

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ПРИЛОЖЕНИЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

**«ПРОБЛЕМА ФЕРМА–ТОРРИЧЕЛЛИ В НОРМИРОВАННЫХ
ПРОСТРАНСТВАХ»**

ВЫПОЛНИЛ СТУДЕНТ
607 ГРУППЫ
ИЛЮХИН ДАНИИЛ АЛЕКСАНДРОВИЧ

подпись студента

Научный руководитель:
Профессор, д.ф.-м.н. Тужилин Алексей Августинovich

подпись научного руководителя

Москва
2025 г.

1 Введение

В моей работе изучается задача Ферма–Торричелли. Её классическая постановка была сформулирована Ферма ещё в 17 веке: найти точку, минимизирующую сумму расстояний до трёх заданных точек на евклидовой плоскости. Тогда же эта задача была решена Торричелли ([15]). Позже в 20 веке было рассмотрено её естественное обобщение на большее число точек в различных метрических пространствах. Наибольшее продвижение задача получила в нормированных пространствах, в которых были выведены эффективные методы её решения. Оказалось, что множество решений представляет собой пересечение конусов, выходящих из заданных точек, и, следовательно, может быть неединственным.

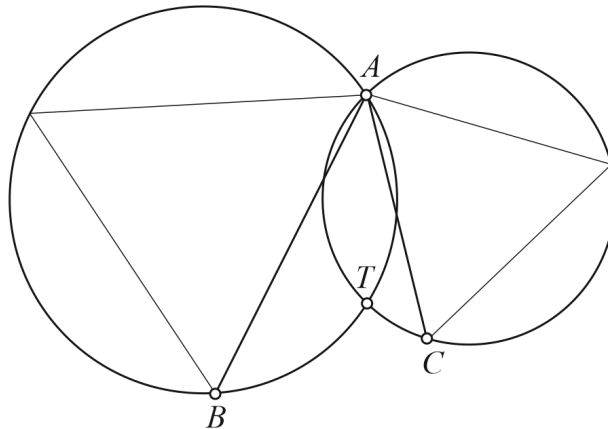


Рис. 1: Построение точки Торричелли на евклидовой плоскости

О развитии решения данной задачи на евклидовой плоскости можно прочитать в [3], [1] и [6]. Кроме того, существует обобщённая задача, в которой вершины рассматриваются вместе с некоторыми положительными величинами, называемых весами. О развитии взвешенной задачи можно прочитать в работах [16], [17], [14]. В частности, были доказаны существование и единственность решения такой задачи для трёх точек на евклидовой плоскости ([12]).

Изучение мной проблемы Ферма–Торричелли началось со знакомства со статьёй [13], в которой описано применение геометрического подхода к задаче и изложены некоторые новые результаты, которые получены в рамках вещественных конечномерных нормированных пространств. Данная работа начинается с краткого изложения этого материала. Основное содержание состоит из двух частей. Первой задачей в этой области стал поиск условий на норму, при которых встречаются наборы точек с неединственным решением. Основным результатом являются условия существования неединственных решений в нормированном пространстве. Доказан критерий для задачи с фиксированным количеством заданных точек и пространства произвольной размерности. Также уточнены условия для плоскостей и трёхмерных пространств, к чему прилагается применение критерия на некоторых конкретных примерах. Далее мной был исследован более подробно вид неединственных решений в нормированных плоскостях. Поставлен вопрос об устойчивости таких решений: сохранение неединственности при малых изменениях точек набора. Для решения данного вопроса я определил бифурка-

ционные диаграммы решений для наборов из трёх точек на нормированной плоскости. Они позволяют наглядно продемонстрировать устойчивость неединственных решений на подходящих нормированных плоскостях. Результатом исследования устойчивости стал критерий для нормы на плоскости. Также была получена классификация для шестиугольных плоскостей, полностью описывающая вид решений для наборов из трёх точек.

Некоторые результаты данной работы были опубликованы в статьях [8] и [9].

Выражаю благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. профессору А.А. Тужилину, а также д.ф.-м.н. профессору А.О. Иванову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

2 Проблема Ферма–Торричелли и методы её решения

Все утверждения этого раздела будут сформулированы для конечномерных нормированных пространств.

Определение 2.1. Точка x_0 называется *точкой Ферма–Торричелли* для точек $A = \{x_1, \dots, x_n\}$, если $x = x_0$ минимизирует $\sum_{i=1}^n |xx_i|$. Множество всех таких точек обозначим $\text{ft}(A)$.

Из свойств функции $\sum_{i=1}^n |xx_i|$ можно получить следующее утверждение про множество решений задачи Ферма–Торричелли, см. например [5].

Предложение 2.2. Пусть $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ — точки в пространстве. Тогда $\text{ft}(A)$ — непустое, компактное и выпуклое множество.

Теперь будет изложен геометрический метод построения решения задачи Ферма–Торричелли. Чтобы его использовать, наряду с исходным пространством X нужно рассматривать двойственное к нему пространство X^* , состоящее из линейных функционалов.

Определение 2.3. Функционал $\varphi \in X^*$ называется *нормирующим для вектора $x \in X$* , если $\|\varphi\| = 1$ и $\varphi(x) = \|x\|$.

Легко заметить, что элементы пространства X , полученные умножением вектора x на положительное число k , имеют тот же набор нормирующих функционалов. То есть множество таких функционалов можно описать с помощью точек единичной сферы.

Следующая теорема является критерием принадлежности некоторой точки множеству решений задачи Ферма–Торричелли.

Теорема 2.4 ([7], [10]). Пусть $x_0, x_1, \dots, x_n$ — точки в пространстве и $x_0 \neq x_i$ для $i = 1, \dots, n$. Тогда x_0 — точка Ферма–Торричелли для $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ тогда и только тогда, когда для каждого вектора $x_i - x_0$, $i = 1, \dots, n$, существует нормирующий функционал φ_i такой, что $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 0$.

Допустим, что найдена точка, являющаяся решением для множества A . Теперь с помощью функционалов из теоремы 2.4 можно построить всё множество $\text{ft}(A)$. Для этого введём новый объект.

Определение 2.5. Пусть даны функционал $\varphi \in X^*$ и точка $x \in X$. Определим *конус* $C(x, \varphi) = x - \{a : \varphi(a) = \|a\|\}$.

Теорема 2.6 ([7]). Пусть $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ — точки в пространстве и $p \in \text{ft}(A) \setminus A$. По теореме 2.4 для каждого вектора $x_i - p$, $i = 1, \dots, n$, существует нормирующий функционал φ_i такой, что $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 0$. Тогда $\text{ft}(A) = \cap_{i=1}^n C(x_i, \varphi_i)$.

Теоремы 2.4 и 2.6 составляют геометрический метод поиска решения задачи Ферма–Торричелли. Чтобы описать применение этой теоремы, рассмотрим подробнее пример с вершинами равносidedного треугольника в шестиугольной норме (рисунок 2).

Во-первых, найдём хотя бы одно решение. Возьмём $p = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ и с помощью теоремы 2.4 докажем, что $p \in \text{ft}(A)$. Для этого рассмотрим векторы $x_1 - p, x_2 - p, x_3 - p$ и построим их нормирующие функционалы. Так как они лежат на одних направлениях с внутренними точками уплощений, то для каждого из векторов $x_i - p$ существует ровно один функционал φ_i , линия уровня которого содержит соответствующее уплощение. Уплощения равноудалены от начала координат и задают равносторонний треугольник, следовательно, сумма функционалов, построенных по ним, равна нулю, и условие теоремы выполнено.

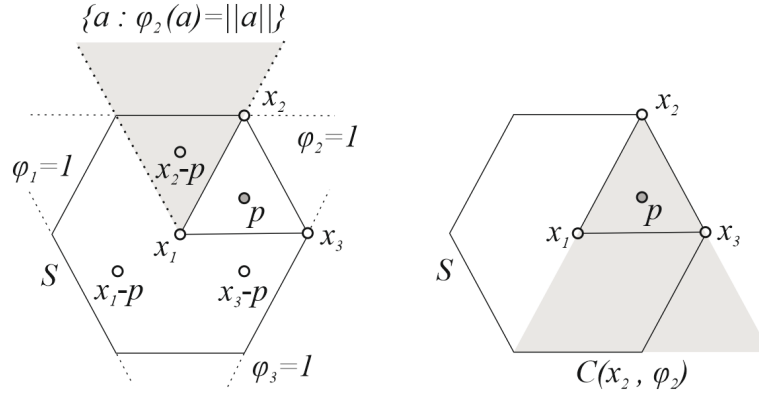


Рис. 2: Построение полного множества решений для точек x_1, x_2, x_3 на плоскости с шестиугольной нормой

Теперь воспользуемся теоремой 2.6, чтобы отыскать все решения. Построим конус, задаваемый функционалом φ_2 и вектором $x_2 - p$. Так как функционал является нормирующим для всех точек уплощения, множество $\{a : \varphi_2(a) = \|a\|\}$ представляет собой набор лучей, выходящих из начала координат и проходящих через точки уплощения, то есть угол, стороны которого содержат две соседние вершины. Теперь отразим угол относительно начала координат и совершим параллельный перенос так, чтобы вершина угла оказалась в точке x_2 . После аналогичного построения двух других конусов получим, что их пересечением является весь треугольник $x_1x_2x_3$.

Замечание 2.7. Утверждение теоремы 2.6 не зависит от выбора точки p и функционалов φ_i .

Геометрический метод даёт общее описание решений задачи Ферма–Торричелли для различных заданных множеств — это пересечение некоторых конусов с вершинами, расположенными в точках этого множества. Это наблюдение позволяет сформулировать следующие утверждения:

Предложение 2.8 ([13]). Пусть в пространстве точки множества $A = \{x_1, \dots, x_{2k+1}\}$ расположены на одной прямой в порядке их нумерации. Тогда $\text{ft}(A) = \{x_{k+1}\}$. Если $A = \{x_1, \dots, x_{2k}\}$, то $\text{ft}(A) = \overline{x_k x_{k+1}}$

3 Критерий единственности

3.1 Критерий для n точек в пространстве размерности d

Пусть X это пространство Минковского размерности d . В X поставим задачу Ферма–Торричелли для n точек. Если $x_i \in X, 1 \leq i \leq n$, то решением называется множество $\text{ft}(x_1, \dots, x_n)$, в которое входят все точки $x \in X$, на которых достигается минимум функции $\sum_{i=1}^n |xx_i|$.

Рассмотрим единичную сферу S пространства X .

Определение 3.1. Гранью единичной сферы называется её пересечение с некоторой опорной гиперплоскостью. Если линейная оболочка точек грани является подпространством X размерности k , то такая грань называется $(k-1)$ -мерной.

Определение 3.2. Возьмём конечное множество граней единичной сферы S пространства Минковского. Для каждой из них выберем опорную гиперплоскость π_i , пересекающуюся с S только по этой грани. Пусть гиперплоскость π_i задаёт поверхность уровня $\varphi_i = 1$ некоторого линейного функционала φ_i . Если найдётся набор опорных гиперплоскостей такой, что сумма построенных функционалов равна нулевому, то такое множество граней будем называть согласованным.

Из определения следует, что если взять по одной точке из каждой грани согласованного множества, то получим набор точек, для которого $x = 0$ является одним из решений задачи Ферма–Торричелли. В зависимости от размерностей граней, входящих в множество, и их взаимного расположения, можно получать различные типы решений, в том числе единственные и неединственные. Оказывается, что задача поиска в пространстве X множества точек с неединственным решением эквивалентна существованию в этом пространстве согласованного множества граней с определёнными свойствами.

Теорема 3.3. Пусть X - пространство Минковского размерности d .

Если $n \geq 3$ нечётно, то в пространстве X найдутся n точек, для которых решение задачи Ферма–Торричелли неединственно, тогда и только тогда, когда в X существует согласованное множество из n граней единичной сферы S , для которого выполняется условие:

- Пересечение линейных оболочек всех граней, входящих в это согласованное множество, содержит прямую.

Если $n \geq 4$ чётно, то в пространстве X решение задачи Ферма–Торричелли единственно для любых n точек, не лежащих на одной прямой, тогда и только тогда, когда норма строго выпукла.

Доказательство. Пусть n нечётно.

Достаточность. Докажем, что если такое согласованное множество A существует, то существует набор точек, для которых решение задачи Ферма–Торричелли неединственно. Возьмём по одной внутренней точке из каждой грани. Пусть это точки $x_1, \dots, x_n$. По теореме 2.4 точка

$x = 0$ является одним из решений. По теореме 2.6 полное решение это пересечение конусов, выходящих из вершин, и содержащих точку $x = 0$. Причём из k -мерной грани выходит $(k + 1)$ -мерный конус. По условию существует прямая l , принадлежащая линейной оболочке любой грани из A , то есть линейной оболочке любого конуса. Тогда каждый из этих конусов содержит некоторую одномерную окрестность точки $x = 0$ на прямой l . Следовательно, пересечение всех конусов тоже содержит окрестность нуля. Решение неединственно.

Необходимость. Пусть в пространстве X нашлись n точек $x_1, \dots, x_n$, для которых решение задачи Ферма–Торричелли неединственно. Пусть точка p входит в решение. Тогда решение для точек $x_i - p$ тоже неединственно, и $x = 0$ — одно из решений. По теореме 2.6 множество $\text{ft}(x_1 - p, \dots, x_n - p)$ — пересечение некоторых конусов $C_1, \dots, C_n$, выходящих из точек $x_i - p$. Рассмотрим нормирующие функционалы, по которым построены конусы, а именно, пересечения единичной сферы с опорными гиперплоскостями $\varphi_i = 1$. Получим n граней, которые очевидно составляют согласованное множество. Так как решение неединственно и является пересечением конусов, то оно содержит некоторый непустой отрезок, содержащий $x = 0$. Каждый конус также содержит этот отрезок. Тогда в линейной оболочке конуса лежит прямая, содержащая этот отрезок. Следовательно, пересечение линейных оболочек всех граней содержит прямую.

Пусть n чётно.

Пусть норма строго выпукла. Тогда решение задачи Ферма–Торричелли для любых n точек есть пересечение одномерных конусов с вершинами в этих точках. Так как вершины не лежат на одной прямой, то конусы могут пересекаться только по одной точке, то есть решение всегда единственно.

Пусть единичная сфера содержит грань, которая не является точкой. Возьмём в ней любые $\frac{n}{2}$ различных внутренних точек $x_1, \dots, x_{\frac{n}{2}}$. Рассмотрим множество решений для набора $\pm x_1, \dots, \pm x_{\frac{n}{2}}$. Для каждой из точек зададим функционал, поверхность уровня которого является опорной гиперплоскостью, задающей грань, которой принадлежит точка. Так как грани противоположны, и содержат одинаковое число точек, то сумма функционалов равна нулю. По теореме 2.4 $x = 0$ — одно из решений. Полное решение является пересечением конусов. Все конусы имеют одну и ту же размерность, лежат в одном подпространстве той же размерности и содержат точку $x = 0$ как внутреннюю. Таким образом, пересечению всех конусов принадлежит некоторая окрестность нуля соответствующей размерности. Решение неединственно.

Теорема доказана. $\square$

Замечание 3.4. Так как линейной оболочкой грани максимальной размерности является всё пространство, то в условии теоремы можно рассматривать пересечение только не максимальных граней. Таким образом, если согласованное множество состоит из одних лишь максимальных граней, то дополнительное условие выполняется автоматически.

Если размерность пространства d равна 2 или 3, то эквивалентное условие удаётся уточнить. Рассмотрим подробнее эти два случая.

3.2 Критерий для n точек на плоскости

Пусть X это плоскость Минковского. В X поставлена задача Ферма–Торричелли для n точек. Единичная окружность S имеет грани только двух типов. Будем называть их точками и уплощениями.

Предложение 3.5. Если в X найдётся согласованное множество граней единичной окружности, состоящее из n уплощений, то в этой плоскости найдутся точки $x_1, \dots, x_n$, для которых множество $\text{ft}(x_1, \dots, x_n)$ — невырожденный многоугольник.

Доказательство. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — внутренние точки уплощений из согласованного множества. Тогда взяв функционалы $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ из определения 3.2, по теореме 2.4 получаем, что $p = 0$ принадлежит $\text{ft}(x_1, \dots, x_n)$. По теореме 2.6 $\text{ft}(x_1, \dots, x_n)$ является пересечением конусов, выходящих из точек $x_1, \dots, x_n$. Так как все функционалы содержат уплощения, все конусы являются невырожденными углами. Причём каждый из них содержит некоторую полномерную окрестность нуля в силу того, что точки x_i не являются границами уплощений. Следовательно, конусы в пересечении образуют многоугольник. $\square$

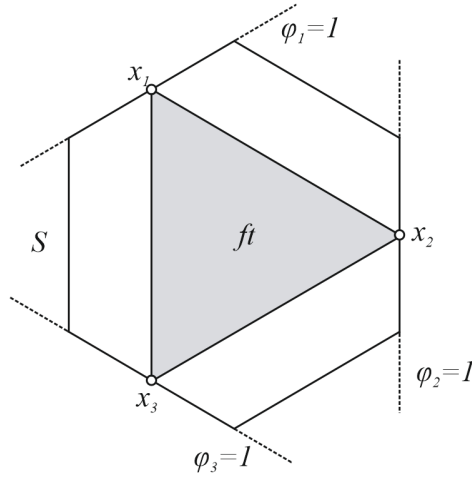


Рис. 3: Первое условие неединственности при $n = 3$

Предложение 3.6. Если в X найдётся согласованное множество граней единичной окружности, состоящее из $n-1$ уплощения и одной точки, то в этой плоскости найдутся $x_1, \dots, x_n$, для которых множество решений $\text{ft}(x_1, \dots, x_n)$ — невырожденный отрезок.

Доказательство. Пусть точки $x_1, \dots, x_{n-1}$ — внутренние точки уплощений, а x_n — точка из согласованного множества. Аналогично предыдущему доказательству получаем, что $p = 0$ принадлежит $\text{ft}(x_1, \dots, x_n)$. Конусы, выходящие из $x_1, \dots, x_{n-1}$, содержат окрестность нуля, а из точки x_n выходит луч, проходящий через начало координат. Следовательно, в пересечении получаем невырожденный отрезок. $\square$

Предложение 3.7. Пусть $2 \leq k \leq n-1$. Если в X найдётся согласованное множество граней единичной окружности, состоящее из k уплощений и $n-k$ точек, причём линейная оболочка точек это прямая, то в этой плоскости найдутся $x_1, \dots, x_n$, для которых множество решений $\text{ft}(x_1, \dots, x_n)$ — невырожденный отрезок.

Доказательство. Пусть $x_1, \dots, x_k$ — внутренние точки уплощений, а $x_{k+1}, \dots, x_n$ — точки из согласованного множества. Функционалы $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ из определения 3.2 удовлетворяют теореме 2.4, и точка $x = 0$ принадлежит $\text{ft}(x_1, \dots, x_n)$. По теореме 2.6 решение $\text{ft}(x_1, x_2, x_3)$ является пересечением k лучей, содержащих начало координат и лежащих на одной прямой, и $n - k$ невырожденных углов, каждый из которых содержит окрестность нуля. Получаем отрезок. $\square$

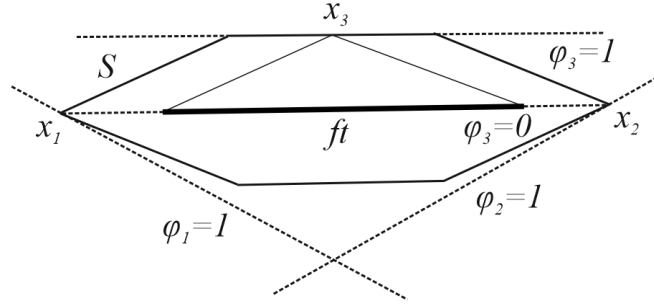


Рис. 4: Третье условие неединственности при $n = 3$

Теорема 3.8. Если $n \geq 3$ нечётно, то в нормированной плоскости решение задачи Ферма–Торричелли единственно для любых n точек тогда и только тогда, когда любое согласованное множество граней единичной окружности состоит не более чем из $n - 2$ уплощений и размерность линейной оболочки граней-точек равна 2.

Доказательство. В обоих утверждениях необходимость следует из предложений 3.5, 3.6 и 3.7. Докажем достаточность. Пусть n нечётно и нашлись точки $x_1, \dots, x_n$, для которых множество решений задачи Ферма–Торричелли неединственно. Так как решение является пересечением конусов, то это либо многоугольник, либо отрезок. В случае многоугольника все конусы — невырожденные углы. Рассмотрим функционалы, задающие конусы. Их линии уровня содержат уплощения единичной окружности, которые очевидно составляют согласованное множество граней.

Отрезок может получиться пересечением хотя бы одного невырожденного угла и лежащих на одной прямой лучей. Если все конусы — лучи, то все точки x_i лежат на одной прямой, но по предложению 2.8 в таком случае решение единственно. Аналогично рассмотрим функционалы, задающие конусы. Так как все вырожденные конусы лежат на одной прямой, то точки пересечения единичной окружности и линий уровня функционалов также лежат на одной прямой. То есть линейная оболочка точек согласованного множества равна 1. $\square$

3.3 Критерий для n точек в трёхмерном пространстве

Пусть X это трёхмерное пространство Минковского. В X поставлена задача Ферма–Торричелли для n точек.

Теорема 3.9. Если $n \geq 3$ нечётно, то в трёхмерном пространстве Минковского X найдутся n точек, для которых решение задачи Ферма–Торричелли неединственно, тогда и только

тогда, когда в X существует согласованное множество из n граней единичной сферы S , для которого выполняются условия:

- Пересечение линейных оболочек граней-точек, входящих в это согласованное множество, содержит прямую,
- Для любой пары грани-точка и грани-отрезка, входящих в это согласованное множество, размерность их линейной оболочки равна 2,
- Пересечение линейных оболочек граней-отрезков, входящих в это согласованное множество, содержит прямую.

Доказательство. Пусть n нечётно.

Достаточность. Пусть нашлось согласованное множество из n граней, для которого все условия выполняются. Построим решение задачи Ферма–Торричелли для набора внутренних точек данных граней. По теореме 2.4 точка $x = 0$ входит в решение. Полное решение — это пересечение некоторых конусов, выходящих из вершин и содержащих $x = 0$ как внутреннюю точку.

Пусть согласованное множество имеет грани-точки. Линейная оболочка такой грани — прямая, содержащая саму точку и $x = 0$. Исходя из первого условия, накладываемого на согласованное множество, для всех его точек эта прямая совпадает. Пусть это прямая l . Пересечение всех одномерных конусов, выходящих из граней-точек содержит непустой отрезок, лежащий в l и содержащий $x = 0$ как внутреннюю точку.

Линейные оболочки граней второго типа — это плоскости, в которых лежат двумерные конусы, выходящие из данных элементов. По условию каждая такая плоскость содержит все грани-точки, а значит, и прямую l , на которой они лежат. Существует непустой отрезок, лежащий в l и содержащий $x = 0$ как внутреннюю точку, который лежит в каждом из двумерных конусов. Получаем, что пересечение всех одномерных и двумерных конусов, содержит как минимум отрезок. Если в согласованном множестве нет граней-точек, то по условию возьмём в качестве прямой l любую прямую, лежащую в пересечении плоскостей.

Так как в пересечение трёхмерных конусов входит некоторая полномерная окрестность точки $x = 0$, то их пересечение с полученным отрезком неединственно. То есть пересечение всех конусов содержит как минимум отрезок. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть в пространстве X нашлись n точек $x_1, \dots, x_n$, для которых решение задачи Ферма–Торричелли неединственно. Пусть точка p входит в решение. Тогда решение для точек $x_i - p$ тоже неединственно, и $x = 0$ — одно из решений. По теореме 2.6 множество $\text{ft}(x_1 - p, \dots, x_n - p)$ — пересечение некоторых конусов $C_1, \dots, C_n$, выходящих из точек $x_i - p$. Рассмотрим нормирующие функционалы, по которым построены конусы, а именно, пересечения единичной сферы с опорными плоскостями $\varphi_i = 1$. Получим согласованное множество граней единичной сферы. Определим, какие условия накладываются на данное множество.

Все одномерные конусы, выходящие из граней-точек, должны лежать на одной прямой, иначе их пересечение будет содержать только точку $x = 0$. Другими словами, пересечение линейных оболочек этих граней и есть эта прямая. Пусть это прямая l .

Из граней-отрезков выходят двумерные конусы. Так как решение неединственно, пусть в их пересечении лежит непустой отрезок, содержащий $x = 0$. Пусть также этот отрезок принадлежит прямой l , если согласованное множество содержит точки и такая прямая построена.

Тогда линейная оболочка любой грани-отрезка, то есть плоскость, содержащая соответствующий конус, содержит прямую, содержащую этот отрезок. Получили, что пересечение линейных оболочек граней-отрезков содержит прямую. При наличии граней-точек, это будет прямая l . Значит, плоскость, содержащая грань-отрезок, содержит и любую грань-точку. То есть линейная оболочка любой пары грани-точки и грани-отрезка имеет размерность 2. Все условия на согласованное множество выполнены.

□

4 Применение критерия

4.1 λ -нормированные плоскости

На практике критерий 3.3 применить нелегко, так как ответ для заданной нормы даётся путём перебора уплощений единичной окружности. Если рассматривать его как алгоритм, то его сложность напрямую зависит от их количества, а из-за наличия норм с бесконечным количеством уплощений он даже не является вычислимым за конечное время. Покажем его применение на самом популярном семействе нестрогих выпуклых норм - λ -плоскостях.

Определение 4.1. λ -нормированной плоскостью называется плоскость, норма на которой задана правильным 2λ -угольником.

Предложение 4.2. Для λ -нормированной плоскости при $\lambda \not\equiv 0 \pmod 3$ не выполняется первое условие неединственности.

Доказательство. Допустим, что условие выполняется и найдутся функционалы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ такие, что их сумма равна нулю и прямые $\varphi_i = 1$ содержат уплощения единичной окружности.

Пусть l_i — прямые, задающие линии уровня $\varphi_i = 1$. Сумма векторов, задающих эти прямые, равна нулю, а также $d(0, l_1) = d(0, l_2) = d(0, l_3)$, так как l_i содержат уплощения 2λ -угольника. Следовательно, линии уровня образуют правильный треугольник, что невозможно при $\lambda \not\equiv 0 \pmod 3$. □

Предложение 4.3. Для λ -нормированной плоскости при $\lambda \not\equiv 0 \pmod 3$ не выполняется второе условие неединственности.

Доказательство. Допустим, что условие выполняется и найдутся функционалы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ такие, что их сумма равна нулю, прямые $\varphi_1 = 1$ и $\varphi_2 = 1$ содержат уплощения единичной окружности, а прямая $\varphi_3 = 1$ — вершину.

Пусть l_i — прямые, задающие линии уровня $\varphi_i = 1$. Повернём плоскость так, чтобы прямая l_3 была параллельна координатной оси x . Пусть l_1 и l_2 задаются уравнениями $\alpha_1 x + \beta_1 y = 1$ и $\alpha_2 x + \beta_2 y = 1$, а l_3 — уравнением $\gamma y = 1$. Так как $\sum_{i=1}^3 \varphi_i = 0$, то $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ и $\beta_1 + \beta_2 + \gamma = 0$. Из того, что прямыми l_1 и l_2 принадлежат уплощения многоугольника, получаем

$$d(0, l_1) = d(0, l_2) \Rightarrow \alpha_1^2 + \beta_1^2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2.$$

Учитывая, что l_1 и l_2 не параллельны,

$$-\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta, \quad \gamma = -2\beta.$$

Таким образом, уравнения для прямых l_i приобрели вид:

$$-\alpha x + \beta y = 1, \quad \alpha x + \beta y = 1, \quad -2\beta y = 1.$$

В треугольнике, образованном прямыми l_i , проведём биссектрису из точки пересечения прямых l_1 и l_2 . Биссектриса лежит на оси ординат. Возможны два случая: либо она проходит через середины противолежащих сторон 2λ -угольника, либо через пару противоположных вершин. Первый случай противоречит тому, что опорная прямая l_3 не содержит уплощение. Тогда биссектриса проходит через вершину, которой касается l_3 . Так как l_3 параллельна оси абсцисс, получаем равенство углов, образованных сторонами 2λ -угольника и прямой l_3 .

Наложим ещё одно условие на коэффициенты α и β . Пусть n — кол-во вершин многоугольника. Имеем

$$d(0, l_1) = d(0, l_2) = \cos \frac{\pi}{n} d(0, l_3) \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \frac{4}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} \beta^2.$$

Отсюда

$$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{\frac{4}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} - 1} = \sqrt{4 \tan^2 \frac{\pi}{n} + 3}.$$

Если $\xi_{12}, \xi_{13}, \xi_{23}$ — углы между прямыми l_1, l_2, l_3 , то $\xi_{13} = \xi_{23}$ и $\xi_{12} + \xi_{13} + \xi_{23} = \pi$. Так как $\tan \xi_{13} = \tan \xi_{23} = \frac{\alpha}{\beta}$, то

$$\xi_{12} = \pi - 2 \arctan \tan \xi_{13} = \pi - 2 \arctan \sqrt{4 \tan^2 \frac{\pi}{n} + 3}.$$

С другой стороны, $\xi_{12} = \pi - \frac{2\pi k}{n}$ для некоторого k , $k \in \mathbb{N}$ $1 < k < \frac{n}{2}$. То есть

$$\frac{\pi k}{n} = \arctan \sqrt{4 \tan^2 \frac{\pi}{n} + 3}.$$

Докажем, что это равенство не выполняется при натуральных значениях k и n , таких что $n \equiv \pm 1 \pmod{3}$, и придём к противоречию с первоначальным допущением. Пусть

$$k(n) = \frac{n}{\pi} \arctan \sqrt{4 \tan^2 \frac{\pi}{n} + 3}.$$

Неравенство

$$\frac{n}{3} - \frac{1}{3} < k(n) < \frac{n}{3} + \frac{1}{3}$$

выполняется для всех $n > 2$. Утверждение доказано. $\square$

Предложение 4.4. Для λ -нормированной плоскости не выполняется третье условие неединственности.

Доказательство. Допустим, что условие выполняется. Пусть одно из уплощений принадлежит линии уровня $\varphi = 1$ некоторого функционала, причём прямая $\varphi = 0$ проходит через пару вершин единичной окружности. Таким образом, нормы, заданные $4n$ -угольниками уже не подходят. Далее, существует пара касательных в этих вершинах таких, что они касаются единичной окружности только в одной точке и точка их пересечения принадлежит прямой

$\varphi = -2$. Рассмотрим угол, образованный диаметром, соединяющим вершины, и соседним уплощением. В описанных условиях он должен быть меньше, чем угол между диаметром и касательной. Перейдём к неравенству их тангенсов:

$$\tan \frac{\pi(n-2)}{2n} < 2 \cos \frac{\pi}{n}$$

Это неравенство не выполняется при $n \geq 6$. То есть получаем противоречие для всех λ -плоскостей. $\square$

Определение 4.5. Рассмотрим на плоскости треугольник ABC , все углы которого меньше 120° . Тогда T — точка Торричелли для вершин A, B, C , если углы ATB, BTC, ATC равны 120° .

Замечание 4.6. Используем обозначение $\hat{x}$ для $\frac{1}{\|x\|}x$ при $x \neq 0$.

Предложение 4.7. Пусть $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ — множество точек на λ -нормированной плоскости, не лежащих на одной прямой, и $\lambda \equiv 0 \pmod 3$. Пусть в треугольнике с вершинами x_1, x_2, x_3 все углы меньше 120° , и p — точка Торричелли для этого треугольника. Тогда если точки $x_i - p$ не совпадают с вершинами 2λ -угольника, то $\text{ft}(A)$ — невырожденный выпуклый многоугольник, иначе $\text{ft}(A) = \{p\}$.

Доказательство. Построим нормирующие функционалы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ для точек $x_1 - p, x_2 - p, x_3 - p$. Если $\widehat{x_i - p}$ принадлежат уплощениям единичной окружности, то положим $\varphi_i = 1$ на этом уплощении. Если $\widehat{x_i - p}$ — вершины многоугольника, то выберем уплощения в одном и том же направлении обхода. Тогда $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$ и по Теореме 2.4 $p \in \text{ft}(A)$. По Теореме 2.6 $\text{ft}(A) = \cap_{i=1}^3 C(x_i, \varphi_i)$. В первом случае каждый конус $C(x_i, \varphi_i)$ вместе с p содержит некоторую окрестность p , и $\text{ft}(A)$ — невырожденный выпуклый многоугольник, в другом случае точка p лежит на границе каждого из конусов $C(x_i, \varphi_i)$ и в силу симметрии $\cap_{i=1}^3 C(x_i, \varphi_i) = \{p\}$ $\square$

Теорема 4.8. На λ -нормированной плоскости решение задачи Ферма–Торричелли единственно для любых трех точек, если и только если $\lambda \not\equiv 0 \pmod 3$.

4.2 Правильные многогранники и трёхмерные нормированные пространства

В статье [8] было показано применение критерия на лямбда-плоскостях — нормированных плоскостях, заданных правильными многоугольниками. Рассмотрим задачу в некоторых трёхмерных пространствах.

Утверждение 4.9. Существует всего пять правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр. Четыре из них, все кроме тетраэдра, задают норму в трёхмерном пространстве.

Проверим, единственно ли решение задачи Ферма–Торричелли для любых трёх точек в данных пространствах. Для этого нужно исследовать существующие в них согласованные множества граней.

Лемма 4.10. *Если три грани единичной сферы пространства Минковского составляют согласованное множество, то они попарно не пересекаются.*

Доказательство. Каждой грани из согласованного множества соответствует функционал, поверхность уровня которого содержит данную грань. Сумма функционалов всех граней равна нулю. Если какие-то две грани имеют общую точку, то сумма их функционалов в этой точке равна 2. Тогда третий функционал принимает значение -2 в этой точке, и он не является нормирующим. Противоречие. $\square$

Теорема 4.11. *В нормированном пространстве, заданном правильным кубом, существуют три точки, для которых решение задачи Ферма–Торричелли неединственно. Более того, если решение неединственно, то оно является отрезком.*

Доказательство. Пусть X — рассматриваемое пространство. Рассмотрим в X все возможные варианты согласованных множеств.

Пусть в X существует согласованное множество, и хотя бы две из них — двумерные грани. По лемме 4.10 они не имеют общих точек. Значит, они противоположны, и сумма их функционалов равна нулю. Но тогда третий функционал нулевой. Противоречие.

Пусть согласованное множество содержит ровно одну двумерную грань. Она не может иметь общих точек с любой из двух других граней. Если оставшиеся две грани — рёбра куба, то они принадлежат противоположной двумерной грани и не являются соседними. Функционал, соответствующий двумерной грани, принимает значение -1 на обоих рёбрах. Тогда каждый из двух других функционалов равен нулю на другом ребре. Это значит, что их плоскости уровня составляют с соседними гранями куба угол в 45 градусов. Плоскости пересекаются по прямой, на которой сумма двух функционалов равна 2 . Однако первый функционал принимает значение $-\frac{3}{2}$ на этой прямой. Сумма функционалов не равна нулю. Противоречие. Вторая и третья грани также не могут быть ребром и точкой или двумя точками, так как в таком случае их линейная оболочка не содержит прямую, как это должно быть в условии критерия.

Пусть согласованное множество состоит из трёх рёбер. Если какие-то два ребра принадлежат одной грани, то третье обязательно принадлежит противоположной. Пусть оно симметрично одному из первых двух. Тогда задача сводится к построению функционалов для трёх вершин квадрата, задающего норму на плоскости. Такие функционалы существуют. Пусть линии уровня функционалов, соответствующих симметричным вершинам, пересекаются на продолжении диагонали квадрата в точке нормы 2 . А линия уровня третьего функционала проходит через оставшуюся вершину перпендикулярно этой диагонали. Тогда сумма функционалов равна нулю. Аналогично строятся функционалы для рёбер куба. Пересечение линейных оболочек рёбер является прямой. Взяв три произвольные внутренние точки на этих рёбрах, в решении получим непустой отрезок, лежащий на этой прямой.

Если третье ребро расположено непараллельно, то пересечение линейных оболочек всех рёбер является точкой. Если ни одна пара рёбер не принадлежит одной грани, то снова получаем точку в пересечении их линейных оболочек. Не выполнено условие критерия.

Если согласованное множество состоит из двух рёбер и точки, то эта точка должна лежать в одном двумерном подпространстве с каждым из рёбер. В этом случае получим, что точка является концом одного из двух рёбер. Если согласованное множество состоит из одного ребра и двух вершин, то прямая, проходящая через вершины, есть диагональ куба, и она должна лежать в одной плоскости с ребром, но такого ребра не существует.

Таким образом, в X существуют только согласованные множества, состоящие из трёх параллельных рёбер, а решение задачи Ферма–Торричелли является либо отрезком, либо точкой. Утверждение доказано. $\square$

Теорема 4.12. *В нормированном пространстве, заданном правильным октаэдром, решение задачи Ферма–Торричелли единственно для любых трёх точек.*

Доказательство. В нормированном пространстве, в котором единичная сфера это правильный октаэдр, норма для точки с координатами $a = (x, y, z)$ задаётся формулой $\|a\| = |x| + |y| + |z|$. Тогда для точек $a_i = (x_i, y_i, z_i)$ и точки $a = (x, y, z)$ имеем

$$\sum_{i=1}^n \|aa_i\| = \sum_{i=1}^n \|a - a_i\| = \sum_{i=1}^n (|x - x_i| + |y - y_i| + |z - z_i|) = \sum_{i=1}^n |x - x_i| + \sum_{i=1}^n |y - y_i| + \sum_{i=1}^n |z - z_i|$$

То есть задача сводится к покоординатной, а по утверждению 2.8 решение для трёх точек, расположенных на одной прямой, единственно. Утверждение доказано. $\square$

Теорема 4.13. *В нормированном пространстве, заданном правильным додекаэдром, существуют три точки, для которых решение задачи Ферма–Торричелли неединственно. Более того, если решение неединственно, то оно является отрезком.*

Доказательство. Рассмотрим в X все возможные варианты согласованных множеств. Для удобства введём обозначения и формулировки для элементов додекаэдра. Для обозначения двумерных граней используются f_i . Ребро, принадлежащее граням f_i, f_j будем обозначать $e_{i,j}$, а вершину принадлежащую граням f_i, f_j, f_k обозначим $v_{i,j,k}$. Грани f_1 и f_{12} назовём верхней и нижней соответственно. Рёбра и вершины принадлежат экватору додекаэдра, если не пересекаются с верхней и нижней гранями.

Допустим, что согласованное множество содержит хотя бы две двумерные грани. По лемме 4.10 они не могут быть соседними и противоположными, поэтому будем считать, что это грани f_1 и f_7 . Если третий элемент согласованного множества — тоже двумерная грань, то это может быть только f_9 или f_{10} . Так как они расположены симметрично относительно первых двух граней, то одновременно дополняют или не дополняют их до согласованного множества. Но если дополняют, то их функционалы должны совпадать, а это неверно.

Пусть третий элемент — ребро. Все рёбра кроме $e_{9,10}$ имеют симметричные относительно двух рассматриваемых граней, поэтому не могут входить в согласованное множество. Функционал ребра $e_{9,10}$ равен -1 в вершине $v_{2,6,7}$. В этой же вершине функционал грани f_7 равен 1 , но функционал грани f_1 не равен нулю. Сумма функционалов не равна нулю.

Пусть третий элемент — вершина. Аналогично предыдущим рассуждениям, достаточно проверить только вершину $v_{4,9,10}$. В этом случае в вершине $v_{2,6,7}$ сумма функционалов снова не равна нулю.

Рассмотрим вариант, когда согласованное множество содержит единственную грань f_1 . Пусть другие два элемента — рёбра. Если одно из рёбер принадлежит нижней грани, то через него проходит нулевой уровень функционала второго ребра. Но в этом случае это одно из рёбер граничащих с верхней гранью, что невозможно по лемме 4.10. Пусть одно из рёбер соединяет экватор и нижнюю грань. Но тогда любое из оставшихся рёбер имеет симметричное относительно рассматриваемых грани и ребра и не может дополнять их до согласованного множества. Тогда оба ребра должны принадлежать экватору, причём они симметричны

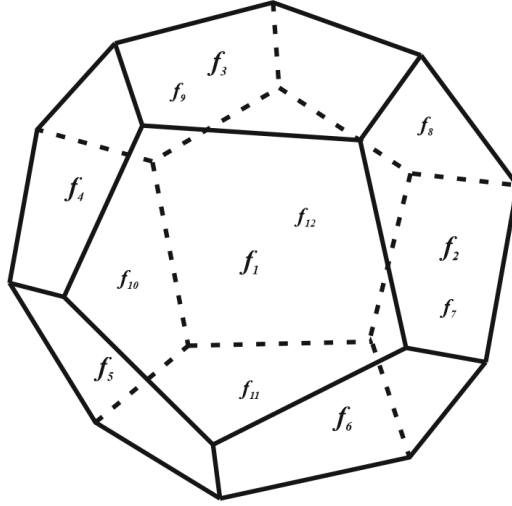


Рис. 5: Правильный додекаэдр задаёт норму в трёхмерном пространстве

относительно центра. Плоскость, проходящая через эти рёбра, является нулевым уровнем функционала грани f_1 , но не параллельна ей, что невозможно.

Пусть грань f_1 дополняют ребро и вершина, лежащие в одной плоскости. В подпространствах, заданных рёбрами из экватора, лежат только вершины, являющиеся концами самого ребра и противоположного ему. Каждая из них имеет симметричную себе. Аналогично ребро нижней грани также не может входить в согласованное множество. Остались рёбра между нижней гранью и экватором. Достаточно проверить ребро $e_{8,9}$ и вершину $v_{5,6,11}$. В этом случае на прямой, соединяющей вершины $v_{5,6,11}$ и $v_{3,8,9}$ функционал грани f_1 равен нулю. Но эта прямая не параллельна плоскости грани. Противоречие.

Если грань f_1 дополняют две симметричные вершины, то это обязательно пара вершин из экватора. Но проходящая через них прямая не параллельна плоскости грани. Противоречие, так как функционал грани на этой прямой должен равняться нулю.

Остались варианты согласованных множеств, не содержащие ни одной грани. Допустим, что согласованное множество состоит из трёх рёбер, пересечение подпространств которых содержит хотя бы прямую. Пусть два из них являются противоположными, например это $e_{1,4}$ и $e_{7,12}$. Их общее двумерное подпространство задаёт нулевой уровень функционала третьего ребра. Данной плоскости параллельны только рёбра $e_{2,6}$ и $e_{9,10}$. Они симметричны, поэтому достаточно рассмотреть первое.

Пусть уровень функционала φ_1 проходит через ребро $e_{2,6}$ и составляет равные двугранные углы с соседними гранями. Уровни функционалов φ_2 и φ_3 содержат рёбра $e_{1,4}$ и $e_{7,12}$ соответственно. В плоскости этих двух рёбер сумма функционалов равна нулю. Теперь рассмотрим плоскость, содержащую ребро $e_{2,6}$ и середины рёбер $e_{1,4}$ и $e_{7,12}$. Сечение додекаэдра этой плоскостью изображено на рисунке 6. Так как сумма функционалов равна нулю, то точка пересечения линий уровня $\varphi_2 = 1$ и $\varphi_3 = 1$ принадлежит прямой $\varphi_1 = -2$. Пусть α — двугранный угол между уровнем $\varphi_1 = 0$ и гранью, а β — угол, между уровнями $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = 1$. Если $\beta > \alpha$, то такие функционалы существуют, и согласованное множество из соответствующих

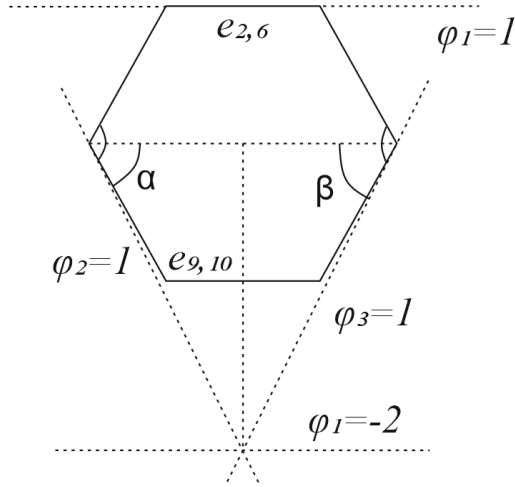


Рис. 6

рёбер тоже. Докажем, что это действительно так. Угол α — это половина двугранного угла правильного додекаэдра, то есть

$$\alpha = \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Длины рёбер $e_{2,6}$ и $e_{9,10}$ равны $a = 1$. Длины остальных сторон получившегося в сечении шестиугольника равны высоте правильного пятиугольника, то есть $b = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$. Вычислим катеты прямоугольного треугольника с гипотенузой b и острым углом α :

$$c = b \cos \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, d = b \sin \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$$

Теперь можем вычислить тангенс угла β :

$$\tan \beta = \frac{2d}{c + \frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + \frac{1}{2}} = 2$$

Так как $\arctan 2 > \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, то $\beta > \alpha$, и рёбра додекаэдра составляют согласованное множество. Так как двумерные подпространства, заданные этими тремя рёбрами, пересекаются по прямой, то данное множество даёт неединственные решения задачи Ферма–Торричелли, причём принадлежащие некоторой прямой, то есть отрезки.

Если среди трёх рёбер додекаэдра нет ни одной пары противоположных, то двумерные подпространства, содержащие рёбра, пересекаются не больше, чем по точке.

Согласованное множество додекаэдра не может состоять из двух рёбер и вершины, так в этом случае вершина должна лежать в одной плоскости с каждым из рёбер. Получаем, что

рёбра противоположны, а вершина является концом одного из рёбер, что невозможно по лемме 4.10.

Также не существует согласованного множества из одного ребра и двух вершин, лежащих в одной плоскости. Если это так, то по лемме 4.10 вершины являются концами ребра, противоположащего данному. Используя рисунок 6 допустим, что рассматривается ребро $e_{2,6}$, а вершины — это концы ребра $e_{9,10}$. Тогда линии уровней функционалов φ_2 и φ_3 проходят через данные вершины и пересекаются на линии $\varphi_1 = -2$. Из рисунка видно, что это невозможно.

Таким образом, додекаэдр имеет только согласованные множества, состоящие из трёх рёбер. Причём если с помощью них получено неединственное решение, то это отрезок. Утверждение доказано. $\square$

Теорема 4.14. *Если единичная сфера трёхмерного нормированного пространства является призмой, то для любого $n \geq 2$ существуют n точек, для которых решение задачи Ферма–Торричелли неединственно.*

Доказательство. Рассмотрим нормированную плоскость, единичная окружность которой совпадает с основанием призмы. В этой нормированной плоскости возьмём любое согласованное множество и задающие его функционалы. Проведём линии уровня этих функционалов у двух оснований призмы. Через них проходит единственный набор опорных плоскостей, задающий n функционалов в исходном пространстве. Их сумма равна нулю, а линейная оболочка граней содержит прямую. Условие критерия 3.9 выполнено, и утверждение доказано. $\square$

5 Конфигурационные пространства и устойчивость решений

Пусть X — нормированное пространство размерности d . Рассмотрим в нём задачу Ферма–Торричелли для n точек.

Определение 5.1. *Конфигурационным пространством $C_{X,n}$ называется евклидово пространство $\mathbb{R}^{nd}(x_{11}, \dots, x_{1d}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nd})$, точкам которого соответствуют наборы точек пространства X .*

5.1 Устойчивость решений задачи Ферма–Торричелли

Наборы точек нормированного пространства разделяются на два класса в зависимости от характера единственности их решения задачи Ферма–Торричелли. Чтобы изучить, как устроена граница между ними в конфигурационном пространстве, рассмотрим свойство устойчивости решений.

Определение 5.2. Пусть решение задачи Ферма–Торричелли для набора точек $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ единственно (неединственно). Будем говорить, что решение *устойчиво*, если существует окрестность набора $\mathbf{x}$ в конфигурационном пространстве $C_{X,n}$ такая, что для любого набора из этой окрестности решение задачи Ферма–Торричелли тоже единственно (неединственно).

Назовём X *пространством с устойчивой n -единственностью (n -неединственностью)*, если любое единственное (неединственное) решение для n точек является устойчивым.

Сначала покажем, что вопрос об устойчивости единственности решения тривиален.

Предложение 5.3. Пусть n нечётно. Пространство X является пространством с устойчивой n -единственностью тогда и только тогда, когда решение задачи Ферма–Торричелли единственно для любых n точек.

Доказательство. Допустим, что в X есть набор точек такой, что решение неединственно. Можно считать, что оно содержит ноль. Рассмотрим соответствующее этому решению согласованное множество граней. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — набор внутренних точек этих граней. Для любого $\lambda > 0$ решение задачи для набора $\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ тоже неединственно. Тогда в любой окрестности нуля лежит набор $\lambda\mathbf{x}$ с неединственным решением при достаточно малом $\lambda > 0$. При этом для самого нулевого набора решение единственно. $\square$

Предложение 5.4. Для чётного n пространств с устойчивой n -единственностью не существует.

Доказательство. Для чётного числа различных точек, лежащих на одной прямой, решение всегда неединственно. Аналогично предыдущему доказательству получаем, что нулевой набор неустойчив. $\square$

Изучение устройства неединственных решений начнём с рассмотрения шестиугольных нормированных плоскостей.

Лемма 5.5. Для каждой шестиугольной нормированной плоскости её набор согласованных множеств граней относится к одному из трёх типов:

1. Существуют только согласованные множества из трёх граней-отрезков и из трёх граней-точек $\iff$ Неединственными решениями являются только многоугольники.
2. Существуют все виды согласованных множеств кроме трёх граней-отрезков $\iff$ Неединственными решениями являются только отрезки.
3. Существуют только согласованные множества из трёх граней-точек $\iff$ Неединственных решений не существует.

Доказательство. Допустим, что три грани-отрезка шестиугольной нормированной плоскости составляют согласованное множество. Для двух функционалов, опирающихся на две несоседние грани шестиугольника, дополняющий их до нуля функционал опирается на третью грань, поэтому согласованного множества из двух отрезков и точки не существует. Если в согласованное множество входят две точки, то они противоположные. Опирающиеся на них функционалы не могут дополнять функционал грани до нуля, так как точка пересечения опорных прямых лежит дальше точки пересечения опорных прямых прилежащих к ним граней, который действительно дополняет до нуля первый функционал.

Пусть существует согласованное множество из двух граней-точек и грани-отрезка. Грани-точки противоположны, через них проходит нулевой уровень функционала грани-отрезка. Можно поворачивать функционалы граней-точек вокруг самих точек так, чтобы точка их пересечения оставалась на линии уровня первого функционала $\varphi = -2$, при этом сумма функционалов будет оставаться нулевой. Повернём их так, что один из функционалов станет опорным для грани, прилежащей к опорной точке. Получим согласованное множество из двух граней-отрезков и одной грани-точки. Аналогично можно получить из согласованных двух отрезков и точки согласованные две точки и один отрезок. Утверждение доказано. $\square$

Как будет показано далее, оба типа шестиугольной плоскости обладают устойчивой 3-неединственностью. На рисунке 7 проиллюстрирован этот факт в виде бифуркационных диаграмм.

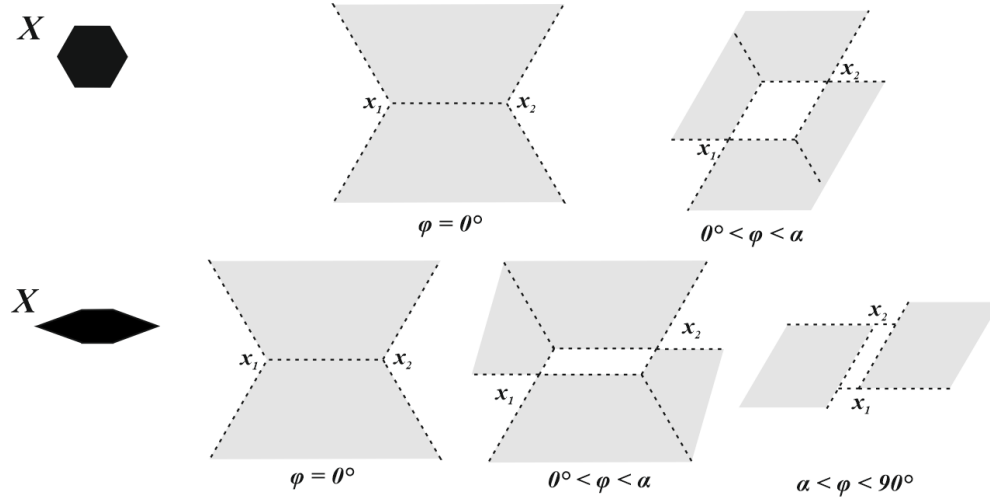


Рис. 7: Неединственные решения в шестиугольных нормах

Лемма 5.6. Пусть для набора $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ решение единственно (неединственно) и существуют окрестности для всех точек x_i кроме одной x_n такие, что для любого набора $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_{n-1}, x_n)$, где x'_i из окрестности x_i , решение тоже единственно (неединственно). Тогда решение устойчиво.

Доказательство. По определению устойчивости решения единственность или неединственность должна сохраняться для всех точек некоторой окрестности набора. Это эквивалентно сохранению решения для наборов, где каждая компонента взята из окрестности компоненты исходного набора. Однако так как параллельный перенос набора точек сохраняет решение задачи Ферма–Торричелли, то можно ограничиться теми наборами, где одна из компонент остаётся на месте. $\square$

Предложение 5.7. Все нормированные плоскости, норма на которых задаётся многоугольниками, обладают устойчивой 3-неединственностью.

Доказательство. Пусть для точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ решение задачи Ферма–Торричелли неединственно и ноль входит в решение. Функционалы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — нормирующие для x_1, x_2, x_3 . Нужно рассмотреть три варианта состава согласованного множества граней, соответствующего набору φ_i .

Случай 1. Пусть каждый функционал φ_i опирается на грань-отрезок.

Если хотя бы две точки $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ принадлежат внутренностям уплощений, то для них существуют окрестности такие, что для любого набора x'_1, x'_2, x_3 решение неединственно. Тогда по лемме 5.6 решение устойчиво.

Если две точки $\hat{x}_i$ и $\hat{x}_j$ — непротивоположные вершины единичной окружности, то параллельным переносом сдвинем набор вдоль диагонали единичной окружности, на которой лежит точка $\hat{x}_i$. Направление переноса нужно задать так, чтобы точка x_j сохранила свой нормирующий функционал. Получили предыдущий случай, для которого решение устойчивого.

Если точки $\hat{x}_i$ и $\hat{x}_j$ противоположны, то грани, на которые опираются их нормирующие функционалы, лежат с одной стороны от прямой, содержащей отрезок $\overline{\hat{x}_i \hat{x}_j}$. Значит, можно сдвинуть параллельным переносом набор x_1, x_2, x_3 в направлении, перпендикулярном отрезку $\overline{\hat{x}_i \hat{x}_j}$ так, что точки $\hat{x}_i, \hat{x}_j$ попадут внутрь уплощений.

Пусть все точки $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ не лежат внутри уплощений. Проверим сдвиги вдоль диаметров единичной окружности, содержащих точки x_i . Если для некоторого диаметра существует сдвиг, после которого две другие точки попадают внутрь уплощений, соответствующих своим функционалам, то получаем устойчивость. Если такого сдвига не существует, то конусы, выходящие из x_i , пересекаются только по нулю, и решение единственно.

Случай 2. Пусть функционалы φ_1 и φ_2 опираются на уплощения, а φ_3 — на вершину. Если точки $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ лежат внутри уплощений, то для них существуют окрестности такие, что для любого набора x'_1, x'_2, x_3 решение неединственно. Тогда по лемме 5.6 решение устойчиво.

Если одна из точек $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ — вершина, то сдвинем набор x вдоль диаметра единичной окружности, содержащего точку $\hat{x}_3$, так, чтобы все точки $\hat{x}_i$ сохранили свои функционалы.

Если обе точки $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ являются вершинами, то снова рассмотрим возможность сдвига вдоль диаметра, содержащего $\hat{x}_3$. В случае существования сдвига такого, что точки $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ попадают внутрь уплощений, получаем устойчивость. Если независимо от направления сдвига одна из точек не сохраняет свой нормирующий функционал, то исходные точки $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ расположены так, что конусы, выходящие из них пересекаются на диаметре, содержащем $\hat{x}_3$, только по нулю. В таком случае решение единственно, и, следовательно, такой случай не возникает.

Случай 3. Пусть функционал φ_1 опирается на уплощение, а φ_2 и φ_3 — на вершины. Тогда эти вершины противоположны, и можно повернуть φ_2 и φ_3 вокруг точек касания так, что один из них станет опираться на уплощение. Таким образом, тому же набору x теперь соответствует согласованное множество из двух уплощений и вершины. Этот случай уже разобран, значит, решение устойчиво. $\square$

Для полного описания норм с устойчивой 3-неединственностью дополним определение согласованного множества граней единичной сферы из [8].

Определение 5.8. Возьмём конечное множество граней F единичной сферы S пространства Минковского. Для каждой $f_i \in F$ выберем опорную гиперплоскость π_i так, что $\pi_i \cap S = f_i$. Пусть гиперплоскость π_i задаёт поверхность уровня $\varphi_i = 1$ некоторого линейного функционала φ_i . Если найдётся набор опорных гиперплоскостей такой, что сумма построенных функционалов равна нулевому, то такое множество граней называется *согласованным*.

Согласованное множество граней $F_0 = \{f_1^0, \dots, f_n^0\}$ называется максимальным, если не существует другого согласованного множества $F = \{f_1, \dots, f_n\}$, полностью покрывающего его, то есть такого, что $f_i^0 \subset f_i$ для любого $i = 1, \dots, n$.

Теорема 5.9. В нормированной плоскости существует набор из трёх точек с неустойчивым неединственным решением, если и только если у её единичной окружности найдётся максимальное согласованное множество граней из двух точек и уплощения.

Доказательство. Рассуждение доказательства утверждения 5.7 для случаев 1 и 2 верно и для произвольных нормированных плоскостей. Случай 3 также имеет место, если согласованное

множество из уплощения и двух вершин не является максимальным. Таким образом, если искомое согласованное множество отсутствует, то все неединственные решения устойчивы.

Допустим, что единичная окружность имеет согласованное множество F_M из уплощения и двух вершин, и оно максимально. Тогда в некоторой окрестности этих вершин отсутствуют уплощения, а также какие-либо грани других согласованных множеств. Пусть этой окрестности соответствует конус с углом раствора ε и с вершиной в нуле. Рассмотрим набор вершин треугольника, основание которого параллельно прямой, соединяющей вершины из F_M , а третья вершина равноудалена от двух других вершин и находится на достаточно малом расстоянии от основания так что острые углы треугольника меньше, чем ε . Решение для этого набора неединственно и соответствует рассматриваемым граням F_M .

Сдвинем на малое расстояние одну из вершин основания треугольника так, что основание треугольника сменит направление. Допустим, что решение нового набора снова неединственно, тогда одно из решений лежит в треугольнике и не является одной из его вершин. Сдвинем треугольник так, что это решение совпадает с нулём. Лучи, проведённые из нуля к вершинам основания треугольника, должны пересекать согласованные грани единичной окружности. Так как эти пересечения находятся в ε -окрестности вершин из F_M , но не являются ими, то получаем противоречие.

□

5.2 Бифуркационные диаграммы решений

Рассмотрим задачу Ферма–Торричелли для трёх точек в нормированной плоскости. Существуют преобразования плоскости, которые для любого набора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ переводят их множество решений $\text{ft}(\mathbf{x})$ в $\text{ft}(\mathbf{x}')$ — множество решений изменённого набора. Такими преобразованиями являются сдвиги и гомотетии с центром в нуле.

Будем считать, что набор из трёх точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ задаётся полярным углом φ вектора $\overline{x_1x_2}$ и положением точки x_3 относительно этого вектора. Для фиксированного угла φ рассмотрим *бифуркационную диаграмму решений* — разобьём плоскость на два подмножества. Одно из них отвечает положениям точки x_3 , для которых множество $\text{ft}(\mathbf{x})$ состоит из единственного решения, другое — положениям, соответствующим неединственным решениям.

Изучим свойства бифуркационных диаграмм. Так как для любых трёх точек, лежащих на одной прямой, решение единственно и совпадает с одной из этих точек, то получаем первое свойство:

Предложение 5.10. *Прямая, содержащая точки x_1 и x_2 , входит в подмножество единственных решений.*

Вид решения задачи Ферма–Торричелли зависит только от направления границ конусов, пересечением которых оно является, отсюда верно следующее утверждение.

Предложение 5.11. *Каждому максимальному согласованному множеству уплощений единичной окружности поставим в соответствие набор углов $\{(\varphi_{11}, \varphi_{12}), \dots, (\varphi_{n1}, \varphi_{n2})\}$, где $(\varphi_{i1}, \varphi_{i2})$ — это полярные углы концов грани f_i . Если грань — точка, то $\varphi_{i1} = \varphi_{i2}$. Эти наборы углов однозначно задают вид бифуркационных диаграмм для данной нормированной плоскости.*

Предложение 5.12. *Пусть для нормированной плоскости известно множество всех максимальных наборов из трёх согласованных граней. Тогда для любой бифуркационной диа-*

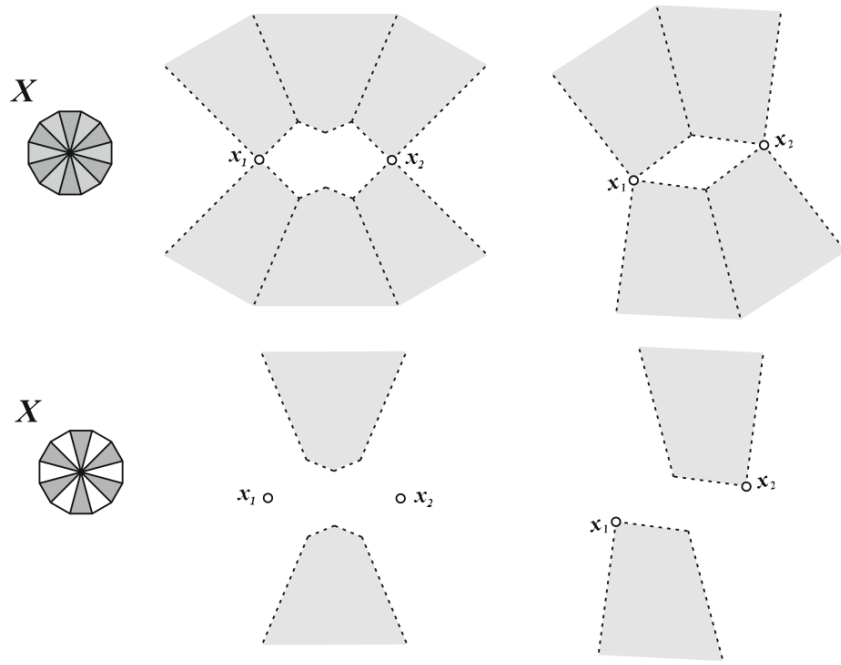


Рис. 8: Бифуркационные диаграммы для многоугольной нормы и нормы с уплощениями

граммы подмножество неединственных решений разбивается на непересекающиеся области такие, что каждому набору соответствует одна область.

Доказательство. Пересечение двух разных областей означало бы, что для одного и того же набора точек можно подобрать два разных максимальных согласованных множества, дающих совпадающее решение.

Допустим, что это так. Так как наборы максимальны, то они различаются хотя бы по двум элементам. Если хотя бы один элемент одного набора не пересекается ни с одним из другого, то и соответствующие решения не пересекаются. Пусть два элемента отличны и пересекаются с элементами другого набора по точке, тогда конусы пересекаются по лучу. Получаем, что решение — отрезок. Но в этом случае множества состоят из двух граней-отрезков и одной вершины, причём вершины из разных множеств противоположны. Тогда они могут быть решением для одного и того же набора точек только в том случае, если две точки x_1, x_2 лежат на прямой, соединяющей вершины. Оба множества граней образуют одну и ту же область неединственности — объединение конусов, выходящих из точек отрезка $x_1 x_2$.

Таким образом, если две разные области неединственности пересекаются, то они совпадают, что и требовалось доказать. $\square$

6 Заключение

Простота формулировки классической задачи Ферма–Торричелли позволяет рассматривать множество вариантов обобщения этой проблемы. В моей работе было изучено расширение задачи с евклидовой плоскости на произвольные конечномерные нормированные пространства. Полученные результаты об условиях неединственности решений помогают проанализировать целые семейства норм. В частности, были получены ответы для лямбда-плоскостей, правильных многогранников и некоторых других норм.

Исследование конфигурационных пространств продолжает расширение классификации нормированных пространств относительно характера решений, встречающихся в них, и представляет полную картину состояния проблемы Ферма–Торричелли для классов норм.

Список литературы

- [1] Bajaj C. 1988, “The algebraic degree of geometric optimization problems.“, *Discr. Comput. Geom.*, 3, 177–191.
- [2] Bannikova A. G., Ilyutko D. P., Nikonov I. M. 2016, “The Length of an Extremal Network in a Normed Space: Maxwell Formula“, *Journal of Mathematical Sciences*, 214:5, 593–608.
- [3] Boltjanski V., Martini H., Soltan V. 1999, “Geometric methods and optimization problems.“, *Kluwer Acad. Publ.*
- [4] Brazil M., Graham R. L., Thomas D. A., Zachariasen M. 2013, “On the History of the Euclidean Steiner Tree Problem.“
- [5] Cieslik D. 1988, “The Fermat-Steiner-Weber-problem in Minkowski spaces.“, *Optimization* 19, 485–489.
- [6] Cockayne E. J., Melzak Z. A. 1969, “Euclidean constructibility in graph-minimization problems“, *Math. Mag.*, 42, 206–208.
- [7] Durier R., Michelot C. 1985, “Geometrical properties of the Fermat-Weber problem.“, *Europ. J. Oper. Res.* 20, 332–343.
- [8] Ilyukhin D. A. 2022, “The Fermat–Torricelli problem in the case of three-point sets in normed planes“, *Chebyshevskii Sbornik. Vol. 23(5)*: 72–86.
- [9] Ilyukhin D. A. 2024, “The Fermat-Torricelli problem in normed spaces“, *Facta Universitatis (Nis), Ser. Math. Inform. Vol. 39(5)*: 943–958.
- [10] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. 2002, “Branching geodesics in normed spaces“, *Izvestiya: Mathematics*, 2002, 66:5, 905–948.
- [11] Jarník V., Kössler M. 1934, “O minimálních grafech obsahujících n daných bodu“, *Čas, Pěstování Mat. (Essen)* T. 63: 223–235.
- [12] Kupitz Y. S., Martini H. 1997, “Geometric aspects of the generalized Fermat–Torricelli problem.“, *Bolyai Society Mathematical Studies* 6, 55–127.

- [13] Martini H., Swanepoel K. J., Weis G. 2002, “The Fermat–Torricelli problem in normed planes and spaces.”, *Journal of Optimization Theory and Applications* 115, 283–314.
- [14] Nguyen S.D. 2018, “Constrained Fermat-Torricelli-Weber Problem in real Hilbert Spaces“, *ArXiv e-prints*, arXiv:1806.04296.
- [15] Torricelli E. 1919, “De maximis et minimis.“ *Opere di Evangelista Torricelli*, Faenza, Italy.
- [16] Uteshev A. Y. 2014, “Analytical solution for the generalized Fermat–Torricelli problem“, *The American Mathematical Monthly* 121(4), 318–331.
- [17] Zachos A.N. 2014, “An analytical solution of the weighted Fermat-Torricelli problem on the unit sphere“, *ArXiv e-prints*, arXiv:1408.6495.