ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ПРИЛОЖЕНИЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (ДИПЛОМНАЯ РАБОТА) специалиста

# Расстояние Громова-Хаусдорфа между облаками с нетривиальным пересечением стационарных групп

ВЫПОЛНИЛ СТУДЕНТ 607 ГРУППЫ
**Нестеров Борис Аркадьевич**

*подпись студента*

Научный руководитель:
**Профессор, д.ф-м.н. Тужилин Алексей Августинович**

*подпись научного руководителя*

Москва 2025 г.

# Содержание

# 1. Введение.

Расстояние Громова–Хаусдорфа, рассматриваемое в данной работе, является расстоянием между метрическими пространствами. Впервые оно было введено в [1].

Традиционно, свойства расстояния Громова-Хаусдорфа изучаются на множестве компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии. На данном множестве расстояние удовлетворяет определению метрики. Именно такое расстояние рассматривал М. Громов в [2], где получил некоторые фундаментальные свойства данной метрики. Так, одним из важнейших результатов стал тот факт, что метрическое пространство компактов является полным и стягиваемым. Под стягиваемостью здесь подразумевается наличие отображения гомотетии, то есть умножения пространств на положительное число $\lambda$. Данное умножение является непрерывным с точки зрения метрики Громова-Хаусдорфа и при стремлении $\lambda$ к 0 все компактные метрические пространства $\lambda X$ сходятся к одноточечному пространству $\Delta_1$.

Позднее, в [3] М. Громов рассматривал расстояние Громова-Хаусдорфа на классе всех, не обязательно ограниченных метрических пространств. В этом случае расстояние не удовлетворяет всем аксиомам метрики, в частности расстояние между двумя неограниченными метрическими пространствами может быть равно бесконечности. В этом случае оказалось удобным провести факторизацию всего пространства по конечным расстояниям, и рассматривать отдельных представителей полученного факторпространства. Такие классы в дальнейшем назвали ***облаками***. То есть облако — все метрические пространства, находящиеся на конечном расстоянии Громова–Хаусдорфа от данного. Здесь и далее, облако содержащее метрическое пространство $X$ будем обозначать $[X]$.

Облака обладают многими нетривиальными свойствами. Так, прежде, чем говорить об их геометрии, стоит рассмотреть облака с точки зрения теории множеств. Традиционно, в работах, связанных с ними используется система аксиом NBG ([4], [5], [6]). В ней объектами изучения являются ***классы***. Классы, которые являются элементами других классов полагаются множествами. Остальные классы называются ***собственными***. В данной работе показано, что облака не являются множествами, то есть являются собственными классами. Собственный класс, снабженный метрикой называется метрическим классом. Чтобы каждое облако можно было считать метрическим классом, в данной работе отождествляются метрические пространства, находящиеся на нулевом расстоянии Громова–Хаусдорфа друг от друга. Вместе с этим, можно рассматривать расстояние Громова–Хаусдорфа между облаками, полностью аналогичное расстоянию между метрическими пространствами. Исследованию его свойств посвящена основная часть данной работы.

В работе [3] М. Громов предполагал, что все облака, аналогично пространству ограниченных метрических пространств, являются полными и стягиваемыми. Полнота облаков была доказана в работе [7].

Для изучения проблемы стягиваемости на каждом облаке вводится операция умножения на положительное число. Более точно, образ облака $[X]$ при умножении на $\lambda \in (0, \infty)$ — облако $\lambda[X]$, состоящее из всех пространств из облака $[X]$, умноженных на $\lambda$. Если предполагать, что все облака стягиваемы, то должны выполняться следующие условия:

(1) облака $[X]$ и $\lambda[X]$ должны быть равны,

(2) все пространства $\lambda Y$ должны непрерывно стремиться к одному и тому же пространству в облаке $[X]$.

Оказалось, что в общем случае оба этих утверждения не верны.

Можно привести пример неограниченного метрического пространства $X$, для которого расстояние между $X$ и $\lambda X$ равно бесконечности для некоторых $\lambda \in \mathbb{R}^+$(см. например [7]). Тогда все все пространства из облака $[X] \ni X$ перейдут в облако $[\lambda X] \ni \lambda X$, не совпадающее с $[X]$. В работе [8] было показано, что те $\lambda$, для которых облака $[X]$ и $[\lambda X]$ совпадают образуют мультипликативную подгруппу в $\mathbb{R}^+$ для фиксированного облака $[X]$. Такая подгруппа называется ***стационарной группой*** облака $[X]$.

В данной работе я исследую свойства облаков, обладающих нетривиальными стационарными группами. Основное внимание уделено парам облаков, стационарные группы которых имеют пересечение, отличное от $\{1\}$. Оказалось, что возможные расстояния между такими парами могут принимать только ограниченное количество значений.

В следующем разделе сформулирована и доказана теорема об образе центра при соответствии с конечным искажением между облаками. ***Центром*** облака с нетривиальной стационарной группой называется метрическое пространство, которое при умножении на $\lambda$ из стационарной группы остается изометричным себе. В работе [8] авторы доказали, что у таких облаков центр существует и единственен с точностью до нулевого расстояния Громова–Хаусдорфа.

В конце работы вводится понятие угла облака, необходимое для формулировки и доказательства теоремы о расстоянии между облаками с различными углами. Угол облака является инвариантом относительно умножения на число и является обобщением ультраметрического неравенства облака ограниченных метрических пространств.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, про- фессору А.А. Тужилину, а также доктору физико-математических наук, профессору А.О. Иванову за поста- новку задач и постоянное внимание к работе.

# 2. Предварительные результаты.

Перед формулировкой и доказательством основных теорем нам понадобятся следующие предварительные результаты.

**Определение 2.1** (Дискретная метрика)**.** Пусть $X$ — множество. ***Дискретной метрикой*** на $X$ называется метрика $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ такая, что $d(x,y) = 1$ для всех $x, y \in X$, $x \neq y$ и $d(x,x) = 0$ для всех $x \in X$.

## 2.1. Система аксиом NBG.

Настоящая работа проводится в рамках системы аксиом теории множеств фон Неймана – Бернайса – Гёделя. В данной системе аксиом все объекты называются классами. Нам понадобится следующее определение.

**Определение 2.2** (Собственный класс)**.** Класс $A$ называется ***собственным***, если он не является элементом никакого другого класса.

Все классы, не являющиеся собственными, являются множествами. Приведем некоторые примеры:

(1) Класс всех множеств является собственным.

(2) Класс всех кардиналов является собственным.

**Лемма 2.3.** *Класс всех метрических пространств является собственным.*

*Доказательство.* На любом множестве $X$ можно задать дискретную метрику $d$. Получаем, что все множества лежат в классе всех метрических пространств, а так как класс всех множеств собственный, то и класс всех метрических пространств также является собственным. ☐

В дальнейшем будет показано, что основные объекты изучения данной работы, облака, являются собственными классами.

## 2.2. Основные определения.

**Определение 2.4** (Симплекс)**.** Симплексом мощности $\alpha$ называется метрическое пространство $\Delta_\alpha$ мощности $\alpha$ с дискретной метрикой. В частности $\Delta_1$ будет обозначать одноточечное пространство.

Пусть $X$ и $Y$ — метрические пространства. Расстояние между точками метрического пространства $x, x'$ будем обозначать $|xx'|$. Между метрическими пространствами можно задать расстояние, называемое расстоянием Громова–Хаусдорфа.

**Определение 2.5** (Расстояние Хаусдорфа)**.** Пусть $X, Y$ — метрические подпространства метрического пространства $Z$. ***Расстоянием Хаусдорфа*** между пространствами $X$ и $Y$ называется величина

$$d_H(X,Y) = \max\left\{\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}|xy|, \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X}|xy|\right\}.$$

**Определение 2.6** (Расстояние Громова-Хаусдорфа)**.** ***Реализацией*** метрических пространств $X, Y$ называется тройка метрических пространств $X', Y', Z$ таких, что $X' \subset Z$ , $Y' \subset Z$, $X \cong X'$, $Y \cong Y'$.

***Расстоянием Громова-Хаусдорфа*** $d_{GH}(X,Y)$ между метрическими пространствами $X, Y$ является точная нижняя грань чисел $r$ таких, что существует реализация $(X', Y', Z)$ и $d_H(X', Y') \leqslant r$, где $d_H$ — расстояние Хаусдорфа.

Мы также будем пользоваться другим эквивалентным определением расстояния Громова-Хаусдорфа [9].

**Определение 2.7** (Соответствие)**.** Пусть $X$, $Y$ — метрические пространства. ***Соответствием*** $R$ между этими пространствами называется сюръективное многозначное отображение между ними. Множество всех соответствий между $X$ и $Y$ обозначается $\mathcal{R}(X,Y)$. Также будем отождествлять соответствие и его график.

***Искажением*** соответствия $R$ называется величина

$$\operatorname{dis} R = \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big| : (x,y),(x',y') \in R\Big\}.$$

**Определение 2.8** (Расстояние Громова-Хаусдорфа)**.** ***Расстояние Громова-Хаусдорфа*** между метрическими пространствами будем называть величину

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X,Y)\big\}.$$

**Лемма 2.9** ([9])**.** *Расстояние Громова-Хаусдорфа обладает следующими свойствами.*

(1) $d_{GH}(X,Y) \leqslant \frac{1}{2}\max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\}$.

(2) $d_{GH}(X,Y) \geqslant \frac{1}{2}|\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y|$.

Расстояние Громова-Хаусдорфа на собственном классе всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии является обобщенной псевдометрикой. Действительно, оно неотрицательно, $d_{GH}(X,X) = 0$ для всякого метрического пространства $X$, и для него выполняется неравенство треугольника.

**Пример 2.10.** Следующие примеры показывают, почему расстояние Громова-Хаусдорфа — обобщенная псевдометрика.

(1) $d_{GH}\big([0,1],(0,1)\big) = 0$ так как естественное вложение $(0,1) \hookrightarrow [0,1]$ имеет расстояние Хаусдорфа 0. При этом пространства не изометричны так как только $[0,1]$ является компактом.

(2) $d_{GH}\left([0,1],\mathbb{R}\right) = \infty$ по свойству 2 из леммы 2.9.

Далее будем рассматривать метрические пространства с точностью до нулевого расстояния между ними. Получившийся класс обозначим $\mathcal{GH}_0$. На нем расстояние Громова-Хаусдорфа становится обобщенной метрикой.

**Определение 2.11** ([7])**.** В классе $\mathcal{GH}_0$ рассмотрим следующее отношение: $X \sim Y \Leftrightarrow d_{GH}(X,Y) < \infty$. Нетрудно убедиться, что оно будет отношением эквивалентности. Классы этой эквивалентности называются ***облаками***. Облако, в котором лежит метрическое пространство $X$ будем обозначать $[X]$.

Для любого метрического пространства $X$ определена операция умножения его на положительное вещественное число $\lambda$: $X \mapsto \lambda X$, а именно $(X,\rho) \mapsto (X,\lambda\rho)$, расстояние между любыми точками пространства изменяется в $\lambda$ раз.

**Замечание 2.12.** Пусть метрические пространства $X$, $Y$ лежат в одном облаке. Тогда $d_{GH}(\lambda X,\lambda Y) = \lambda d_{GH}(X,Y) < \infty$, т.е. пространства $\lambda X$, $\lambda Y$ также будут лежать в одном облаке.

**Определение 2.13.** Определим операцию умножения облака $[X]$ на положительное вещественное число $\lambda$ как отображение, переводящее все пространства $Y \in [X]$ в пространства $\lambda Y$. По замечанию 2.12 все полученные пространства будут лежать в облаке $[\lambda X]$.

При таком отображении облако может как измениться, так и перейти в себя. Для последнего случая вводится специальное определение.

**Определение 2.14** ([8])**.** Стационарной группой $\operatorname{St}\big([X]\big)$ облака $[X]$ называется подмножество $\mathbb{R}_+$ такое, что для всех $\lambda \in \operatorname{St}\big([X]\big)$, $[X] = [\lambda X]$. Полученное подмножество действительно будет подгруппой в $\mathbb{R}_+$. Тривиальной будем называть стационарную группу равную $\{1\}$.

**Пример 2.15.** Приведем несколько примеров облаков и их стационарных групп.

(1) Пусть $\Delta_1$ — одноточечное метрическое пространство. Тогда
$\operatorname{St}\big([\Delta_1]\big) = \mathbb{R}_+$.

(2) $\operatorname{St}\big([\mathbb{R}]\big) = \mathbb{R}_+$.

(3) Предположим, что функция $\varphi(n)$ удовлетворяет соотношению $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n+1) - \varphi(n) = +\infty$. Для $q > 1$ зададим пространство $X_q = \big\{q^{\varphi(n)} : n \in \mathbb{N}\big\} \subset \mathbb{R}$ с метрикой, индуцированной из $\mathbb{R}$. Тогда выполняется $\operatorname{St}\big([X_q]\big) = \{1\}$[7].

(4) Для натурального $p$ зададим пространство $X_p = \{p^n : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$ с метрикой, индуцированной из $\mathbb{R}$. Для любого простого $p$ выполняется $\operatorname{St}\bigl([X_p]\bigr) = \{p^n : n \in \mathbb{Z}\}$[10].

**Лемма 2.16** ([8])**.** *В каждом облаке с нетривиальной стационарной группой существует единственное пространство $X$ такое, что для любого $\lambda$ из стационарной группы выполняется $X = \lambda X$.*

**Определение 2.17.** Пространство из леммы 2.16 будем называть ***центром*** облака.

**Замечание 2.18.** В облаке $[\Delta_1]$ для любого пространства $X$ выполняется:

$$|\lambda X, \mu X| = |\lambda - \mu||X, \Delta_1|.$$

**Замечание 2.19** (Ультраметрическое неравенство)**.** В облаке $[\Delta_1]$ для всех пространств $X_1, X_2$ выполняется неравенство:

$$|X_1, X_2| \leqslant \max\bigl\{|X_1, \Delta_1|, |X_2, \Delta_1|\bigr\}.$$

## 3. Мощность облаков.

Целью данного раздела является доказательство того, что каждое облако является собственным классом. Нам понадобится следующая вспомогательная лемма.

**Лемма 3.1** ([11])**.** *У любого множества кардинальных чисел есть верхняя грань.*

**Следствие 3.2.** *Всякий класс кардиналов, не ограниченных сверху, является собственным.*

Далее, сформулируем и докажем теорему о классе пространств в каждом облаке.

**Теорема 3.3.** *Все облака представляют собой собственные классы.*

*Доказательство.* По следствию 3.2 достаточно показать, что в любом облаке лежат пространства сколь угодно большой мощности. Пусть $X$ – метрическое пространство мощности $\alpha$, $\Delta_\beta$ — симплекс мощности $\beta$, где $\beta > \alpha$. Обозначим $X_\beta = X \sqcup \Delta_\beta$. Зафиксируем произвольную точку $x$ пространства $X$ и положим расстояние от нее до любой точки симплекса равным 1. Для точек $x' \in X$, $y \in \Delta_\beta$ определим

$$\rho_{X_\beta}(y, x') = \rho_{X_\beta}(x', y) := \rho_X(x', x) + 1.$$

Расстояния между другими парами точек оставим без изменений. Симметричность и неотрцательность расстояния $\rho_{X_\beta}$ очевидны. Для того чтобы полученное расстояние являлось метрикой достаточно проверить выполнение неравенства треугольника $\rho_{X_\beta}(x', z') \leqslant \rho_{X_\beta}(x', y') + \rho_{X_\beta}(y', z')$ только в том случае, если точки $x', y', z'$ не лежат одновременно в $\Delta_\beta$ или в $X$. Случаи $x', z' \in \Delta_\beta$ и $x', z' \in X$ очевидны. Разберем подробнее случаи, когда $x' \in X, z' \in \Delta_\beta$:

$$y' \in X : \rho_{X_\beta}(x', z') = \rho_X(x, x') + 1 \leqslant \rho_X(x, y') + \rho_X(y', x') + 1 = \rho_X(x', y') + \rho_X(y', z'),$$

$$y' \in \Delta_\beta : \rho_{X_\beta}(x', z') = \rho_X(x, x') + 1 \leqslant \rho_X(x', x) + 2 = \rho_X(x', y') + \rho_X(y', z').$$

Итак, полученное пространство действительно будет метрическим. Осталось заметить, что если вложить $X$ в $X_\beta$, то $X_\beta$ будет лежать в замкнутой окрестности $X$ радиуса 1. Отсюда $d_{GH}(X, X_\beta) \leqslant 1$, то есть $X_\beta$ лежит в облаке $[X]$. □

**Замечание 3.4.** Поскольку все облака являются собственными классами, между любыми двумя облаками существует биекция. Это означает, в частности, что класс соответствий между любыми двумя облаками не пуст.

**Определение 3.5.** Пусть $\mathcal{R}\bigl([X], [Y]\bigr)$ — класс всех соответствий между облаками $[X]$ и $[Y]$. Определим ***искажение*** соответствия $\operatorname{dis} R$ аналогично определению 2.7.

***Расстоянием Громова–Хаусдорфа*** между облаками будем называть величину

$$d_{GH}\bigl([X], [Y]\bigr) = \frac{1}{2} \inf\bigl\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}\bigl([X], [Y]\bigr)\bigr\}.$$

Приведем лемму о расстоянии между облаками специального вида.

**Лемма 3.6.** *Пусть для стационарных групп облаков $[X]$, $[Y]$ выполняется следующее соотношение:*

$$\operatorname{St}\bigl([X]\bigr) \cap \operatorname{St}\bigl([Y]\bigr) \neq \{1\}.$$

*Тогда расстояние Громова–Хаусдорфа между ними равно или 0 или $\infty$.*

*Доказательство.* Для любых метрических пространств $X_1$, $X_2$ и любого $\lambda > 0$ выполняется

$$d_{GH}(\lambda X_1, \lambda X_2) = \lambda d_{GH}(X_1, X_2). \tag{1}$$

Пусть $R_1$ – соответствие между $[X]$ и $[Y]$ и $\lambda > 0$. Положим $R_2$ — подмножество $\lambda[X] \times \lambda[Y]$ такое, что $(X_1, Y_1) \in R_1 \iff (\lambda X_1, \lambda Y_1) \in R_2$. Так как $\lambda[X], \lambda[Y]$ состоят в точности из пространств $\lambda X_1, \lambda Y_1$, $X_1 \in [X]$, $Y_1 \in [Y]$, $R_2$ также будет соответствием. При этом, из любого соответствия между $\lambda[X]$ и $\lambda[Y]$ можно получить соответствие между $[X]$ и $[Y]$ умножением на $\frac{1}{\lambda}$. Из соотношения 1 получаем $\operatorname{dis} R_2 = \lambda \operatorname{dis} R_1$.

Итак, между классами соответствий $\mathcal{R}\big([X],[Y]\big)$ и $\mathcal{R}\big(\lambda[X],\lambda[Y]\big)$ существуем биекция $f$ такая, что $\operatorname{dis} f(R) = \lambda \operatorname{dis} R$ для всех соответствий $R \in \mathcal{R}\big([X],[Y]\big)$. Отсюда $d_{GH}\big(\lambda[X],\lambda[Y]\big) = \lambda d_{GH}\big([X],[Y]\big)$. Пусть теперь $\lambda \in \operatorname{St}\big([X]\big) \cap \operatorname{St}\big([Y]\big)$, $\lambda \neq 1$. Тогда

$$d_{GH}\big([X],[Y]\big) = d_{GH}\big(\lambda[X],\lambda[Y]\big) = \lambda d_{GH}\big([X],[Y]\big).$$

Так как $\lambda \neq 1$ величина $d_{GH}\big([X],[Y]\big)$ может быть равна либо 0 либо $\infty$. □

# 4. Теорема об образе центра.

Прежде, чем сформулировать теорему, приведем некоторые полезные утверждения о соответствиях.

**Лемма 4.1.** *Пусть пространства $Y_1, Y_2$ лежат в образе пространства $X$ при соответствии $R$. Тогда $|Y_1, Y_2|$ не больше искажения $R$.*

*Доказательство.* Если пространства $Y_1, Y_2$ лежат в образе $X$, то

$$\operatorname{dis} R \geqslant \big|\,|Y_1, Y_2| - |X, X|\,\big| = |Y_1, Y_2|.$$

□

**Следствие 4.2.** *Если пространства лежат на расстоянии большем, чем искажение соответствия, то они не могут лежать в образе одного пространства.*

**Теорема 4.3.** *Пусть $M$ – центр облака $[M]$, имеющего нетривиальную стационарную группу. $R$ – соответствие между $[\Delta_1]$ и $[M]$ с конечным искажением $\varepsilon$. Тогда образ пространства $\Delta_1$ лежит от $M$ на расстоянии не большем $2\varepsilon$.*

*Доказательство.* Нетривиальность стационарной группы $[M]$ означает, что найдется число $l > 1$ такое, что $\{l^j | j \in \mathbb{Z}\}$ является подгруппой в $\operatorname{St}[M]$.

Зафиксируем $Y$ из образа $\Delta_1$. Предположим, что $|M, Y| = d > \varepsilon$. Обозначим $|Y, kY| = \rho$, $k \geqslant 2$, $k = l^{j_1}$. По неравенству треугольника $\rho + d \geqslant kd$, откуда $\rho \geqslant (k-1)d > (k-1)\varepsilon$. Тогда $kY$ лежит в образе $X \neq \Delta_1$. При этом, $\rho - \varepsilon \leqslant |X, \Delta_1| \leqslant \rho + \varepsilon$.

Возьмем произвольные $\alpha > 0$ и $\beta \in (0,1)$. Для пространств $(1+\alpha)X, (1-\beta)X$ будут выполняться неравенства:

$$|X, (1+\alpha)X| = \alpha|X, \Delta_1| \leqslant \alpha\rho + \alpha\varepsilon,$$

$$|X, (1-\beta)X| = \beta|X, \Delta_1| \leqslant \beta\rho + \beta\varepsilon,$$

$$|(1+\alpha)X, (1-\beta)X| = (\alpha+\beta)|X, \Delta_1| \geqslant (\alpha+\beta)\rho - (\alpha+\beta)\varepsilon.$$

Существуют $Y_\alpha, Y_\beta \in [M]$ такие, что $kY_\alpha \in R\big((1+\alpha)X\big)$, $kY_\beta \in R\big((1-\beta)X\big)$, и для них выполняются следующие неравенства:

$$|kY, kY_\alpha| \leqslant |X, (1+\alpha)X| + \varepsilon \leqslant \alpha\rho + (\alpha+1)\varepsilon,$$

$$|kY, kY_\beta| \leqslant |X, (1-\beta)X| + \varepsilon \leqslant \beta\rho + (\beta+1)\varepsilon,$$

$$|kY_\alpha, kY_\beta| \geqslant |(1+\alpha)X, (1-\beta)X| - \varepsilon \geqslant (\alpha+\beta)\rho - (\alpha+\beta+1)\varepsilon.$$

Поделим эти неравенства на $k$:

$$|Y, Y_\alpha| \leqslant \frac{\alpha}{k}\rho + \frac{\alpha+1}{k}\varepsilon,$$

$$|Y, Y_\beta| \leqslant \frac{\beta}{k}\rho + \frac{\beta+1}{k}\varepsilon,$$

$$|Y_\alpha, Y_\beta| \geqslant \frac{\alpha+\beta}{k}\rho - \frac{\alpha+\beta+1}{k}\varepsilon.$$

и возьмем прообразы пространств $Y, Y_\alpha, Y_\beta$:

$$|\Delta_1, X_\alpha| \leqslant \frac{\alpha}{k}\rho + (\frac{\alpha+1}{k} + 1)\varepsilon,$$

$$|\Delta, X_\beta| \leqslant \frac{\beta}{k}\rho + (\frac{\beta+1}{k} + 1)\varepsilon,$$

$$|X_\alpha, X_\beta| \geqslant \frac{\alpha+\beta}{k}\rho - (\frac{\alpha+\beta+1}{k} + 1)\varepsilon.$$

Считая, что $\alpha > \beta$ получаем неравенство:

$$\frac{\alpha+\beta}{k}\rho - (\frac{\alpha+\beta+1}{k} + 1)\varepsilon \leqslant \frac{\alpha}{k}\rho + (\frac{\alpha+1}{k} + 1)\varepsilon,$$

$$\Updownarrow$$

$$\rho \leqslant \frac{k}{\beta}\left(\frac{2\alpha+\beta+2}{k} + 2\right)\varepsilon,$$

$$\Updownarrow$$

$$\rho \leqslant \left(1 + \frac{2\alpha+2}{\beta} + 2\frac{k}{\beta}\right)\varepsilon.$$

Нас интересует оценка сверху для $d$:

$$d \leqslant \frac{\rho}{k-1} \leqslant \left(\frac{1}{k-1} + \frac{2\alpha+2}{\beta(k-1)} + 2\frac{k}{\beta(k-1)}\right)\varepsilon.$$

Последнее слагаемое в скобках строго больше 2 при любых $k > 2$, $\alpha > 0$, $\beta \in (0,1)$, а остальные слагаемые с ростом $k$ стремятся к 0. Так как стационарная группа нетривиальна, в ней есть последовательности чисел стремящихся к 0 и к $\infty$. Устремив $\beta$ к 1, а $k$ к бесконечности получаем оценку:

$$|Y, M| \leqslant 2\varepsilon,$$

которая завершает доказательство.

$\square$

## 5. Облако вещественной прямой.

По замечанию 2.19 в облаке $[\Delta_1]$ для любых пространств $X_1, X_2$ выполняется ультраметрическое неравенство. Целью данного раздела является показать, что в общем случае это не верно.

**Лемма 5.1.** *Если $X$ — подмножество вещественной прямой. Положим*

$$d = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ : \exists a, (a-r, a+r) \subset \mathbb{R} \setminus X\}.$$

*Тогда $d_{GH}(X, \mathbb{R})$ равно $d$.*

*Доказательство.* Каноническое вложение $X \hookrightarrow \mathbb{R}$ задает реализацию с расстоянием Хаусдорфа равным $d$. Отсюда

$$d_{GH}(X, \mathbb{R}) \leqslant d. \tag{2}$$

Далее считаем, что в $\mathbb{R} \setminus X$ лежит интервал $(a-r, a+r)$, $r \leqslant d$. Предположим, что $d_{GH}(\mathbb{R}, X) < r$. Тогда должна существовать реализация $(\mathbb{R}', X', Y)$ такая, что $d_H(\mathbb{R}', X') = r' < r$. Обозначим

$$X_l \coloneqq \{x \in X : x \leqslant a - r\}, X_r \coloneqq \{x \in X : x \geqslant a + r\}.$$

Это подмножества $X$ лежащие слева и справа от интервала $(a-r, a+r)$ соответственно. Заметим, что $X = X_l \sqcup X_r$. Также обозначим $X_l', X_r'$ их образы в реализации. Далее обозначим

$$U_l \coloneqq \cup_{x \in X_l'} B\left(x, r' + \frac{r-r'}{2}\right), \quad U_r \coloneqq \cup_{x \in X_r'} B\left(x, r' + \frac{r-r'}{2}\right),$$

то есть $U_l \cup U_r$ — покрытие $X'$ шарами радиуса $r' + \frac{r-r'}{2}$. Получаем, что $U_l, U_r$ - два открытых непересекающихся множества, но также $\mathbb{R}' \in U_l \cup U_r$ по определению расстояния Хаусдорфа, что противоречит связности прямой.

Получили, что $d_{GH}(X.\mathbb{R}) \geqslant r$ для всех $r$ таких, что в $\mathbb{R} \setminus X$ лежит интервал диаметра $2r$. Переходя к sup получаем $d_{GH}(X, \mathbb{R}) \geqslant d$. Вместе с неравенством 2 получаем искомое равенство $d_{GH}(X, \mathbb{R}) = d$. $\square$

Нам понадобится следующая вспомогательная лемма, аналогичная лемме 4.1.

**Лемма 5.2.** *Если $R$ - соответствие между метрическими пространствами $X$ и $Y$, то* $\operatorname{diam} R(x) \leqslant \operatorname{dis} R$ *для любой точки $x \in X$.*

Обозначим $\widetilde{\mathbb{R}}$ подпространство $\mathbb{R}^2$ с метрикой $l_1$, состоящее из прямой $\big\{(x,0)\colon x \in \mathbb{R}\big\}$ и точки $(0,1)$.

**Теорема 5.3.** *Пусть $\mathbb{Z}$ — метрическое пространство целых чисел с метрикой из $\mathbb{R}$. Тогда*

(1) $d_{GH}(\mathbb{Z},\mathbb{R}) = \frac{1}{2}$, $d_{GH}(\widetilde{\mathbb{R}},\mathbb{R}) \leqslant \frac{1}{2}$,

(2) $d_{GH}(\mathbb{Z},\widetilde{\mathbb{R}}) \geqslant \frac{2}{3}$.

*Доказательство.* (1). Каноничное вложение $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ задает реализацию с расстоянием Хаусдорфа равным $\frac{1}{2}$. Отсюда $d_{GH}(\mathbb{Z},\mathbb{R}) \leqslant \frac{1}{2}$. Обратное неравенство следует из леммы 5.1. Далее, вложение $\widetilde{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}' = \big\{(x,\frac{1}{2})\colon x \in \mathbb{R}\big\}$ дает реализацию с расстоянием Хаусдорфа равным $\frac{1}{2}$.

(2). Пусть $R$ — соответствие между $\mathbb{Z}$ и $\widetilde{\mathbb{R}}$, с искажением, равным $1+\varepsilon$ и в образе точки $i$ из $\mathbb{Z}$ лежит $(0,1)$. По лемме 4.1 диаметр образа точки не может быть больше искажения соответствия, следовательно, образ $i$ лежит в $(-\varepsilon,\varepsilon) \cup \big\{(0,1)\big\}$. Это означает, что для $x$ не лежащих в $(-\varepsilon,\varepsilon)$, пара $(i,x)$ не лежит в $R$. Обозначим через $\mathcal{N}$ множество всех целых чисел таких, что их образ лежит в $(-\varepsilon,\varepsilon) \cup \big\{(0,1)\big\}$. Множество $\mathcal{N}$ не пусто и не равно $\mathbb{Z}$, следовательно, по лемме 5.1, расстояние от $\mathbb{Z} \setminus \mathcal{N}$ до $\mathbb{R}$ будет не меньше 1. Из соответствия $R$ уберем пару $\big(i,(0,1)\big)$, а также все пары $(k,x)$ такие, что $x \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. Получившееся множество обозначим $R'$. Так как все точки из $\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon,\varepsilon)$ лежат в $R$ только в паре с точками из $\mathbb{Z} \setminus \mathcal{N}$ и наоборот, множество $R'$ будет соответствием между $\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon,\varepsilon)$ и $\mathbb{Z} \setminus \mathcal{N}$. Искажение подмножества соответствия по определению не больше искажения самого соответствия. Получаем цепочку неравенств:

$$1+\varepsilon = \operatorname{dis} R \geqslant \operatorname{dis} R' \geqslant 2d_{GH}\big(\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon,\varepsilon), \mathbb{Z} \setminus \mathcal{N}\big).$$

По неравенству треугольника

$$2d_{GH}\big(\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon,\varepsilon), \mathbb{Z} \setminus \mathcal{N}\big) \geqslant 2\Big|d_{GH}\big(\mathbb{R}, \mathbb{Z} \setminus \mathcal{N}\big) - d_{GH}\big(\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon,\varepsilon), \mathbb{R}\big)\Big| \geqslant 2 - 2\varepsilon.$$

Получили неравенство: $1+\varepsilon \geqslant 2-2\varepsilon$. Из него получаем нижнюю оценку на $\varepsilon$:

$$\varepsilon \geqslant \frac{1}{3},$$

откуда $\operatorname{dis} R \geqslant \frac{4}{3}$ и $d_{GH}\Big(\widetilde{\mathbb{R}},\mathbb{Z}\Big) \geqslant \frac{2}{3}$. □

# 6. Углы облаков.

## 6.1. Определения углов.

В данном разделе мы рассмотрим два определения угла облака. Для того, чтобы дать эти определения сначала необходимо определить угол между пространствами.
В дальнейшем будем считать, что у облаков нетривиальная стационарная группа и в обозначении облака $[M]$, $M$ является его центром.

**Определение 6.1.** ***Углом*** между пространствами $X_1, X_2 \in [M]$ такими, что $|X_1M| = r_1, |X_2M| = r_2, |X_1X_2| = d$, где $r_1, r_2 \neq 0$ называется величина $\arccos\left(\frac{r_1^2+r_2^2-d^2}{2r_1r_2}\right)$.
Будем обозначать его $\varphi(X_1,X_2)$.

**Замечание 6.2.** Такое определение естественным образом вытекает из евклидовой теоремы косинусов, а именно $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos(a,b)$.

Прежде, чем формулировать свойство угла, нам понадобится следующая вспомогательная лемма.

**Лемма 6.3.** *Для любого облака $[M]$ и $\lambda \in \mathbb{R}^+$ выполняются следующие свойства*:

(1) $\operatorname{St}\big(\lambda[M]\big) = \operatorname{St}\big([M]\big)$,

(2) $\lambda[M] = [\lambda M]$.

*Доказательство.* (1) Пусть $\mu \in \mathrm{St}\,\big([M]\big)$. Тогда $\mu \cdot \lambda[M] = \lambda \cdot \mu[M] = \lambda[M]$, т. е. $\mu \in \mathrm{St}\,\big(\lambda[M]\big)$. Отсюда $\mathrm{St}\,\big([M]\big) \subseteq \mathrm{St}\,\big(\lambda[M]\big)$. Обратное включение получается если рассмотреть облако $[M]$ как $\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda[M]$.

(2) Так как стационарные группы совпадают, для любого $\mu \in \mathrm{St}\,\big(\lambda[M]\big)$ выполняется $\mu \cdot \lambda M = \lambda \cdot \mu M = \lambda M$. Значит, $\lambda M$ — центр облака $\lambda[M]$. □

У угла между пространствами есть следующее свойство.

**Лемма 6.4.** *Для любых $X_1, X_2 \in [M], \lambda \in \mathbb{R}^+$ выполняется $\varphi(X_1, X_2) = \varphi(\lambda X_1, \lambda X_2)$.*

*Доказательство.* По лемме 6.3 пространство $\lambda M$ будет центром $\lambda[M]$. Как в определении угла, положим

$$|X_1 M| = r_1, |X_2, M| = r_2, |X_1 X_2| = d.$$

По определению угла получаем следующую цепочку равенств:

$$\varphi(\lambda X_1, \lambda X_2) = \frac{\lambda^2 r_1^2 + \lambda^2 r_2^2 - \lambda^2 d^2}{2\lambda r_1 \lambda r_2} = \varphi(X_1, X_2).$$

На этом доказательство закончено. □

Рассмотрим теперь два интересующих нас определения угла облака.

**Определение 6.5.** ***Углом*** облака $[M]$ называется величина

$$\varphi\big([M]\big) = \sup\big\{\varphi(X_1, X_2) \colon |X_1, M|, |X_2, M| \neq 0\big\}.$$

**Определение 6.6.** ***Равнобедренным углом*** облака $[M]$ называется величина

$$\varphi_e\big([M]\big) = \sup\big\{\varphi(X_1, X_2) \colon |X_1, M| = |X_2, M| \neq 0\big\}.$$

Для этих определений получаем следствие из леммы 6.4.

**Лемма 6.7.** *Для любого облака $[M]$ и $\lambda \in \mathbb{R}^+$ выполняется*:

(1) $\varphi\big(\lambda[M]\big) = \varphi\big([M]\big)$,

(2) $\varphi_e\big(\lambda[M]\big) = \varphi_e\big([M]\big)$,

(3) $\varphi_e\big([M]\big) \leqslant \varphi\big([M]\big)$,

(4) $0 \leqslant \varphi([M]) \leqslant \pi$,

(5) $0 \leqslant \varphi_e([M]) \leqslant \pi$.

Приведем примеры углов облаков.

**Лемма 6.8.** *Для облаков $[\Delta_1], [\mathbb{R}]$ выполняются следующие равенства:*

(1) $\varphi\big([\Delta_1]\big) = \frac{\pi}{2}$,

(2) $\varphi_e\big([\Delta_1]\big) = \frac{\pi}{3}$,

(3) $\varphi\big([\mathbb{R}]\big) = \varphi_e\big([\mathbb{R}]\big) = \pi$.

*Доказательство.* (1) Из ультраметрического неравенства следует, что $\varphi\big([\Delta_1]\big) \leqslant \frac{\pi}{2}$. Для доказательства обратного неравенства найдем угол между двухточечным симплексом $\Delta_2 = \{x_1, x_2\}$ и трехточечным симплексом $\lambda\Delta_3 = \{y_1, y_2, y_3\}$. Воспользуемся формулой, доказанной в [12] для нахождения расстояния Громова–Хаусдорфа между двумя трехточечными пространствами:

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \max\big\{|a_1 - a_2|, |b_1 - b_2|, |c_1 - c_2|\big\}.$$

Здесь $a_1 \leqslant b_1 \leqslant c_1$ — расстояния между точками в пространстве $X$, $a_2 \leqslant b_2 \leqslant c_2$ — расстояния между точками в пространстве $Y$. В нашем случае это $0, 1, 1$ и $\lambda, \lambda, \lambda$. Соответственно,

$$d_{GH}(\Delta_2, \lambda\Delta_3) = \frac{1}{2} \max\big\{|\lambda|, |\lambda - 1|, |\lambda - 1|\big\},$$

что при $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$ равно $\frac{\lambda}{2}$. Итак, $d_{GH}(\Delta_2, \lambda\Delta_3) = \frac{\lambda}{2}$. Далее, учитывая, что $|\Delta_1\Delta_2| = \frac{1}{2}, |\Delta_1\lambda\Delta_3| = \frac{\lambda}{2}$, найдем угол между $\Delta_2, \lambda\Delta_3$:

$$\cos\big(\varphi(\Delta_2, \lambda\Delta_3)\big) = \frac{\frac{\lambda^2}{4} + \frac{1}{4} - \frac{\lambda^2}{4}}{\frac{\lambda}{2}} = \frac{1}{2\lambda} \to 0, \lambda \to \infty.$$

Отсюда, $\varphi\big([\Delta_1]\big) \geqslant \sup \varphi(\Delta_2, \lambda\Delta_3) = \frac{\pi}{2}$.

(2) Из ультраметрического неравенства следует, что $\varphi_e\big([\Delta_1]\big) \leqslant \frac{\pi}{3}$. Для доказательства обратного неравенства достаточно найти пространства одинакового диаметра, расстояние между которыми равно их диаметрам. Этими пространствами являются, например, $\Delta_2, \Delta_3$.

(3) Достаточно привести пример пространств $X, Y \in [\mathbb{R}]$, таких, что $|X\mathbb{R}| = |Y\mathbb{R}| = \frac{1}{2}|XY|$. В [13] было доказано, что такими пространствами являются $\mathbb{Z}, \mathbb{R} \times [0, 1]$.

□

## 6.2. Расстояние между облаками с разными углами.

**Теорема 6.9.** *Пусть облака $[M], [N]$ имеют нетривиальное пересечение стационарных групп и их углы $\varphi\big([M]\big), \varphi\big([N]\big)$ различны. Тогда $d_{GH}\big([M], [N]\big) = \infty$.*

*Доказательство.* Без ограничения общности будем считать, что $\varphi\big([M]\big) > \varphi\big([N]\big)$. Для доказательства теоремы покажем, что не существует соответствия $R \in \mathcal{R}\big([M], [N]\big)$ с конечным искажением.

Предположим противное, т. е. существует соответствие $R$ с конечным искажением $\operatorname{dis} R = \varepsilon < \infty$ как отображение из облака $[M]$ в облако $[N]$. Построим функцию $f\colon [M] \to [N]$, $f(X)$ – произвольное пространство из $R(X)$. По определению угла, в облаке $[M]$ найдутся пространства $X_1, X_2$, для которых выполнено

$$\varphi\big([N]\big) < \varphi(X_1, X_2) \leqslant \varphi\big([M]\big).$$

Положим $|X_1M| = r_1^X, |X_2M| = r_2^X, |X_1X_2| = d^X$. Также зададим функцию

$$d^N\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, d^N(r_1, r_2) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\Big(\varphi\big([N]\big)\Big)}.$$

Тогда выполняется следующее неравенство:

$$d^N(r_1^X, r_2^X) < d^X. \tag{3}$$

По определению угла для любых пространств $Y_1, Y_2 \in [N]$ выполняется

$$|Y_1Y_2| \leqslant d^N\big(|Y_1N|, |Y_2N|\big). \tag{4}$$

Итак, наша задача — показать, что найдутся пространства в $[N]$, для которых неравенство (4) не выполняется.

Нетривиальность пересечения стационарных групп означает, что найдется подгруппа

$$\{q^k\colon k \in \mathbb{Z}, q > 1\} \in \operatorname{St}\big([M]\big) \cap \operatorname{St}\big([N]\big).$$

Положим $|NR(M)| = l$. Будем рассматривать пространства $R(q^kX_1), R(q^kX_2), k \in \mathbb{N}$. Для них выполнены следующие неравенства:

$$\big|R(q^kX_1), R(q^kX_2)\big| \geqslant q^kd^X - \varepsilon, \tag{5}$$

$$q^kr_1^X - \varepsilon \leqslant \big|R(M), R(q^kX_1)\big| \leqslant q^kr_1^X + \varepsilon,$$

$$q^kr_2^X - \varepsilon \leqslant \big|R(M), R(q^kX_2)\big| \leqslant q^kr_2^X + \varepsilon.$$

Из последних двух неравенств по неравенству треугольника получаем следующее:

$$q^kr_1^X - l - \varepsilon \leqslant \big|N, R(q^kX_1)\big| \leqslant q^kr_1^X + l + \varepsilon, \tag{6}$$

$$q^kr_2^X - l - \varepsilon \leqslant \big|N, R(q^kX_2)\big| \leqslant q^kr_2^X + l + \varepsilon. \tag{7}$$

Поделим неравенства (5), (6), (7) на $q^k$:

$$\big|q^{-k}R(q^kX_1), q^{-k}R(q^kX_2)\big| \geqslant d^X - \frac{\varepsilon}{q^k},$$

$$r_1^X - \frac{l+\varepsilon}{q^k} \leqslant \big|N, q^{-k}R(q^kX_1)\big| \leqslant r_1^X + \frac{l+\varepsilon}{q^k},$$

$$r_2^X - \frac{l+\varepsilon}{q^k} \leqslant \big|N, q^{-k}R(q^kX_2)\big| \leqslant r_2^X + \frac{l+\varepsilon}{q^k}.$$

Функция $d^N$ непрерывная, значит

$$\lim_{k\to\infty} d^N\Big(\big|N, q^{-k}R(q^kX_1)\big|, \big|N, q^{-k}R(q^kX_2)\big|\Big) = d^N(r_1^X, r_2^X).$$

Из неравенства (3) следует, что найдутся $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что $d^N(r_1^X, r_2^X) < d^N(r_1^X, r_2^X) + \delta_1 < d^X - \delta_2 < d^X$. Выберем такое $k_1$, чтобы для всех $k > k_1$ выполнялось

$$d^N\Big(\big|N, q^{-k}R(q^kX_1)\big|, \big|N, q^{-k}R(q^kX_2)\big|\Big) \in \big(d^N(r_1^X, r_2^X) - \delta_1, d^N(r_1^X, r_2^X) + \delta_1\big).$$

Также выберем $k_2$, такое что $\big|q^{-k}R(q^kX_1), q^{-k}R(q^kX_2)\big| > d^X - \delta_2$. Теперь, если взять $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$, то

$$\big|q^{-k_0}R(q^{k_0}X_1), q^{-k_0}R(q^{k_0}X_2)\big| > d^N\Big(\big|N, q^{-k_0}R(q_0^kX_1)\big|, \big|N, q^{-k_0}R(q^{k_0}X_2)\big|\Big)$$

Пространства $q^{-k_0}R(q^{k_0}X_1), q^{-k_0}R(q^{k_0}X_2)$ — искомые, для которых не выполняется неравенство (4). Противоречие. □

# 7. Выводы.

В ходе настоящей работы были получены следующие результаты:

- Показано, что облака в пространстве Громова–Хаусдорфа являются собственными классами в системе аксиом фон Неймана–Бернайса–Гделя (NBG), а не множествами.
- Установлено, что расстояние Громова–Хаусдорфа между облаками с нетривиальным пересечением стационарных групп может принимать только значения 0 или $\infty$
- Доказана теорема об образе центра: при соответствии с конечным искажением между облаком одноточечных пространств и облаком с нетривиальной стационарной группой образ центра лежит на расстоянии, не превосходящем .
- Исследовано облако вещественной прямой: вычислены расстояния до целочисленной решётки и других подпространств (например, ).
- Введены понятия угла и равнобедренного угла облака как новых инвариантов геометрии облаков.
- Доказано, что если облака имеют нетривиальное пересечение стационарных групп и различные углы, то расстояние между ними равно бесконечности.

# 8. Заключение.

В работе исследовано расстояние Громова–Хаусдорфа между облаками — классами эквивалентности метрических пространств по отношению конечности расстояния. Рассмотрены свойства облаков с точки зрения теории множеств, показано, что они представляют собой собственные классы в системе аксиом фон Неймана–Бернайса–Гделя.

Изучена структура облаков с нетривиальными стационарными группами. Введено понятие центра облака, доказана его единственность с точностью до нулевого расстояния Громова–Хаусдорфа. Установлено, что расстояние между облаками, стационарные группы которых имеют нетривиальное пересечение, дискретно и принимает значения 0 или $\infty$.

Введён и исследован новый инвариант — угол облака, обобщающий геометрические свойства пространства ограниченных метрических пространств. Вычислены значения углов для облака одноточечного пространства и облака вещественной прямой. Доказана теорема, связывающая углы облаков с расстоянием между ними: показано, что различие углов при нетривиальном пересечении стационарных групп влечёт бесконечность расстояния Громова–Хаусдорфа.

Полученные результаты уточняют структуру пространства всех метрических пространств с точки зрения метрики Громова–Хаусдорфа на неограниченных объектах. Выявлены ограничения на возможность конечного расстояния между облаками различной геометрической природы, показаны новые способы классификации облаков через их стационарные группы и угловые инварианты.

## Список литературы


[1] D. A. Edwards, «The Structure of Superspace,» в *Studies in Topology*, N. M. Stavrakas и K. R. Allen, ред., Academic Press, янв. 1975, с. 121—133, ISBN: 978-0-12-663450-1. DOI: 10.1016/B978-0-12-663450-1.50017-7

[2] M. Gromov, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, fr. CEDIC/Fernand Nathan, 1981, Google-Books-ID: TxN0QgAACAAJ, ISBN: 978-2-7124-0714-8.

[3] M. Gromov, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, en. Springer Science & Business Media, 1991, ISBN: 978-0-8176-3898-6.

[4] P. Bernays, «A system of axiomatic set theory—part 1,» *The Journal of Symbolic Logic*, т. 2, № 1, с. 65—77, март 1937, ISSN: 0022-4812, 1943-5886. DOI: 10.2307/2268862 дата обр. 31 марта 2026. url: https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-symbolic-logic/article/abs/system-of-axiomatic-set-theorypart-i/A42100297D0138740F9B304AF7962F87

[5] K. Godel, *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-hypothesis with the Axioms of Set Theory.* Princeton University Press, 1940, 80 с., ISBN: 978-0-691-07927-1.

[6] von Neumann J., «Eine Axiomatisierung der Mengenlehre,» *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, т. 154, с. 219—240, 1925.

[7] S. A. Bogaty и A. A. Tuzhilin, *Gromov-Hausdorff class: its completeness and cloud geometry*, 2021. arXiv: 2110.06101 [math.MG].

[8] S. I. Bogataya, S. A. Bogatyy, V. V. Redkozubov и A. A. Tuzhilin, *Clouds in Gromov-Hausdorff Class: their completeness and centers*, 2022. arXiv: 2202.07337 [math.MG].

[9] D. Burago, Y. D. Burago и S. Ivanov, *A Course in Metric Geometry*, en. American Mathematical Soc., 2001, Google-Books-ID: dRmIAwAAQBAJ, ISBN: 978-0-8218-2129-9.

[10] S. I. Bogataya и S. A. Bogatyy, «Isometric stabilizers of clouds,» *Topology and its Applications*, т. 329, 15 апр. 2023, ISSN: 0166-8641. DOI: 10.1016/j.topol.2022.108381 дата обр. 19 марта 2026.

[11] A. Levy, *Basic Set Theory.* Mineola, N.Y: Dover Publications, 2002, 416 с., ISBN: 978-0-486-42079-0.

[12] A. Ivanov и A. Tuzhilin, *Gromov–Hausdorff Distance, Irreducible Correspondences, Steiner Problem, and Minimal Fillings*, 2016. arXiv: 1604.06116 [math.MG].

[13] I. N. Mikhailov, *Расстояния Громова–Хаусдорфа между неограниченными метрическими пространствами*, 2025.