

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ПРИЛОЖЕНИЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

«Геометрия кратчайших геодезических в классе Громова–Хаусдорфа.»

ВЫПОЛНИЛ СТУДЕНТ
607 ГРУППЫ
ВИХРОВ АНТОН АНДРЕЕВИЧ

подпись студента

Научный руководитель:
Профессор, д.ф-м.н. Тужилин Алексей Августинovich

подпись научного руководителя

Москва
2025 г.

Содержание

1. Введение	1
2. Предварительные результаты	3
2.1. Пространства общего положения	5
2.2. Каноническая проекция	5
2.3. Подразбиение метрического пространства.	6
2.4. Функции, сохраняющие метрику.	7
3. Модифицирование способа построения геодезической	8
3.1. Пример метрических пространств с пустым множеством оптимальных соответствий.	8
3.2. Связь между существованием некоторых геодезических и оптимальным соответствием	11
3.3. Про 0-модификации	12
3.4. Исчерпывающие кусочно-линейные геодезические недостаточны для описания всех геодезических в пространстве Громова–Хаусдорфа	14
3.5. Преимущества хаусдорфовой реализации над соответствиями	15
3.6. Пример Хансена	16
3.7. Расширение примера Хансена	17
4. Сужение класса исследований	18
4.1. Плотность метрических пространств в общем положении в \mathcal{GH}	18
4.2. Построение плотного подкласса \mathcal{GH} , состоящего из метрических пространств с оптимальным соответствием между каждой парой	22
5. Выводы	23
6. Заключение	23

1. Введение

Симметричное отображение $d: X \times X \rightarrow [0, \infty]$, равное нулю на диагонали и удовлетворяющее неравенству треугольника, называется *обобщённой псевдометрикой*. Если, кроме того, функция d обращается в нуль только на диагонали, она называется *обобщённой метрикой*, а если она не принимает бесконечных значений, то она называется *метрикой*.

Расстояние Громова–Хаусдорфа измеряет степень различия между двумя метрическими пространствами. Это расстояние было введено Громовым в 1981 [9] и определялось как наименьшее расстояние Хаусдорфа между изометрическими копиями рассматриваемых пространств во всеможных объёмлющих пространствах. Позднее эквивалентное определение этого расстояния было дано с помощью соответствий: сюръективных многозначных отображений. Расстояние Громова–Хаусдорфа представляет собой инфимум искажений всехвозможных соответствий. Если инфимум достигается на некотором соответствии, то такое соответствие называется оптимальным.

В данной работе используется система аксиом, введённая фон Нейманом, Бернайсом и Гёделем, см. [18], в рамках которой рассматриваются множества и собственные классы, обобщающие понятие множества. Собственный класс, состоящий из всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, обозначается \mathcal{GH} . На этом собственном классе естественным образом определяется расстояние Громова–Хаусдорфа. Здесь и далее не будем различать изометричные метрические пространства.

В работе [15] оптимальное соответствие между конечными метрическими пространствами использовалось для построения геодезической между произвольными конечными метрическими пространствами. Такие геодезические называются линейными. Используя эту технику, можно построить линейную геодезическую между произвольными метрическими пространствами, между которыми существует оптимальное соответствие. Позднее, почти одновременно в [5] и [13], было доказано существование оптимального соответствия между компактными метрическими пространствами и, как следствие, геодезической между этими пространствами, порождённой оптимальным соответствием.

В настоящей работе я исследую геодезические в классе Громова–Хаусдорфа. Несмотря на то, что геодезическую в общем случае построить не удалось, я обнаружил некоторые удивительные свойства геодезических, а также расстояния Громова–Хаусдорфа в целом.

В первой части работы показан пример двух метрических пространств, между которыми не существует оптимального соответствия, тем самым линейную геодезическую между двумя произвольными метрическими пространствами найти невозможно. Простейшим обобщением линейной геодезической является кусочно–линейная геодезическая, составленная из последовательных линейных геодезических, являющаяся при этом кратчайшей. Оказалось, что из существования такой кусочно–линейной геодезической следует существование оптимального соответствия. Следовательно, такую геодезическую построить в общем случае невозможно. Возникло предположение, что возможно построить кратчайшую $\gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, являющуюся линейной на любом отрезке $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Такие геодезические называются исчерпывающиеся линейными. Оказалось, что и такие геодезические не существуют в общем случае.

Напомним, что помимо определения через соответствия, существует другое определение расстояния Громова–Хаусдорфа: оно равно точной нижней грани расстояний Хаусдорфа между различными изометрическими вложениями в объемлющие пространства. Если точная нижняя грань достигается на некотором объемлющем пространстве, то такие вложения называются оптимальной хаусдорфовой реализацией. В [19] показано, что между компактными метрическими пространствами можно построить оптимальную хаусдорфову реализацию, а по ней – геодезическую, составленную из подмножеств объемлющего пространства. Оказалось, что если существует геодезическая такого типа, то существует оптимальное соответствие между пространствами, находящимися на нулевом расстоянии от исходных.

Если пространства, находящиеся на нулевом расстоянии друг от друга неизометричны, то такие пространства называются 0-модификациями друг друга. Если расстояние между пространствами равно нулю и между ними существует оптимальное соответствие, то они совпадают. Тем не менее, между отрезком $[0, 1]$ и интервалом $(0, 1)$ оптимальное соответствие не существует, но при этом расстояние Громова–Хаусдорфа между ними равно нулю. Практически очевидно, что у конечных метрических пространств нет 0-модификаций. Также известно, что пополнения каждой 0-модификации произвольного вполне ограниченного метрического пространства совпадают. Однако в общем случае семейства 0-модификаций могут иметь более богатую структуру. В работе [8] построена пара различных неограниченных полных пространств, находящихся на нулевом расстоянии друг от друга, а в настоящей работе построена такая же пара, но ограниченных метрических пространств. В настоящей работе доказано, что оптимальная хаусдорфова реализация разбивает пространства, находящиеся на нулевом расстоянии друг от друга, на классы метрических пространств с совпадающим пополнением. В общем случае количество этих классов больше одного, поскольку, как было отмечено выше, существуют неизометричные друг другу, полные, ограниченные или неограниченные метрические пространства, находящиеся на нулевом расстоянии друг от друга.

Как было замечено выше, в общем случае невозможно построить линейную геодезическую, так же как и кусочно–линейную или геодезическую, исчерпывающейся линейными. Понятно, что метод построения геодезической по хаусдорфовой реализации, полученный в [19] не работает для произвольного объемлющего метрического пространства. В качестве примера можно рассмотреть одноточечное пространство, окружность и их оптимальную хаусдорфову реализацию: дизъюнктивное объединение двух пространств так, чтобы точка совпала с центром окружности. С другой стороны, если удалось изометрично вложить два метрических компакта в геодезическое метрическое пространство так, чтобы получилась оптимальная хаусдорфова реализация, то между ними можно построить кратчайшую геодезическую в метрике Громова–Хаусдорфа из подмножеств этого объемлющего пространства, см [19]. Возникает вопрос: всегда ли среди оптимальных хаусдорфовых реализаций имеется такая, по которой можно построить соответствующую геодезическую? На данный момент ответ на этот вопрос нам не известен, однако, даже если такой алгоритм существует, то оптимальная хаусдорфова реализация существовать не обязана.

В [11] построена пара полных метрических пространств X и Y , между которыми не существует оптимальной хаусдорфовой реализации. Однако, как будет показано в настоящей работе, у этих пространств существуют такие 0-модификации \tilde{X} и \tilde{Y} , что между \tilde{X} и \tilde{Y} оптимальная хаусдорфова реализация есть. В работе построены такие два метрических пространства, находящиеся на конечном расстоянии Громова–Хаусдорфа, что между ними не существует хаусдорфовой реализации, у них нет 0-модификаций, и тем не менее, эти пространства соединяются кратчайшей геодезической. Тем самым, существование геодезической не влечет ни существование оптимального соответствия, ни существования оптимальной хаусдорфовой реализации даже для 0-модификаций.

Так как геодезическую в общем случае нам построить не удалось, возникло предположение, что можно искать геодезическую между пространствами из специального класса. Пространства общего положения широко изучены в [14], и для них верно следующее: для любого пространства той же мощности из некоторой открытой

окрестности пространства общего положения всегда существует оптимальное соответствие. Эти пространства хорошо изучены и применялись в работах [6], [17], [16] и многих других. В настоящей работе будет показано, что такие пространства всюду плотны в классе Громова–Хаусдорфа, то есть, в окрестности произвольного метрического пространства существует метрическое пространство общего положения. Однако, до сих пор не найден способ построения геодезической между достаточно далекими пространствами общего положения.

В конце работы построен особый, всюду плотный класс метрических пространств со следующим свойством: между двумя произвольными метрическими пространствами, лежащих на конечном расстоянии друг от друга, существует оптимальное соответствие. Такие пространства являются так называемыми пространствами обобщенного общего положения: у каждого такого пространства D существует открытая такая окрестность $U(D)$, что для любого пространства A той же мощности, для которого множество $\mathcal{R}_{opt}(A, D) \neq \emptyset$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору А.А. Тужилину, а также доктору физико-математических наук, профессору А.О. Иванову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

2. Предварительные результаты

Сначала введем несколько основных обозначений. Обозначим через $\mathbb{R}_{\geq 0}$ множество неотрицательных действительных чисел, а через \mathbb{R}_+ множество положительных действительных чисел.

Пусть (X, ρ) — произвольное метрическое пространство и $x, y \in X$. Расстояние между точками x и y обозначается как $|xy| = \rho(x, y) = d^X(x, y)$. Обозначим через $U_\varepsilon(a)$ открытый шар с центром a радиуса ε и $U_\varepsilon(A) = \bigcup_{a \in A} U_\varepsilon(a)$ — ε -окрестность непустого подмножества A , а $S_\varepsilon(a)$ — сфера радиуса ε с центром в точке a .

Обозначим через $\#X$ мощность X и для любого $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ и любого метрического пространства X положим $aX = (X, a d^X)$.

Определение 1. Пусть A, B — непустые подмножества метрического пространства X . *Расстоянием Хаусдорфа* называется следующая величина

$$d_H^X(A, B) = \inf \left\{ r : A \subset U_r(B) \ \& \ B \subset U_r(A) \right\}.$$

Определение 2. Пусть A, B, X — метрические пространства. Если A изометрично \tilde{A} и B изометрично \tilde{B} , где \tilde{A} и \tilde{B} — подпространства X , то тройку $(\tilde{A}, \tilde{B}, X)$ называют *реализацией пары* (A, B) .

Определение 3. *Расстояние Громова–Хаусдорфа* между двумя метрическими пространствами A, B — это нижняя грань хаусдорфовых расстояний среди всех реализаций пары (A, B) . Другими словами,

$$d_{GH}(A, B) = \inf \left\{ r : \text{существует реализация } (\tilde{A}, \tilde{B}, X) \text{ пары } (A, B), \text{ что } d_H(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq r \right\}.$$

Определение 4. *Соответствием* между двумя множествами A и B называется такое подмножество $R \subset A \times B$, что для любых $a \in A$ и $b \in B$ существует $\tilde{a} \in A$ и $\tilde{b} \in B$, для которых $(a, \tilde{b}), (\tilde{a}, b)$ принадлежат R .

Далее, aRb означает, что a и b находятся в соответствии R , а множество всех соответствий между метрическими пространствами A, B обозначается как $\mathcal{R}(A, B)$.

Определение 5. Пусть R — соответствие между метрическими пространствами A, B . Его *искажение* определяется выражением

$$\text{dis } R = \sup \left\{ |X(a, a') - d_Y(b, b')| : aRb \text{ и } a'R' \right\}.$$

Предложение 6 ([3]). *Для любых метрических пространств A и B справедливо равенство:*

$$2 d_{GH}(A, B) = \inf_{R \in \mathcal{R}(A, B)} \text{dis } R.$$

Замечание 7. Если определить расстояние между псевдометрическими пространствами A' и B' так же, как и раньше:

$$2 d_{GH}(A', B') = \inf_{R \in \mathcal{R}(A', B')} \text{dis } R,$$

то оно совпадает с расстоянием между метрическими пространствами A, B , полученными факторизацией пространств A', B' по нулевым расстояниям.

Замечание 8. В дальнейшем, будем автоматически отождествлять псевдометрическое пространство с метрическим, факторизуя пространство по нулевым расстояниям.

Определение 9. Если искажение соответствия R минимально по включению среди всех соответствий $\mathcal{R}(A, B)$, то оно называется *неприводимым*. В случае, если выполнено $\text{dis}(R) = 2 d_{\text{GH}}(A, B) < \infty$, то такое соответствие называется *оптимальным*. Множество оптимальных соответствий между метрическими пространствами A, B обозначается как $\mathcal{R}_{\text{opt}}(A, B)$.

Определение 10. Диаметром метрического пространства A называется величина

$$\text{diam}(A) = \sup_{a, a' \in A} d(a, a')$$

Предложение 11 ([3]). Для произвольных ограниченных A, B имеем следующие неравенства:

$$|\text{diam}(A) - \text{diam}(B)| \leq 2 d_{\text{GH}}(A, B) \leq \max(\text{diam}(A), \text{diam}(B))$$

Определение 12. Пусть $R_1 \in \mathcal{R}(A, B)$ и $R_2 \in \mathcal{R}(B, C)$. Тогда их композицией будет является

$$R_2 \circ R_1 = \{(a, c) \mid \text{существует } b \text{ такой, что } aR_1b, bR_2c\}.$$

Лемма 13. Искажение композиции соответствий не превосходит суммы их искажений.

Доказательство. Действительно, для любых (a, c) и $(a', c') \in R_2 \circ R_1$ находим произвольные b и $b' \in B$ такие, что $aR_1b, a'R_1b', bR_2c, b'R_2c'$

$$||aa'| - |cc'|| \leq ||aa'| - |bb'|| + ||bb'| - |cc'|| \leq \text{dis}(R_1) + \text{dis}(R_2).$$

Применяя супремум к обеим сторонам, получаем требуемый результат. □

В данной работе кратчайшие кривые называются геодезическими.

Теорема 14 ([13]). Если R — оптимальное соответствие между метрическими пространствами A и B , то кривая $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{GH}$, где $\gamma(t) = (R, d_t)$ и $d_t((a, b), (a', b')) = (1 - t)d_A(a, a') + td_B(b, b')$, — геодезическая, соединяющая метрические пространства A, B .

Такие геодезические принято называть *линейными*.

Определение 15. Класс Громова–Хаусдорфа \mathcal{GH} является собственным классом (в смысле теории множеств фон Неймана–Бернейса–Гёделя) всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии.

Теорема 16 ([3]). Расстояние Громова–Хаусдорфа является обобщенной псевдометрикой на \mathcal{GH} .

Через Δ_n обозначим n -точечный *симплекс*, т.е. такое метрическое пространство мощности n , что расстояния между различными его точками равны 1.

Определение 17. *Оптимальной хаусдорфовой реализацией* двух метрических пространств A, B будем называть такую тройку $(X, \tilde{A}, \tilde{B})$, реализующую пару A, B , что $d_H^X(A, B) = d_{\text{GH}}(A, B)$. Если расстояние Громова–Хаусдорфа не совпадает с расстоянием Хаусдорфа между \tilde{A} и \tilde{B} , то такую тройку будем называть *хаусдорфовой реализацией*. В дальнейшем будем опускать \tilde{A} и \tilde{B} , если изометрические копии пространств A и B понятны из контекста.

Заметим, что изометричное вложение $\varphi : A \rightarrow B$ также задает хаусдорфову реализацию, где $X = B$.

Определение 18. *Спектр* метрического пространства — это совокупность всех расстояний между точками (включая нулевое).

2.1. Пространства общего положения

Определение 19. Пусть $X \in \mathcal{GH}$. Обозначим через $S(X)$ множество всех биективных отображений X в себя. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} s(X) &= \inf \{|xx'| \mid x \neq x'; x, x' \in X\}, \\ t(X) &= \inf \{|xx'| + |x'x''| - |xx''| \mid x \neq x' \neq x'' \neq x; x, x', x'' \in X\}, \\ e(X) &= \inf \{\text{dis}(f) \mid f \in S(X), f \neq \text{id}\}, \\ e'(X) &= \inf \{\text{dis}(f) \mid f \in S(X) \setminus \text{ISO}(X)\}. \end{aligned}$$

Определение 20. *Пространство общего положения* — это метрическое пространство X , в котором $s(X)$, $t(X)$, $e(X)$ положительны.

Определение 21. *Пространство обобщённого общего положения* — это метрическое пространство X , в котором $s(X)$, $e'(X)$ положительны.

Теорема 22 ([14]). *Если пространство M удовлетворяет условиям $e(M) > 0$ и $s(M) > 0$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ такого, что $\varepsilon < s(M)/4$, $\varepsilon < e(M)/4$, метрического пространства X и соответствия $R \in \mathcal{R}(M, X)$, для которых выполнено $\text{dis}(R) < 2\varepsilon$, R является оптимальным соответствием.*

Замечание 23. Теорема 22 остается верной, если вместо $e(M)$ рассматривать $e'(M)$. Чтобы доказать это, достаточно заметить, что соответствия, отличающиеся изометрией пространства M , имеют одинаковые искажения. Таким образом, условие отделения от тождественного для всех нетождественных отображений можно заменить условием отделения от изометрии, которое совпадает с условием $e'(M) > 0$.

2.2. Каноническая проекция

Напомним [?], как построить псевдометрическое пространство из связного взвешенного графа. Везде ниже графы считаются простыми, связными и взвешенными, а функция весов рёбер ω (заданная на рёбрах графа) является неотрицательной. Множество вершин графов и множество рёбер могут быть бесконечными. Вершины графов иногда называются их точками. Ребро, соединяющее x и y , обозначается как xy или $\{x, y\}$. Везде ниже предполагается, что $\omega(xx) = 0$ для любой вершины графа, несмотря на отсутствие рёбер xx .

Определение 24. *Обобщённый путь L* в графе G , соединяющий его точки x и y , — это конечная последовательность $x_1x_2\dots x_N$ с $x_1 = x$ и $x_N = y$, такая, что либо $x_i x_{i+1}$ является ребром, либо $x_i = x_{i+1}$, все рёбра различны, и если две точки из этой последовательности совпадают, то все промежуточные точки также совпадают с ними. *Рёбра обобщённого пути* — это рёбра, соединяющие последовательные различные точки этого пути. *Длина пути L* определяется как $\omega(L) = \sum_{i=1}^{N-1} \omega(x_i x_{i+1})$. *Множество обобщённых путей*, соединяющих x и y , обозначается $\mathbb{L}(x, y)$.

В данной работе **обобщённый путь** просто называется путём.

Определение 25. Для каждого взвешенного графа (V, E, ω) определим метрику d_ω на V как

$$d_\omega(y_1, y_2) = \inf \{\omega(L) \mid L \in \mathbb{L}(y_1, y_2)\}.$$

Это расстояние называется взвешенной путевой метрикой, см. [?]. Отображение $\pi : (V, E, \omega) \rightarrow (V, d_\omega)$ называется *канонической проекцией*.

Поскольку функция весов не обязана удовлетворять неравенству треугольника, может оказаться, что выполнено $d_\omega(y_1, y_2) < \omega(y_1 y_2)$, например, если найдется путь $L \in \mathbb{L}(y_1, y_2)$ короче, чем $\omega(y_1 y_2)$. Говорят, что проекция π *сохраняет веса рёбер*, если $\omega(xy) = d_\omega(x, y)$ для любого $xy \in E$.

Известно (см. [?]), что (Y, d_ω) является псевдометрическим пространством.

Лемма 26. *Пусть $X = (V, E, \omega)$ — граф. Если существует $C > 0$ такое, что $\omega(e) \geq C$ для всех $e \in E$, то $\pi(X)$ является метрическим пространством.*

Определение 27. Пусть X — взвешенный граф, а $z_1 z_2$ — его ребро. Тогда *неравенство многоугольника для нижнего основания $z_1 z_2$* и пути $L \in \mathbb{L}(z_1, z_2)$ — это неравенство $\omega(z_1 z_2) \leq \omega(L)$.

Лемма 28. *Каноническая проекция сохраняет веса рёбер тогда и только тогда, когда все неравенства многоугольника выполняются для всех нижних оснований $xy \in E$ и любого $L \in \mathbb{L}(x, y)$.*

Доказательство. Заметим, что $\inf\{\omega(L) : L \in \mathbb{L}(x, y)\} \leq \omega(xy)$, так как $xy \in \mathbb{L}(x, y)$. В силу неравенства многоугольника с нижним основанием xy имеем $\omega(xy) \leq \omega(L)$ для любого $L \in \mathbb{L}(x, y)$.

Если неравенство многоугольника не выполняется хотя бы для одной пары точек x, y , то есть существует путь $L \in \mathbb{L}(x, y)$ такой, что $\omega(xy) > \omega(L)$, то $d_\omega(x, y) < \omega(xy)$. \square

2.3. Подразбиение метрического пространства.

Здесь представлено обобщение понятия разбиения графа.

Конструкция 29. Рассмотрим произвольное метрическое пространство X как взвешенный полный граф G' с функцией весов ω , равной расстоянию между точками. Для каждой пары точек $\{u, v\}$ зададим произвольное множество индексов $\mathcal{I}(u, v)$ (это множество может быть пустым) и добавим точки $\alpha_i^{u,v}$, $i \in \mathcal{I}(u, v)$. Соединим каждую $\alpha_i^{u,v}$ с каждой $\alpha_j^{u,v}$, а также соединим точки u, v со всеми $\alpha_i^{u,v}$. Добавленным рёбрам назначим произвольные веса так, чтобы выполнялись неравенства многоугольника во всех подграфах $G_{u,v}$, порождённых множеством $\{u, v, \alpha_i^{u,v} : i \in \mathcal{I}(u, v)\}$ (фактически, $G_{u,v}$ является псевдометрическим пространством, если рассматривать эти веса как расстояния). Обозначим полученный граф через G .

Обозначим $Z = \pi(G)$, а точки, полученные из X , будем обозначать так же, как и в X . Приведём некоторые свойства пространства Z .

Лемма 30. *Для связного взвешенного графа $G = (U, V, \omega)$, полученного по Конструкции 29, выполнены следующие свойства:*

- (1) *Проекция π сохраняет веса всех рёбер.*
- (2) *Расстояние d_Z между точками x, y , расположенными в $G_{u,v}$ и $G_{u',v'}$ соответственно, где $uv \neq u'v'$ и $x, y \notin X$, равно минимальной длине следующих путей:*

- (1) $L_1 = xuu'y$,
- (2) $L_2 = xuv'y$,
- (3) $L_3 = xvv'y$,
- (4) $L_4 = xvv'y$.

- (3) *Расстояние от точки x из $G_{u,v}$, где $v \neq x \neq u$, до $u' \in X$, где $v \neq u' \neq u$, равно минимальной длине следующих путей:*

- (1) $L_1 = xuu'$,
- (2) $L_2 = xvu'$.

Доказательство. Докажем утверждение (1). Для этого необходимо проверить все неравенства многоугольника и применить Лемму 28. Возьмём произвольные точки a, b такие, что в G есть ребро ab , и рассмотрим произвольный путь L между a и b . Теперь докажем, что $\omega(ab) \leq \omega(L)$.

Сначала рассмотрим случай, когда $\{a, b\} \subset X$. Любой путь $L \in \mathbb{L}(a, b)$ можно разбить на подпути $L = \sqcup_i L_i$, целиком лежащие в некоторых G_{x_i, x'_i} , где $x_i, x'_i \in X$, причём соседние подпути пересекаются в точках из X . По определению имеем $\omega(L) = \sum_i \omega(L_i)$. Заметим, что $\omega(x_i x'_i) \leq \omega(L_i)$, поскольку в G_{x_i, x'_i} выполняются неравенства многоугольника. Также имеем $\omega(ab) \leq \sum_i \omega(x_i x'_i)$, так как $x_i, x'_i \in X$, $a = x_0$, $b = x'_N$ для некоторого N , а $\omega|_X$ удовлетворяет неравенствам треугольника. Собирая всё вместе, получаем $\omega(L) = \sum_i \omega(L_i) \geq \sum_i \omega(x_i, x'_i) \geq \omega(ab)$.

Теперь рассмотрим случай, когда $ab \subset G_{u,v}$ и $ab \neq uv$ для некоторых $u, v \in X$. Если путь L целиком лежит в $G_{u,v}$, то $\omega(ab) \leq \omega(L)$ в силу неравенств многоугольника. Если путь L проходит через точку u и выходит за пределы $G_{u,v}$, то он обязан также проходить через точку v , так как путь L не проходит дважды через одну и ту же точку u , а граф $G \setminus \{u, v\}$ (подграф G , порождённый всеми вершинами, кроме u, v) несвязен (и путь L соединяет точки из разных компонент связности). Тогда путь L можно разбить на три части: $L_1 \in \mathbb{L}(a, u)$, $L_2 \in \mathbb{L}(u, v)$, $L_3 \in \mathbb{L}(v, b)$, где $L_1, L_3 \subset G_{u,v}$. Как получено ранее, $\omega(u, v) \leq \omega(L_2)$. Тогда для пути

L' , являющийся конкатенацией $L_1; u, v; L_2$, имеем $\omega(L') \leq \omega(L)$. Поскольку $L' \in G_{u,v}$, а в $G_{u,v}$ выполняются неравенства многоугольника, получаем $\omega(ab) \leq \omega(L') \leq \omega(L)$. Доказательство пункта (1) завершено.

Теперь докажем пункт (2). Рассмотрим произвольный путь L , соединяющий x и y , и пусть его первая вершина в X — это a_1 , а последняя — a_2 (путь обязан проходить через точки из X , так как $G \setminus X$ несвязен, а точки x и y принадлежат разным компонентам связности). Длина любого пути, соединяющего a_1 и a_2 , не меньше длины отрезка a_1a_2 . Длина любого пути, соединяющего x и a_1 , не меньше $\omega(xa_1)$, аналогично для y и a_2 в силу неравенств многоугольника. Таким образом, расстояние равно длине пути xa_1a_2y . Точка a_1 должна принадлежать той же компоненте связности, что и x , а a_2 — той же, что и y . Пункт доказан.

Наконец, докажем пункт (3). Любой путь, соединяющий x и u' , обязан проходить через некоторую точку $a \in \{u, v\}$, так как x и u' принадлежат разным компонентам связности $G \setminus \{u, v\}$. Любой путь, соединяющий x и a , не короче пути xa , а любой путь, соединяющий a и u' , не короче пути au' . Лемма доказана. \square

Такую конструкцию назовем *подразбиением метрического пространства* X . В данной работе эта конструкция используется в самом простом виде: $\#\mathcal{I}(u, v) = 1$ для $u \neq v$.

2.4. Функции, сохраняющие метрику.

Функции, сохраняющие метрику, изучаются в [2], а их приложения к классу Громова–Хаусдорфа — в [4]. Здесь приведены некоторые необходимые свойства и новая теорема о их связи с расстоянием Громова–Хаусдорфа.

Определение 31. Функция $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ называется *сохраняющей метрику*, если и только если для каждого метрического пространства (X, d_X) пространство $(X, f \circ d_X)$ является метрическим.

Теорема 32 ([2]). *Функция $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ сохраняет метрику тогда и только тогда, когда $f(x) = 0$ только для $x = 0$, и для произвольных неотрицательных a, b, c , таких что $|b - c| \leq a \leq b + c$, выполняется неравенство $f(a) \leq f(b) + f(c)$.*

Применяя определение дважды, получаем, что композиция функций, сохраняющих метрику, также сохраняет метрику. Обозначим $f(X)$ как метрическое пространство $(X, f \circ d_X)$. Для ненулевого подмножества $A \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ определим

$$\|f\|_A = \sup\{|f(x)| : x \in A\}.$$

Лемма 33. *Для любого метрического пространства X и функции, сохраняющей метрику f , выполняется неравенство*

$$2 \, d_{\text{GH}}(X, f(X)) \leq \| \text{id} - f \|_A$$

где $A = [s(X), \text{diam}(X)]$, если $\text{diam}(X) < \infty$, и $A = [s(X), \infty)$ в противном случае.

Доказательство. Достаточно рассмотреть $R = \{(u, u) \mid u \in X\}$, для которого $\text{dis}(R) \leq \| \text{id} - f \|_A$, где A — множество из условия теоремы. Таким образом, $2 \, d_{\text{GH}}(X, f(X)) \leq \text{dis}(R) \leq \| \text{id} - f \|_A$. \square

Лемма 34. *Пусть X, Y — элементы пространства Громова–Хаусдорфа \mathcal{GH} и $d_{\text{GH}}(X, Y) < \infty$, а f — функция сохраняющая метрику. Тогда*

$$d_{\text{GH}}(f(X), f(Y)) \leq \inf_{r > d_{\text{GH}}(X, Y)} f(r).$$

Более того, если между метрическими пространствами X и Y существует оптимальное соответствие, то выполняется неравенство:

$$d_{\text{GH}}(f(X), f(Y)) \leq f(d_{\text{GH}}(X, Y)).$$

Доказательство. Докажем первое утверждение. Для любого $r > d_{\text{GH}}(X, Y)$ выберем соответствие $R \in \mathcal{R}(X, Y)$, такое что $\text{dis}(R)/2 < r$. Построим взвешенный граф $Z = (X \sqcup Y, U, d_Z)$, где функция весов на X совпадает с метрикой на X , а на Y — с метрикой на Y . Для рёбер, соединяющих вершины x и y , таких что xRy , положим $d_Z(a, b) = r$, если aRb . Так как $r \geq \text{dis}(R)/2$, все неравенства треугольника выполняются, а проекция π сохраняет расстояния в силу Леммы 28. Применяя метрически выпуклую функцию f к построенному пространству, получаем $d_{\text{GH}}(f(X), f(Y)) \leq d_{\text{H}}^{f(\pi(Z))}(f(X), f(Y)) = f(r)$, где $d_{\text{H}}^{f(\pi(Z))}(f(X), f(Y))$ вычисляется в $f(\pi(Z))$. Переходя к пределу в соответствии с условием, получаем требуемый результат.

Для доказательства второго утверждения достаточно положить $r = d_{\text{GH}}(X, Y)$ и, выбрав такое соответствие R , что $\text{dis}(R)/2 = r$, завершить построение из первой части доказательства. \square

Тривиальным следствием этой теоремы является следующий факт:

Замечание 35. Предположим, что для заданных метрических пространств X и Y найдена метрически выпуклая функция f , такая что

$$f(d_{\text{GH}}(X, Y)) < d_{\text{GH}}(f(X), f(Y)) \leq \inf_{r > d_{\text{GH}}(X, Y)} f(r).$$

Тогда между X и Y не существует оптимального соответствия.

3. Модифицирование способа построения геодезической

Из следующих результатов сразу же вытекает невозможность в общем случае построить линейную геодезическую.

3.1. Пример метрических пространств с пустым множеством оптимальных соответствий.

В [8] был получен похожий результат, но для неограниченного случая. В этом разделе построен пример, доказывающий, что не существует способа построения линейных геодезических между произвольными метрическими пространствами в общем случае.

Пример 36. Приведем пример полных метрических пространств X и Y , таких что $d_{\text{GH}}(X, Y) > 0$, а $\mathcal{R}_{\text{opt}}(X, Y)$ — пустое множество.

Для этого рассмотрим $X = \Delta_2$ и $Z = (\mathbb{N}, d_Z)$, где

$$d_Z(i, j) = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 1/4 - 1/2^{\max(i, j)+2}, & i \neq j. \end{cases}$$

Заметим, что все расстояния между различными точками больше или равны $1/4 - 1/2^4$. Все расстояния лежат в отрезке $[1/8, 1/4]$. Пространство Z на самом деле является метрическим пространством, потому что для любых $p_1, p_2, p_3 \in Z$, $p_i \neq p_j$ для $i \neq j$, выполняется неравенство $d(p_1, p_2) \leq 1/4 \leq 1/8 + 1/8 \leq d(p_1, p_3) + d(p_3, p_2)$.

Разделим метрическое пространство Z следующим образом: для каждой упорядоченной пары точек (z_1, z_2) из $Z \times Z$, где $z_1 < z_2$, добавим новую точку z_3 и обозначим новый граф как G .

- (1) Множество точек графа G , лежащих в Z , будем обозначать как OLD.
- (2) Множество оставшихся точек графа G будем обозначать как NEW.

Соединяем каждую точку $z_3 \in \text{NEW}$ ребрами с z_1 и z_2 и присваиваем этим ребрам веса следующим образом: $\omega(z_3, z_2) = \delta = 1/2023$, $\omega(z_1, z_3) = \omega(z_1, z_2) - \delta$. Определим функции

- (3) left: $\text{NEW} \rightarrow \text{OLD}$, right: $\text{NEW} \rightarrow \text{OLD}$: left(z_3) = z_1 и right(z_3) = z_2 , где z_3 добавлена для пары $z_1 < z_2$;
- (4) nearest, где nearest(z_3) = $\{\text{left}(z_3), \text{right}(z_3)\}$ для $z_3 \in \text{NEW}$;
- (5) far(z_3) = $\text{OLD} \setminus \text{nearest}(z_3)$ для каждого $z_3 \in \text{NEW}$.

Здесь и ниже, z_3 и y_3 обозначают произвольные точки из NEW, $z_2 = \text{right}(z_3)$, $z_1 = \text{left}(z_3)$, $y_2 = \text{right}(y_3)$, $y_1 = \text{left}(y_3)$.

Пусть $Y = \pi(G)$, и продолжим обозначать через Z образ $\pi(Z)$. Поскольку граф G был получен в соответствии с Конструкцией 29, то можно применить Лемму 30 (она верна, потому что подграфы G_{z_1, z_2} удовлетворяют неравенству треугольников), следовательно, проекция π сохраняет веса. По Лемме 26, Y является метрическим пространством. Также будем рассматривать Y как взвешенный граф, где весовая функция — это расстояние. Теперь опишем, как выглядят другие расстояния в новом пространстве.

Лемма 37. Расстояние от $z_3 \in \text{NEW}$ до $y \in \text{far}(z_3)$ равно длине пути из двух ребер $L = z_3uy$, где $u = \text{right}(z_3) = z_2$, более того, $|L| = \omega(z_2y) + \delta = d_{\max(z_2, y)} + \delta < 1/2$.

Доказательство. Согласно Пункту 3 Леммы 30, расстояние вычисляется как длина пути $L = z_3uy$ для некоторого $u \in \text{nearest}(z_3)$, и из-за структуры весов графа G оно равно

(1) $d_k - \delta + d_m$ для некоторого $2 \leq k, m \in \mathbb{N}$, если L проходит через $z_1 = \underline{\text{left}}(z_3)$, или

(2) $\delta + d_l$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$, если L проходит через $z_2 = \underline{\text{right}}(z_3)$.

Заметим, что

$$\delta + d_l < 1/4 + \delta < 1/4 + 1/8 - \delta = 1/4 - 1/16 - \delta + 1/4 - 1/16 \leq 1/4 - 1/2^{k+2} - \delta + 1/4 - 1/2^{m+2} = d_k - \delta + d_m.$$

Таким образом, расстояние вычисляется как длина пути $L = z_3 u y$ для $u = z_2 = \underline{\text{right}}(z_3)$, и его длина равна $\delta + \omega(z_2 y)$. \square

Лемма 38. Пусть для $z_3, y_3 \in \text{NEW}$ выполняются условия

$$\begin{aligned} z_1 &= \underline{\text{left}}(z_3) \neq \underline{\text{right}}(y_3) = y_2, \\ z_2 &= \underline{\text{right}}(z_3) \neq \underline{\text{left}}(y_3) = y_1. \end{aligned}$$

Тогда расстояние от z_3 до y_3 равно длине пути из трех ребер $z_3 u v y_3$, где $u = \underline{\text{right}}(z_3)$, $v = \underline{\text{right}}(y_3)$, и равно $\omega(z_2 y_2) + 2\delta = d_{\max(y_2, z_2)} + 2\delta < 1/2$.

Доказательство. Согласно Пункту 2 Леммы 30, кратчайшая кривая имеет вид $z_3 u v y_3$, где $u = \underline{\text{nearest}}(z_3)$, $v = \underline{\text{nearest}}(y_3)$, и ее длина равна

- (1) $(d_m - \delta) + (d_k) + (d_p - \delta)$, если $u = \underline{\text{left}}(z_3)$ и $v = \underline{\text{left}}(y_3)$,
- (2) $(\delta) + (d_{k'}) + (\delta)$, если $u = \underline{\text{right}}(z_3)$ и $v = \underline{\text{right}}(y_3)$,
- (3) $(d_m - \delta) + (d_{k''}) + (\delta)$, если $u = \underline{\text{left}}(z_3)$ и $v = \underline{\text{right}}(y_3)$,
- (4) $(\delta) + (d_{k'''}) + (d_p - \delta)$, если $u = \underline{\text{right}}(z_3)$ и $v = \underline{\text{left}}(y_3)$,

где $d_m = \omega(z_1 z_2)$, $d_p = \omega(y_1 y_2)$, и k, k', k'', k''' — неотрицательные целые числа, и $2 < m, p \in \mathbb{N}$ в силу условий. Заметим, что

$$\delta + d_{k'} + \delta < 1/4 + 2\delta < 1/2 - 1/8 - 2\delta = 1/4 - 1/16 + 1/4 - 1/16 - 2\delta \leq d_m - \delta + d_{k''} + \delta$$

и

$$\delta + d_{k'} + \delta < \delta + d_{k'''} + d_p - \delta.$$

Из неравенства $2\delta + d_n < 1/2$ получаем $d(z_3, y_3) < 1/2$. \square

Лемма 39. Пусть для различных $z_3, y_3 \in \text{NEW}$, $\underline{\text{right}}(y_3) = \underline{\text{left}}(z_3)$. Тогда $d(z_3, y_3) = \omega(z_1 z_2) = d_{z_2} < 1/2$.

Доказательство. Согласно пункту 2 Леммы 30, кратчайшая кривая имеет вид $z_3 u v y_3$, где $u = \underline{\text{nearest}}(z_3)$, $v = \underline{\text{nearest}}(y_3)$, и её длина равна

- (1) $L_1 = (d_m - \delta) + (d_k) + (d_p - \delta)$, если $u = \underline{\text{left}}(z_3)$ и $v = \underline{\text{left}}(y_3)$,
- (2) $L_2 = (\delta) + (d_{k'}) + (\delta)$, если $u = \underline{\text{right}}(z_3)$ и $v = \underline{\text{right}}(y_3) = \underline{\text{left}}(z_3)$,
- (3) $L_3 = (d_m - \delta) + (d_{k''}) + (\delta)$, если $u = \underline{\text{left}}(z_3) = v = \underline{\text{right}}(y_3)$,
- (4) $L_4 = (\delta) + (d_{k'''}) + (d_p - \delta)$, если $u = \underline{\text{right}}(z_3)$ и $v = \underline{\text{left}}(y_3)$,

где $d_m = \omega(z_1 z_2)$, $d_p = \omega(y_1 y_2)$, а k'', k''' — неотрицательные целые числа, и k, k' больше или равны 2. Случай, когда $d_{k''} = d(\underline{\text{right}}(z_3), \underline{\text{left}}(z_3)) = 0$, означает, что $L_3 = d_m < 1/4$. Заметим, что $L_1 \geq d_m + (d_p - 2\delta)$, и выражение в скобках положительно, поэтому $L_1 > L_3$. Заметим, что $d_{k'} = d(\underline{\text{right}}(z_3), \underline{\text{left}}(z_3)) = d(z_1, z_2) = d_m$, и $L_2 = d_m + 2\delta > L_1$. Наконец, условия $\underline{\text{right}}(z_3) = \underline{\text{left}}(y_3)$ и $\underline{\text{right}}(y_3) = \underline{\text{left}}(z_3)$ являются взаимоисключающими для $z_3 \neq y_3$, так что $d_{k'''} > 0$ и

$$L_4 = d_{k'''} + d_p \geq 1/4 - 1/16 + 1/4 - 1/16 > 1/4 > d_m = L_3.$$

\square

Лемма 40. Для пространств X и Y выполняется $2 d_{\text{GH}}(X, Y) = 3/4 + \delta$ и $R_{\text{opt}}(X, Y) = \emptyset$.

Доказательство. Любое неприводимое соответствие между пространствами X, Y имеет вид

$$R = \{\{x_1\} \times R(x_1), \{x_2\} \times R(x_2)\},$$

где $R(x_1) \cap R(x_2) = \emptyset$.

Приведем пример последовательности соответствий $R_N \in \mathcal{R}(X, Y)$, для которых искажение стремится к $3/4 + \delta$. Пусть

$$A_1 = \{n \in Z \mid n \leq N\}, \quad A_2 = \{n \in Z \mid n > N\},$$

тогда

$$R_N(x_1) = A_1 \bigcup \{u \in Y \mid \exists a \in A_1 \text{ такое, что } d_Z(u, a) = \delta\},$$

$$R_N(x_2) = A_2 \bigcup \{u \in Y \mid \exists a \in A_2 \text{ такое, что } d_Z(u, a) = \delta\}.$$

Объединение $R_N(x_1)$ и $R_N(x_2)$ содержит весь Z , а также весь NEW (для каждого z_3 в NEW существует $\underline{\text{right}}(z_3)$ на расстоянии δ), и $R_N(x_1) \cap R_N(x_2) = \emptyset$, так как каждая точка z_3 из NEW имеет ровно одну точку OLD на расстоянии δ , и пара точек на расстоянии δ может быть только некоторая $z_3 \in \text{NEW}$ и $\underline{\text{right}}(z_3)$.

Диаметр этого разбиения меньше $1/2$, поскольку $\text{diam}(Y)$ меньше $1/2$. Расстояния между точками из разных элементов разбиения имеют следующие виды:

- (1) расстояние от точки из $\text{OLD} \cap R_N(x_2)$ до точки в $\text{OLD} \cap R_N(x_1)$ — вида d_M ,
- (2) от точки из $\text{OLD} \cap R_N(x_2)$ до точки из $\text{NEW} \cap R_N(x_1)$ — вида $d_M + \delta$, так как выполнено включение $\underline{\text{far}}(\text{NEW} \cap R_N(x_1)) \subseteq \text{OLD} \cap R_N(x_2)$,
- (3) от точки из $\text{NEW} \cap R_N(x_2)$ до точки из $\text{OLD} \cap R_N(x_1)$ — либо вида $d_M - \delta$, либо вида $d_M + \delta$,
- (4) от точки в $\text{NEW} \cap R_N(x_2)$ до точки в $\text{NEW} \cap R_N(x_1)$ — либо вида $d_M + 2\delta$, либо вида d_M (см. Лемму 38 и 39),

где M — положительное целое число.

Каждое из расстояний, описанных выше, за исключением, возможно, d_M в пункте 4, рассчитывается по некоторому пути, который проходит через старую точку $z > N$, так что $M > N$.

Значение d_M в пункте 4 — это расстояние от $z_3 \in R_N(x_2) \cap \text{NEW}$, которое было добавлено для $z_1 < z_2$, где $z_2 > N$, до некоторой $y_3 \in R_N(x_1) \cap \text{NEW}$, где $y_1 = \underline{\text{left}}(y_3) = z_2 = \underline{\text{right}}(z_3)$, или $y_2 = \underline{\text{right}}(y_3) = z_1 = \underline{\text{left}}(z_3)$ согласно Лемме 39. Первый случай невозможен, так как y_3 могло быть добавлено только для $y_1 < y_2 \leq N$, в то время как z_3 было добавлено для $z_1 < z_2 > N$. Следовательно, $y_2 = \underline{\text{right}}(y_3) = z_1 = \underline{\text{left}}(z_3)$. Согласно Лемме 39, расстояние между z_3 и y_3 равно $d(z_1, z_2) = d_M = d_{\max(z_1, z_2)}$, что означает, что $M > N$ и в этом случае.

В соответствии со структурой расстояний между точками в $R(x_1)$ и $R(x_2)$ минимальное расстояние между точками $y \in R_N(x_1)$ и $y' \in R_N(x_2)$ равно $d_{N+1} - \delta = 1/4 - 1/2^{N+3} - \delta$, то есть расстояние между z_3 (добавленным для $1 < N + 1$) и 1. Поскольку $\max(\text{diam}(R_N(x_1)), \text{diam}(R_N(x_2))) < 1/2$, то

$$\text{dis}(R_N) = \max(1 - 1/4 + 1/2^{N+3} + \delta, \text{diam}(R_N(x_1)), \text{diam}(R_N(x_2))) \rightarrow 3/4 + \delta.$$

Теперь рассмотрим произвольное неприводимое соответствие $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ с $\text{dis}(R) < 1 - \delta$. Докажем, что его искажение строго больше $3/4 + \delta$.

Рассмотрим произвольную точку z_3 из NEW и предположим, что она принадлежит $R(x_1)$. Если $\underline{\text{right}}(z_3)$ принадлежит $R(x_2)$, то искажение такого соответствия не меньше $1 - \delta$. Следовательно, каждый $z_3 \in \text{NEW}$ принадлежит одному и тому же элементу разбиения, что и его $\underline{\text{right}}(z_3)$. Поскольку каждый из $R(x_1)$ и $R(x_2)$ является непустым подмножеством, каждый из них содержит точку из Z (если он содержит $z_3 \in \text{NEW}$, он также содержит и $\underline{\text{right}}(z_3)$). Найдем такое минимальное n , что $n \in R(x_1)$ (без ограничения общности), и $n + 1 \in R(x_2)$. Тогда $\text{dis}(R) \geq |1 - (1/4 + 1/2^{n+3} + \delta)|$, потому что $z_3 \in \text{NEW}$, добавленный в пару $n, n + 1$, принадлежит $R(x_2)$. Следовательно, $2 \text{d}_{\text{GH}}(X, Y) = 3/4 + \delta$, и $\mathcal{R}_{\text{opt}}(X, Y) = \emptyset$. \square

3.2. Связь между существованием некоторых геодезических и оптимальным соответствием

Попытаемся расширить класс линейных геодезической. Простейшим расширением является кусочно-линейная геодезическая

Определение 41. *Кусочно-линейной геодезической $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathcal{GH}$ называется геодезическая с аффинно-натуральной параметризацией (отличной от натуральной параметризации умножением на константу), если существует конечное разбиение $\Delta = (t_0, \dots, t_n)$ интервала $[0, 1]$ и соответствие $R_i \in \mathcal{R}_{\text{opt}}(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i))$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, такие что геодезическая γ является линейной геодезической на каждом подинтервале $[t_i, t_{i+1}]$, построенной по соответствию R_i .*

Предложение 42. *Если существует кусочно-линейная геодезическая между метрическими пространствами A и B , то множество $\mathcal{R}_{\text{opt}}(A, B)$ не пусто.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть соответствие $R = \bigcirc_{i=1}^n R_i$ (композиция соответствий R_i), для него по Лемме 13 выполняется неравенство

$$\text{dis}(R) \leq \sum_{i=1}^n \text{dis}(R_i) = \sum_{i=1}^n 2 d_{\text{GH}}(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) = 2 d_{\text{GH}}(A, B).$$

□

Следствие 43. *Если существует кусочно-линейная геодезическая между метрическими пространствами, то между метрическими пространствами существует линейная геодезическая.*

Конструкция 44 ([1]). Пусть X_n — фундаментальная последовательность в \mathcal{GH} , такая что $2 d_{\text{GH}}(X_n, X_{n+1}) < 2^{-n}$. Выберем соответствия $R_n \in \mathcal{R}(X_n, X_{n+1})$ так, чтобы $\text{dis}(R_n) < 2^{-n}$. Рассмотрим множество $\tilde{X} = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$.

Нить — это последовательность точек $x_n \in X_n$, такая что $x_n R_n x_{n+1}$ для всех натуральных n . Обозначим множество нитей как \tilde{X} , полностью упорядочим это множество и обозначим i -ю нить как $\{x_n^i\}$. Определим псевдометрику на \tilde{X} .

Теорема 45 ([1]). *Функция $d_{\tilde{X}}(\{x_n^i\}, \{x_n^j\}) = \lim_{m \rightarrow \infty} d_{X_m}(x_m^i, x_m^j)$ является псевдометрикой на \tilde{X} , и*

$$\sup_{i,j} \left| d_{\tilde{X}}(\{x_n^i\}, \{x_n^j\}) - d_{X_m}(x_m^i, x_m^j) \right| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

В частности, $d_{\text{GH}}(\tilde{X}, X_n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Предложение 46. *Пусть $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathcal{GH}$ — геодезическая с аффинно-натуральной параметризацией, соединяющая метрические пространства A и B . Пусть существует монотонно возрастающая последовательность t_i интервала $[0, 1]$, сходящаяся к 1, и существует оптимальное соответствие между $\gamma(t_i)$ и $\gamma(t_{i+1})$. Тогда существует такая 0-модификация \tilde{B} пространства B , что существует оптимальное соответствие между A и \tilde{B} .*

Доказательство. Построим линейную геодезическую между каждой парой соседних точек $\gamma(t_i)$. Без ограничения общности, предполагаем, что γ является такой геодезической. Заметим, что для любого положительного δ , между любыми двумя пространствами из образа интервала $[0, 1 - \delta]$ существует оптимальное соответствие, согласно Предложению 42. Пусть X_n — последовательность точек $\gamma(1 - 1/2^{n+K})$ для некоторого $K \in \mathbb{N}$. Выбираем такое K , что $d_{\text{GH}}(X_n, X_{n+1}) \leq d_{\text{GH}}(A, B) * 1/2^{n+K} < 1/2^{n+1}$. Используя Конструкцию 44 и Теорему 45, получаем предельное пространство \tilde{B}' . Из-за выбора X_n и по Теореме 45, выполнено неравенство $d_{\text{GH}}(B, \tilde{B}') \leq d_{\text{GH}}(B, X_n) + d_{\text{GH}}(\tilde{B}', X_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, метрическое пространство \tilde{B} , полученное путём факторизации \tilde{B}' по нулевым расстояниям, является 0-модификацией метрического пространства B . Заметим, что оптимальное соответствие между A и \tilde{B} существует, если и только если существует оптимальное соответствие между A и \tilde{B}' . Теперь построим оптимальное соответствие между A и \tilde{B} . Рассмотрим соответствие $R \in \mathcal{R}(A, \tilde{B}') = \left\{ (a, \{x_n^i\}) : a R_0 x_1^i \right\}$ и $\tilde{R}_n \in \mathcal{R}(A, X_n) = \left\{ (a, x_n^i) : a R_0 x_1^i \right\}$, где $R_0 \in \mathcal{R}_{\text{opt}}(A, X_1)$. Заметим, что

$\text{dis}(\tilde{R}_n) \rightarrow 2 \text{d}_{\text{GH}}(A, \tilde{B}')$ при $n \rightarrow \infty$ в силу конструкции. Теперь покажем, что $\text{dis}(R) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dis}(\tilde{R}_n)$. Искажение соответствия R равно

$$\begin{aligned} \text{dis}(R) &= \sup_{(a, \{x_n^i\}), (a', \{x_n^j\})} \left| d_A(a, a') - d_{\tilde{B}'}(\{x_n^i\}, \{x_n^j\}) \right| = \sup_{(a, \{x_n^i\}), (a', \{x_n^j\})} \left| d_A(a, a') - \lim_{n \rightarrow \infty} d_{X_n}(x_n^i, x_n^j) \right| \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{(a, \{x_n^i\}), (a', \{x_n^j\})} \left| d_A(a, a') - d_{X_n}(x_n^i, x_n^j) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dis}(\tilde{R}_n) = 2 \text{d}_{\text{GH}}(A, \tilde{B}'). \end{aligned}$$

Таким образом, R является оптимальным соответствием. \square

Следствие 47. Пусть $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{GH}$ — геодезическая с аффинно-натуральной параметризацией, соединяющая метрические пространства A и B . Пусть существует такое разбиение $t : \mathbb{Z} \rightarrow [0, 1]$, $t(i) = t_i$ интервала $[0, 1]$, что 0 и 1 — единственные предельные точки, и существует оптимальное соответствие между соседними точками. Тогда существуют 0 -модификации \tilde{A} и \tilde{B} пространств A и B соответственно, такие что существует оптимальное соответствие между \tilde{A} и \tilde{B} .

Доказательство. Как и в предложении 46 считаем, что геодезическая между соседними точками является линейной. Возьмём произвольную точку t_0 из интервала $(0, 1)$. Согласно Предложению 46, существуют 0 -модификации пространств \tilde{A} и \tilde{B} такие, что $R_1 \in \mathcal{R}_{\text{opt}}(\tilde{A}, \gamma(t_0))$ и $R_2 \in \mathcal{R}_{\text{opt}}(\gamma(t_0), \tilde{B})$. Поскольку γ является геодезической, имеем $\text{d}_{\text{GH}}(A, B) = \text{d}_{\text{GH}}(A, \gamma(t_0)) + \text{d}_{\text{GH}}(\gamma(t_0), B) = \text{d}_{\text{GH}}(\tilde{A}, \gamma(t_0)) + \text{d}_{\text{GH}}(\gamma(t_0), \tilde{B}) = 1/2(\text{dis}(R_1) + \text{dis}(R_2))$, следовательно, $R_1 \circ R_2$ является оптимальным соответствием между \tilde{A} и \tilde{B} . \square

Определение 48. Будем называть такие геодезические *исчерпывающими кусочно-линейными геодезическими*.

Итак, выше описан новый тип геодезических, однако, он может соединять не сами метрические пространства, а пространства, находящиеся на нулевом расстоянии. При этом геодезическую между исходными метрическими пространствами можно построить просто заменив конечную и начальную точку геодезической.

3.3. Про 0 -модификации

Для каждого метрического пространства опишем пространства, находящиеся на нулевом расстоянии от исходного.

Определение 49. Метрическое пространство Z называется *0 -модификацией* метрического пространства X , если $\text{d}_{\text{GH}}(Z, X) = 0$ и $X \neq Z$.

У компактных метрических пространств 0 -модификации практически очевидны.

Теорема 50. Пространство Y является 0 -модификацией компактного метрического пространства X тогда и только тогда, когда $\bar{Y} = X$, где \bar{Y} — пополнение метрического пространства Y .

Доказательство. Утверждение в обратную сторону является тривиальным. Выберем произвольную конечную $\varepsilon/2$ -сеть $K_{\varepsilon/2} \subseteq X$ и пусть $R \in \mathcal{R}(X, Y)$, где $\text{dis}(R) < \varepsilon/2$. Для каждого $x \in K_{\varepsilon/2}$ выберем один элемент y из $R(x)$ и обозначим полученное множество как K' . Докажем, что K' является ε -сетью для пространства Y .

Для любого $y \in Y$ найдём некоторый $x \in X$, такой что xRy . Пусть $k_x \in K_{\varepsilon/2}$ и $k_y \in K'$ такие, что $k_x R k_y$ и $|xk_x| \leq \varepsilon/2$. Тогда

$$|yk_y| \leq |yk_y| - |xk_x| + |xk_x| \leq \text{dis}(R) + |xk_x| < \varepsilon.$$

Следовательно, Y — предкомпактное метрическое пространство, а из полноты Y следует, что оно является компактным метрическим пространством. Расстояние d_{GH} является метрикой на множестве метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии (см. [3]), поэтому $\bar{Y} = X$. Таким образом, предложение доказано. \square

Заметим, что если пополнение метрического пространства X конечно, то и пространство X конечно. Следовательно, имеем следующую теорему.

Следствие 51. Конечные метрические пространства не имеют 0 -модификаций.

Предложение 52. Если пространство M удовлетворяет условиям $e'(M) > 0$ и $s(M) > 0$, то множество его 0-модификаций пусто.

Доказательство. Предположим противное, пусть M' является 0-модификацией. Воспользуемся замечанием 23, положив $X = M'$, и искажение R с достаточно малым искажением (такое существует, так как расстояние между ними равно нулю). Значит, между M и M' существует оптимальное соответствие, то есть, соответствие с искажением равным нулю. Следовательно, пространства M и M' изометричны. Противоречие. \square

Известно, что расстояние Громова–Хаусдорфа между метрическим пространством и его пополнением равно нулю [3]. Следовательно, для достаточно большого класса метрических пространств существует несчетное число 0-модификаций, в частности, если из интервала $(0, 1)$ убрать разное количество рациональных точек, то получатся неизометричные пространства (количество компонент линейной связности будет различно), а расстояние между ними, как и расстояние между интервалом и интервалом без точек, будет равно нулю.

Теперь выясним, между какими 0-модификациями существует оптимальное соответствие, а между какими существует оптимальная хаусдорфова реализация.

Предложение 53. Если между пространствами, находящимися на нулевом расстоянии Громова–Хаусдорфа существует оптимальное соответствие, то они изометричны.

Доказательство. Это утверждение практически очевидно. Действительно, если существует оптимальное соответствие, то его искажение равно нулю и оно является изометрией. В частности, оно является биекцией, так как если двум различным точкам соответствуют различные, то искажение соответствия будет строго больше нуля. \square

Теорема 54. Между двумя метрическими пространствами, находящимися на нулевом расстоянии, существует оптимальная хаусдорфова реализация тогда и только тогда, когда их пополнения изометричны. В частности, между неизометричными полными пространствами, находящимися на нулевом расстоянии, не существует оптимальной хаусдорфовой реализации.

Доказательство. Рассмотрим оптимальную хаусдорфову реализацию X , и пополним ее, получив X' . Тем самым получено пополнение \tilde{A} и \tilde{B} , получив \tilde{A}' и \tilde{B}' лежащие в X' . Для каждой точки a из \tilde{A}' существует последовательность точек $a_n \in \tilde{A}$, для которых верно $d^{X'}(a_n, a) \leq 1/n$. Так как $d_H^X(\tilde{A}, \tilde{B}) = d_H^{X'}(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0$, то существует последовательность точек $b_n \in \tilde{B} \subseteq B$, для которых верно $d^{X'}(a_n, b_n) \leq 1/n$, в силу неравенства треугольника, имеем $d^{X'}(a, b_n) < 2/n$. То есть, b_n сходится, а так как \tilde{B}' полное, то сходится к некоторой точке $b \in \tilde{B}'$, причем $d^{X'}(a, b) = 0$. Показано, что для каждой точки из \tilde{A}' существует точка из \tilde{B}' на нулевом расстоянии, аналогично доказывается для B . \square

Таким образом, все метрические пространства, находящиеся на нулевом расстоянии Громова–Хаусдорфа друг от друга, разбиваются на классы эквивалентности так, что между любыми двумя элементами из одного класса существует оптимальная Хаусдорфова реализация, а между различными – нет.

Далее приведем некоторые теоремы о пространствах, находящихся на нулевом расстоянии друг от друга, которые необходимы для дальнейших исследований.

Лемма 55. Пусть $d_{GH}(A, B) = 0$, тогда $\overline{\sigma(B)} = \overline{\sigma(A)}$.

Доказательство. Докажем, что $\sigma(B) \subseteq \overline{\sigma(A)}$. Пусть $|yu'| \in \sigma(B)$ и $R_n \in \mathcal{R}(A, B)$ так, что $\text{dis}(R_n) \rightarrow 0$. Тогда для любого n существуют a_n, a'_n такие, что $||bb'| - |a_n a'_n|| \leq \text{dis}(R_n) \rightarrow 0$, что означает, что $|bb'|$ является предельной точкой множества $\sigma(A)$ и, следовательно, лежит в его замкнутом множестве. Аналогично, получаем $\sigma(A) \subseteq \overline{\sigma(B)}$, что и доказывает нужное утверждение. \square

Лемма 56. Пусть $\sigma(A)$ – конечное подмножество вещественной прямой. Тогда у A нет 0-модификаций.

Доказательство. Рассмотрим пространство B такое, что $d_{GH}(A, B) = 0$. Из Леммы 55 следует, что его спектр также является конечным подмножеством вещественной прямой. Согласно Предложению 57, расстояние между ними достигается на некотором соответствии R , следовательно, R является изометрией. \square

Лемма 57. Пусть $X, Y \in \mathcal{B}$ – метрические пространства с конечными спектрами $\sigma(X)$ и $\sigma(Y)$. Тогда расстояние Громова–Хаусдорфа между этими метрическими пространствами достигается на некотором соответствии.

Доказательство. Достаточно заметить, что искажения всех соответствий также образуют конечное подмножество действительной прямой, тогда инфимум искажений достигается. \square

Предложение 58. Пусть A, B — метрические пространства, и пусть $U = \{\gamma \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \exists \alpha \in \sigma(A) \text{ и } \beta \in \sigma(B) \text{ такие, что } \gamma = |\alpha - \beta|\}$ — дискретное множество, то есть не имеющее предельных точек (как подмножество вещественной прямой). Тогда существует оптимальное соответствие между метрическими пространствами A и B .

Доказательство. Действительно, искажения всех соответствий лежат в U , поэтому любая убывающая последовательность значений искажений достигает своего инфимума для некоторого соответствия. \square

3.4. Исчерпывающие кусочно-линейные геодезические недостаточны для описания всех геодезических в пространстве Громова–Хаусдорфа

Далее будет показано, что метрические пространства X и Y из Примера 36 не имеют 0-модификаций, но могут быть связаны некоторыми геодезическими другого типа. На самом деле

Рассмотрим пространства X и Y из Примера 36.

Лемма 59. Пространства X и Y не имеют 0-модификаций.

Доказательство. Пространство X не имеет 0-модификаций согласно Следствию 51.

Докажем, что $s(Y)$ и $e(Y)$ строго положительные. По построению, $s(Y) = \delta$. Пусть $\varphi: Y \rightarrow Y$ — биекция такая, что $\text{dis}(\varphi) < \delta$. Рассмотрим Y как взвешенный граф G с весами, равными расстояниям между точками. Пусть G_δ — подграф графа G , где множество вершин подграфа G_δ совпадает с множеством вершин графа G , а рёбра подграфа G_δ — это все рёбра графа G с весом δ . Каждая точка i имеет ровно $i - 1$ точек на расстоянии δ . Каждая из этих $i - 1$ точек принадлежит NEW и имеет ровно одну точку на расстоянии δ , а именно точку i . Следовательно, граф G_δ имеет счётное количество связанных компонент, каждая из которых конечна и состоит из различного числа точек. Отображение φ переносит точки на расстоянии δ в точки на расстоянии δ , поскольку $\sigma(Y) \cap (0, 2\delta) = \{\delta\}$ и $\text{dis}(\varphi) < \delta$. Это означает, что $\varphi(G_\delta) \subseteq G_\delta$ и $\varphi^{-1}(G_\delta) \subseteq G_\delta$ (поскольку $\text{dis}(\varphi^{-1}) = \text{dis}(\varphi) < \delta$). Следовательно, $\varphi(G_\delta) = G_\delta$, что означает, что φ является изоморфизмом графа G_δ . В частности, $\varphi(i) = i$ для $i = 1$ или $i > 2$, потому что такие точки i имеют степень $i - 1$, и в графе G_δ нет других точек с такой степенью вершины. Обозначим уникальную точку, добавленную для пары $1 < 2$, через $3/2$. Поскольку связанные компоненты отображаются в связанные компоненты, вершина 2 графа G отображается либо в вершину $3/2$, либо в вершину 2 из G . Если $\varphi(2) = 3/2$, то $\text{dis}(\varphi) \geq |d(\varphi(2), \varphi(1)) - d(2, 1)| = |d(3/2, 1) - d(2, 1)| = \delta$. Противоречие. Следовательно, $\varphi(i) = i$ для всех положительных целых чисел i . Докажем, что отображение φ является тождественным на NEW. Пусть z_3 добавлено для $k < i$, а $y_3 := \varphi(z_3) \neq z_3$. Поскольку φ является изоморфизмом графа G_δ и φ оставляет точки с индексами i на месте, то $\varphi(S_\delta(i)) = S_\delta(\varphi(i)) = S_\delta(i)$. Следовательно, y_3 добавляется для $l < i$, $k \neq l$ ($d(y_3, i) = \delta$, значит, $i = \text{right}(y_3)$). Но $d(z_3, k) = d_i - \delta$ по определению и $d(y_3, k) = d_i + \delta$ согласно Лемме 39, потому что $k \in \text{far}(y_3)$. Следовательно, $|d(z_3, k) - d(\varphi(z_3), \varphi(k))| = |d(z_3, k) - d(y_3, k)| = 2\delta$, что даёт противоречие. Таким образом, $\varphi = \text{id}$ и $e(Y) \geq \delta$.

Следовательно, $\min(s(Y), e(Y)) > 0$. Согласно Лемме 52, у Y нет 0-модификаций. \square

Теорема 60. Существует геодезическая между пространствами X и Y из Примера 36.

Доказательство. Рассмотрим два пространства, $Z = (\mathbb{N}, d_Z)$ и $Z' = (\mathbb{N} \cup \infty, d_{Z'})$, где расстояния определены следующим образом:

$$d_Z(i, j) = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 1/4 - 1/2^{\max(i, j)+2} + 2\delta, & i \neq j, \end{cases}$$

и

$$d_{Z'}(i, j) = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 1/4 - 1/2^{\max(i, j)+2} + 2\delta, & i, j < \infty \text{ и } i \neq j, \\ 1/4 + 2\delta, & \max(i, j) = \infty \text{ и } i \neq j \end{cases}$$

Эти расстояния являются метриками, поскольку все их ненулевые расстояния принадлежат интервалу $[1/7, 2/7]$.

Лемма 61. Для метрических пространств Z и Z' выполняется равенство $d_{\text{GH}}(Z, Z') = 0$.

Доказательство. Для доказательства рассмотрим соответствия $R_i = \{(j, j) : j \in \mathbb{N}\} \cup \{(i, \infty)\}$. Их искажения равны:

$$\begin{aligned} \text{dis}(R_i) &= \max\left(\sup_{j, k < \infty} |d_Z(j, k) - d_{Z'}(j, k)|, \sup_j |d_Z(j, i) - d_{Z'}(j, \infty)|\right) = \\ &= \sup_j |d_Z(j, i) - d_{Z'}(j, \infty)| = \sup_j 1/2^{\max(i, j)+2} = 1/2^{i+2}. \end{aligned}$$

Чтобы завершить доказательство, отметим, что эти искажения стремятся к нулю при $i \rightarrow \infty$. \square

Теперь построим геодезические между $X = \Delta_2 = (p_1, p_2)$ и Z' , а также между Z и Y . Рассмотрим $R = \{(p_1, i) : i \in \mathbb{N}\} \cup \{(p_2, \infty)\} \in \mathcal{R}(X, Z')$. Искажение $\text{dis}(R)$ равно

$$\begin{aligned} \max\left(\text{diam}(R(p_1)), \text{diam}(R(p_2)), \sup_j \left\{|d_X(p_1, p_2) - d_{Z'}(j, \infty)|\right\}\right) = \\ = \max\left(1/4 + 2\delta, \sup_j (|1 - 1/4 - 2\delta|)\right) = 3/4 - 2\delta. \end{aligned}$$

Пусть $R' = \bigcup_{i < \infty} \{i\} \times B_\delta(i) \in \mathcal{R}(Z, Y)$. Искажение $\text{dis}(R')$ равно

$$\max\left(\sup_i \{|d_i + 2\delta - d_i|\}, \sup_i \{|d_i + 2\delta - (d_i + \delta)|\}, \sup_i \{|d_i + 2\delta - (d_i - \delta)|\}, \sup_i \{|d_i + 2\delta - (d_i + 2\delta)|\}, 2\delta\right) = 3\delta.$$

Согласно Лемме 40, выполнено равенство $3/4 + \delta = 2 d_{\text{GH}}(X, Y)$, следовательно

$$3/4 + \delta = 2 d_{\text{GH}}(X, Y) \leq 2 d_{\text{GH}}(X, Z') + 2 d_{\text{GH}}(Z', Z) + 2 d_{\text{GH}}(Z, Y) \leq \text{dis}(R) + \text{dis}(R') = 3/4 + \delta.$$

Следовательно, R и R' являются оптимальными соответствиями, так что существуют линейные геодезические между пространствами X, Z и Z', Y . Поскольку $d_{\text{GH}}(X, Y) = d_{\text{GH}}(X, Z) + d_{\text{GH}}(Z, Z') + d_{\text{GH}}(Z', Y)$ и $d_{\text{GH}}(Z, Z') = 0$, то метрические пространства X, Y также могут быть соединены геодезической, составленной из двух геодезических, построенных выше. \square

Заметим, что между пространствами X и Y , а также их 0-модификациями нет кусочно-линейной геодезической или геодезической, исчерпывающейся кусочно-линейными геодезическими, потому что нет оптимального соответствия между X, Y , и пространства X, Y не имеют 0-модификаций.

Замечание 62. Пространства Z и Z' не изометричны друг другу, потому что их спектры различны, и $d_{\text{GH}}(Z, Z') = 0$.

3.5. Преимущества хаусдорфовой реализации над соответствиями

Для начала напомним, что существование оптимального соответствия влечет существование оптимальной хаусдорфовой реализации.

Предложение 63 ([3]). *Если существует оптимальное соответствие между двумя метрическими пространствами, то существует и оптимальная хаусдорфова реализация.*

Пример двух метрических пространств, между которыми не существует оптимального соответствия, но существует оптимальная хаусдорфова реализация практически очевиден — достаточно взять некоторое неполное метрическое пространство и его пополнение. Если между ними существует оптимальное соответствие, то они изометричны, что неверно (хотя бы потому, что одно из них полное, а другое нет). Тем не менее каноническое вложение исходного пространства в его пополнение представляет собой оптимальную хаусдорфову реализацию.

Теперь покажем, что существует пара метрических пространств, находящихся на ненулевом расстоянии Громова–Хаусдорфа, между которыми существует оптимальная хаусдорфова реализация, но не существует оптимального соответствия.

Пример 64. Пусть $A = (0, 1)$, а $B = [0, 2]$, со стандартной метрикой вещественной прямой. По формуле (11) имеем $d_{\text{GH}}(A, B) \geq 1/2 |\text{diam}(A) - \text{diam}(B)| = 1/2$. Рассмотрим вложение $(0, 1) \rightarrow [0, 2]$, $t \rightarrow t + 1/2$, оно, как уже обсуждалось выше, задает хаусдорфову реализацию. Обозначим это пространство через X . Тогда $d_H^X(A, B) = 1/2$, следовательно, $d_{\text{GH}}(A, B) = 1/2$ и указанная хаусдорфова реализация является оптимальной.

Пусть существует оптимальное соответствие R между A и B . Тогда рассмотрим точки a и a' из A , для которых верно aRb_0 и $a'Rb_2$, где b_0 и b_2 — это крайние точки из B . Тогда получаем $\text{dis}(R) \geq ||b_0b_2| - |aa'| || > |2 - 1| = 1$ (последний знак строгий, так как равенство $|aa'| = 1$ не достигается ни на каких точках из A). Получили противоречие, так как $1 < \text{dis}(R) = 1 = 2 d_{\text{GH}}(A, B)$.

Отмечу, что существование полных метрических пространств, удовлетворяющих примеру 64 является открытым вопросом.

Пример 65. Может показаться, что в общем случае верен следующий факт:

Пусть X, Y — два компактных метрических пространства, а X' таково, что его пополнение совпадает с X , но $X \neq X'$ с точностью до изометрии. Тогда между X' и Y не существует оптимального соответствия.

Однако, этот факт неверен в общем случае: достаточно рассмотреть $Y = \Delta_1$ и X — произвольное компактное метрическое пространство, для которого существует X' , обсуждавшийся выше. Но для любого метрического пространства Z , множество оптимальных соответствий $\mathcal{R}_{\text{opt}}(\Delta_1, Z)$ непусто.

3.6. Пример Хансена

Хансен показал, что существует пара метрических пространств, между которыми не существует оптимальной хаусдорфовой реализации. Покажем, что в его случае геодезическая может быть построена с использованием 0-модификаций. Для начала напомним результат Хансена.

Пример 66 ([11]). Не существует оптимальной хаусдорфовой реализации для пространств N и M , где $M = 3 \Delta_2$, а $N = \{\mathbb{N}, d^N\}$, где $d^N(i, j) = 1 - 2^{-\max(i, j)}$ для $i \neq j$. Более того, $d_{\text{GH}}(N, M) = 1$.

Теперь построим такую 0-модификацию пространства N , что между модифицированным пространством и M существует не только оптимальная хаусдорфова реализация, но и оптимальное соответствие.

Предложение 67. Существует такое метрическое пространство \tilde{N} , что $d_{\text{GH}}(N, \tilde{N}) = 0$ и множество оптимальных соответствий $\mathcal{R}_{\text{opt}}(\tilde{N}, M)$ не является пустым.

Доказательство. Будем строить \tilde{N} вида $\{\mathbb{N} \cup \{p\}, \tilde{d}\}$, где $\tilde{d}|_{\mathbb{N}} = d^N$ из примера 66, а $\tilde{d}(p, i) = 1$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Это действительно будет метрическим пространством, так как все ненулевые расстояния лежат в отрезке $[1/2, 1]$.

Покажем, что расстояние между N и \tilde{N} равно нулю. Рассмотрим следующее соответствие между N и \tilde{N} : $R_n = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (i, i) \cup (n, p)$. Его искажение

$$\text{dis}(R_n) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\tilde{d}(p, i) - d^N(n, i)| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |1 - (1 - 2^{-\max(n, i)})| = 2^{-n}.$$

Получаем $\text{dis}(R_n) \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow \infty$. То есть, $d_{\text{GH}}(N, \tilde{N}) = 0$. В силу неравенства треугольника, $d_{\text{GH}}(\tilde{N}, M) = d_{\text{GH}}(N, M) = 1$.

Наконец, построим оптимальное соответствие между \tilde{N} и $M = \{p_1, p_2\}$. Рассмотрим $R = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{(p_1, i)\} \cup \{(p_2, p)\}$. Имеем

$$\begin{aligned} \text{dis}(R) &= \max \left(\sup_{i, j \in \mathbb{N}} |d^M(p_1, p_1) - d_{\tilde{N}}(i, j)|, \sup_{k \in \mathbb{N}} |d^M(p_1, p_2) - d_{\tilde{N}}(p, k)| \right) = \\ &= \max \left(\sup_{i, j \in \mathbb{N}} |0 - (1 - 2^{-\max(i, j)})|, \sup_{k \in \mathbb{N}} |3 - 1| \right) = 2. \end{aligned}$$

То есть $R \in \mathcal{R}_{\text{opt}}(\tilde{N}, M)$, так как $\text{dis}(R) = 2 d_{\text{GH}}(\tilde{N}, M) = 2$. Предложение доказано. \square

Отмечу, что в этом примере также построена пара полных неизометричных метрических пространств N и \tilde{N} , находящихся на нулевом расстоянии.

3.7. Расширение примера Хансена

Покажем, что множество оптимальных Хаусдорфовых реализаций для пространств из примера 36. Тем самым, получим следующий результат:

- (1) $d_{\text{GH}}(A, B) > 0$,
- (2) для любых A' и B' , $d_{\text{GH}}(A, A') = 0$ и $d_{\text{GH}}(B, B') = 0$, выполнено $H_{\text{opt}}(A', B') = \emptyset$.

Напомним построение этих пространств.

Конструкция 68. Пространством X является Δ_2 . Пространство Y строится следующим образом. Возьмем $Z = (\mathbb{N}, d^Z)$, где

$$d_Z(i, j) = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 1/4 - 1/2^{\max(i, j)+2}, & i \neq j. \end{cases}$$

Пространство Y получается из пространства Z добавлением для каждой пары $i < j$ новой точки $p_{i, j}$, а расстояние от этой точки до других точек равно

- (1) $d^Y(p_{i, j}, j) = \delta$,
- (2) $d^Y(p_{i, j}, i) = d^Z(i, j) - \delta$,
- (3) $d^Y(p_{i, j}, k) = d^Z(j, k) + \delta$ для $k \notin \{i, j\}$,
- (4) $d^Y(p_{i, j}, p_{k, l}) = d^Z(l, j) + 2\delta$ для $j \neq k, i \neq l$ и $p_{i, j} \neq p_{k, l}$,
- (5) $d^Y(p_{i, j}, p_{j, l}) = d^Y(j, l)$,

где $\delta = 1/2023$.

Выше показано, что

- (1) d^Y является метрикой,
- (2) $d_{\text{GH}}(X, Y) = 3/8 + \delta/2$,
- (3) не существует 0-модификаций X и Y .

Теорема 69. *Не существует оптимальных хаусдорфовых реализаций для пространств X и Y , построенных выше.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть E — искомая реализация и $X = \{u, v\}$. Так как $d_{\text{H}}^E(X, B) = 3/8 + \delta/2$, то у каждой точки из B должна быть точка из X на расстоянии, не превышающем $3/8 + \delta/2$.

Если для некоторой точки $p \in Y$ верно, что $d^E(p, u) \leq 3/8 + \delta/2$, то в силу неравенства треугольника выполнено неравенство $d^E(p, v) \geq 1 - (3/8 + \delta/2) > 3/8 + \delta/2$. Значит, у каждой точки из Y существует ровно одна точка из X на расстоянии не превышающем $3/8 + \delta/2$, а оставшаяся точка из X будет находиться на расстоянии не меньшем, чем $5/8 - \delta/2$. То есть, все точки из Y разбиваются на два класса: $\{p \in Y : d^E(p, u) \leq 3/8 + \delta\}$ и $\{p \in Y : d^E(p, v) \leq 3/8 + \delta\}$, причем эти два класса не пересекаются.

Под i, j, k будем обозначать произвольные точки из Z . Пусть, без ограничения общности, для $1 \in Z \subset Y$ выполнено $d^E(1, u) \leq 3/8 + \delta/2$. Покажем, что если $d(i, u) \leq 3/8 + \delta/2$, то для любого $p_{i, j} \in Y$ верно $d(p_{i, j}, u) \leq 3/8 + \delta/2$. Предположим обратное, то есть $d(p_{i, j}, v) \leq 3/8 + \delta/2$, тогда

$$1 = d(u, v) \leq d(u, i) + d(i, p_{i, j}) + d(p_{i, j}, v) \leq 3/8 + \delta/2 + (1/4 - 2^{-j-2}) - \delta + 3/8 + \delta/2 < 1,$$

противоречие.

Покажем теперь, что если $d(u, p_{i, j}) \leq 3/8 + \delta/2$, то и $d(u, j) \leq 3/8 + \delta/2$. Действительно, если $d(u, j) > 3/8 + \delta/2$, то $d(v, j) \leq 3/8 + \delta/2$. Однако,

$$1 = d(u, v) \leq d(u, p_{i, j}) + d(p_{i, j}, j) + d(j, v) \leq 3/8 + \delta/2 + \delta + 3/8 + \delta/2 < 1,$$

противоречие.

Получаем, что для каждой точки $b \in Y$ верно неравенство $d(u, b) \leq 3/8 + \delta/2$. Следовательно, для каждой точки $b \in Y$ выполнено $d(v, b) \geq 5/8 - \delta/2$, поэтому такой оптимальной реализации не существует. \square

4. Сужение класса исследований

В силу того, что попытки модифицировать способ построения геодезической оказались неудачными, возникает идея найти достаточно "большой" класс метрических пространств, у которых существует геодезическая. Одним из примеров такого класса являются пространства общего положения, так как верна Теорема 22. Однако, в моем примере 36 пространства являются пространствами обобщенного общего положения и между невозможно построить геодезическую известного типа. Тем не менее, покажем плотность метрических пространств общего положения.

4.1. Плотность метрических пространств в общем положении в \mathcal{GH} .

Напомним функцию округления вверх $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{N}, x \leq n\}$.

Определение 70. Функция $l_\varepsilon(x): \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$l_\varepsilon(x) = \varepsilon \lceil x/\varepsilon \rceil$$

называется ε -лестницей.

Предложение 71 ([7]). Функция округления вверх $\lceil x \rceil$ сохраняет метрику.

Следствие 72. ε -лестница сохраняет метрику как композиция сохраняющих метрику функций.

Конструкция 73. Пусть X — метрическое пространство и $c > 0$. Обозначим результат применения функции

$$f(x) = \begin{cases} x + c, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

к метрическому пространству X как $X + c$.

Замечание 74. Такая функция f действительно сохраняет метрику, поскольку для произвольных положительных x, y, z с условием $|y - z| \leq x \leq y + z$ неравенство $x + c \leq y + c + z + c$ выполняется, а если $y = 0$, то $f(x) \leq f(y)$ из-за монотонности функции f .

Предложение 75. Для метрического пространства X и $c > 0$ выполняются следующие равенства:

$$(1) \ s(X + c) = s(X) + c,$$

$$(2) \ t(X + c) = t(X) + c,$$

$$(3) \ e(X + c) = e(X).$$

Лемма 76 ([20]). Пусть (X, \prec) — вполне упорядоченное множество, и $\varphi: X \rightarrow X$ — некоторая сохраняющая порядок биекция. Тогда φ является тождественным отображением.

Теорема 77. Для любого неотрицательного δ и c , в $(\delta + c)$ -окрестности метрического пространства $X \in \mathcal{GH}$ существует метрическое пространство общего положения U , причем $s(U) \geq \delta/3 + 2c$, $t(U) \geq 2c$, и $e(U) \geq \delta/3$. В частности, метрические пространства в общем положении являются плотными в классе Громова-Хаусдорфа.

Доказательство. Для начала докажем теорему для случая $X = \Delta_1$. Рассмотрим трехточечное метрическое пространство $U = (\{u_1, u_2, u_3\}, d_u)$, где

$$(1) \ d(u_1, u_2) = \delta/3 + 2c,$$

$$(2) \ d(u_2, u_3) = 2\delta/3 + 2c,$$

$$(3) \ d(u_1, u_3) = 3\delta/3 + 2c.$$

Тогда имеем $s(U) = 2c + \delta/3$, $t(U) = 2c$, $e(U) \geq \delta/3$, так как все расстояния в пространстве U различаются друг от друга хотя бы на $\delta/3$.

Далее рассмотрим случай, когда $\#X > 1$. Схема доказательства следующая:

- (1) применить ε -лестницу к X , чтобы сделать каждую пару расстояний либо равными, либо отличающимися хотя бы на ε ;
- (2) ввести произвольный порядок на множестве X ;
- (3) расширить метрическое пространство X , чтобы можно было восстановить этот порядок из расширенной метрики единственным образом;
- (4) доказать, что любая биекция X на себя с достаточно малым искажением сохраняет порядок;
- (5) добавить некоторую константу ко всем ненулевым расстояниям, чтобы неравенства треугольников стали строгими и отделить расстояния от нуля.

Вот реализация схемы. Пусть $Z' = l_\varepsilon(X)$ для произвольного $\varepsilon > 0$. Тогда по Лемме 33,

$$2 d_{\text{GH}}(X, Z') \leq \|l_\varepsilon - \text{id}\|_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \leq \varepsilon.$$

Конструкция 78. Фиксируем некоторый порядок на множестве Z' (такой порядок существует по теореме Цермело) и обозначим его как \prec . Разделим метрическое пространство Z' следующим образом: для каждой упорядоченной пары точек $(z_1, z_2) \in Z' \times Z'$, где $z_1 \prec z_2$, добавим новую точку z_3 и обозначим новый граф как G .

- (1) Множество точек графа G , лежащих в Z' , будем обозначать как OLD.
- (2) Множество оставшихся точек графа G будем обозначать как NEW.

Соединяем каждую точку $z_3 \in \text{NEW}$ с z_1 и z_2 ребрами и определяем веса этих рёбер следующим образом: $\omega(z_3 z_2) = \varepsilon/4$, $\omega(z_1 z_3) = d_{Z'}(z_1, z_2) - \varepsilon/4$. Определим функции

- (3) left: $\text{NEW} \rightarrow \text{OLD}$, right: $\text{NEW} \rightarrow \text{OLD}$: left(z_3) = z_1 и right(z_3) = z_2 , где z_3 добавлена для пары $z_1 \prec z_2$;
- (4) nearest, где nearest(z_3) = $\{\text{left}(z_3), \text{right}(z_3)\}$ для $z_3 \in \text{NEW}$;
- (5) far(z_3) = $\text{OLD} \setminus \text{nearest}(z_3)$ для каждой точки $z_3 \in \text{NEW}$.

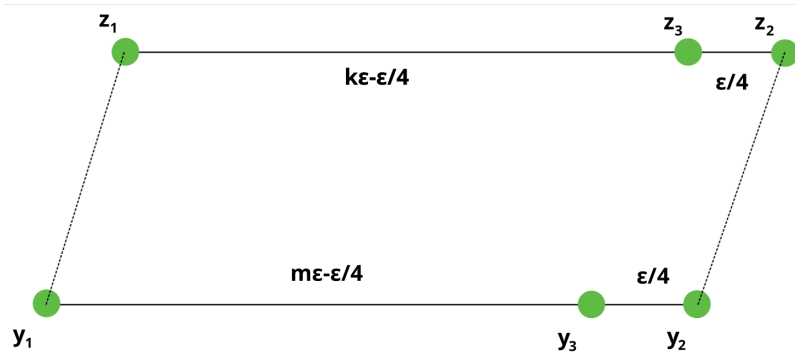


Рис. 1. Часть графа G , где z_3 добавлена для $z_1 \prec z_2$ и y_3 для $y_1 \prec y_2$.

В дальнейшем пусть z_3 и y_3 будут некоторыми точками из NEW, $z_1 = \text{left}(z_3)$, $y_1 = \text{left}(y_3)$, $z_2 = \text{right}(z_3)$, $y_2 = \text{right}(y_3)$. Обозначим $Z = \pi(G)$ и продолжим обозначать Z' как образ Z' . Так как граф G был получен по Конструкции 29, применим Лемму 30 (она верна, так как подграфы G_{z_1, z_2} удовлетворяют неравенствам треугольников). Получаем, что проекция π сохраняет веса. По Лемме 26 пространство Z является метрическим. Также будем рассматривать Z как взвешенный граф, где весовая функция — это расстояние. Теперь опишем, как выглядят другие расстояния в новом пространстве.

Проекция π сохраняет веса рёбер, соединяющих точки из OLD между собой и соединяющих точки из NEW с их ближайшими соседями. Таким образом, $d(z_3, z_2) = \varepsilon/4$, $d(z_1, z_3) = k\varepsilon - \varepsilon/4$, $d(z_1, z_2) = k\varepsilon$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, и для любых $u, v \in Z'$ выполняется $d(u, v) = m\varepsilon$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Если расстояние между точками равно $k\varepsilon + \alpha$ для $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $0 \leq \alpha < \varepsilon$, то говорим, что расстояние между этими точками имеет вид $k\varepsilon + \alpha$. Теперь нам нужно найти оставшиеся расстояния.

Лемма 79. Расстояние от $z_3 \in \text{NEW}$ до $y \in \underline{\text{far}}(z_3)$ равно длине пути $z_3 n_z y$ для некоторого $n_z \in \underline{\text{nearest}}(z_3)$ и может быть представлено в виде

(1) $k\varepsilon - \varepsilon/4$ или

(2) $k'\varepsilon + \varepsilon/4$

для некоторых $k \geq 2, k' \geq 1$.

Доказательство. В силу пункта (3) Леммы 30 кратчайший путь L , соединяющий z_3 и y , имеет вид

$$L = z_3 n_z y, \quad n_z \in \underline{\text{nearest}}(z_3),$$

и, благодаря структуре весов рёбер графа G , его длина равна

(1) $\omega(z_3 n_z) + \omega(n_z y) = (n\varepsilon - \varepsilon/4) + m\varepsilon = k\varepsilon - \varepsilon/4$ для некоторых $n, m \in \mathbb{N}$, где $n_z = \underline{\text{left}}(z_3)$, или

(2) $\omega(z_3 n_z) + \omega(n_z y) = \varepsilon/4 + k'\varepsilon$ для некоторого $k' \in \mathbb{N}$, где $n_z = \underline{\text{right}}(z_3)$. □

Лемма 80. Расстояние от $z_3 \in \text{NEW}$ до $y_3 \in \text{NEW}$ равно длине пути из трёх рёбер $L = z_3 n_z n_y y_3$, где $n_z \in \underline{\text{nearest}}(z_3)$, $n_y \in \underline{\text{nearest}}(y_3)$, и может быть представлено в виде

(1) $k\varepsilon + \varepsilon/2$ или

(2) $k'\varepsilon$

для некоторых $k \geq 0$ и $k' \geq 1$.

Доказательство. По пункту (2) Леммы 30 кратчайший путь L имеет вид $z_3 n_z n_y y_3$, и его длина равна

(1) $\omega(z_3 n_z) + \omega(n_z n_y) + \omega(n_y y_3) = (n\varepsilon - \varepsilon/4) + p\varepsilon + (m\varepsilon - \varepsilon/4) = k\varepsilon + \varepsilon/2$, где $n_z = \underline{\text{left}}(z_3)$ и $n_y = \underline{\text{left}}(y_3)$,

(2) $\omega(z_3 n_z) + \omega(n_z n_y) + \omega(n_y y_3) = \varepsilon/4 + k\varepsilon + \varepsilon/4$, где $n_z = \underline{\text{right}}(z_3)$ и $n_y = \underline{\text{right}}(y_3)$,

(3) $\omega(z_3 n_z) + \omega(n_z n_y) + \omega(n_y y_3) = (n\varepsilon - \varepsilon/4) + p\varepsilon + \varepsilon/4 = k'\varepsilon$ или $\varepsilon/4 + m\varepsilon + (p\varepsilon - \varepsilon/4)$, где $n_y = \underline{\text{left}}(z_3)$ и $n_y = \underline{\text{right}}(y_3)$, или $n_z = \underline{\text{right}}(z_3)$ и $n_y = \underline{\text{left}}(y_3)$. □

для некоторых неотрицательных p, k и положительных n, m, k' . □

Определение 81. Разделим все пары $\{u, v\}$ различных точек из Z вместе с их расстояниями на 7 классов в зависимости от формы расстояний и типов точек. Классификация основана на типах точек. Первый класс описывает расстояния между точками из OLD, а другие шесть случаев описывают расстояния между точками из NEW и некоторыми другими точками. Каждый элемент списка начинается с расстояния между u, v и заканчивается описанием типа u, v .

(1) $k\varepsilon$, для некоторого $k \geq 1$ и $u, v \in \text{OLD}$;

(2) $\varepsilon/4$, если $u \in \text{NEW}, v = \underline{\text{right}}(u)$;

(3) $k\varepsilon - \varepsilon/4$, для некоторого $k \geq 1$ и $u \in \text{NEW}, v = \underline{\text{left}}(u)$;

(4) $k\varepsilon + \varepsilon/4$, для некоторого $k \geq 1$ и $u \in \text{NEW}, v \in \underline{\text{far}}(u)$;

(5) $k\varepsilon - \varepsilon/4$, для некоторого $k \geq 2$ и $u \in \text{NEW}, v \in \underline{\text{far}}(u)$;

(6) $k\varepsilon$, для некоторого $k \geq 1$ и $u, v \in \text{NEW}$;

(7) $k\varepsilon + \varepsilon/2$, для некоторого $k \geq 0$ и $u, v \in \text{NEW}$.

Пункт (1) следует из определения метрики на Z' . Расстояния (2) – (3), т.е. $d(z_3, \underline{\text{left}}(z_3))$ и $d(z_3, \underline{\text{right}}(z_3))$, следуют из определения функций $\underline{\text{right}}$ и $\underline{\text{left}}$. Расстояния (4) – (5) между произвольными $z_3 \in \text{NEW}$ и точками из $\underline{\text{far}}(z_3)$ вычисляются в Лемме 79. Расстояния (6) – (7) между произвольными точками из NEW вычисляются в Лемме 80.

Пункты (4) – (5), а также (6) – (7) зависят от структуры метрического пространства X . Обозначим через $\underline{\text{far left}}$ (или $\underline{\text{far right}}$) множество всех точек $y \in \underline{\text{far}}(z_3)$, таких что расстояние между z_3 и $y \in \underline{\text{far}}(z_3)$ принадлежит классу (5) (или классу (4)).

Рассмотрим произвольное биективное отображение $\varphi: Z \rightarrow Z$ с $\text{dis}(\varphi) < \varepsilon/4$, тогда $\text{dis}(\varphi^{-1}) < \varepsilon/4$. Теперь докажем, что $\varphi = \text{id}$.

Заметим, что для любых $k, m, p, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ числа $k\varepsilon$, $m\varepsilon - \varepsilon/4$, $p\varepsilon + \varepsilon/4$, $l\varepsilon + \varepsilon/2$ различаются друг от друга минимум на $\varepsilon/4$. Следовательно, верна следующая Лемма.

Лемма 82. *Отображение φ — **изометрия**. В частности, класс (2) и объединение классов (3) и (5) инвариантны относительно отображения φ .*

Лемма 83. *Расстояние от $z_3 \in \text{NEW}$ до $\underline{\text{left}}(z_3)$ строго меньше расстояния от z_3 до $y \in \underline{\text{far left}}(z_3)$ для каждого y .*

Доказательство. Действительно, расстояние от z_3 до произвольного $y \in \underline{\text{far left}}(z_3)$ достигается на двухреберном пути, проходящем через $z_1 = \underline{\text{left}}(z_3)$, и, следовательно, оно больше расстояния от z_3 до z_1 . \square

Таким образом, $\underline{\text{left}}(z_3)$ — ближайшая точка к z_3 среди всех точек, расстояние до которых имеет вид $k\varepsilon - \varepsilon/4$ от z_3 .

Лемма 84. *Если точка x имеет n точек на расстоянии $\varepsilon/4$ (где n — кардинальное число), то $\varphi(x)$ также имеет ровно n точек на расстоянии $\varepsilon/4$.*

Доказательство. Действительно, не может быть меньше точек, потому что образы точек на расстоянии $\varepsilon/4$ от x находятся на расстоянии $\varepsilon/4$ от $\varphi(x)$. Рассматривая обратное отображение, получаем равенство. \square

Лемма 85. *Для каждой точки $z_3 \in \text{NEW}$ верно, что $\varphi(z_3) \in \text{NEW}$ и $\varphi(\underline{\text{right}}(z_3)) = \underline{\text{right}}(\varphi(z_3))$.*

Доказательство. По Лемме 82 неупорядоченная пара точек $\{z_3, \underline{\text{right}}(z_3)\}$ для $z_3 \in \text{NEW}$ отображается в неупорядоченную пару $\{y_3, \underline{\text{right}}(y_3)\}$. Предположим, что $\varphi(z_3) = y_2 = \underline{\text{right}}(y_3)$, $z_2 = \underline{\text{right}}(z_3)$ и $\varphi(z_2) = y_3$ (см. Рисунок 2).

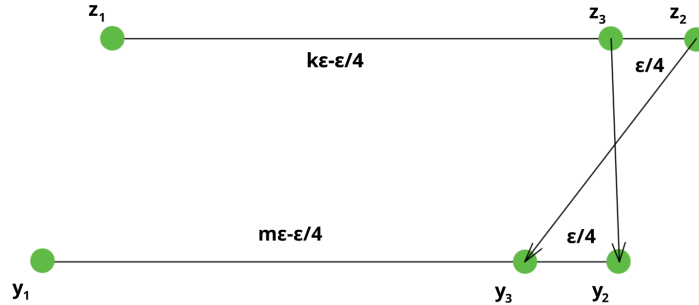


Рис. 2. $z_3 \in \text{NEW}$ отображается в $\underline{\text{right}}(y_3) = y_2 \in \text{OLD}$, а $z_2 = \underline{\text{right}}(z_3)$ отображается в $y_3 \in \text{NEW}$.

Наименьший элемент a_1 вполне упорядоченного множества Z' называется *первым*, а наименьший элемент упорядоченного множества $Z' \setminus \{a_1\}$ называется *вторым* элементом a_2 .

Из-за того, что a_1 — единственная точка в Z , которая не имеет точек на расстоянии $\varepsilon/4$, по Лемме 84 точка a_1 отображается в себя. Точка z_3 имеет ровно одну точку на расстоянии $\varepsilon/4$, поэтому $y_2 = \varphi(z_3)$ имеет ровно одну точку на расстоянии $\varepsilon/4$ по Лемме 84, т.е. ровно один $w \in \text{NEW}$, для которого $y_2 = \underline{\text{right}}(w)$. Следовательно, для y_2 существует ровно один $z \in Z'$ такой, что $z \prec y_2$, т.е. y_2 — второй элемент множества Z' , а y_1 — первый. Рассматривая обратное отображение, получаем, что $y_1 = a_1 = z_1$ и $z_2 = a_2 = y_2$. Так как $d(z_1, z_3) = k\varepsilon - \varepsilon/4$, из-за того, что $z_3 \in \text{NEW}$ и $z_1 = \underline{\text{left}}(z_3)$, а также из предыдущих соображений,

$d(z_1, z_3) = d(\varphi(z_1), \varphi(z_3)) = d(y_1, y_2) = k\varepsilon$, что противоречит, потому что $d(z_1, z_3)$ одновременно равно $k\varepsilon$ и $m\varepsilon - \varepsilon/4$. \square

Теперь докажем, что для каждого $u \in \text{NEW}$ выполняется $\varphi(\underline{\text{left}}(u)) = \underline{\text{left}}(\varphi(u))$.

Лемма 86. Пусть $\varphi(z_3) = y_3$. Тогда $\varphi(z_1) = y_1$, где $y_1 = \underline{\text{left}}(y_3)$ и $z_1 = \underline{\text{left}}(z_3)$.

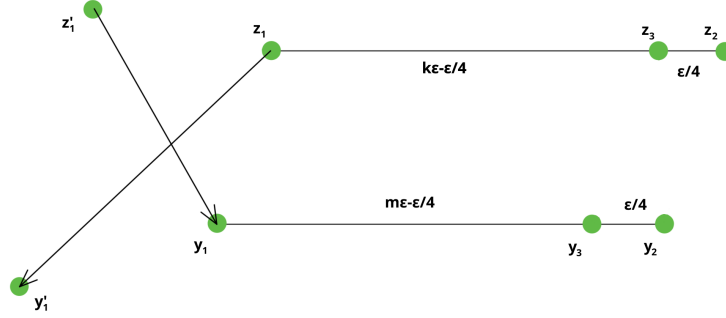


Рис. 3. $\underline{\text{left}} z_1$ переходит в $\underline{\text{far left}}(y_3) = y_1'$.

Доказательство. Пусть $y_3 = \varphi(z_3)$, $y_1 = \underline{\text{left}}(y_3)$ и $y_2 = \underline{\text{right}}(y_3)$, см. рисунок 3. Необходимо доказать, что $\varphi(z_1) = y_1$. Пусть, напротив, $\varphi(z_1) = y_1' \in \underline{\text{far left}}(y_3)$ по Лемме 82. Пусть $\varphi^{-1}(y_1) = z_1'$. Пара $\{y_1, z_1'\}$ принадлежит классу (5), поскольку $z_1' \neq \underline{\text{left}}(z_3)$ в силу биективности отображения φ . Пусть $d(z_1, z_2) = k_z\varepsilon$, тогда $d(z_1, z_3) = k_z\varepsilon - \varepsilon/4$. Так как φ сохраняет расстояния, то $d(z_1, z_3) = d(\varphi(z_1), \varphi(z_3)) = k_z\varepsilon - \varepsilon/4$. Пусть $d(y_1, y_2) = k_y\varepsilon$. Тогда $d(y_1, y_3) = k_y\varepsilon - \varepsilon/4 < d(y_3, y_1') = k_y\varepsilon - \varepsilon/4$ по Лемме 83, так что $k_y < k_z$. Рассматривая обратное отображение, получаем $k_z < k_y$, что противоречит. Таким образом, $\varphi(z_1) = y_1$. \square

Наконец, если $x < y$ ($x, y \in Z'$), то пусть u — точка, добавленная для пары $\{x, y\}$ в Конструкции 78. Тогда $\varphi(u) \in \text{NEW}$ по Лемме 85, $\varphi(x) = \underline{\text{left}}(\varphi(u))$ по Лемме 86, $\varphi(y) = \underline{\text{right}}(\varphi(u))$ по Лемме 85, следовательно, $\varphi(x) < \varphi(y)$, то есть φ сохраняет порядок. По Лемме 76, ограничение φ на Z' является тождественным отображением. По Конструкции 78, отображение φ является тождественным на всём Z .

Таким образом, $e(Z) \geq \varepsilon/4$ и $s(Z) \geq \varepsilon/4$. Заметим, что $d_{\text{GH}}(X, Z) \leq d_{\text{GH}}(X, Z') + d_{\text{GH}}(Z, Z') \leq \varepsilon/2 + d_{\text{H}}(Z, Z') \leq 3\varepsilon/4$, так как Z' вложено в Z через отождествление.

Теперь применим Лемму 75 для произвольного $c > 0$. Тогда $e(Z+2c) \geq \varepsilon/4$, $s(Z+2c) \geq \varepsilon/4+2c$, $t(Z+2c) \geq 2c$. Положим $\delta = 3\varepsilon/4$ и $U = Z + 2c$, получаем $d_{\text{GH}}(X, U) \leq \delta + c$ (по Лемме 33), $e(U) \geq \delta/3$, $s(U) \geq \delta/3 + 2c$, $t(U) \geq 2c$. \square

4.2. Построение плотного подкласса \mathcal{GH} , состоящего из метрических пространств с оптимальным соответствием между каждой парой

Ниже приведен подкласс пространств обобщенного общего положения, для которого верно следующая Напомним о функции округления вверх $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{N}, x \leq n\}$.

Определение 87. Функция $l_\varepsilon(x): \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$l_\varepsilon(x) = \varepsilon \lceil x/\varepsilon \rceil$$

называется ε -лестницей.

Следствие 88. В \mathcal{GH} существует плотный класс метрических пространств D , такой что для любой пары $X, Y \in D$ существует оптимальное соответствие.

Доказательство. Рассмотрим класс D , полученный применением $l_{2^{-n}}$ к каждому метрическому пространству. Достаточно применить Предложение 58 к двум произвольным элементам класса D . По Лемме 33, пространства A_n стремятся к X при $n \rightarrow \infty$. \square

Следствие 89. Для любого $X \in \mathcal{GH}$ имеем $s(l_{2^{-n}}(X)) \geq 2^{-n} > 0$ и $e'(l_{2^{-n}}(X)) \geq 2^{-n} > 0$, следовательно, класс D содержится в классе метрических пространств в обобщённой общей позиции.

5. Выводы

В ходе настоящей работы были получены следующие результаты:

- Показано, что в общем случае между произвольными метрическими пространствами не существует ни линейной, ни кусочно-линейной, ни исчерпывающейся линейной геодезической.
- Установлено, что существование кратчайшей геодезической не влечёт существование ни оптимального соответствия, ни оптимальной хаусдорфовой реализации, даже в случае 0-модификаций.
- Построены примеры ограниченных метрических пространств, находящихся на нулевом расстоянии друг от друга, но не являющихся изометричными.
- Доказано, что оптимальная хаусдорфова реализация разбивает семейство 0-модификаций на непересекающиеся подклассы с совпадающим пополнением.
- Показано, что пространства общего положения всюду плотны в классе Громова–Хаусдорфа.
- Исследован новый всюду плотный класс метрических пространств, в котором для любых двух пространств существует оптимальное соответствие и, как следствие, линейная геодезическая.

6. Заключение

В работе рассмотрены различные подходы к построению геодезических в пространстве Громова–Хаусдорфа. Установлено, что в общем случае не существует линейных, кусочно-линейных и исчерпывающихся линейных геодезических. Также приведены примеры, показывающие, что наличие геодезической не гарантирует существование оптимального соответствия или оптимальной хаусдорфовой реализации.

Показано, что между метрическими пространствами, находящимися на нулевом расстоянии друг от друга, могут отсутствовать оптимальные соответствия. Изучены свойства 0-модификаций, выявлены ограничения и условия, при которых их пополнения совпадают. Показано, что пространства, находящиеся на нулевом расстоянии Громова–Хаусдорфа, разбиваются на классы с совпадающим пополнением.

Введён и исследован класс метрических пространств, обладающий следующим свойством: между любыми двумя пространствами из этого класса существует оптимальное соответствие, что позволяет строить между ними линейные геодезические. Показано, что такие пространства образуют всюду плотное подмножество в пространстве Громова–Хаусдорфа.

Полученные результаты уточняют структуру пространства всех метрических пространств с точки зрения метрики Громова–Хаусдорфа и показывают ограничения существующих методов построения геодезических, показаны новые способы построения геодезических в классе Громова–Хаусдорфа.

Список литературы

- [1] Bogataya, S.I., Bogaty, S.A., Redkozubov, V.V. and Tuzhilin, A.A. (2023) ‘Gromov–Hausdorff class: its completeness and cloud geometry’, *Topology and its Applications*, 329.
- [2] Borsík, J. and Doboš, J. (1988) ‘On metric preserving functions’, *Real Analysis Exchange*, 13(1). DOI: 10.2307/44151879.
- [3] Burago, D., Burago, Y. and Ivanov, S. (2021) *A Course in Metric Geometry*. Graduate Studies in Mathematics, 33. Providence, RI: American Mathematical Society.
- [4] Chikin, V.M. (2021) ‘Functions preserving metrics, and Gromov–Hausdorff space’, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 76, pp. 154–160.
- [5] Chowdhury, S. and Mémoli, F. (2018) ‘Explicit geodesics in Gromov–Hausdorff space’, *Electronic Research Announcement*, 25, pp. 48–59.
- [6] Tsvetnikov, R.A. (2019) ‘Path Connectedness of Spheres in Gromov–Hausdorff Space’, *Moscow Univ. Math. Bull.*, 74, pp. 70–74.

- [7] Doboš, J. and Piotrowski, Z. (1988) ‘Metric Preserving Functions’, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*.
- [8] Ghanaat, P. (2013) ‘Gromov–Hausdorff distance and applications’, *Metric Geometry Les Diablerets*, 25–30 August.
- [9] Gromov, M. (1981) *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*. Textes Mathématiques, no. 1. Paris: CEDIC.
- [10] Gromov, M. (1981) ‘Groups of polynomial growth and expanding maps’, *Publications Mathématiques de L’Institut des Hautes Scientifiques*, 53, pp. 53–78.
- [11] Hansen, J. (n.d.) ‘Is Gromov Hausdorff distance realized when one space is compact?’, *Math Stack Exchange*. Available at: <https://math.stackexchange.com/questions/4552398/is-gromov-hausdorff-distance-realized-when-one-space-is-compact> (Accessed: 22 November 2024).
- [12] Herron, D.A. (2016) ‘Gromov–Hausdorff distance for pointed metric spaces’, *J Anal*, 24, pp. 1–38.
- [13] Ivanov, A.O., Iliadis, S. and Tuzhilin, A.A. (2016) ‘Realizations of Gromov–Hausdorff distance’, *ArXiv e-prints*, arXiv:1603.08850.
- [14] Ivanov, A.O. and Tuzhilin, A.A. (2022) ‘Isometric embeddings of bounded metric spaces into the Gromov–Hausdorff class’, *Sbornik: Mathematics*, 213(10), pp. 1400–1414.
- [15] Ivanov, A.O., Nikolaeva, N.K. and Tuzhilin, A.A. (2016) ‘The Gromov–Hausdorff metric on the space of compact metric spaces is strictly intrinsic’, *Mathematical Notes*, 100, pp. 883–885.
- [16] Ivanov, A.O., Tsvetnikov, R.A. and Tuzhilin, A.A. (2021) ‘Path Connectivity of Spheres in the Gromov–Hausdorff Class’, *Topology and its Applications*.
- [17] Klibus, D.P. (2018) ‘Convexity of a Ball in the Gromov–Hausdorff Space’, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 73, pp. 249–253.
- [18] Mendelson, E. (1964) *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton, N.J.
- [19] Mémoli, F. and Wan, Z. (2023) ‘Characterization of Gromov-type geodesics’, *Differential Geometry and its Applications*, 88, Article 102006. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2023.102006>.
- [20] Roman, S. (2008) *Lattices and Ordered Sets*. Springer, New York, NY.