

Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

КУРСОВАЯ РАБОТА

Устойчивость решений задачи Ферма–Торричелли в нормированных пространствах
Stability of loci of the Fermat-Torricelli problem in normed spaces

Выполнил студент 5 курса
Илюхин Д.А.
Научный руководитель
д.ф.м.н., проф. А.А.Тужилин

Москва 2024

Аннотация

В статье изучаются конфигурационные пространства для задачи Ферма–Торричелли в конечномерных нормированных пространствах. Рассмотрены их топологические свойства. Построены примеры бифуркационных диаграмм решений и исследовано их устройство для различных типов нормированных плоскостей.

1 Введение

В статье рассматривается классический вариант задачи Ферма–Торричелли, сформулированной ещё в 17 веке: поиск точки, для которой достигается минимум суммы расстояний до элементов подмножества метрического пространства. Такую формулировку будем называть *обобщённой проблемой Ферма–Торричелли* (или просто *проблемой Ферма–Торричелли*). Работа опирается на статью [13], в ней описано применение геометрического подхода к задаче и изложены некоторые новые результаты, которые получены в рамках вещественных конечномерных нормированных пространств.

О развитии решения данной задачи на евклидовой плоскости можно прочитать в [3], [1] и [6]. Кроме того, существует обобщённая задача, в которой вершины рассматриваются вместе с некоторыми положительными величинами, называемых весами. О развитии взвешенной задачи можно прочитать в работах [16], [17], [14]. В частности, были доказаны существование и единственность решения такой задачи для трёх точек на евклидовой плоскости ([12]).

В статьях [8] и [9] были получены критерии существования неединственных решений в нормированных пространствах произвольной конечной размерности. В текущей статье поставлена задача исследовать условия устойчивости таких решений.

Выражаю благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. профессору А.А. Тужилину, а также д.ф.-м.н. профессору А.О. Иванову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

2 Проблема Ферма–Торричелли и методы её решения

Все утверждения этого раздела будут сформулированы для конечномерных нормированных пространств.

Определение 2.1. Точка x_0 называется *точкой Ферма–Торричелли* для точек $A = \{x_1, \dots, x_n\}$, если $x = x_0$ минимизирует $\sum_{i=1}^n |xx_i|$. Множество всех таких точек обозначим $\text{ft}(A)$.

Из свойств функции $\sum_{i=1}^n |xx_i|$ можно получить следующее утверждение про множество решений задачи Ферма–Торричелли, см. например [5].

Предложение 2.2. Пусть $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ — точки в пространстве. Тогда $\text{ft}(A)$ — непустое, компактное и выпуклое множество.

Теперь будет изложен геометрический метод построения решения задачи Ферма–Торричелли. Чтобы его использовать, наряду с исходным пространством X нужно рассматривать двойственное к нему пространство X^* , состоящее из линейных функционалов.

Определение 2.3. Функционал $\varphi \in X^*$ называется *нормирующим для вектора $x \in X$* , если $\|\varphi\| = 1$ и $\varphi(x) = \|x\|$.

Легко заметить, что элементы пространства X , полученные умножением вектора x на положительное число k , имеют тот же набор нормирующих функционалов. То есть множество таких функционалов можно описать с помощью точек единичной сферы.

Следующая теорема является критерием принадлежности некоторой точки множеству решений задачи Ферма–Торричелли.

Теорема 2.4 ([7], [10]). Пусть x_0, x_1, \dots, x_n — точки в пространстве и $x_0 \neq x_i$ для $i = 1, \dots, n$. Тогда x_0 — точка Ферма–Торричелли для $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ тогда и только тогда, когда для каждого вектора $x_i - x_0$, $i = 1, \dots, n$, существует нормирующий функционал φ_i такой, что $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 0$.

Допустим, что найдена точка, являющаяся решением для множества A . Теперь с помощью функционалов из теоремы 2.4 можно построить всё множество $\text{ft}(A)$. Для этого введём новый объект.

Определение 2.5. Пусть даны функционал $\varphi \in X^*$ и точка $x \in X$. Определим конус $C(x, \varphi) = x - \{a : \varphi(a) = \|a\|\}$.

Теорема 2.6 ([7]). Пусть $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ — точки в пространстве и $p \in \text{ft}(A) \setminus A$. По теореме 2.4 для каждого вектора $x_i - p$, $i = 1, \dots, n$, существует нормирующий функционал φ_i такой, что $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 0$. Тогда $\text{ft}(A) = \bigcap_{i=1}^n C(x_i, \varphi_i)$.

Теоремы 2.4 и 2.6 составляют геометрический метод поиска решения задачи Ферма–Торричелли. Чтобы описать применение этой теоремы, рассмотрим подробнее пример с вершинами равно-стороннего треугольника в шестиугольной норме (рисунок 1).

Во-первых, найдём хотя бы одно решение. Возьмём $p = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ и с помощью теоремы 2.4 докажем, что $p \in \text{ft}(A)$. Для этого рассмотрим векторы $x_1 - p, x_2 - p, x_3 - p$ и построим их нормирующие функционалы. Так как они лежат на одних направлениях с внутренними точками уплощений, то для каждого из векторов $x_i - p$ существует ровно один функционал φ_i , линия уровня которого содержит соответствующее уплощение. Уплощения равноудалены от начала координат и задают равносторонний треугольник, следовательно, сумма функционалов, построенных по ним, равна нулю, и условие теоремы выполнено.

Теперь воспользуемся теоремой 2.6, чтобы отыскать все решения. Построим конус, задаваемый функционалом φ_2 и вектором $x_2 - p$. Так как функционал является нормирующим для всех точек уплощения, множество $\{a : \varphi_2(a) = \|a\|\}$ представляет собой набор лучей, выходящих из начала координат и проходящих через точки уплощения, то есть угол, стороны которого содержат две соседние вершины. Теперь отразим угол относительно начала координат и совершим параллельный перенос так, чтобы вершина угла оказалась в точке x_2 . После аналогичного построения двух других конусов получим, что их пересечением является весь треугольник $x_1x_2x_3$.

Замечание 2.7. Утверждение теоремы 2.6 не зависит от выбора точки p и функционалов φ_i .

Геометрический метод даёт общее описание решений задачи Ферма–Торричелли для различных заданных множеств — это пересечение некоторых конусов с вершинами, расположенными в точках этого множества. Это наблюдение позволяет сформулировать следующие утверждения:

Предложение 2.8 ([13]). Пусть в пространстве точки множества $A = \{x_1, \dots, x_{2k+1}\}$ расположены на одной прямой в порядке их нумерации. Тогда $\text{ft}(A) = \{x_{k+1}\}$. Если $A = \{x_1, \dots, x_{2k}\}$, то $\text{ft}(A) = \overline{x_kx_{k+1}}$

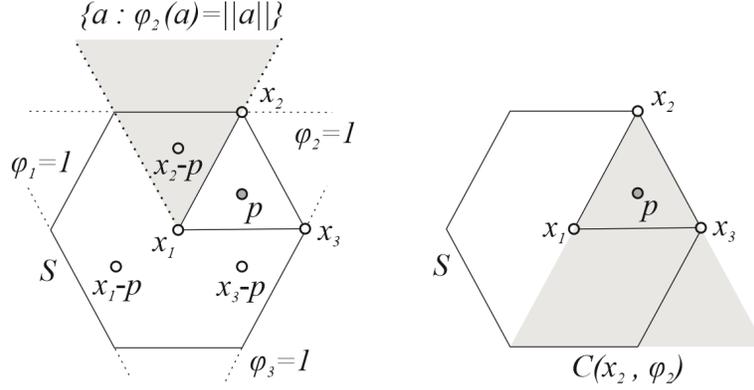


Рис. 1: Построение полного множества решений для точек x_1, x_2, x_3 на плоскости с шестиугольной нормой

3 Конфигурационные пространства

Пусть X — нормированное пространство размерности d . Рассмотрим в нём задачу Ферма–Торричелли для n точек.

Определение 3.1. Конфигурационным пространством $C_{X,n}$ называется евклидово пространство $\mathbb{R}^{nd}(x_{11}, \dots, x_{1d}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nd})$, точкам которого соответствуют наборы точек пространства X .

3.1 Устойчивость решений задачи Ферма–Торричелли

Определение 3.2. Пусть решение задачи Ферма–Торричелли для набора точек $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ единственно (неединственно). Будем говорить, что решение *устойчиво*, если существует окрестность набора \mathbf{x} в конфигурационном пространстве $C_{X,n}$ такая, что для любого набора из этой окрестности решение задачи Ферма–Торричелли тоже единственно (неединственно).

Назовём X *пространством с устойчивой n -единственностью* (*n -неединственностью*), если любое единственное (неединственное) решение для n точек является устойчивым.

Предложение 3.3. Пусть n нечётно. Пространство X является пространством с устойчивой n -единственностью тогда и только тогда, когда решение задачи Ферма–Торричелли единственно для любых n точек.

Доказательство. Допустим, что в X есть набор точек такой, что решение неединственно. Можно считать, что оно содержит ноль. Рассмотрим соответствующее этому решению согласованное множество граней. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — набор внутренних точек этих граней. Для любого $\lambda > 0$ решение задачи для набора $\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ тоже неединственно. Тогда в любой окрестности нуля лежит набор $\lambda\mathbf{x}$ с неединственным решением при достаточно малом $\lambda > 0$. При этом для самого нулевого набора решение единственно. \square

Предложение 3.4. Для чётного n пространств с устойчивой n -единственностью не существует.

Доказательство. Для чётного числа различных точек, лежащих на одной прямой, решение всегда неединственно. Аналогично предыдущему доказательству получаем, что нулевой набор неустойчив. \square

Лемма 3.5. *Для каждой шестиугольной нормированной плоскости её набор согласованных множеств граней относится к одному из трёх типов:*

1. *Существуют только согласованные множества из трёх граней-отрезков и из трёх граней-точек \iff Неединственными решениями являются только многоугольники.*
2. *Существуют все виды согласованных множеств кроме трёх граней-отрезков \iff Неединственными решениями являются только отрезки.*
3. *Существуют только согласованные множества из трёх граней-точек \iff Неединственных решений не существует.*

Доказательство. Допустим, что три грани-отрезка шестиугольной нормированной плоскости составляют согласованное множество. Для двух функционалов, опирающихся на две несоседние грани шестиугольника, дополняющий их до нуля функционал опирается на третью грань, поэтому согласованного множества из двух отрезков и точки не существует. Если в согласованное множество входят две точки, то они противоположные. Опирающиеся на них функционалы не могут дополнять функционал грани до нуля, так как точка пересечения опорных прямых лежит дальше точки пересечения опорных прямых прилежащих к ним граней, который действительно дополняют до нуля первый функционал.

Пусть существует согласованное множество из двух граней-точек и грани-отрезка. Грани-точки противоположны, через них проходит нулевой уровень функционала грани-отрезка. Можно поверачивать функционалы граней-точек вокруг самих точек так, чтобы точка их пересечения оставалась на линии уровня первого функционала $\varphi = -2$, при этом сумма функционалов будет оставаться нулевой. Повернём их так, что один из функционалов станет опорным для грани, прилежащей к опорной точке. Получим согласованное множество из двух граней-отрезков и одной грани-точки. Аналогично можно получить из согласованных двух отрезков и точки согласованные две точки и один отрезок. Утверждение доказано. \square

Лемма 3.6. *Пусть для набора $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ решение единственно (неединственно) и существуют окрестности для всех точек x_i кроме одной x_n такие, что для любого набора $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_{n-1}, x_n)$, где x'_i из окрестности x_i , решение тоже единственно (неединственно). Тогда решение устойчиво.*

Доказательство. По определению устойчивости решения единственность или неединственность должна сохраняться для всех точек некоторой окрестности набора. Это эквивалентно сохранению решения для наборов, где каждая компонента взята из окрестности компоненты исходного набора. Однако так как параллельный перенос набора точек сохраняет решение задачи Ферма–Торричелли, то можно ограничиться теми наборами, где одна из компонент остаётся на месте. \square

Предложение 3.7. *Все нормированные плоскости, норма на которых задаётся многоугольниками, обладают устойчивой 3-неединственностью.*

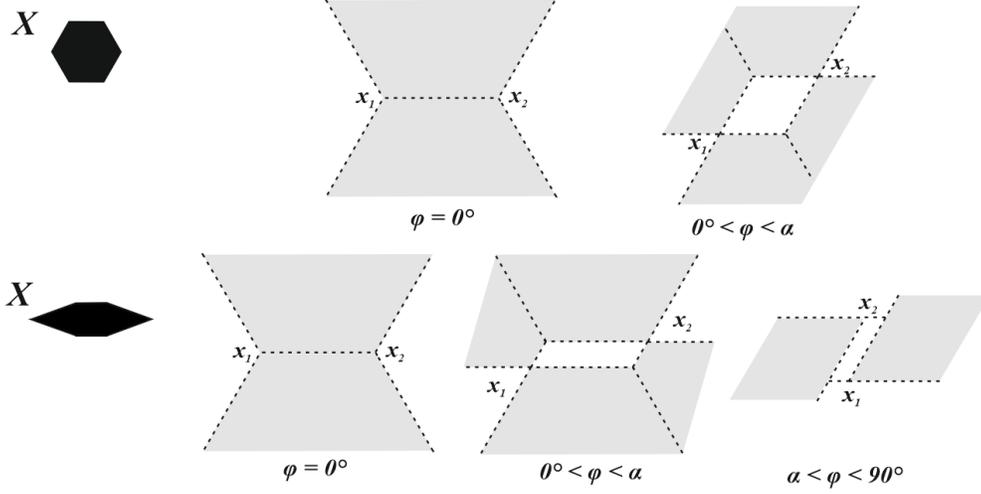


Рис. 2: Неединственные решения в шестиугольных нормах

Доказательство. Пусть для точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ решение задачи Ферма–Торричелли неединственно и ноль входит в решение. Функционалы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — нормирующие для x_1, x_2, x_3 . Нужно рассмотреть три варианта состава согласованного множества граней, соответствующего набору φ_i .

Случай 1. Пусть каждый функционал φ_i опирается на грань-отрезок.

Если хотя бы две точки \hat{x}_1, \hat{x}_2 принадлежат внутренностям уплощений, то для них существуют окрестности такие, что для любого набора x'_1, x'_2, x_3 решение неединственно. Тогда по лемме 3.6 решение устойчиво.

Если две точки \hat{x}_i и \hat{x}_j — непротивоположные вершины единичной окружности, то параллельным переносом сдвинем набор вдоль диагонали единичной окружности, на которой лежит точка \hat{x}_i . Направление переноса нужно задать так, чтобы точка x_j сохранила свой нормирующий функционал. Получили предыдущий случай, для которого решение устойчиво.

Если точки \hat{x}_i и \hat{x}_j противоположны, то грани, на которые опираются их нормирующие функционалы, лежат с одной стороны от прямой, содержащей отрезок $\overline{\hat{x}_i \hat{x}_j}$. Значит, можно сдвинуть параллельным переносом набор x_1, x_2, x_3 в направлении, перпендикулярном отрезку $\overline{\hat{x}_i \hat{x}_j}$ так, что точки \hat{x}_i, \hat{x}_j попадут внутрь уплощений.

Пусть все точки $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ не лежат внутри уплощений. Проверим сдвиги вдоль диаметров единичной окружности, содержащих точки x_i . Если для некоторого диаметра существует сдвиг, после которого две другие точки попадают внутрь уплощений, соответствующих своим функционалам, то получаем устойчивость. Если такого сдвига не существует, то конусы, выходящие из x_i , пересекаются только по нулю, и решение единственно.

Случай 2. Пусть функционалы φ_1 и φ_2 опираются на уплощения, а φ_3 — на вершину. Если точки \hat{x}_1, \hat{x}_2 лежат внутри уплощений, то для них существуют окрестности такие, что для любого набора x'_1, x'_2, x_3 решение неединственно. Тогда по лемме 3.6 решение устойчиво.

Если одна из точек \hat{x}_1, \hat{x}_2 — вершина, то сдвинем набор \mathbf{x} вдоль диаметра единичной окруж-

ности, содержащего точку \hat{x}_3 , так, чтобы все точки \hat{x}_i сохранили свои функционалы.

Если обе точки \hat{x}_1, \hat{x}_2 являются вершинами, то снова рассмотрим возможность сдвига вдоль диаметра, содержащего \hat{x}_3 . В случае существования сдвига такого, что точки \hat{x}_1, \hat{x}_2 попадают внутрь уплощений, получаем устойчивость. Если независимо от направления сдвига одна из точек не сохраняет свой нормирующий функционал, то исходные точки \hat{x}_1, \hat{x}_2 расположены так, что конусы, выходящие из них пересекаются на диаметре, содержащем \hat{x}_3 , только по нулю. В таком случае решение единственно, и, следовательно, такой случай не возникает.

Случай 3. Пусть функционал φ_1 опирается на уплощение, а φ_2 и φ_3 — на вершины. Тогда эти вершины противоположны, и можно повернуть φ_2 и φ_3 вокруг точек касания так, что один из них станет опираться на уплощение. Таким образом, тому же набору x теперь соответствует согласованное множество из двух уплощений и вершины. Этот случай уже разобран, значит, решение устойчиво. \square

Для полного описания норм с устойчивой 3-неединственностью дополним определение согласованного множества граней единичной сферы из [8].

Определение 3.8. Возьмём конечное множество граней F единичной сферы S пространства Минковского. Для каждой $f_i \in F$ выберем опорную гиперплоскость π_i так, что $\pi_i \cap S = f_i$. Пусть гиперплоскость π_i задаёт поверхность уровня $\varphi_i = 1$ некоторого линейного функционала φ_i . Если найдётся набор опорных гиперплоскостей такой, что сумма построенных функционалов равна нулевому, то такое множество граней называется *согласованным*.

Согласованное множество граней $F_0 = \{f_1^0, \dots, f_n^0\}$ называется *максимальным*, если не существует другого согласованного множества $F = \{f_1, \dots, f_n\}$, полностью покрывающего его, то есть такого, что $f_i^0 \subset f_i$ для любого $i = 1, \dots, n$.

Теорема 3.9. *В нормированной плоскости существует набор из трёх точек с неустойчивым неединственным решением, если и только если у её единичной окружности найдётся максимальное согласованное множество граней из двух точек и уплощения.*

Доказательство. Рассуждение доказательства утверждения 3.7 для случаев 1 и 2 верно и для произвольных нормированных плоскостей. Случай 3 также имеет место, если согласованное множество из уплощения и двух вершин не является максимальным. Таким образом, если искомого согласованного множества отсутствует, то все неединственные решения устойчивы.

Допустим, что единичная окружность имеет согласованное множество F_M из уплощения и двух вершин, и оно максимально. Тогда в некоторой окрестности этих вершин отсутствуют уплощения, а также какие-либо грани других согласованных множеств. Пусть этой окрестности соответствует конус с углом раствора ε и с вершиной в нуле. Рассмотрим набор вершин треугольника, основание которого параллельно прямой, соединяющей вершины из F_M , а третья вершина равноудалена от двух других вершин и находится на достаточно малом расстоянии от основания так что острые углы треугольника меньше, чем ε . Решение для этого набора неединственно и соответствует рассматриваемым граням F_M .

Сдвинем на малое расстояние одну из вершин основания треугольника так, что основание треугольника сменит направление. Допустим, что решение нового набора снова неединственно, тогда одно из решений лежит в треугольнике и не является одной из его вершин. Сдвинем треугольник так, что это решение совпадает с нулём. Лучи, проведённые из нуля к вершинам основания треугольника, должны пересекать согласованные грани единичной окружности. Так как эти пересечения находятся в ε -окрестности вершин из F_M , но не являются ими, то получаем противоречие.

□

3.2 Бифуркационные диаграммы решений

Рассмотрим задачу Ферма–Торричелли для трёх точек в нормированной плоскости. Существуют преобразования плоскости, которые для любого набора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ переводят их множество решений $\text{ft}(\mathbf{x})$ в $\text{ft}(\mathbf{x}')$ — множество решений изменённого набора. Такими преобразованиями являются сдвиги и гомотетии с центром в нуле.

Будем считать, что набор из трёх точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ задаётся полярным углом φ вектора $\overline{x_1x_2}$ и положением точки x_3 относительно этого вектора. Для фиксированного угла φ рассмотрим *бифуркационную диаграмму решений* — разобьём плоскость на два подмножества. Одно из них отвечает положениям точки x_3 , для которых множество $\text{ft}(\mathbf{x})$ состоит из единственного решения, другое — положениям, соответствующим неединственным решениям.

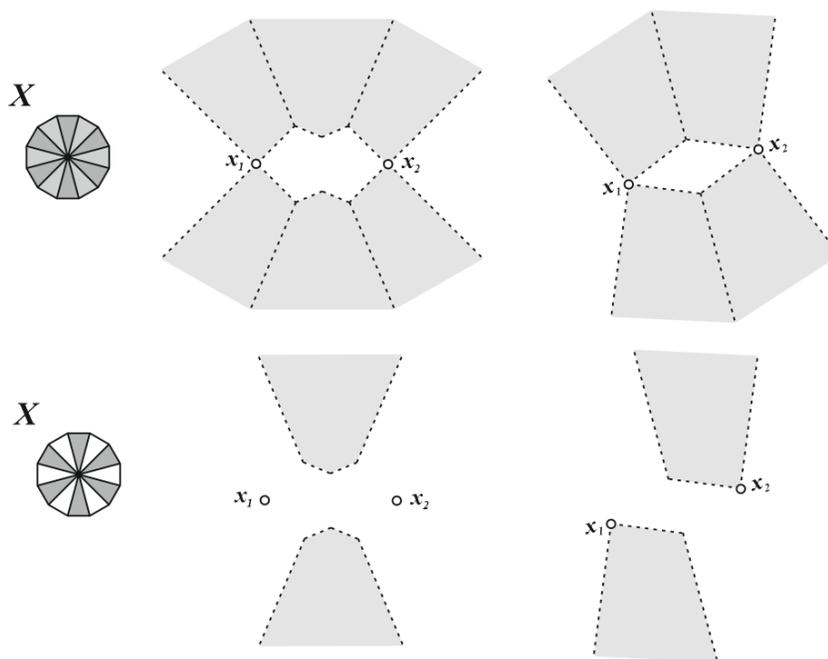


Рис. 3: Бифуркационные диаграммы для многоугольной нормы и нормы с уплощениями

Изучим свойства бифуркационных диаграмм. Так как для любых трёх точек, лежащих на одной прямой, решение единственно и совпадает с одной из этих точек, то получаем первое свойство:

Предложение 3.10. *Прямая, содержащая точки x_1 и x_2 , входит в подмножество единственных решений.*

Лемма 3.11. *Каждому согласованному множеству уплощений единичной окружности поставим в соответствие набор углов $\{(\psi_{11}, \psi_{12}), \dots, (\psi_{n1}, \psi_{n2})\}$, где (ψ_{i1}, ψ_{i2}) — это полярные*

углы концов грани f_i . Если грань — точка, то $\psi_{i1} = \psi_{i2}$. Эти наборы углов однозначно задают вид бифуркационных диаграмм для данной нормированной плоскости.

Доказательство. Так как решения задачи Ферма–Торричелли это пересечения конусов, которые строятся из лучей, проходящих через грани единичной сферы, то они зависят только от диапазона полярной координаты грани, и не зависят от удалённости грани от нуля. \square

Было доказано, что в многоугольных нормированных плоскостях неединственные решения устойчивы. Это должны отражать их бифуркационные диаграммы. Известные множества согласованных граней позволяют их построить.

Теорема 3.12. Пусть для многоугольной нормированной плоскости известно множество всех максимальных наборов из трёх согласованных граней. Тогда для любой бифуркационной диаграммы подмножество неединственных решений состоит из множества непересекающихся открытых областей, причём каждому из наборов соответствуют одна или две области.

Доказательство. Возьмём набор согласованных граней в виде трёх конусов с вершинами в нуле. Конусы задаются перечислением направлений $\{(\psi_{11}, \psi_{12}), \dots, (\psi_{n1}, \psi_{n2})\}$.

Пусть направление ψ основания x_1x_2 диаграммы не лежит ни в одном из интервалов (ψ_{i1}, ψ_{i2}) . Расположим основание так, что каждая из точек x_1, x_2 лежит в своём конусе. Конусы можно выбрать однозначно. Третий конус задаёт множество положений точки x_3 , при которых решение задачи Ферма–Торричелли неединственно. Сдвигая основание x_1x_2 так, чтобы его точки оставались внутри тех же конусов, объединением областей, занимаемых третьим конусом, получаем полное подмножество неединственных решений, соответствующих данному набору согласованных граней. При этом получаем открытую область, ограниченную отрезками и полупрямыми, направления совпадают с углами ψ_{ij} .

В случае, если направление ψ попало в один из интервалов (ψ_{i1}, ψ_{i2}) , у концов основания x_1x_2 есть два способа занять конусы. В этом случае получим две области, расположенные по разные стороны от прямой x_1x_2 .

Теперь докажем непересечение. Допустим, что неединственное решение набора $\{x_1, x_2, x_3\}$ было получено двумя разными способами:

$$\text{ft}(x_1, x_2, x_3) = \bigcap_{i=1}^3 C(x_i, \varphi_i^1) = \bigcap_{i=1}^3 C(x_i, \varphi_i^2)$$

Так как конусы являются параллельным переносом конусов, опирающихся на грани, то различные конусы пересекаются максимум по лучу. Пересечения трёх пар конусов пересекаются не более чем по точке. Значит, решение единственно. Противоречие. \square

Список литературы

- [1] Bajaj С. 1988, “The algebraic degree of geometric optimization problems.“, Discr. Comput. Geom., 3, 177–191.
- [2] Bannikova A. G., Plyutko D. P., Nikonov I. M. 2016, “The Length of an Extremal Network in a Normed Space: Maxwell Formula“, Journal of Mathematical Sciences, 214:5, 593–608.
- [3] Boltjanski V., Martini H., Soltan V. 1999, “Geometric methods and optimization problems.“, Kluwer Acad. Publ.

- [4] Brazil M., Graham R. L., Thomas D. A., Zachariassen M. 2013, “On the History of the Euclidean Steiner Tree Problem.”
- [5] Cieslik D. 1988, “The Fermat-Steiner-Weber-problem in Minkowski spaces.“, *Optimization* 19, 485–489.
- [6] Cockayne E. J., Melzak Z. A. 1969, “Euclidean constructibility in graph-minimization problems“, *Math. Mag.*, 42, 206–208.
- [7] Durier R., Michelot C. 1985, “Geometrical properties of the Fermat-Weber problem.“, *Europ. J. Oper. Res.* 20, 332–343.
- [8] Ilyukhin D. A. 2022, “The Fermat–Torricelli problem in the case of three-point sets in normed planes“, *Chebyshevskii Sbornik. T.* 23(5): 72-86.
- [9] Ilyukhin D. A. 2022, “The Fermat-Torricelli problem in normed spaces“, *ArXiv e-prints*, arXiv:2304.00550.
- [10] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. 2002, “Branching geodesics in normed spaces“, *Izvestiya: Mathematics*, 2002, 66:5, 905–948.
- [11] Jarník V., Kössler M. 1934, “O minimálních grafech obsahujících n daných bodu“, *Čas. Pěstování Mat. (Essen)* T. 63: 223–235.
- [12] Kupitz Y. S., Martini H. 1997, “Geometric aspects of the generalized Fermat–Torricelli problem.“, *Bolyai Society Mathematical Studies* 6, 55-127.
- [13] Martini H., Swanepoel K. J., Weis G. 2002, “The Fermat–Torricelli problem in normed planes and spaces.“, *Journal of Optimization Theory and Applications* 115, 283-314.
- [14] Nguyen S. D. 2018, “Constrained Fermat-Torricelli-Weber Problem in real Hilbert Spaces“, *ArXiv e-prints*, arXiv:1806.04296.
- [15] Torricelli E. 1919, “De maximis et minimis.“ *Opere di Evangelista Torricelli*, Faenza, Italy.
- [16] Uteshev A. Y. 2014, “Analytical solution for the generalized Fermat–Torricelli problem“, *The American Mathematical Monthly* 121(4), 318–331.
- [17] Zachos A. N. 2014, “An analytical solution of the weighted Fermat-Torricelli problem on the unit sphere“, *ArXiv e-prints*, arXiv:1408.6495.