Пример 3.15. Оценим расстояние Громова–Хаусдорфа между торами $X = (l^2)aS^1 \times bS^1$ и $Y = (l^2)cS^1 \times dS^1$. По теореме 3.11 получаем, что если

$$\max\{|a-c|, |b-d|\} \le \left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2}\right|,$$

то

$$2d_{GH}(X,Y) = \left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2}\right|.$$

Например, при $a=1,\ b=3,\ c=2,\ d=5$ это условие выполнено и, соответственно,

$$2d_{GH}((l^2)S^1 \times 3S^1,\ (l^2)2S^1 \times 5S^1) = \sqrt{29} - \sqrt{10}.$$

4 Достижимость верхней оценки для l^∞-произведений

В теореме 3.11 мы получили достаточные условия достижимости нижней оценки в неравенстве

$$\bigl|\operatorname{diam}(X) - \operatorname{diam}(Y)\bigr| \le 2d_{GH}(X,Y) \le \max\{\operatorname{diam}(X), \operatorname{diam}(Y)\}.$$

Теперь получим достаточное условие для достижения верхней оценки. Начнем со следующего предложения.

Предложение 4.1. (1) *Пусть X, Y — метрические пространства, для которых выполнено* $\operatorname{diam}(X) \le \operatorname{diam}(Y) < \infty$. *Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется подмножество $Q_\varepsilon \subset Y$ такое, что $\#Q_\varepsilon > \#X$ и для всех $x, y \in Q_\varepsilon$ верно $d(x,y) \ge \operatorname{diam}(Y) - \varepsilon$. Тогда $2d_{GH}(X,Y) = \operatorname{diam}(Y)$.*

(2) *Пусть X, Y — метрические пространства, причем* $\operatorname{diam}(Y) = \infty$. *Предположим, что для любого $C > 0$ найдется подмножество $Q_C \subset Y$ такое, что $\#Q_C > \#X$ и для всех $x, y \in Q_C$ верно $d(x,y) \ge C$. Тогда $d_{GH}(X,Y) = \infty$.*

Доказательство. Будем доказывать только первый пункт, т.к. второй пункт аналогичен. Ясно, что $2d_{GH}(X,Y) \le \max\{\operatorname{diam}(X), \operatorname{diam}(Y)\} = \operatorname{diam}(Y)$, поэтому достаточно доказать, что $2d_{GH}(X,Y) \ge \operatorname{diam}(Y)$. Итак,

$$\begin{aligned}
2d_{GH}(X,Y) &= \inf_{R \in \mathcal{R}(X,Y)} \operatorname{dis}(R) = \inf_{f\colon X \to Y}\ \inf_{g\colon Y \to X} \max\{\operatorname{dis}(f), \operatorname{dis}(g), \operatorname{codis}(f,g)\} \ge \\
&\inf_{g\colon Y \to X} \operatorname{dis}(g) \ge \inf_{g\colon Y \to X} \operatorname{dis}(g|_{Q_\varepsilon}) = \inf_{g\colon Q_\varepsilon \to X} \operatorname{dis}(g) = \\
&= \inf_{g\colon Q_\varepsilon \to X}\ \sup_{x,y \in Q_\varepsilon} \Bigl| d_Y(x,y) - d_X\bigl(g(x), g(y)\bigr) \Bigr| \ge \operatorname{diam}(Y) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Последнее неравенство объясняется тем, что отображение $g\colon Q_\varepsilon \to X$ не может быть инъективным, поэтому найдутся $x, y \in Q_\varepsilon$ такие, что $x \ne y$ и $g(x) = g(y)$, следовательно, для этих x, y верно

$$\Bigl| d_Y(x,y) - d_X\bigl(g(x), g(y)\bigr) \Bigr| \ge \operatorname{diam}(Y) - \varepsilon.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим, что $2d_{GH}(X,Y) \ge \operatorname{diam}(Y)$. $\square$

Следствие 4.2. *Пусть X, Y — метрические пространства,* $\mathrm{diam}(X) \le \mathrm{diam}(Y)$*, причем* $\mathrm{diam}(Y)\Delta_\kappa \subset Y$*, где $\#X < \kappa$. Тогда $2d_{GH}(X,Y) = \mathrm{diam}(Y)$.*

Доказательство. В качестве Q_ε можно взять $\mathrm{diam}(Y)\Delta_\kappa$. □

Обозначение 4.3 ([17])**.** Для произвольного топологического пространства X обозначим через $d(X)$ его *плотность* — наименьшую мощность его всюду плотных подмножеств.

Теорема 4.4. (1) *Пусть X — ограниченное метрическое пространство плотности $d(X)$. Тогда для любого множества A мощности $\#A \ge d(X)$ верно*

$$2d_{GH}\Big(X, (l^\infty)\prod_{\alpha\in A} X\Big) = \mathrm{diam}(X).$$

(2) *Пусть X — неограниченное метрическое пространство плотности $d(X)$. Тогда для любого множества A мощности $\#A \ge d(X)$ верно*

$$d_{GH}\Big(X, (l^\infty)\prod_{\alpha\in A} X\Big) = \infty.$$

Доказательство. Докажем только первый пункт, так как второй аналогичен. Обозначим через $Y \subset X$ всюду плотное подмножество мощности $\#Y = d(X)$, тогда хорошо известно, что $\mathrm{diam}(Y) = \mathrm{diam}(X)$ и $d_{GH}(X,Y) = 0$. Итак, для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим $x, y \in Y$ такие, что $d_X(x,y) \ge \mathrm{diam}(X) - \varepsilon$. Обозначив

$$Q_\varepsilon = (l^\infty)\prod_{\alpha\in A}\{x,y\} \subset (l^\infty)\prod_{\alpha\in A} X$$

и учитывая, что $\#Q_\varepsilon = \exp(\#A) > \#A \ge d(X) = \#Y$, по предложению 4.1 получаем, что

$$2d_{GH}\Big(X, (l^\infty)\prod_{\alpha\in A} X\Big) = 2d_{GH}\Big(Y, (l^\infty)\prod_{\alpha\in A} X\Big) = \mathrm{diam}(X).$$

□

Следствие 4.5. *Пусть X — метрическое пространство. Тогда*

$$2d_{GH}\Big(X, (l^\infty)\prod_{y\in X} X\Big) = \mathrm{diam}(X).$$

Следствие 4.6. *Пусть X — сепарабельное метрическое пространство. Тогда*

$$2d_{GH}\Big(X, (l^\infty)\prod_{n=1}^{\infty} X\Big) = \mathrm{diam}(X).$$

5 Топологическое расстояние Громова–Хаусдорфа

Определение 5.1. Пусть R — отношение эквивалентности на метрическом пространстве (X, d). *Полуметрика d_R факторпространства* определяется формулой

$$d_R(x, y) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{k} d(p_i, q_i)\colon p_0 = x, q_k = y, k \in \mathbb{N}\Big\},$$

где инфимум берется по всем таким наборам $\{p_i\}$ и $\{q_i\}$, что точка q_i R-эквивалентна точке p_{i+1} при всех $i = 1, \ldots, k-1$.

Возникает вопрос, можно ли определить расстояние Громова—Хаусдорфа между произвольными метризуемыми пространствами как топологическую характеристику? Если рассмотреть индуцированную полуметрику на пространстве классов гомеоморфности $\mathcal{GH}$, то, в чем нетрудно убедиться, эта полуметрика будет тривиальной (тождественно нулевой). Действительно, для любого метризуемого пространства X всегда можно ввести метрику d_ε, порождающая данную топологию, в которой $\operatorname{diam}(X) < \varepsilon$ для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$. Поскольку расстояние от пространства $\{pt\}$ до X не будет превосходить $\frac{1}{2}\operatorname{diam}(X)$, то в силу неравенства треугольника мы получаем, что данное расстояние будет тривиальным.

Естественно предположить, что тривиальность вызвана возможностью неограниченного уменьшения диаметра. Попробуем исключить этот эффект, ограничив факторизацию на подмножества компактных пространств фиксированного диаметра (например, $\operatorname{diam}(X) = 1$). Кажется вероятным, что в этом классе индуцированная полуметрика позволит различать негомеоморфные пространства. Однако, как будет показано далее, даже это ограничение не препятствует вырождению расстояния.

Напомним, что через $\mathcal{M}$ мы обозначаем пространство всех метрических компактов. Обозначим через $\mathcal{S}$ сферу

$$\mathcal{S} = \big\{X \in \mathcal{M}\colon \operatorname{diam}(X) = 1\big\}.$$

Введем следующее отношение эквивалентности R: метрические пространства $X, Y \in \mathcal{S}$ являются R-эквивалентными, если они гомеоморфны, а полученную полуметрику в факторпространстве обозначим через D.

Лемма 5.2. *Пусть $X, Y \in \mathcal{S}$. Обозначим $X \times Y = (l^\infty)X \times Y$. Тогда $D(X, X \times Y) = 0$.*

Доказательство. Зафиксируем $0 < \lambda < 1$. Отметим, что, поскольку пространства $X \times Y$ и $X \times \lambda Y$ гомеоморфны, то по теореме 2.8 выполнено $D(X, X \times Y) = D(X \times \{pt\}, X \times \lambda Y) \le d_{GH}(X \times \{pt\}, X \times \lambda Y) \le \max\{d_{GH}(X, X), d_{GH}(\{pt\}, \lambda Y)\} = \operatorname{diam}(\lambda Y)/2 = \lambda/2$. Устремляя $\lambda \to 0$, получаем нужное. □

Теорема 5.3. *Полуметрика D факторпространства $\mathcal{S}$ по отношению эквивалентности R является тождественно нулевой.*

Доказательство. В обозначениях леммы 5.2 для любых метрических пространств $X, Y \in \mathcal{S}$ имеем

$$D(X, Y) \le D(X, X \times Y) + D(X \times Y, Y) = 0.$$

□

Список литературы

[1] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig: Veit, 1914; reprinted by Chelsea, 1949.

[2] D. Edwards, “The Structure of Superspace”, *Studies in Topology*, eds. N. M. Stavrakas, K. R. Allen, New York, London, San Francisco: Academic Press, Inc., 1975.

[3] M. Gromov, “Groups of Polynomial growth and Expanding Maps”, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **53** (1981).

[4] Д. Бураго, Ю. Бураго, С. Иванов, *Курс метрической геометрии*, М.–Ижевск: Ин-тут компьютерных исследований, 2004.

[5] А. О. Иванов, Н. К. Николаева, А. А. Тужилин, “Метрика Громова–Хаусдорфа на пространстве метрических компактов строго внутренняя”, *Матем. заметки*, **100**:6 (2016), 947–950.

[6] F. Mémoli, Z. T. Smith, “Embedding-projection correspondences for the estimation of the Gromov–Hausdorff distance”, *arXiv:2407.03295 [math.MG]* (2024).

[7] F. Schmiedl, “Computational aspects of the Gromov–Hausdorff distance and its application in non-rigid shape matching”, *Discrete Comput. Geom.*, **57**:4 (2017), 854–880.

[8] H. Adams, J. Bush, N. Clause, et al., “Gromov–Hausdorff distances, Borsuk–Ulam theorems, and Vietoris–Rips complexes”, *arXiv:2301.00246* (2023).

[9] S. Lim, F. Mémoli, Z. Smith, “The Gromov–Hausdorff distance between spheres”, *Geometry & Topology*, **27**:9 (2023), 3733–3800.

[10] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, “Расстояния Громова–Хаусдорфа до симплексов и некоторые приложения к дискретной оптимизации”, *Чебышевский сборник*, **21**:2 (2020), 169–189.

[11] Д. С. Григорьев, А. О. Иванов, А. А. Тужилин, “Расстояния Громова–Хаусдорфа до симплексов”, *Чебышевский сборник*, **20**:2 (2019), 108–122.

[12] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, “Вычисление расстояния Громова–Хаусдорфа с помощью числа Борсука”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, № 1 (2023), 33–38.

[13] Y. Ji, A. A. Tuzhilin, “Gromov–Hausdorff Distance Between Interval and Circle”, *Topology and its Applications*, **307**, Elsevier BV (2022).

[14] I. N. Mikhailov, “Calculating Gromov–Hausdorff distance by means of asymptotic dimension”, *arXiv:2505.18158* (2025).

[15] S. A. Bogaty, A. A. Tuzhilin, “Fundamentals of Theory of Continuous Gromov–Hausdorff distance”, *arXiv:2512.02611* (2025).

[16] J. Lee, C. Morales, *Gromov–Hausdorff Stability of Dynamical Systems and Applications to PDEs*, Birkhäuser/Springer, 2022.

[17] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, М.: Мир, 1986.