Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

КУРСОВАЯ РАБОТА

Геометрия линейных и нелинейных геодезических в собственном классе Громова–Хаусдорфа.
Geometry of Linear and Nonlinear Geodesics in the Proper Gromov–Hausdorff Class.

Выполнил студент 5 курса
Вихров А.А.
Научный руководитель
д.ф.м.н., проф. А.А.Тужилин

Москва 2024

Аннотация

В данной работе исследуется собственный класс всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, снабженных расстоянием Громова–Хаусдорфа. Построена пара полных метрических пространств X и Y таких, что они не имеют метрических пространств на нулевом расстоянии, не имеют оптимального соответствия между X и Y и, следовательно, не имеют соединяющих их линейных геодезических, но существует геодезическая между ними другого типа. Описан также всюду плотный подкласс класса Громова–Хаусдорфа такой, что любые две точки, находящиеся на конечном расстоянии внутри этого подкласса, можно соединить линейной геодезической.

1. Введение

Симметричное отображение $d\colon X \times X \to [0,\infty]$, равное нулю на диагонали и удовлетворяющее неравенству треугольника, называется *обобщённой псевдометрикой.* Если, кроме того, функция d обращается в нуль только на диагонали, она называется *обобщённой метрикой*, а если она не принимает бесконечных значений, то она называется *метрикой.*

Расстояние Громова–Хаусдорфа измеряет степень различия между двумя метрическими пространствами. Это расстояние было введено Громовым в 1981 [8] и определялось как наименьшее расстояние Хаусдорфа между изометрическими изображениями рассматриваемых пространств. Позднее эквивалентное определение этого расстояния было дано с помощью соответствий.

В данной работе мы используем систему аксиом, введенную фон Нейманом, Бернейсом и Гёделем, в рамках которой рассматриваются классы и собственные классы, обобщающие понятие множества. Собственный класс, состоящий из всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, обозначается $\mathcal{GH}$. На этом собственном классе естественным образом определяется понятие обобщенной псевдометрики.

В работе [11] оптимальное соответствие между конечными метрическими пространствами использовалось для построения геодезической между произвольными компактными метрическими пространствами. Позднее, почти одновременно в [7] и [10], было доказано существование оптимального соответствия между компактными метрическими пространствами и, как следствие, геодезической между этими пространствами, порожденной оптимальным соответствием. Такие геодезические называются линейными. Однако до сих пор неизвестно, может ли любая пара метрических пространств, находящихся на конечном расстоянии друг от друга, быть соединена некоторой геодезической.

В [12] был изучен специальный класс пространств, называемых пространствами общего положения, и было показано, что для любого метрического пространства S из этого класса существует окрестность $U_{\varepsilon(S)}(S) \subset \mathcal{GH}$ такой, что для любого $Y \in U_{\varepsilon(S)}(S)$ существует оптимальное соответствие $R \in \mathcal{R}(S,Y)$ и в качестве в результате получается линейная геодезическая, соединяющая S и Y. Такие пространства общего положения всюду плотны в $\mathcal{GH}$, как показано в [13]. Оба результата справедливы для более широкого класса (см. Замечание 22) пространств обобщенного общего положения (см. Определение 20). Таким образом, показана возможность соединения любого пространства обобщенного общего положения с достаточно близким метрическим пространством линейной геодезической. Верно ли, что между каждым пространством обобщенного общего положения и любым другим метрическим пространством существует линейная геодезическая?

В этой работе мы построим пару полных метрических пространств X и Y в обобщенном общем положении таких, что они не имеют метрических пространств на нулевом расстоянии; между X и Y нет оптимального соответствия, а значит, и линейной геодезической. Однако между этими метрическими пространствами мы нашли геодезическую другого типа.

Аналогичный результат был получен Хансеном, см. [9]. Однако его пространства X, Y имеют пространства X' и Y' на нулевом расстоянии от первых ($\mathrm{d_{GH}}(X,X') = \mathrm{d_{GH}}(Y,Y') = 0$) с линейной геодезической между X' и Y'.

Более того, мы строим подкласс метрических пространств обобщенного общего положения, всюду плотный в $\mathcal{GH}$ и обладающий следующим свойством: для любых двух метрических пространств A, B из этого класса, находящихся на конечном расстоянии друг от друга, существует оптимальное соответствие $R \in \mathcal{R}(A,B)$ и, следовательно, линейная геодезическая.

Наконец, в этой статье мы построим пару собственных неизометрических ограниченных метрических пространств на нулевом расстоянии Громова-Хаусдорфа. Аналогичный результат, но для неограниченного метрического пространства, был получен в [1].

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору А.А. Тужилину, а также доктору физико-математических наук, профессору А.О. Иванову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

2. Основные определения и предварительные результаты

Сначала введем некоторые основные обозначения. Обозначим через $\mathbb{R}_{\geq 0}$ множество неотрицательных действительных чисел, а $\mathbb{R}_+$ множество положительных действительных чисел. Пусть (X,ρ) — произвольное метрическое пространство и $x,y\in X$. Расстояние между точками x и y обозначается $|xy|=\rho(x,y)=d_X(x,y)$. Пусть $U_\varepsilon(a)$ — открытый шар с центром a радиуса ε и $U_\varepsilon(A)=\bigcup\limits_{a\in A}U_\varepsilon(a)$ — ε-окрестность непустого подмножества A, а $S_\varepsilon(a)$ — сфера радиуса ε с центром в точке a. Обозначим через $\#X$ мощность X и для любого $a\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ и метрического пространства X положим $a\,X=(X,a\,d_X)$.

Определение 1. Пусть A,B — непустые подмножества метрического пространства X. *Расстояние Хаусдорфа* — это значение

$$\mathrm{d_H}(A,B)=\inf\Big\{r\colon A\subset U_r(B)\,\&\,B\subset U_r(A)\Big\}.$$

Определение 2. Пусть A,B,X — метрические пространства. Если A изометрично $\tilde A$ и B изометрично $\tilde B$, где $\tilde A$ и $\tilde B$ — подпространства X, то тройку $(\tilde A,\tilde B,X)$ *реализация пары* (A,B).

Определение 3. *Расстояние Громова–Хаусдорфа* между двумя метрическими пространствами A, B — это нижняя грань хаусдорфовых расстояний среди всех реализаций пары (A,B). Другими словами,

$$\mathrm{d_{GH}}(A,B)=\inf\big\{r:\text{существует реализация }(\tilde A,\tilde B,X)\text{ пары }(A,B)\text{ такая, что }d_H(\tilde A,\tilde B)\leq r\big\}.$$

Определение 4. *Соответствием* между двумя множествами A и B называется такое подмножество $R\subset A\times B$, что для любых $a\in A$ и $b\in B$ существует $\tilde a\in A$ и $\tilde b\in B$, для которых $(a,\tilde b)$, $(\tilde a,b)$ принадлежат R.

Далее, aRb означает, что a и b находятся в соответствии R, а множество всех соответствий между метрическими пространствами A, B обозначается как $\mathcal{R}(A,B)$.

Определение 5. Пусть R — соответствие между метрическими пространствами A, B. Его *искажение* определяется выражением

$$\operatorname{dis}R=\sup\Big\{\big|d_X(a,a')-d_Y(b,b')\big|:\ aRb\ \text{ и }\ a'R'\Big\}.$$

Предложение 6 ([5])**.** *Для любых метрических пространств A и B справедливо равенство*:

$$2\,\mathrm{d_{GH}}(A,B)=\inf_{R\in\mathcal{R}(A,B)}\operatorname{dis}R.$$

Замечание 7. Если мы определим расстояние между псевдометрическими пространствами A' и B' так же, как и раньше:

$$2\,\mathrm{d_{GH}}(A',B')=\inf_{R\in\mathcal{R}(A',B')}\operatorname{dis}R,$$

тогда оно совпадает с расстоянием между метрическими пространствами A, B, полученным факторизацией пространств A', B' по нулевым расстояниям.

Замечание 8. В дальнейшем, когда мы имеем дело с псевдометрическим пространством, мы автоматически отождествляем это пространство с метрическим путем факторизации пространства по нулевым расстояниям.

Определение 9. Если искажение соответствия R минимально с точки зрения включения среди всех соответствий $\mathcal{R}(A,B)$, то оно называется *неприводимым.* Если $\operatorname{dis}(R)=2\,\mathrm{d_{GH}}(A,B)<\infty$, то такое соответствие называется *оптимальным.* Множество оптимальных соответствий между метрическими пространствами A,B обозначается как $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(A,B)$.

Определение 10. Пусть $R_1\in\mathcal{R}(A,B)$ и $R_2\in\mathcal{R}(B,C)$. Тогда $R_2\circ R_1=\{(a,c)\mid\text{существует }b\text{ такой, что }aR_1b,bR_2c\}$.

Лемме 11. *Искажение композиции соответствий не превышает сумму их искажений.*

Действительно, для произвольных (a,c) и $(a',c')\in R_2\circ R_1$ мы нашли произвольные b и $b'\in B$ такие, что aR_1b, $a'R_1b'$, bR_2c, $b'R_2c'$

$$\big||aa'|-|cc'|\big|\leq\big||aa'|-|bb'|\big|+\big||bb'|-|cc'|\big|\leq\operatorname{dis}(R_1)+\operatorname{dis}(R_2).$$

Взятие супремума обеих сторон дает желаемый результат.

Мы называем кратчайшие кривые геодезическими.

Теорема 12 ([10]). *Если R — оптимальное соответствие между метрическими пространствами A и B, то кривая $\gamma : [0,1] \to \mathcal{GH}$, где $\gamma(t) = (R, d_t)$ и $d_t((a,b),(a',b')) = (1-t)d_A(a,a') + td_B(b,b')$, — геодезическая связующая метрика пространства A, B.*

Мы называем такие геодезические *линейными.*

Определение 13. *Класс Громова–Хаусдорфа $\mathcal{GH}$* является собственным классом (в смысле теории множеств фон Неймана–Бернейса–Гёделя) всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии.

Теорема 14 ([5]). *Расстояние Громова–Хаусдорфа является обобщенной псевдометрикой на $\mathcal{GH}$.*

Через $\triangle_n$ обозначим n-точку *симплекс*, т. е. метрическое пространство мощности n такое, что расстояния между различными его точками равны 1. Диаметр метрического пространства X определяется выражением $\operatorname{diam}(X) = \sup\limits_{x,x' \in X} d_X(x,x')$.

Определение 15. Метрическое пространство Z называется 0-*модификацией* метрического пространства X, если $\mathrm{d_{GH}}(Z,X) = 0$ и $X \neq Z$.

Следующий результат представлен в качестве упражнения в [5], для полноты мы приводим здесь его доказательство.

Теорема 16. *Пространство Y является 0-модификацией компактного метрического пространства X тогда и только тогда, когда $\overline{Y} = X$, где $\overline{Y}$ — пополнение метрического пространства Y.*

Доказательство. Утверждение «если» тривиально. Выберем произвольную конечную $\varepsilon/2$-сеть $K_{\varepsilon/2} \subseteq X$ и пусть $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ с $\operatorname{dis}(R) < \varepsilon/2$. Для каждого $x \in K_{\varepsilon/2}$ выберем один y из $R(x)$ и обозначим полученное множество как K'. Мы докажем, что K' является ε-сетью для пространства Y.

Для любого $y \in Y$ мы найдем такой $x \in X$, что xRy. Пусть $k_x \in K_{\varepsilon/2}$ и $k_y \in K'$ такие, что $k_x R k_y$ и $|xk_x| \le \varepsilon/2$. Тогда $|yk_y| \le \big||yk_y| - |xk_x|\big| + |xk_x| \le \operatorname{dis}(R) + |xk_x| < \varepsilon$.

Следовательно, Y — предкомпактное метрическое пространство, тогда полнота Y — компактное метрическое пространство. Расстояние $\mathrm{d_{GH}}$ является метрикой на совокупности метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии (см. [5]), поэтому $\overline{Y} = X$. Таким образом, предложение доказано. □

Заметим, что если пополнение метрического пространства X конечно, то и пространство X конечно.

Следствие 17. *Конечные метрические пространства не имеют* 0*-модификаций.*

Определение 18. Пусть $X \in \mathcal{GH}$. Обозначим через $S(X)$ множество всех биективных отображений X в себя. Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered}
\mathrm{s}(X) = \inf\left\{|xx'| \mid x \neq x';\ x,x' \in X\right\},\\
\mathrm{t}(X) = \inf\left\{|xx'| + |x'x''| - |xx''| \mid x \neq x' \neq x'' \neq x; x,x',x'' \in X\right\},\\
\mathrm{e}(X) = \inf\left\{\operatorname{dis}(f) \mid f \in S(X), f \neq \mathrm{id}\right\},\\
\mathrm{e}'(X) = \inf\left\{\operatorname{dis}(f) \mid f \in S(X) \setminus \mathrm{ISO}(X)\right\}.
\end{gathered}$$

Определение 19. *Пространство общего положения* — это метрическое пространство X, в котором $\mathrm{s}(X), \mathrm{t}(X), \mathrm{e}(X)$ положительны.

Определение 20. *Пространство обобщенного общего положения* — это метрическое пространство X, в котором $\mathrm{s}(X), \mathrm{e}'(X)$ положительны.

Теорема 21 ([12]). *Если пространство M удовлетворяет условиям $\mathrm{e}(M) > 0$ и $\mathrm{s}(M) > 0$, то выберите $\varepsilon > 0$ такое, что $\varepsilon < \mathrm{s}(M)/4$, $\varepsilon < \mathrm{e}(M)/4$, и если метрическое пространство X и соответствие $R \in \mathcal{R}(M,X)$ удовлетворяют условиям $\operatorname{dis}(R) < 2\varepsilon$, то R — оптимальное соответствие.*

Замечание 22. Теорема 21 остается верной, если вместо $e(M)$ рассматривать $\mathrm{e}'(M)$. Чтобы доказать это, достаточно заметить, что соответствия, отличающиеся изометрией пространства M, имеют одинаковые искажения. Таким образом, условие отделения от единицы для всех нетождественных отображений можно заменить условием отделения от изометрии, которое совпадает с условием $\mathrm{e}'(M) > 0$.

Определение 23. *Спектр* метрического пространства — это совокупность всех расстояний между точками (включая нулевое).

2.1. Каноническая проекция

Напомним [2], как построить псевдометрическое пространство из связного взвешенного графа. Везде ниже графы предполагаются простыми, связными и взвешенными, а весовая функция ребра ω (заданная на ребрах графа) неотрицательна. Множество вершин графов и множество ребер может быть бесконечным. Вершины графов иногда называют их точками. Ребро, соединяющее x и y, обозначается xy или $\{x, y\}$. Везде ниже предполагается, что $\omega(xx) = 0$ для каждой вершины графа, несмотря на отсутствие ребер xx.

Определение 24. *Обобщенный путь* L в графе G, соединяющий его точки x и y, — это конечная последовательность $x_1x_2...x_N$ с $x_1 = x$ и $x_N = y$ такая, что что либо x_ix_{i+1} является ребром, либо $x_i = x_{i+1}$, все ребра различны и если две точки из этой последовательности совпадают, то с ними совпадают и все промежуточные точки. *Ребро обобщенного пути* — это ребро, соединяющее последовательные различные точки этого пути. *длина пути* L определяется как $\omega(L) = \sum_{i=1}^{N-1} \omega(x_ix_{i+1})$. *множество обобщенных путей*, соединяющее x и y, обозначается $\mathbb{L}(x, y)$.

В этой статье **обобщенный путь называется просто путем**

Определение 25. Для каждого взвешенного графа (V, E, ω) определим метрику d_ω на V формулой

$$d_\omega(y_1, y_2) = \inf\bigl\{\omega(L) \mid L \in \mathbb{L}(y_1, y_2)\bigr\}.$$

Это расстояние называется взвешенной метрикой пути, см. [2]. Отображение $\pi : (V, E, \omega) \to (V, d_\omega)$ называется *канонической проекцией.*
Поскольку весовая функция не обязательно удовлетворяет неравенству треугольника, можно получить $d_\omega(y_1, y_2) < \omega(y_1y_2)$, в частности, если длина некоторого $L \in \mathbb{L}(y_1, y_2)$ меньше $\omega(y_1y_2)$. Будем говорить, что проекция π *сохраняет веса ребер*, если $\omega(xy) = d_\omega(x, y)$ для любого $xy \in E$.

Хорошо известно (см. [2]), что (Y, d_ω) — псевдометрическое пространство.

Лемме 26. *Пусть $X = (V, E, \omega)$ — граф. Если существует $C > 0$ такое, что $\omega(e) \geq C$ для всех* e $\in E$, *то $\pi(X)$ — метрическое пространство.*

Определение 27. Пусть X — взвешенный граф, а z_1z_2 — его ребро. Тогда *неравенство многоугольника для нижнего основания* z_1z_2 и путь $L \in \mathbb{L}(z_1, z_2)$ является неравенством $\omega(z_1z_2) \leq \omega(L)$.

Лемме 28. *Каноническая проекция сохраняет веса ребер тогда и только тогда, когда все неравенства многоугольников выполняются для всех нижних базисов $xy \in E$ и любого $L \in \mathbb{L}(x, y)$.*

Доказательство. Обратите внимание, что $\inf\bigl\{\omega(L) : L \in \mathbb{L}(x, y)\bigr\} \leq \omega(xy)$, поскольку $xy \in \mathbb{L}(x, y)$. Из-за неравенства многоугольника с нижним основанием xy для каждого $L \in \mathbb{L}(x, y)$ имеем $\omega(xy) \leq \omega(L)$.

Если неравенство многоугольника не выполнено хотя бы для одной пары точек x, y, т.е. существует путь $L \in \mathbb{L}(x, y)$ такой, что $\omega(xy) > \omega(L)$, то $d_\omega(x, y) < \omega(xy)$. $\square$

2.2. Подразделение метрического пространства.

Ниже мы приведем обобщение понятия подразделения графа.

Конструкция 29. Рассмотрим произвольное метрическое пространство X как взвешенный полный граф G' с весовой функцией ω, равной расстоянию между точками. Для каждой пары точек $\{u, v\}$ назначим произвольный набор индексов $\mathcal{I}(u, v)$ (это множество может быть пустым) и добавим точки $\alpha_i^{u,v}$, $i \in \mathcal{I}(u, v)$. Соединим каждую $\alpha_i^{u,v}$ с каждой $\alpha_j^{u,v}$, а точки u, v соединим со всеми $\alpha_i^{u,v}$. Добавляемым ребрам присваиваем произвольные веса таким образом, чтобы неравенства треугольника выполнялись во всех подграфах $G_{u,v}$, порожденных $\{u, v, \alpha_i^{u,v} \colon i \in \mathcal{I}(u, v)\}$ (на самом деле $G_{u,v}$ — это псевдометрическое пространство, если рассматривать эти веса как расстояния). Обозначим полученный граф через G.

Положим $Z = \pi(G)$, а точки, полученные из X, обозначим так же, как и в X. Здесь мы напишем некоторые свойства пространства Z.

Лемме 30. *Для связного взвешенного графа $G = (U, V, \omega)$, полученного методом Construction 29, имеем*

Конструкция 31.

Проекция π сохраняет веса всех ребер.

Расстояние d_Z между точками x, y, расположенными в $G_{u,v}$ и $G_{u',v'}$ соответственно, где $uv \neq u'v'$ и $x,\ y \notin X$, равна минимальной длине следующих путей:

(1) $L_1 = xuu'y$,

(2) $L_2 = xuv'y$,

(3) $L_3 = xvu'y$,

(4) $L_4 = xvv'y$.

Расстояние от точки x фигуры $G_{u,v}$, где $v \neq x \neq u$, до $u' \in X$, где $v \neq u' \neq u$ равна минимальной длине следующих путей:

(1) $L_1 = xuu'$,

(2) $L_2 = xvu'$.

В данной работе мы рассматриваем простейший случай $\#I = 1$.

2.3. Функции сохранения метрики.

Функции, сохраняющие метрику, изучаются в [4], а их приложения к классу Громова–Хаусдорфа изучаются в [6]. Приведем некоторые необходимые свойства и новую теорему их связи с расстоянием Громова–Хаусдорфа.

Определение 32. Мы называем $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *сохранением метрики* тогда и только тогда, когда для любого метрического пространства (X, d_X) пространство $(X, f \circ d_X)$ метрика.

Теорема 33 ([4])**.** *Функция $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ сохраняет метрику тогда и только тогда, когда $f(x) = 0$ только для $x = 0$ и для произвольных неотрицательные a, b, c такие, что $|bc| \leq a \leq b + c$ выполняется неравенство $f(a) \leq f(b) + f(c)$.*

Применяя определение дважды, получаем, что композиция сохраняющих метрику функций также является метрически сохраняющей. Через $f(X)$ обозначим метрическое пространство $(X, f \circ d_X)$. Для непустого подмножества $A \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ положим

$$||f||_A = \sup\bigl\{|f(x)| : x \in A\bigr\}.$$

Теорема 34 ([4])**.** *Функция $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ сохраняет метрику тогда и только тогда, когда $f(x) = 0$ только для $x = 0$ и для любого неотрицательные a, b, c, удовлетворяющие $|bc| \leq a \leq b + c$ выполняется неравенство $f(a) \leq f(b) + f(c)$.*

Применяя определение дважды, получаем, что композиция сохраняющих метрику функций также является метрически сохраняющей. Через $f(X)$ обозначим метрическое пространство $(X, f \circ d_X)$. Для непустого подмножества $A \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ положим

$$||f||_A = \sup\bigl\{|f(x)| \mid \ \in \ \bigr\}.$$

Лемме 35 ([13])**.** *Для любого метрического пространства X и сохраняющей метрику функции f справедливо неравенство*

$$2\, \mathrm{d_{GH}}\bigl(X, f(X)\bigr) \leq ||\operatorname{id} - f||_A$$

, где $A = \bigl[\mathrm{s}(X), \mathrm{diam}(X)\bigr]$, если $\mathrm{diam}(X) < \infty$ и $A = \bigl[\mathrm{s}(X), \infty\bigr)$ в противном случае.

Лемме 36. *Пусть X, Y принадлежат $\mathcal{GH}$ и $\mathrm{d_{GH}}(X, Y) < \infty$, а f — функция, сохраняющая метрику. Затем*

$$\mathrm{d_{GH}}(f(X), f(Y)) \leq \liminf_{r \to \mathrm{d_{GH}}(X,Y)+} f(r).$$

Более того, если существует оптимальное соответствие между метрическими пространствами X и Y, то выполнено неравенство

$$\mathrm{d_{GH}}(f(X), f(Y)) \leq f(\mathrm{d_{GH}}(X, Y)).$$

Доказательство. Докажем первый пункт. Для любого $r > \mathrm{d_{GH}}(X, Y)$ найдем соответствие $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ такое, что $\mathrm{dis}(R)/2 < r$. Построим взвешенный граф $Z = (X \sqcup Y, U, d_Z)$, где весовая функция на X совпадает с функцией расстояния на X, а на Y — с метрикой на Y. На ребрах, соединяющих вершины x и y такие, что xRy, положим $d_Z(a, b) = r$, если aRb. Поскольку $r \geq \mathrm{dis}(R)/2$, все неравенства многоугольников выполнены и проекция π сохраняет расстояния по Лемме 28. Применяя к этому построенному пространству метрически выпуклую функцию f, получаем $\mathrm{d_{GH}}\big(f(X), f(Y)\big) \leq \mathrm{d_H}\big(f(X), f(Y)\ bigr) = f(r)$, где $\mathrm{d_H}\big(f(X), f(Y)\big)$ вычисляется внутри $f\big(\pi(Z)\big)$. Взяв предел из условия, получим искомый результат.

Для второго пункта достаточно положить $r = \mathrm{d_{GH}}(X, Y)$ и, выбрав соответствие R такое, что $\mathrm{dis}(R)/2 = r$, завершить оставшуюся конструкцию из первого пункта для получения требуемого результата. □

Эта лемма приводит к следующему замечанию.

Замечание 37. Предположим, что для заданных пространств X и Y мы нашли метрически выпуклую функцию f такую, что $f\big(\mathrm{d_{GH}}(X, Y)\big) < \mathrm{d_{GH}}\big(f(X), f(Y)\big) \leq \liminf\limits_{r \to \mathrm{d_{GH}}(X,Y)+} f(r)$. Тогда не существует оптимального соответствия между X и Y.

3. Связь между существованием тех или иных геодезических и оптимальным соответствием

Определение 38. *Кусочно-линейная геодезическая* $\gamma\colon [0, 1] \to \mathcal{GH}$ называется геодезической с аффинно-естественной параметризацией (отличается от естественной параметризацией умножением на константу), если существует конечное разбиение $\Delta = (t_0, \ldots, t_n)$ интервала $[0, 1]$ и соответствия $R_i \in \mathcal{R}_{\mathrm{opt}}\big(\gamma(t_{i-1})), \gamma(t_i)\big)$, $i \in \{1, 2, \ldots n\}$ такие, что геодезическая γ является линейной геодезической на каждом подинтервале $[t_i, t_{i+1}]$, построенное с использованием соответствия R_i.

Предложение 39. *Если между метрическими пространствами A и B существует кусочно-линейная геодезическая, то множество $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(A, B)$ не пусто.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть соответствие $R = \bigcirc_{i=n}^{1} R_i$ (композицию соответствий R_i), для которого по Лемме 11:

$$\mathrm{dis}(R) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{dis}(R_i) = \sum_{i=1}^{n} 2\,\mathrm{d_{GH}}\big(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)\big) = 2\,\mathrm{d_{GH}}(A, B).$$

□

Следствие 40. *Если между метрическими пространствами существует кусочно-линейная геодезическая, то можно найти линейную геодезическую.*

Конструкция 41 ([3])**.** Пусть X_n — фундаментальная последовательность в $\mathcal{GH}$ такая, что $2\,\mathrm{d_{GH}}(X_n, X_{n+1}) < 2^{-n}$. Выберем соответствия $R_n \in \mathcal{R}(X_n, X_{n+1})$ такие, что $\mathrm{dis}(R_n) < 2^{-n}$. Рассмотрим множество $\tilde{X} = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$. *нить* — это последовательность точек $x_n \in X_n$ такая, что $x_n R_n x_{n+1}$ для всех n. Обозначим множество потоков как $\tilde{X}$, полностью упорядочим это множество и обозначим i-ю нить как $\{x_n^i\}$. Определим псевдометрику на $\tilde{X}$.

Теорема 42 ([3])**.** *Функция $d_{\tilde{X}}\big(\{x_n^i\}, \{x_n^j\}\big) = \lim\limits_{m \to \infty} d_{X_m}(x_m^i, x_m^j)$ — псевдометрика на $\tilde{X}$, и*

$$\sup_{i,j} \Big| d_{\tilde{X}}\big(\{x_n^i\}, \{x_n^j\}\big) - d_{X_m}\big(x_m^i, x_m^j\big) \Big| \to 0, \quad m \to \infty.$$

В частности, $\mathrm{d_{GH}}(\tilde{X}, X_n) \to 0$, $n \to \infty$.

Предложение 43. *Пусть $\gamma\colon [0, 1] \to \mathcal{GH}$ — геодезическая с аффинно-естественной параметризацией, соединяющая метрические пространства A и B. Предположим, существует монотонно возрастающая последовательность t_i интервала $[0, 1]$, стремящаяся к 1, и существует оптимальное соответствие между $\gamma(t_i)$ и $\gamma(t_{i+1})$. Тогда существует 0-модификация $\tilde{B}$ пространства B такая, что существует оптимальное соответствие между A и $\tilde{B}$.*

Доказательство. Построим линейную геодезическую между каждой парой соседей $\gamma(t_i)$. Без ограничения общности будем считать, что γ — такая геодезическая. Заметим, что для любого положительного δ между любыми двумя пространствами из образа интервала $[0, 1-\delta]$ существует оптимальное соответствие согласно Предложению 43. Пусть X_n — последовательность точек $\gamma(1-1/2^{n+K})$ для некоторого $K \in \mathbb{N}$. Выберем K такой, что $d_{\mathrm{GH}}(X_n, X_{n+1}) \leq d_{\mathrm{GH}}(A, B) * 1/2^{n+K} < 1/2^{n+1}$. Используя Конструкция 41 и Теорему 42, постройте предельное пространство $\tilde{B}'$. Ввиду выбора X_n и теоремы 42, $d_{\mathrm{GH}}(B, \tilde{B}') \leq d_{\mathrm{GH}}(B, X_n) + d_{\mathrm{GH}}(\tilde{B}', X_n) \to 0$ как $n \to \infty$. Следовательно, метрическое пространство $\tilde{B}$, полученное факторизацией $\tilde{B}'$ по нулевым расстояниям, является 0-модификацией метрического пространства B. Заметим, что оптимальное соответствие между A и $\tilde{B}$ существует тогда и только тогда, когда существует оптимальное соответствие между A и $\tilde{B}'$. Теперь построим оптимальное соответствие между A и $\tilde{B}'$. Напомним структуру предельного метрического пространства и рассмотрим соответствие $R \in \mathcal{R}(A, \tilde{B}') = \left\{\left(a, \{x_n^i\}\right) : aR_0x_1^i\right\}$ и $\tilde{R}_n \in \mathcal{R}(A, X_n') = \left\{\left(a, x_n^i\right) : aR_0x_1^i\right\}$ где $R_0 \in \mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(A, X_1)$. Обратите внимание, что $\mathrm{dis}(\tilde{R}_n) \to 2\, d_{\mathrm{GH}}(A, \tilde{B}')$ при $n \to \infty$ из-за конструкции. Теперь мы покажем, что $\mathrm{dis}(R) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{dis}(\tilde{R}_n)$. Искажение R определяется выражением

$$\mathrm{dis}(R) = \sup_{(a,\{x_n^i\}),(a',\{x_n^j\})} \left| d_A(a,a') - d_{\tilde{B}'}\left(\{x_n^i\},\{x_n^j\}\right)\right| -" \sup_{(a,\{x_n^i\}),(a',\{x_n^j\})} \left| d_A(a,a') - \lim_{n\to\infty} d_{X_n}(x_n^i, x_n^j)\right| \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \sup_{(a,\{x_n^i\}),(a',\{x_n^j\})} \left| d_A(a,a') - d_{X_n}(x_n^i, x_n^j)\right| = \lim_{n\to\infty} \mathrm{dis}(\tilde{R}_n) = 2\, d_{\mathrm{GH}}(A, \tilde{B}').$$

Таким образом, R является оптимальным соответствием. □

Следствие 44. *Пусть $\gamma : [0,1] \to \mathcal{GH}$ — геодезическая в аффинно-натуральной параметризации, соединяющая метрические пространства A и B. Предположим, существуют $t : \mathbb{Z} \to [0,1]$, $t(i) = t_i$ интервала $[0,1]$ такие, что 0 и 1 — единственные предельные точки, и существуют существует оптимальное соответствие между соседними точками. Тогда существуют 0-модификации $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ пространств A и B соответственно такие, что существует оптимальное соответствие между $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$.*

Доказательство. По аналогии с Предложением 43 мы предполагаем, что геодезическая между соседними точками линейна. Возьмем произвольную точку t_0 из интервала $(0, 1)$. Согласно Предложению 43, существуют 0-модификации пространств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ такие, что $R_1 \in \mathcal{R}_{\mathrm{opt}}\big(\tilde{A}, \gamma(t_0)\big)$ и $R_2 \in \mathcal{R}_{\mathrm{opt}}\big(\gamma(t_0), \tilde{B}\big)$. Так как γ — геодезическая, то $d_{\mathrm{GH}}(A, B) = d_{\mathrm{GH}}\big(A, \gamma(t_0)\big) + d_{\mathrm{GH}}(\gamma(t_0), B) = d_{\mathrm{GH}}\big(\tilde{A}, \gamma(t_0)\big) + d_{\mathrm{GH}}\big(\gamma(t_0), \tilde{B}\big) = 1/2\big(\mathrm{dis}(R_1) + \mathrm{dis}(R_2)\big)$, поэтому $R_1 \circ R_2$ — оптимальное соответствие между $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$. □

Определение 45. Такие геодезические мы будем называть *исчерпывающимися кусочно-линейными геодезическими.*

4. Пример метрических пространств с пустым множеством оптимальных соответствий.

В [1] был получен аналогичный результат, но для неограниченного случая. Мы будем использовать следующий пример, чтобы доказать, что не существует кусочно-линейных геодезических.

Пример 46. Приведен пример полных метрических пространств X и Y таких, что $d_{\mathrm{GH}}(X, Y) > 0$ и $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X, Y)$ — пустое множество.

Для этого рассмотрим $X = \triangle_2$ и $Z = (\mathbb{N}, d_Z)$, где

$$d_Z(i,j) = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 1/4 - 1/2^{\max(i,j)+2}, & i \neq j. \end{cases}$$

Обратите внимание, что все расстояния между отдельными точками больше или равны $1/4 - 1/2^4$. Обратите внимание, что все расстояния находятся в интервале $[1/8, 1/4]$. Пространство Z на самом деле является метрическим пространством, поскольку для любых $p_1, p_2, p_3 \in Z$, $p_i \neq p_j$ для $i \neq j$ имеем $d(p_1, p_2) \leq 1/4 \leq 1/8 + 1/8 \leq d(p_1, p_3) + d(p_3, p_2)$.

Разобьем метрическое пространство Z следующим образом: для каждой упорядоченной пары точек $(z_1, z_2) \in Z \times Z$, где $z_1 < z_2$, добавим новую точку z_3 и обозначим новый граф как G.

(1) Множество точек графа G, лежащих в Z, обозначим OLD.

(2) Множество остальных точек графа G обозначим через NEW.

Соединим каждую точку $z_3 \in \mathrm{NEW}$ ребрами с z_1 и z_2 и присвоим веса этим ребрам следующим образом: $\omega(z_3, z_2) = \delta = 1/2023$, $\omega(z_1, z_3) = \omega(z_1, z_2) - \delta$. Определим функции

(3) $\underline{\mathrm{left}}\colon \mathrm{NEW} \to \mathrm{OLD}$, $\underline{\mathrm{right}}\colon \mathrm{NEW} \to \mathrm{OLD}$: $\underline{\mathrm{left}}(z_3) = z_1$ и $\underline{\mathrm{right}}(z_3) = z_2$, где z_3 для пары $z_1 \prec z_2$;

(4) $\underline{\mathrm{nearest}}$, где $\underline{\mathrm{nearest}}(z_3) = \{\underline{\mathrm{left}}(z_3), \underline{\mathrm{right}}(z_3)\}$ для $z_3 \in \mathrm{NEW}$;

(5) $\underline{\mathrm{far}}(z_3) = \mathrm{OLD} \setminus \underline{\mathrm{nearest}}(z_3)$ для каждого $z_3 \in \mathrm{NEW}$.

Здесь и далее z_3 и y_3 обозначают произвольные точки из NEW, $z_2 = \underline{\mathrm{right}}(z_3)$, $z_1 = \underline{\mathrm{left}}(z_3)$, $y_2 = \underline{\mathrm{right}}(y_3)$, $y_1 = \underline{\mathrm{left}}(y_3)$.

Положим $Y = \pi(G)$ и продолжим обозначать Z образ Z. Поскольку граф G был получен методом Конструкции 29, применим лемму 30 (она справедлива, поскольку подграфы G_{z_1,z_2} удовлетворяют неравенствам треугольника) и получим, что проекция π сохраняет веса. По Лемме 26 пространство Y метрическое. Мы также будем рассматривать Y как взвешенный граф, где весовой функцией является расстояние. Мы собираемся описать, как выглядят другие расстояния в новом пространстве.

Лемме 47. *Расстояние от $z_3 \in \mathrm{NEW}$ до $y \in \underline{\mathrm{far}}(z_3)$ равно длине двуреберного пути $L = z_3uy$ при $u = \underline{\mathrm{right}}(z_3) = z_2$, более того, $|L| = \omega(z_2y) + \delta = d_{\max(z_2,y)} + \delta < 1/2$.*

Доказательство. Согласно пункту 3 леммы 30, расстояние вычисляется как длина пути $L = z_3uy$ для некоторого $u \in \underline{\mathrm{nearest}}(z_3)$ и ввиду весовой структуры графа G, оно равно

(1) $d_k - \delta + d_m$ для некоторых $2 \le k, m \in \mathbb{N}$, если L проходит через $z_1 = \underline{\mathrm{left}}(z_3)$, или

(2) $\delta + d_l$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$, если L проходит через $z_2 = \underline{\mathrm{right}}(z_3)$.

Обратите внимание, что

$$\delta + d_l = \delta + 1/4 - 1/2^{l+2} < 1/4 + \delta < 1/4 + 1/8 - \delta = 1/4 - 1/16 - \delta + 1/4 - 1/16 \le 1/4 - 1/2^{k+2} - \delta + 1/4 - 1/2^{m+2} = d_k - \delta + d_m.$$

Таким образом, расстояние вычисляется как длина пути $L = z_3uy$ для $u = z_2 = \underline{\mathrm{right}}(z_3)$, а его длина равна $\delta + \omega(z_2y)$. □

Лемме 48. *Пусть для $z_3, y_3 \in \mathrm{NEW}$ выполняются условия*

$$z_1 = \underline{\mathrm{left}}(z_3) \ne \underline{\mathrm{right}}(y_3) = y_2,$$
$$z_2 = \underline{\mathrm{right}}(z_3) \ne \underline{\mathrm{left}}(y_3) = y_1.$$

Тогда расстояние от z_3 до y_3 равно длине трёхреберного пути z_3uvy_3, где $u = \underline{\mathrm{right}}(z_3)$, $v = \underline{\mathrm{right}}(y_3)$, и равно $\omega(z_2y_2) + 2\delta = d_{\max(y_2,z_2)} + 2\delta < 1/2$.

Доказательство. Согласно пункту 2 леммы 30 кратчайшая кривая имеет вид z_3uvy_3, где $u = \underline{\mathrm{nearest}}(z_3)$, $v = \underline{\mathrm{nearest}}(y_3)$, а ее длина

(1) $(d_m - \delta) + (d_k) + (d_p - \delta)$, если $u = \underline{\mathrm{left}}(z_3)$ и $v = \underline{\mathrm{left}}(y_3)$,

(2) $(\delta) + (d_{k'}) + (\delta)$, если $u = \underline{\mathrm{right}}(z_3)$ и $v = \underline{\mathrm{right}}(y_3)$,

(3) $(d_m - \delta) + (d_{k''}) + (\delta)$, если $u = \underline{\mathrm{left}}(z_3)$ и $v = \underline{\mathrm{right}}(y_3)$,

(4) $(\delta) + (d_{k'''}) + (d_p - \delta)$, если $u = \underline{\mathrm{right}}(z_3)$ и $v = \underline{\mathrm{left}}(y_3)$,

где $d_m = \omega(z_1z_2)$, $d_p = \omega(y_1y_2)$, а k, k', k'', k''' — целые неотрицательные числа, и $2 < m, p \in \mathbb{N}$ из-за условий. Обратите внимание, что

$$\delta + d_{k'} + \delta < 1/4 + 2\delta < 1/2 - 1/8 - 2\ delta = 1/4 - 1/16 + 1/4 - 1/16 - 2\ delta \le d_m - \delta + d_{k''} + \delta$$

и

$$\delta + d_{k'} + \delta < \delta + d_{k'''} + d_p - \delta.$$

В силу неравенства $2\delta + d_n < 1/2$ имеем $d(z_3, y_3) < 1/2$. □

Лемме 49. *Пусть для различных* z_3, $y_3 \in \mathrm{NEW}$, $\underline{\mathrm{right}}(y_3) = \underline{\mathrm{left}}(z_3)$. *Тогда* $d(z_3, y_3) = \omega(z_1 z_2) = d_{z_2} < 1/2$.

Доказательство. Согласно пункту 2 леммы 30 кратчайшая кривая имеет вид $z_3 u v y_3$, где $u = \underline{\mathrm{nearest}}(z_3)$, $v = \underline{\mathrm{nearest}}(y_3)$, а ее длина

(1) $L_1 = (d_m - \delta) + (d_k) + (d_p - \delta)$, если $u = \underline{\mathrm{left}}(z_3)$ и $v = \underline{\mathrm{left}}(y_3)$,

(2) $L_2 = (\delta) + (d_{k'}) + (\delta)$, если $u = \underline{\mathrm{right}}(z_3)$ и $v = \underline{\mathrm{right}}(y_3) = \underline{\mathrm{left}}(z_3))$,

(3) $L_3 = (d_m - \delta) + (d_{k''}) + (\delta)$, если $u = \underline{\mathrm{left}}(z_3) = v = \underline{\mathrm{right}}(y_3)$,

(4) $L_4 = (\delta) + (d_{k'''}) + (d_p - \delta)$, если $u = \underline{\mathrm{right}}(z_3)$ и $v = \underline{\mathrm{left}}(y_3)$,

где $d_m = \omega(z_1 z_2)$, $d_p = \omega(y_1 y_2)$, k'', k''' — целые неотрицательные числа, а k, k' больше, чем или равен 2. Случай $d_{k''} = d(\underline{\mathrm{right}}(z_3), \underline{\mathrm{left}}(z_3)) = 0$ означает $L_3 = d_m < 1/4$. Обратите внимание, что $L_1 \geq d_m + (d_p - 2\delta)$, а выражение в скобках положительное, поэтому $L_1 > L_3$. Обратите внимание, что $d_{k'} = d(\underline{\mathrm{right}}(z_3), \underline{\mathrm{left}}(z_3)) = d(z_1, z_2) = d_m$ и $L_2 = d_m + 2\delta > L_1$. Наконец, условия $\underline{\mathrm{right}}(z_3) = \underline{\mathrm{left}}(y_3)$ и $\underline{\mathrm{right}}(y_3) = \underline{\mathrm{left}}(z_3)$ являются взаимоисключающими для $z_3 \neq y_3$, поэтому $d_{k'''} > 0$ и

$$L_4 = d_{k'''} + d_p \geq 1/4 - 1/16 + 1/4 - 1/16 > 1/4 > d_m = L_3.$$

□

Лемме 50. *Для пространств* X *и* Y *имеем* $2\,\mathrm{d_{GH}}(X, Y) = 3/4 + \delta$ *и* $R_{\mathrm{opt}}(X, Y) = \emptyset$.

Доказательство. Любое неприводимое соответствие между пространствами X, Y имеет вид

$$R = \big\{\{x_1\} \times R(x_1),\, \{x_2\} \times R(x_2)\big\},$$

где $R(x_1) \cap R(x_2) = \emptyset$.

Приведен пример последовательности соответствий $R_N \in \mathcal{R}(X, Y)$, искажение которой приближается к $3/4 + \delta$. Позволять

$$A_1 = \{n \in Z \mid n \leq N\},\ A_2 = \{n \in Z \mid n > N\},$$

затем

$$R_N(x_1) = A_1 \bigcup \{u \in Y \mid \exists \in A_1 \text{ такой, что } d_Z(u, a) = \delta\},$$
$$R_N(x_2) = A_2 \bigcup \{u \in Y \mid \exists \in A_2 \text{ такой, что } d_Z(u, a) = \delta\}.$$

Объединение $R_N(x_1)$ и $R_N(x_2)$ содержит все Z, а также все NEW (для каждого z_3 в NEW существует $\underline{\mathrm{right}}(z_3)$ на расстоянии δ), и $R_N(x_1) \cap R_N(x_2) = \emptyset$, так как каждая точка z_3 в NEW имеет ровно одну OLD точка на расстоянии δ, а точки на расстоянии δ могут быть только из $z_3 \in \mathrm{NEW}$ и его $\underline{\mathrm{right}}(z_3)$.

Диаметр этого разбиения меньше 1/2, поскольку $\mathrm{diam}(Y)$ меньше 1/2. Расстояния между точками разных элементов разбиения имеют следующие виды:

(1) расстояние от точки в $\mathrm{OLD} \cap R_N(x_2)$ до точки в $\mathrm{OLD} \cap R_N(x_1)$ имеет тип d_M,

(2) из точки в $\mathrm{OLD} \cap R_N(x_2)$ в точку в $\mathrm{NEW} \cap R_N(x_1)$ имеет тип $d_M + \delta$ (ониявояются<u>far</u> для NEW),

(3) из точки в $\mathrm{NEW} \cap R_N(x_2)$ в точку в $\mathrm{OLD} \cap R_N(x_1)$ — это либо $d_M - \delta$, либо $d_M + \delta$,

(4) из точки в $\mathrm{NEW} \cap R_N(x_2)$ в точку в $\mathrm{NEW} \cap R_N(x_1)$ — это либо $d_M + 2\delta$, либо d_M (см. лемму 48 и 49),

где M — целое положительное число.

Каждое из описанных выше расстояний, за исключением, может быть, d_M в пункте 4, вычисляется по некоторому пути, проходящему через старую точку $z > N$, поэтому $M > N$.

Значение d_M в пункте 4 — это расстояние от $z_3 \in R_N(x_2) \cap \mathrm{NEW}$, добавленного для $z_1 < z_2$, где $z_2 > N$, до некоторого $y_3 \in R_N(x_1) \cap \mathrm{NEW}$, где $y_1 = \underline{\mathrm{left}}(y_3) = z_2 = \underline{\mathrm{right}}(z_3)$, или $y_2 = \underline{\mathrm{right}}(y_3) = z_1 = \underline{\mathrm{left}}(z_3)$ согласно Лемме 49. Первый случай невозможен, поскольку y_3 можно было добавить только для $y_1 < y_2 \leq N$, а z_3 — для $z_1 < z_2 > N$. Следовательно, $y_2 = \underline{\mathrm{right}}(y_3) = z_1 = \underline{\mathrm{left}}(z_3)$. Согласно Лемме 49, расстояние между z_3 и y_3 равно $d(z_1, z_2) = d_M = d_{\max(z_1, z_2)}$, а это значит, что $M > N$ и в этом случае.

В соответствии с расстояниями между точками в $R(x_1)$ и $R(x_2)$ минимальное расстояние между точками $y \in R_N(x_1)$ и $y' \in R_N(x_2)$ равно $d_{N+1} - \delta = 1/4 - 1/2^{N+3} - \delta$, то есть расстояние между z_3 (добавлено для $1 < N + 1$) и 1 . Поскольку $\max\Big(\mathrm{diam}\big(R_N(x_1)\big), \mathrm{diam}\big(R_N(x_2)\big)\Big) < 1/2$, то

$$\mathrm{dis}(R_N) = \max\bigl(1 - 1/4 + 1/2^{N+3} + \delta, \mathrm{diam}\bigl(R_N(x_1)\bigr), \mathrm{diam}\bigl(R_N(x_2)\bigr)\bigr) \to 3/4 + \delta.$$

Теперь рассмотрим произвольное неприводимое соответствие $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ такое, что $\mathrm{dis}(R) < 1-\delta$. Докажем, что его искажение строго больше $3/4+\delta$.

Рассмотрим произвольную точку z_3 из NEW, предположим, что она принадлежит $R(x_1)$. Если $\underline{\mathrm{right}}(z_3)$ принадлежит $R(x_2)$, то искажение такого соответствия не меньше $1-\delta$. Следовательно, каждый $z_3 \in$ NEW принадлежит тому же элементу раздела, что и его $\underline{\mathrm{right}}(z_3)$. Поскольку каждое $R(x_1)$ и $R(x_2)$ — непустое подмножество, каждое из них содержит точку из Z (если оно содержит $z_3 \in$ NEW, оно содержит и его $\underline{\mathrm{right}}(z_3)$). Найдем минимальный n такой, что $n \in R(x_1)$ (без ограничения общности) и $n+1 \in R(x_2)$. Тогда $\mathrm{dis}(R) \geq \bigl|1 - (1/4+1/2^{n+3}+\delta)\bigr|$, поскольку к паре $z_3 \in$ NEW добавленный к паре $n, n+1$, принадлежит $R(x_2)$. Следовательно, $2\,\mathrm{d_{GH}}(X,Y) = 3/4+\delta$ и $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X,Y) = \emptyset$. □

5. Исчерпывающих кусочно-линейных геодезических недостаточно для описания всех геодезических в пространстве Громова–Хаусдорфа

В этом разделе мы доказываем, что метрические пространства X и Y из примера 46 не имеют 0-модификаций, но могут быть соединены геодезическими другого типа.

Лемме 51. *Пусть* $\mathrm{d_{GH}}(A,B) = 0$*, тогда* $\overline{\sigma(B)} = \overline{\sigma(A)}$.

Доказательство. Докажем, что $\sigma(B) \subseteq \overline{\sigma(A)}$. Рассмотрим произвольные $|yy'| \in \sigma(B)$ и $R_n \in \mathcal{R}(A,B)$ такие, что $\mathrm{dis}(R_n) \to 0$. Тогда для любого n существуют a_n, a_n' такие, что $\bigl||bb'| - |a_n a_n'|\bigr| \leq \mathrm{dis}(R_n) \to 0$, откуда следует, что $|bb'|$ является предельной точкой $\sigma(A)$ и, следовательно, лежит в ее замыкании. Аналогично получаем $\sigma(A) \subseteq \overline{\sigma(B)}$, из чего следует искомый результат. □

Лемме 52. *Пусть метрическое пространство A имеет положительные* $\mathrm{s}(A)$ *и* $\mathrm{e}(A)$*. Тогда A не имеет* 0*-модификаций.*

Доказательство. Пусть $\tilde{A}$ — 0-модификация A. Выберите $\varepsilon < \min(\mathrm{e}(A), \mathrm{s}(A))/8$ и $R \in \mathcal{R}(A, \tilde{A})$ такие, что $\mathrm{dis}(R) < 2\varepsilon$. Тогда по теореме 21 соответствие R является оптимальным. Отсюда следует, что $\mathrm{dis}(R) = 0$, и, следовательно, R — изометрия. □

Лемме 53. *Пусть $\sigma(A)$ — конечное подмножество вещественной прямой. Тогда A не имеет* 0*-модификаций.*

Доказательство. Рассмотрим B такой, что $\mathrm{d_{GH}}(A,B) = 0$. По Лемме 51 его спектр также является конечным подмножеством вещественной линии. По Предложению 59 расстояние между ними достигается некоторым соответствием R, что означает, что R является изометрией. □

Предложение 54. *Пусть A, B — метрические пространства и* $U = \bigl\{\gamma \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \exists \alpha \in \sigma(A) \textit{ and } beta \in \sigma(B) \textit{ такая, что } \gamma = |\alpha - \beta|\bigr\}$ *дискретно, а именно не имеет предельных точек (как подмножество вещественной прямой). Тогда существует оптимальное соответствие между метрическими пространствами A и B.*

Доказательство. Действительно, искажения всех соответствий находятся в U, поэтому любая убывающая последовательность значений искажений достигает своей нижней границы на некотором соответствии. □

Рассмотрим пространства X и Y из примера 46.

Лемме 55. *Пространства X и Y не имеют* 0*-модификаций.*

Доказательство. Пространство X не имеет 0-модификаций по следствию 17.

Докажем, что $\mathrm{s}(Y)$ и $\mathrm{e}(Y)$ строго положительны. По построению $\mathrm{s}(Y) = \delta$. Пусть $\varphi\colon Y \to Y$ — биекция такая, что $\mathrm{dis}(\varphi) < \delta$. Рассмотрим Y как взвешенный граф G с весами, соответствующими расстояниям между точками. Пусть G_δ — подграф G, в котором множество вершин графа G_δ совпадает с множеством вершин графа G, а ребра G_δ — все ребра G веса δ. Каждая точка i имеет ровно $i-1$ точек на расстоянии δ. Каждая из этих $i-1$ точек принадлежит NEW и имеет ровно одну точку на расстоянии δ, а именно точку i. Следовательно, граф G_δ имеет счетное число компонент связности, каждая из которых конечная, и все они состоят из разного количества точек. Отображение φ переводит точки на расстоянии δ в точки на расстоянии δ, поскольку $\sigma(Y) \cap (0, 2\delta) = \{\delta\}$ и $\mathrm{dis}(\varphi) < \delta$. Это подразумевает $\varphi(G_\delta) \subseteq G_\delta$ и $\varphi^{-1}(G_\delta) \subseteq G_\delta$ (поскольку $\mathrm{dis}(\varphi^{-1}) = \mathrm{dis}(\varphi) < \delta$). Следовательно,

$\varphi(G_\delta) = G_\delta$, а это означает, что φ — изоморфизм графа G_δ. В частности, $\varphi(i) = i$ для $i = 1$ или $i > 2$, поскольку такие точки i имеют степень $i-1$, а других точек степени $i-1$ в графе G_δ. Единственную точку, добавленную для пары $1 < 2$, обозначим $3/2$. Поскольку компоненты связности отображаются в компоненты связности, вершина 2 графа G отображается в вершину $3/2$ или 2 из G. Если $\varphi(2) = 3/2$, то $\operatorname{dis}(\varphi) \geq \left|d(\varphi(2), \varphi(1)) - d(2,1)\right| = \left|d(3/2, 1) - d(2,1)\right| = \delta$. Противоречие. Следовательно, $\varphi(i) = i$ для всех натуральных чисел i. Докажем, что отображение φ тождественно на NEW. Пусть z_3 добавляется при $k < i$ и $y_3 := \varphi(z_3) \neq z_3$. Поскольку φ — изоморфизм графа G_δ и φ постоянен на i, то $\varphi(S_\delta(i)) = S_\delta(\varphi(i)) = S_\delta(i)$. Таким образом, y_3 добавляется при $l < i$, $k \neq l$ ($d(y_3, i) = \delta$, следовательно, $i = \underline{\mathrm{right}}(y_3)$). Но $d(z_3, k) = d_i - \delta$ по определению и $d(y_3, k) = d_i + \delta$ согласно Лемме 49, поскольку $k \in \underline{\mathrm{far}}(y_3)$. Следовательно, $\left|d(z_3, k) - d(\varphi(z_3), \varphi(k))\right| = \left|d(z_3, k) - d(y_3, k)\right| = 2\delta$, противоречие. Таким образом, $\varphi = \mathrm{id}$ и $\mathrm{e}(Y) \geq \delta$.

Следовательно, $\min(\mathrm{s}(Y), \mathrm{e}(Y)) > 0$. По Лемме 52, Y не имеет 0-модификаций. □

Теорема 56. *Между пространствами X и Y из примера 46 существует геодезическая.*

Доказательство. Рассмотрим два пространства: $Z = (\mathbb{N}, d_Z)$ и $Z' = (\mathbb{N} \cup \infty, d_{Z'})$, где расстояния определяются следующим образом:

$$d_Z(i,j) = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 1/4 - 1/2^{\max(i,j)+2} + 2\delta, & i \neq j, \end{cases}$$

и

$$d_{Z'}(i,j) = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 1/4 - 1/2^{\max(i,j)+2} + 2\delta, & i, j < \infty \text{ и } i \neq j, \\ 1/4 + 2\delta, & \max(i,j) = \infty \text{ и } i \neq j \end{cases}$$

Эти расстояния являются метриками, поскольку все их ненулевые расстояния принадлежат интервалу $[1/7, 2/7]$.

Лемме 57. *Для метрических пространств Z и Z' справедливо равенство* $\mathrm{d_{GH}}(Z, Z') = 0$.

Доказательство. Чтобы показать это, рассмотрим соответствия $R_i = \Big\{(j,j) : j \in \mathbb{N}\Big\} \cup \Big\{(i, \infty)\Big\}$. Их искажения

$$\operatorname{dis}(R_i) = \max\Big(\sup_{j,k<\infty} \left|d_Z(j,k) - d_{Z'}(j,k)\right|, \sup_j \left|d_Z(j,i) - d_{Z'}(j,\infty)\right|\Big) =$$
$$= \sup_j \left|d_Z(j,i) - d_{Z'}(j,\infty)\right| = \sup_j 1/2^{\max(i,j)+2} = 1/2^{i+2}.$$

Для завершения доказательства отметим, что эти искажения стремятся к нулю при $i \to \infty$. □

Теперь построим геодезические между $X = \triangle_2 = (p_1, p_2)$ и Z', а также между Z и Y. Рассмотрим $R = \big\{(p_1, i) : i \in \mathbb{N}\big\} \cup \big\{(p_2, \infty)\big\} \in \mathcal{R}(X, Z')$. Искажение $\operatorname{dis}(R)$ равно

$$\max\Big(\operatorname{diam}\Big(R\big(p_1\big)\Big), \operatorname{diam}\Big(R\big(p_2\big)\Big), \sup_j\Big\{\left|d_X(p_1,p_2) - d_{Z'}(j,\infty)\right|\Big\}\Big) =$$
$$= \max\Big(1/4 + 2\delta, \sup_j\big(|1 - 1/4 - 2\delta|\big)\Big) = 3/4 - 2\delta.$$

Пусть $R' = \bigcup_{i<\infty} \{i\} \times B_\delta(i) \in \mathcal{R}(Z, Y)$. Искажение $\operatorname{dis}(R')$ равно

$$\max\Big(\sup_i\Big\{\left|d_i + 2\delta - d_i\right|\Big\}, \sup_i\Big\{\left|d_i + 2\delta - (d_i + \delta)\right|\Big\}, \sup_i\Big\{\left|d_i + 2\delta - (d_i - \delta)\right|\Big\}, \sup_i\Big\{\left|d_i + 2\delta - (d_i + 2\delta)\right|\Big\}, 2\delta\Big) = 3\delta.$$

По Лемме 50 имеем $3/4 + \delta = 2\,\mathrm{d_{GH}}(X, Y)$, поэтому

$$3/4 + \delta = 2\,\mathrm{d_{GH}}(X,Y) \leq 2\,\mathrm{d_{GH}}(X, Z') + 2\,\mathrm{d_{GH}}(Z', Z) + 2\,\mathrm{d_{GH}}(Z, Y) \leq \operatorname{dis}(R) + \operatorname{dis}(R') = 3/4 + \delta.$$

Следовательно, R и R' являются оптимальными соответствиями, поэтому между пространствами X, Z и Z', Y существуют линейные геодезические. Поскольку $\mathrm{d_{GH}}(X,Y) = \mathrm{d_{GH}}(X,Z) + \mathrm{d_{GH}}(Z,Z') + \mathrm{d_{GH}}(Z',Y)$ и $\mathrm{d_{GH}}(Z,Z') = 0$, тогда метрические пространства X, Y также можно соединить геодезической, составленной из двух построенных выше геодезических. □

Заметим, что между пространствами X и Y, а также их 0-модификациями не существует кусочно-линейной геодезической или геодезической, исчерпываемой кусочно-линейными геодезическими, поскольку не существует оптимального соответствия между X, Y и пространства X, Y не имеют 0-модификаций.

Замечание 58. Пространства Z и Z' не изометричны друг другу и $\mathrm{d_{GH}}(Z, Z') = 0$, поскольку их спектры различны.

6. Построение плотного подкласса $\mathcal{GH}$, состоящего из метрических пространств с оптимальным соответствием между каждой парой

Лемме 59. *Пусть $X, Y \in \mathcal{B}$ — метрические пространства с конечными спектрами $\sigma(X)$ и $\sigma(Y)$. Тогда расстояние между этими метрическими пространствами достигается некоторым соответствием.*

Доказательство. Достаточно заметить, что искажения всех соответствий также образуют конечное подмножество действительной линии, тогда достигается нижняя грань искажений. □

Напомним функцию потолка $\lceil x \rceil = \min\{n \in N, x \leq n\}$.

Определение 60. Функция $l_\varepsilon(x) \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$l_\varepsilon(x) = \varepsilon \lceil x/\varepsilon \rceil$$

называется *ε-лестницей.*

Лемме 61 ([13]). *ε-лестница — это функция, сохраняющая расстояние.*

Следствие 62. *В $\mathcal{GH}$ существует плотный класс метрических пространств D такой, что для любой пары $X, Y \in D$ существует оптимальное соответствие.*

Доказательство. Рассмотрим класс D, полученный применением $l_{2^{-n}}$ к каждому метрическому пространству. Тогда разница между любыми двумя расстояниями от метрического пространства $A_n = l_{2^{-n}}(X)$ и метрического пространства $B_m = l_{2^{-m}}(Y)$ равна $k2^{-\max(m,n)}$. По Лемме 54 существует оптимальное соответствие между пространствами A_n и B_m. По Лемме 35 пространства A_n стремятся к X при $n \to \infty$. □

Следствие 63. *Для любого $X \in \mathcal{GH}$ имеем $\mathrm{s}\big(l_{2^{-n}}(X)\big) \geq 2^{-n} > 0$ и $\mathrm{e}'\big(l_{2^{-n}}(X)\big) \geq 2^{-n} > 0$, следовательно, класс D содержится в классе метрических пространств обобщенного общего положения.*

Список литературы

[1] Patrick Ghanaat, *Gromov-Hausdorff distance and applications*, Metric Geometry Les Diablerets, August 25–30, 2013

[2] L. Blumenthal, *Theory and applications of distance geometry*, The Mathematical Gazette, 38, 216, 1954.

[3] S.I. Bogataya, S.A. Bogatyy, V.V. Redkozubov, A.A. Tuzhilin, *Gromov–Hausdorff class: its completeness and cloud geometry*, Topology and Its Applications, 329, 2023.

[4] J. Borsík, J. Doboš, *On metric preserving functions*, Real Analysis Exchange, 1988.

[5] D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov, *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Mathematics, Amer. Math. Soc. Providence, RI., 33, 2021.

[6] V.M. Chikin, *Functions Preserving Metrics, and Gromov–Hausdorff Space*, Moscow University Mathematics Bulletin volume 76, pages 154–160, 2021.

[7] S. Chowdhury, F. Mémoli,*Explicit geodesics in Gromov–Hausdorff space.* Electronic Research Announcement, 25, 48-59, 2018.

[8] M. Gromov, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Textes Mathématiques n°1 Paris, 1-120, 1981.

[9] J.Hansen, https://math.stackexchange.com/questions/4552398/is-gromov-hausdorff-distance-realized-when-one

[10] A.O.Ivanov, S.Iliadis, and A.A.Tuzhilin, *Realizations of Gromov–Hausdorff Distance*, ArXiv e-prints, arXiv:1603.08850, 2016.

[11] A.O.Ivanov, N.K.Nikolaeva, A.A.Tuzhilin, *The Gromov–Hausdorff metric on the space of compact metric spaces is strictly intrinsic*. Math Notes 100, 883–885, 2016.

[12] A.O. Ivanov, A.A. Tuzhilin, *Isometric Embeddings of Bounded Metric Spaces into the Gromov-Hausdorff Class*, Sbornik: Mathematic, Volume 213, Issue 10, 1400–1414, 2022.

[13] A. Vikhrov, *Denseness of metric spaces in general position in the Gromov–Hausdorff class*, Topology and its Applications, Volume 342, 2024