Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

КУРСОВАЯ РАБОТА

Расстояние Громова–Хаусдорфа между нормированными пространствами
Gromov–Hausdorff distances between normed spaces

Выполнил студент 3 курса

Михайлов И. Н.

Научный руководитель

д.ф.м.н., проф. А. А. Тужилин

Москва 2024

1. Введение

Расстояние Громова–Хаусдорфа — одна из красивейших конструкций метрической геометрии, которая позволяет сравнивать произвольные метрические пространства между собой. Впервые это расстояние было введено Д. Эдвардсом в [4] и позднее стало знаменитым благодаря работе М. Громова [5] (подробности см. в [12]). Классическое расстояние Громова–Хаусдорфа между метрическими пространствами X и Y определяется как точная нижняя грань расстояний Хаусдорфа между образами X' и Y' пространств X и Y по всем изометрическим вложениям $\phi\colon X \to Z$ и $\psi\colon Y \to Z$ во всевозможные метрические пространства Z.

Наиболее часто расстояние Громова–Хаусдорфа используется для изучения компактных метрических пространств. При работе с неограниченными метрическими пространствами дополнительно производится пунктирование, то есть рассматриваются пары (X, p), где X — некоторое метрическое пространство, а p — некоторая его точка. В этом случае традиционно изучается уже не само расстояние Громова–Хаусдорфа, а задаваемая им сходимость. Через $B_r(X)$ будем обозначать замкнутый шар радиуса r с центром в точке x в метрическом пространстве X. Тогда по определению последовательность (X_n, p_n) пунктированных метрических пространств сходится по Громову–Хаусдорфу к пунктированному метрическому пространству (Z, p), если выполнены следующие условия (подробности см. в [3], [8]): для каждого $r > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число n_0, что для каждого $n > n_0$ найдётся отображение $f\colon B_r(p_n) \to X$ такое, что

1) $f(p_n) = p$;

2) $\operatorname{dis}(f) := \sup\Big\{\big||xx'| - |f(x)f(x')|\big|\colon x,\, x' \in X\Big\} < \varepsilon$;

3) ε-окрестность множества $f(B_r(p_n))$ в X содержит шар $B_{r-\varepsilon}(p)$.

В данной работе мы изучаем расстояние Громова–Хаусдорфа в его исходном понимании. При ограничении на разные классы метрических пространств расстояние Громова–Хаусдорфа обладает интересными и часто неожиданными геометрическими свойствами. Например, рассмотрим класс (с точки зрения аксиоматики фон-Неймана–Бернайса–Гёделя) $\mathcal{GH}$ представителей классов изометрии всех метрических пространств. На этом классе обычное расстояние Громова–Хаусдорфа является обобщённой псевдометрикой, а именно симметричной, неотрицательной функцией, удовлетворяющей неравенству треугольника. Полученное пространство называется *классом Громова–Хаусдорфа*. Класс эквивалентности в $\mathcal{GH}$ относительно отношения: $X \sim Y$ если и только если $\mathrm{d}_{GH}(X, Y) < \infty$ — называется *облаком*. В известной монографии [6] М. Громов анонсировал, что каждое облако в пространстве $\mathcal{GH}$ стягиваемо и привёл в пример облако, задаваемое пространством $\mathbb{R}^n$. Однако впоследствии оказалось, что существуют облака, даже не инвариантные относительно умножения всех своих пространств на положительное число λ (подробности см. в работе С. А. Богатого и А. А. Тужилина [1]).

В данной работе изучается расстояние Громова–Хаусдорфа между вещественными нормированными пространствами. В отличие от работы [9], мы рассматриваем глобальное расстояние Громова–Хаусдорфа, а не расстояние Громова–Хаусдорфа между замкнутыми единичными шарами нормированных пространств. Для произвольного $\varepsilon > 0$ назовём отображение T между нормированными пространствами E и F ε-изометрией, если для произвольных $x, y \in E$ выполнено неравенство $\Big|\|x-y\| - \|T(x) - T(y)\|\Big| \leqslant \varepsilon$. В работе [7] доказана следующая теорема: если E и F — конечномерные вещественные нормированные пространства, а $T\colon E \to F$ — сюръективная ε-изометрия для некоторого ε, то существует изометрия $I\colon E \to F$ такая, что $\|T(x) - I(x)\| \leqslant 5\varepsilon$ для произвольного $x \in E$. Из этой теоремы следует, что если два конечномерных нормированных пространства находятся на конечном расстоянии Громова–Хаусдорфа, то они изометричны. В разделе 3 мы приведём более простое доказательство этого факта, основанное на теореме 7, которая даёт достаточное условие возможности изометрично вложить данное ограниченное метрическое пространство в фиксированное конечномерное нормированное пространство.

Равносторонней размерностью метрического пространства называется наибольшая мощность подмножества данного пространства, все попарные расстояния между различными точками которого равны. В работе [11] показано, что равносторонняя размерность произвольного конечномерного нормированного пространства размерности n не превосходит 2^n. В разделе 4 изучаются свойства наборов точек, по мощности превосходящих равностороннюю размерность данного нормированного пространства. При помощи полученных результатов мы доказываем новую оценку снизу на расстояние Громова–Хаусдорфа между конечномерным нормированным пространством и произвольным метрическим пространством большей равносторонней размерности (см. теорему 11). Из доказанной оценки следует обобщение упомянутой выше теоремы: каждое конечномерное нормированное пространство находится на бесконечном расстоянии Громова–Хаусдорфа от всех остальных, неизометричных ему нормированных пространств.

2. Основные определения и предварительные результаты

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между точками x и y пространства X будем обозначать $|xy|$. Через $U_r^X(a)$ будем обозначать открытый шар с центром в точке a радиуса r в пространстве X, через $B_r^X(a)$ — замкнутый (опуская верхний индекс в случае, если понятно, о каком пространстве идёт речь). Для произвольного непустого подмножества $A\subset X$ определим $U_r(A)=\cup_{a\in A}U_r(a)$ — открытую r-окрестность A. Для произвольных непустых подмножеств $A\subset X$ и $B\subset X$ через $\mathrm{d}(A,\,B)$ будем обозначать обычное расстояние между этими подмножествами, а именно $\mathrm{d}(A,\,B)=\inf\bigl\{|ab|\colon\ a\in A,\,b\in B\bigr\}$.

Определение 1. Пусть A и B — непустые подмножества метрического пространства. *Расстоянием по Хаусдорфу* между A и B называется величина

$$\mathrm{d}_H(A,\,B)=\inf\{r>0\colon A\subset U_r(B),\,B\subset U_r(A)\}.$$

Определение 2. Пусть X и Y — метрические пространства. Тройка $(X',\,Y',\,Z)$, состоящая из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных X и Y соответственно, называется *реализацией пары* $(X,\,Y)$.

Определение 3. *Расстоянием* $\mathrm{d}_{GH}(X,\,Y)$ *по Громову–Хаусдорфу* между X и Y называется точная нижняя грань чисел r, для которых существует реализация $(X',\,Y',\,Z)$ пары $(X,\,Y)$ такая, что $\mathrm{d}_H(X',\,Y')\leqslant r$.

Пусть теперь X, Y — непустые множества.

Определение 4. Каждое $\sigma\subset X\times Y$ называется *отношением* между X и Y.

Обозначим через $\mathcal{P}_0(X,\,Y)$ множество всех непустых отношений между X и Y.
Положим

$$\pi_X\colon X\times Y\to X,\ \pi_X(x,\,y)=x,$$
$$\pi_Y\colon X\times Y\to Y,\ \pi_Y(x,\,y)=y.$$

Определение 5. Отношение $R\subset X\times Y$ называется *соответствием*, если $\pi_X|_R$ и $\pi_Y|_R$ сюръективны.

Обозначим через $\mathcal{R}(X,\,Y)$ множество соответствий между X и Y.

Определение 6. Пусть X, Y — метрические пространства, $\sigma\in\mathcal{P}_0(X,\,Y)$, тогда *искажением* σ называется величина

$$\operatorname{dis}\sigma=\sup\Bigl\{\bigl||xx'|-|yy'|\bigr|\colon (x,\,y),\,(x',\,y')\in\sigma\Bigr\}.$$

Утверждение 1 ([3]). *Для любых метрических пространств X и Y выполняется равенство*

$$2\,\mathrm{d}_{GH}(X,\,Y)=\inf\bigl\{\operatorname{dis}\,R\colon R\in\mathcal{R}(X,\,Y)\bigr\}.$$

Определение 7. Пусть X — произвольное метрическое пространство. Через $\mathcal{H}(X)$ мы будем обозначать множество всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств в X, наделённое расстоянием Хаусдорфа, которое определяет на нём конечную метрику (см. [**?**]). Пространство $\mathcal{H}(X)$ называется *гиперпространством* пространства X.

Теорема 1 ([3]). *Пусть X — произвольное метрическое пространство. Тогда X компактно, если и только если $\mathcal{H}(X)$ компактно.*

Теорема 2 ([3]). *Если X — компактное метрическое пространство, а Y — полное метрическое пространство, причём $\mathrm{d}_{GH}(X,\,Y)=0$, то X изометрично Y.*

Определение 8. Назовём *равносторонней размерностью* метрического пространства X наибольшую мощность такого его подмножества, что расстояния между любыми его различными точками попарно равны. Будем обозначать равностороннюю размерность X через $\mathrm{ed}(X)$. Также равносторонним мы будем называть подмножество метрического пространства, все расстояния между различными точками которого попарно равны.

Теорема 3 ([11])**.** *Пусть V — нормированное векторное пространство размерности n. Тогда* $\mathrm{ed}(V) \leqslant 2^n$.

Теорема 4 ([2])**.** *Пусть X — произвольное бесконечномерное нормированное пространство. Тогда для всякого $m \in \mathbb{N}$ в X найдётся равностороннее множество из $n > m$ точек.*

Определение 9. Пусть X — метрическое пространство, а ε — произвольное положительное число. Подмножество $P \subset X$ называется *ε-разделённым*, если для любых двух различных точек p и q множества P выполнено $|pq| \geqslant \varepsilon$.

Определение 10. Пусть V — нормированное пространство, а m — некоторое натуральное число. Точную нижнюю грань таких положительных чисел r, что в шаре $B_r(0)$ пространства V найдётся 1-разделённое множество из m точек, будем обозначать через $R_m(V)$.

Наконец, нам понадобится несколько классических результатов из анализа.

Теорема 5 ([13])**.** *Пусть K — метрический компакт. Тогда произвольное изометричное отображение $f\colon K \to K$ сюръективно и, значит, является изометрией.*

Теорема 6 ([10])**.** *Два нормированных пространства изометричны тогда и только тогда, когда их замкнутые единичные шары изометричны.*

3. Случай конечномерных нормированных пространств

В этом разделе мы докажем, что если два конечномерных нормированных пространства находятся на конечном расстоянии Громова–Хаусдорфа, то они изометричны.

Теорема 7. *Пусть V — конечномерное нормированное пространство, X — некоторое ограниченное метрическое пространство. Пусть также существует такая последовательность положительных чисел $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, стремящаяся к 0, что для каждого n найдётся отображение f_n из X в V, удовлетворяющее условию $\mathrm{dis}(f_n) \leqslant \varepsilon_n$. Тогда пополнение $\tilde{X}$ пространства X компактно и оба пространства X и $\tilde{X}$ можно изометрически вложить в V.*

Доказательство. Зафиксируем некоторую точку $x \in X$ и через t_n обозначим сдвиг пространства V на вектор $-f_n(x)$. Пусть $g_n = t_n \circ f_n$. Поскольку t_n — изометрия, то $\mathrm{dis}\, g_n = \mathrm{dis}\, f_n$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ пусть $X_n = \overline{g_n(X)}$ — замыкание $g_n(X)$ в топологии на V, порождённой нормой. По определению искажения, для любых точек a, $b \in X$ выполнено неравенство $\big|\|a-b\| - \|g_n(a) - g_n(b)\|\big| \leqslant \varepsilon_n$. Согласно утверждению 1 отсюда следует, что $\mathrm{d}_{GH}(X, g_n(X)) \leqslant \frac{\varepsilon_n}{2}$. Поскольку $\mathrm{d}_{GH}(g_n(X), \overline{g_n(X)}) = 0$, то с помощью неравенства треугольника получаем, что

$$\mathrm{d}_{GH}(X, X_n) \leqslant \mathrm{d}_{GH}(X, g_n(X)) + \mathrm{d}_{GH}(g_n(X), X_n) \leqslant \frac{\varepsilon_n}{2}.$$

Заметим также, что для любого $n \in \mathbb{N}$ множество X_n содержит 0 пространства V по построению, причём диаметр X_n не превосходит $\mathrm{diam}\, X + \varepsilon_n$. Поэтому все X_n лежат в шаре $B := B_{\mathrm{diam}(X)+c}(0)$, где c — такая константа, что $\varepsilon_n \leqslant c$ для любого n. Поскольку V конечномерно, то B компактен. Значит, $\mathcal{H}(B)$ компактно по теореме 1. Поскольку X_n замкнуты по построению и ограниченны, то они образуют последовательность точек пространства $\mathcal{H}(B)$. Тогда из компактности $\mathcal{H}(B)$ следует, что найдётся подпоследовательность X_{n_s}, сходящаяся к некоторому замкнутому и ограниченному подмножеству A шара B. В силу компактности B его замкнутое подмножество A также будет компактно. Для каждого s выполнены неравенства

$$\mathrm{d}_{GH}(X, A) \leqslant \mathrm{d}_{GH}(X, X_{n_s}) + \mathrm{d}_{GH}(X_{n_s}, A) \leqslant \mathrm{d}_{GH}(X, X_{n_s}) + \mathrm{d}_{H}(X_{n_s}, A),$$

причём правая часть стремится к 0 при $s \to \infty$. Таким образом, $\mathrm{d}_{GH}(X, A) = 0$. Поскольку $\mathrm{d}_{GH}(X, \tilde{X}) = 0$, из неравенства треугольника следует, что $\mathrm{d}_{GH}(\tilde{X}, A) \leqslant \mathrm{d}_{GH}(\tilde{X}, X) + \mathrm{d}_{GH}(X, A) =$

0, то есть $\mathrm{d}_{GH}(\tilde{X}, A) = 0$. Тогда по теореме 2 пространства $\tilde{X}$ и A изометричны. Значит $\tilde{X}$ компактно и его можно изометрично вложить в V. В частности, X изометрично вкладывается в V. $\square$

Лемма 1. *Пусть X и Y — нормированные пространства такие, что $\mathrm{d}_{GH}(X, Y) < \infty$. Тогда $\mathrm{d}_{GH}(X, Y) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{d}_{GH}(X, Y) = c < \infty$. Тогда для произвольного $\lambda > 0$ выполнено $c = \mathrm{d}_{GH}(X, Y) = \mathrm{d}_{GH}(\lambda X, \lambda Y) = \lambda\, \mathrm{d}_{GH}(X, Y) = \lambda c$, где третье равенство следует положительной однородности расстояния Громова–Хаусдорфа (см. пункт v предложения 1 в [1] и [3]). Отсюда следует, что $c = 0$. $\square$

Теорема 8. *Если V, W — конечномерные нормированные пространства на конечном расстоянии Громова–Хаусдорфа, то V и W изометричны.*

Доказательство. По лемме 1 выполнено равенство $\mathrm{d}_{GH}(V, W) = 0$. Тогда по утверждению 1 для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся соответствие R между V и W с искажением $\operatorname{dis} R \leqslant \varepsilon$.

Рассмотрим единичные шары $B_1 = B_0^V(1)$, $B_2 = B_0^W(1)$ пространств V, W соответственно. Из теоремы 7 следует, что найдутся изометричные вложения $f_1\colon B_1 \to B_2$ и $f_2\colon B_2 \to B_1$. Тогда $f_2 \circ f_1\colon B_1 \to B_1$ и $f_1 \circ f_2\colon B_2 \to B_2$ — изометрические вложения. Согласно теореме 5 построенные отображения $f_2 \circ f_1$ и $f_1 \circ f_2$ являются изометриями. Отсюда следует, что f_1 и f_2 биективны, то есть шары B_1 и B_2 изометричны. Из теоремы 6 следует, что тогда X и Y изометричны. $\square$

Пример 1. Рассмотрим два произвольных неизометричных нормированных пространства X и Y, например, $\mathbb{R}^2$ с евклидовой и max-нормами. Тогда из доказанной теоремы следует, что если рассмотреть произвольную ε_1-сеть в X и ε_2-сеть в Y, то расстояние Громова–Хаусдорфа между этими сетями будет бесконечно. В частности, это приводит к неожиданному наблюдению о том, что целочисленные решётки $\mathbb{Z}^2$ с индуцированными из X и Y метриками находятся на бесконечном расстоянии Громова–Хаусдорфа.

4. Степень неравномерности

В начале данного раздела мы изучаем наборы точек в конечномерных нормированных пространствах, по мощности превосходящие равностороннюю размерность объемлющего пространства (которая конечна в силу теоремы 3). Для начала мы докажем важное неравенство, характерное для таких наборов точек.

Теорема 9. *Пусть V — конечномерное нормированное пространство, причём $\mathrm{ed}(V) = p$. Тогда существует такая положительная константа $c > 0$, что для любого набора из различных $m > p$ точек $v_1, \ldots, v_m$ пространства V существует тройка $\{v_i, v_j, v_k\}$ различных точек, для которой*

$$\varphi(v_i, v_j, v_k) := \left| \frac{\|v_i - v_k\|}{\|v_j - v_k\|} - 1 \right| \geqslant c.$$

Доказательство. Предположим противное, а именно пусть для каждого $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 6$ существуют различные точки $v_1^n, \ldots, v_m^n$ такие, что для любых различных i, j, k выполняется $\varphi(v_i^n, v_j^n, v_k^n) < \varepsilon_n$. Так как для каждого $\lambda > 0$ имеем $\varphi(\lambda v_i^n, \lambda v_j^n, \lambda v_k^n) = \varphi(v_i^n, v_j^n, v_k^n)$, то без ограничения общности можно считать, что $\|v_1^n - v_2^n\| = 1$. Из неравенств $\varphi(v_i^n, v_2^n, v_1^n) < \varepsilon_n$ следует, что $\big|\|v_1^n v_i^n\| - 1\big| \leqslant \varepsilon_n$ для каждого $i = 1, \ldots, n$. Теперь из неравенства $\varphi(v_j^n, v_1^n, v_i^n) < \varepsilon_n$ следует, что

$$\big|\|v_i^n - v_j^n\| - \|v_1^n - v_i^n\|\big| \leqslant \varepsilon_n \|v_1 - v_i\| \leqslant \varepsilon_n(1 + \varepsilon_n) < 2\varepsilon_n.$$

С помощью неравенства треугольника получаем

$$\big|\|v_i^n - v_j^n\| - 1\big| \leqslant \big|\|v_i^n - v_j^n\| - \|v_1^n - v_i^n\|\big| + \big|\|v_1^n - v_i^n\| - 1\big| < 3\varepsilon_n.$$

Поэтому для любых различных i и j выполняется $\|v_i^n - v_j^n\| = 1 + \delta_n$, где $|\delta_n| < 3\varepsilon_n$. В частности, $\|v_i^n - v_j^n\| \geqslant \frac{1}{2}$ при $i \neq j$.

Положим $\xi^n = (0,\, v_2^n - v_1^n \ldots,\, v_m^n - v_1^n) \in V^m$ и наделим V^m нормой

$$\|(v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_m)\| = \max_q \|v_q\|.$$

Заметим, что последовательность ξ^n ограничена в силу доказанных неравенств

$$\big|\|v_i^n - v_1^n\| - 1\big| \leqslant \varepsilon_n,\ i = 1,\, \ldots,\, m.$$

Рассмотрим подмножество $P = \big\{(v_1,\, \ldots,\, v_m)\colon |v_i v_j| \geqslant \frac{1}{2}\ \forall\, i \neq j\big\} \subset V^m$ с метрикой, индуцированной из V^m. Поскольку $\|v_i^n - v_j^n\| \geqslant \frac{1}{2}$ при $i \neq j$, последовательность ξ^n лежит в P. Поскольку пространство V^m конечномерно, то в ограниченной последовательности ξ^n найдётся подпоследовательность ξ^{n_s}, сходящаяся к некоторому $\xi = (w_1,\, \ldots,\, w_m)$. Поскольку множество P замкнуто, $w \in P$. Определим функцию $\tilde{\varphi}\colon V^m \to \mathbb{R}$ формулой

$$\tilde{\varphi}(v_1,\, \ldots,\, v_m) = \max_{i\neq j,\, j\neq k,\, k\neq i} \varphi(v_i,\, v_j,\, v_k).$$

Заметим, что $\tilde{\varphi}$ непрерывна на P. Поскольку $\varphi(v_i^n,\, v_j^n,\, v_k^n) = \varphi(v_i^n - v_1^n,\, v_j^n - v_1^n,\, v_k^n - v_1^n)$, то из неравенств $\varphi(v_i^n,\, v_j^n,\, v_k^n) < \varepsilon_n$ следует, что $\varphi(v_i^n - v_1^n,\, v_j^n - v_1^n,\, v_k^n - v_1^n) < \varepsilon_n$. Данные неравенства равносильны $\tilde{\varphi}(0,\, v_2^n - v_1^n,\, \ldots,\, v_m^n - v_1^n) < \varepsilon_n$. Из непрерывности $\tilde{\varphi}$ на множестве P теперь следует, что $\tilde{\varphi}(w_1,\, \ldots,\, w_m) = 0$. Значит, для любых различных $i,\, j,\, k$ выполнено $\varphi(w_i,\, w_j,\, w_k) = 0$, то есть $\|w_i - w_k\| = \|w_j - w_k\|$. Таким образом, $(w_1,\, \ldots,\, w_m)$ — равностороннее множество в V мощности $m > \mathrm{ed}(V) = p$ — противоречие.

□

Пусть V — конечномерное нормированное пространство. Зафиксируем натуральное число m и определим *степень неравномерности* V порядка m:

$$c_m(V) = \sup\left\{c\colon \forall\, (v_1,\, \ldots,\, v_m) \in V^m\ \exists\, i \neq j,\, j \neq k,\, k \neq i\colon\ \left|\frac{|v_i v_k|}{|v_j v_k|} - 1\right| \geqslant c\right\}.$$

Непосредственно из определения следует, что степень неравномерности c_m не убывает при росте m. Также, согласно теореме 9, если $m > \mathrm{ed}(V)$, то $c_m(V) > 0$.

Теорема 10. *Пусть V — конечномерное нормированное пространство, $c_m := c_m(V)$ — его степень неравномерности порядка m, а $R_m := R_m(V)$. Тогда выполнены неравенства*

$$2R_m + 1 \geqslant c_m \geqslant R_m - 1.$$

Доказательство. Положим $t_n = c_m + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. По определению c_m найдётся такой набор различных точек $(x_1^n,\, \ldots,\, x_m^n)$, что для любых различных $i,\, j,\, k$ выполнены неравенства $\varphi(x_i^n,\, x_j^n,\, x_k^n) \leqslant t_n$.

Заметим, что для всякого $\lambda > 0$ верно $\varphi(x_i^n,\, x_j^n,\, x_k^n) = \varphi(\lambda x_i^n,\, \lambda x_j^n,\, \lambda x_k^n)$. Таким образом, полагая $\lambda = \min_{i\neq j} |x_i^n x_j^n|$ и $y_i^n = \frac{x_i^n}{\lambda}$, получим набор точек $(y_1^n,\, \ldots,\, y_m^n)$ такой, что для любых различных $i,\, j,\, k$ верно неравенство $\varphi(y_i^n,\, y_j^n,\, y_k^n) \leqslant t_n$, а также $\min_{i\neq j} |y_i^n y_j^n| = 1$. Перенумеровав точки подходящим образом, без ограничения общности можно считать, что $\min_{i\neq j} |y_i^n y_j^n| = |y_1^n y_2^n|$. Положим $z_j^n = y_j^n - y_1^n$. Поскольку $\varphi(y_i^n,\, y_j^n,\, y_k^n) = \varphi(y_i^n - y_1^n,\, y_j^n - y_1^n,\, y_k^n - y_1^n) = \varphi(z_i^n,\, z_j^n,\, z_k^n)$, то набор точек $(z_1^n,\, \ldots,\, z_m^n)$ обладает следующими свойствами: для любых различных $i,\, j,\, k$ верно неравенство $\varphi(z_i^n,\, z_j^n,\, z_k^n) \leqslant t_n$, выполнено $\min_{i\neq j} |z_i^n z_j^n| = |z_1^n z_2^n| = 1$, а также $z_1^n = 0$.

Поскольку для каждого k, отличного от 1 и 2, выполнено неравенство $\varphi(z_k^n,\, z_2^n,\, z_1^n) \leqslant t_n$, то $\left|\frac{|z_k^n z_1^n|}{|z_2^n z_1^n|} - 1\right| = \left||z_1^n z_k^n| - 1\right| \leqslant t_n$, то есть $|z_1^n z_k^n| \leqslant t_n + 1$. Значит для каждого n все точки z_k^n лежат в шаре $B_{t_n+1}(0)$, причём $\min_{i\neq j} |z_i^n z_j^n| = 1$. То есть по определению R_m для каждого n выполнено неравенство $R_m \leqslant c_m + 1 + \frac{1}{n}$. Значит, $R_m \leqslant c_m + 1$.

Теперь обоснуем второе неравенство. Пусть $a_1,\, \ldots,\, a_m$ — некоторое 1-разделённое множество в V. Из определения степени неравномерности следует, что найдутся такие различные индексы $i,\, j,\, k$, для которых выполнено $\left|\frac{|a_i a_k|}{|a_j a_k|} - 1\right| \geqslant c_m$. Тогда

$$|a_i a_k| \geqslant (c_m - 1)|a_j a_k| \geqslant c_m - 1,$$

значит 1-разделённое множество из m точек нельзя поместить в шар радиуса, меньшего $\frac{c_m - 1}{2}$, то есть $R_m \geqslant \frac{c_m - 1}{2}$, что равносильно $2R_m + 1 \geqslant c_m$.

□

Следствие 1. *Пусть V — конечномерное нормированное пространство. Тогда*

$$\lim_{m\to\infty} c_m(V) = \infty.$$

Доказательство. В силу теоремы 10 достаточно проверить, что $\lim\limits_{m\to\infty} R_m = \infty$. Предположим, что это не так. Из определения R_m следует, что эта величина не убывает с ростом m, поэтому в силу предположения найдётся такая константа C, что для каждого m выполнено неравенство $C \geqslant R_m$. Но данное неравенство означает, что в шаре $B_C(0)$ можно найти сколь угодно большое конечное 1-разделённое множество, что неверно в силу компактности $B_C(0)$. $\square$

Теорема 11. *Пусть Y — конечномерное нормированное пространство с $\mathrm{ed}(Y) = n$. Пусть также X — некоторое метрическое пространство, $\{x_1, \ldots, x_m\}$ — равностороннее подмножество X диаметра d, причём $m > n$, а $c_m := c_m(Y)$. Тогда*

$$\mathrm{d}_{GH}(X, Y) \geqslant \frac{1}{2}\min\Big\{\frac{d}{2}, \frac{dc_m}{2+c_m}\Big\} > 0.$$

Доказательство. Пусть R — произвольное соответствие между X, Y с искажением $\mathrm{dis}\, R = t$. Рассмотрим случай, когда $t < \frac{d}{2}$. Выберем $y_i \in R(x_i)$. Тогда в рассматриваемом случае все y_i различны. По определению искажения $\Big||y_iy_j| - |x_ix_j|\Big| \leqslant t$. Значит, выполнены неравенства

$$\frac{-2t}{d+t} = \frac{|x_ix_k| - t}{|x_jx_k| + t} - 1 \leqslant \frac{|y_iy_k|}{|y_jy_k|} - 1 \leqslant \frac{|x_ix_k| + t}{|x_jx_k| - t} - 1 = \frac{2t}{d-t}.$$

Согласно теореме 9 найдутся такие i, j, k, что $\left|\frac{|y_iy_k|}{|y_jy_k|} - 1\right| \geqslant c_m$. Тогда $\frac{2t}{d-t} \geqslant c_m$, откуда следует, что $t \geqslant \frac{dc_m}{2+c_m}$. Таким образом, для любого соответствия $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ его искажение либо не меньше $\frac{d}{2}$, либо не меньше $\frac{dc_m}{2+c_m}$. Но тогда $\mathrm{dis}\, R \geqslant \min\Big\{\frac{d}{2}, \frac{dc_m}{2+c_m}\Big\}$. Значит, из утверждения 1 следует, что $\mathrm{d}_{GH}(X, Y) \geqslant \frac{1}{2}\min\Big\{\frac{d}{2}, \frac{dc_m}{2+c_m}\Big\}$. $\square$

Отметим, что следствие 1 означает, что $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{dc_m}{2+c_m} = d$, то есть при достаточно больших m оценка теоремы 11 превращается в оценку $\mathrm{d}_{GH}(X, Y) \geqslant \frac{d}{4}$.

Теорема 12. *Пусть X, Y — нормированные пространства, причём $\dim(Y) < \infty$, а также $\mathrm{d}_{GH}(X, Y) < \infty$. Тогда X изометрично Y.*

Доказательство. Из теоремы 8 следует, что достаточно показать конечномерность пространства X. Предположим, что $\dim(X) = \infty$. Согласно теореме 3 равносторонняя размерность Y конечна. Пусть $\mathrm{ed}(Y) = n$. По теореме 4 в X найдётся равностороннее множество $x_1, \ldots, x_m \in X$ из $m > n$ точек диаметра d. Тогда для произвольного $\lambda > 0$ точки $\lambda x_1, \ldots, \lambda x_m$ образуют равностороннее множество диаметра λd. То есть в X есть равносторонние множества из $m > n$ точек сколько угодно больших диаметров. Тогда из теоремы 11 получаем, что $\mathrm{d}_{GH}(X, Y) = \infty$ — противоречие. $\square$

Список литературы

[1] *С. А. Богатый, А. А. Тужилин* Действие преобразования подобия на семействах метрических пространств, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. Темат. обз., **223** (2023), 3-13

[2] *Brass P.*, On equilateral simplices in normed spaces, Beiträge Algebra Geom. **40** (1999), pp. 303-307.

[3] Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2004

[4] *D. Edwards*, The structure of superspace, Studies in Topology, Academic Press, 1975.

[5] *M. Gromov*, Groups of polynomial growth and expanding maps, Publications Mathematiques I.H.E.S., **53** 1981

[6] *Gromov M. L.*, Structures metriques pour les varietes riemanniennes, Textes mathematiques. Recherche (v. 1), CEDIC/Fernand Nathan, 1981.

[7] *P.M. Gruber*, Stability of isometries, Trans. Amer. Math. Soc. 245 (1978), 263-277

[8] *Herron D. A.*, Gromov-Hausdorff Distance for Pointed Metric Spaces, J. Anal., 2016, v. 24, N 1, pp 1–38

[9] *N. J. Kalton, M. I. Ostrovskii*, Distances between Banach spaces, Forum Math. **11** (1999), 17-48

[10] *P. Mankiewicz*, On extension of isometries in normed linear spaces, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronomy, Phys. 20 (1972), 367–371.

[11] Солтан П.С. Аналоги правильных симплексов в нормированных пространствах, *Докл. АН СССР*, т.222, №6, с.1303-1305, 1975 г.

[12] *A. A. Tuzhilin*, Who invented the Gromov-Hausdorff Distance?, 2016, ArXiv e-prints, arXiv:1612.00728

[13] *R. Wobst*, Isometrien in metrischen Vektorräumen, Studia Math. 54 (1975), pp. 41-54.