Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

КУРСОВАЯ РАБОТА

Метрические пространства общего положения являются всюду плотным классом в собственном классе всех метрических пространств.
Density of generic metric spaces in the Gromov–Hausdorff class.

Выполнил студент 4 курса
Вихров А.А.
Научный руководитель
д.ф.м.н., проф. А.А.Тужилин

Москва 2023

1. Введение

Симметричное отображение $d\colon X \times X \to [0,\infty]$, равное нулю на диагонали и удовлетворяющее неравенству треугольника, называется *обобщенной псевдометрикой.* Если кроме того функция равна нулю только на диагонали, то она называется *обобщенной метрикой*, а если при этом не принимает бесконечные значения, то *метрикой.*

Расстояние Громова–Хаусдорфа — это величина, отражающая степень различия между двумя метрическими пространствами. Это расстояние было введено Громовым в 1981 году [4] и определялось как наименьшее расстояние Хаусдорфа между изометричными образами рассматриваемых пространств. С помощью этого расстояния Громов исследовал свойства групп полиномиального роста. Позднее было дано эквивалентное определение этого расстояния.

В настоящей работе будет использоваться система аксиом фон Неймана–Бернайса–Гёделя, в которой вводятся в рассмотрение так называемые классы и собственные классы, обобщающие понятие множества. Совокупность всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, является собственным классом и будет обозначено $\mathcal{GH}$. На собственном классе естественным образом определяется понятие обобщенной псевдометрики.

Хорошо известно, что расстояние Громова–Хаусдорфа является обобщенной псевдометрикой на $\mathcal{GH}$. В работе [5] введено понятие пространства общего положения в $\mathcal{GH}$ и показано, что такие пространства плотны в пространстве $\mathcal{M}$ компактных непустых метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, а также изучена структура малых окрестностей пространства общего положения в $\mathcal{GH}$. Эти факты помогают доказать тривиальность группы изометрий пространства $\mathcal{M}$. В настоящей работе доказывается, что пространства общего положения образуют всюду плотное подсемейство в $\mathcal{GH}$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. профессору А.А. Тужилину, а также д.ф.-м.н. профессору А.О. Иванову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

2. Основные определения и предварительные результаты

Для начала введем базовые обозначения. Через $\mathbb{R}_{\geq 0}$ будем обозначать множество неотрицательных вещественных чисел, а через $\mathbb{R}_+$ — множество положительных вещественных чисел. Пусть (X,ρ) — произвольное метрическое пространство, а $x,y \in X$. Расстояние между точками x и y будем обозначать $|xy| = \rho(x,y) = d_X(x,y)$. Пусть $U_\varepsilon(a)$ — открытый шар с центром в точке a радиуса ε, а $U_\varepsilon(A) = \bigcup\limits_{a\in A} U_\varepsilon(a)$ — это ε-окрестность непустого подмножества A, и $S_\varepsilon(a)$ — сфера радиуса ε с центром в точке a. Через $\#X$ будем обозначать мощность множества X, и для любого $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ и метрического пространства X положим $a\,X = (X, a\,d_X)$.

Определение 1. Пусть A, B — непустые подмножества метрического пространства X. *Расстоянием Хаусдорфа* будем называть следующую величину:

$$\mathrm{d_H}(A,B) = \inf_{r\in\mathbb{R}_{\geq 0}} \Big\{ r\colon A \subseteq U_r(B)\, \&\, B \subseteq U_r(A) \Big\}.$$

Определение 2. Пусть A, B, X — метрические пространства. Если A изометрично $\tilde{A}$, а B изометрично $\tilde{B}$, где $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — подпространства X, то тройку $(\tilde{A}, \tilde{B}, X)$ будем называть *реализацией пары* (A,B).

Определение 3. *Расстоянием Громова–Хаусдорфа* между двумя метрическими пространствами A, B называется точная нижняя грань расстояний Хаусдорфа среди всех реализаций пары (A,B). Иными словами,

$$\mathrm{d_{GH}}(A,B) = \inf\big\{ r : \text{существует такая реализация} (\tilde{A}, \tilde{B}, X) \text{пары } (A,B), \text{ что} d_H(\tilde{A},\tilde{B}) \leq r \big\}.$$

Определение 4. *Соответствием* между двумя множествами A, и B называется подмножество $R \subseteq A \times B$ такое, что для любых $a \in A$ и $b \in B$ существуют $\tilde{a} \in A$ и $\tilde{b} \in B$, для которых $(a, \tilde{b})$, $(\tilde{a}, b)$ принадлежат R.

Далее, aRb означает, что a и b находятся в соответствии R, а множество всех соответствий между метрическими пространствами A, B будем обозначать как $\mathcal{R}(A,B)$.

Определение 5. Пусть R — соответствие между метрическими пространствами A, B. Его *искажение* определяется равенством

$$\operatorname{dis} R = \sup\Big\{ \big| d_X(a,a') - d_Y(b,b') \big| : \, aRb \, \text{и} \, a'Rb' \Big\}.$$

Замечание 1. *Если R — является функциональным соответствием, то есть, существует такое отображение $f : X \to Y$, что xRy тогда и только тогда, когда $y = f(x)$, то его искажение записывается в виде*

$$\operatorname{dis} f = \sup\Big\{ \big| d_X(a, a') - d_Y(f(a), f(a')) \big|,\, a, a' \in X \Big\}.$$

Предложение 2 ([1])**.** *Для любых метрических пространств A, B имеет место равенство*:

$$2\, \mathrm{d_{GH}}(A, B) = \inf_{R \in \mathcal{R}(A,B)} \operatorname{dis} R.$$

Определение 6. *Классом Громова–Хаусдорфа $\mathcal{GH}$* называется собственный класс (в смысле теории множеств фон Неймана–Бернайса–Гёделя) всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии.

Предложение 3 ([1])**.** *Расстояние Громова–Хаусдорфа является обобщенной псевдометрикой на $\mathcal{GH}$.*

Через $\triangle_n$ обозначим n-точечный *симплекс*, то есть, метрическое пространство мощности n, расстояния между различными точками которого равны 1. Диаметром метрического пространства X называется

$$\operatorname{diam}(X) = \sup_{x, x' \in X} d_X(x, x').$$

Предложение 4 ([1])**.** *Для любого метрического пространства X, справедлива формула $2\, \mathrm{d_{GH}}(\triangle_1, X) = \operatorname{diam}(X)$.*

Обозначение 7. Пусть $X \in \mathcal{GH}$. Обозначим через $S(X)$ множество всех биективных отображений X на себя. Введем обозначения:

$$\mathrm{s}(X) = \inf\big\{ |xx'| : x \neq x'; x, x' \in X \big\},$$
$$\mathrm{t}(X) = \inf\big\{ |xx'| + |x'x''| - |xx''| : x \neq x' \neq x'' \neq x; x, x', x'' \in X \big\},$$
$$\mathrm{e}(X) = \inf\big\{ \operatorname{dis}(f), f \in S(X), f \neq \mathrm{id} \big\}.$$

Определение 8. Метрическое пространство X будем называть *пространством общего положения*, если все три величины $\mathrm{s}(X)$, $\mathrm{e}(X)$, $\mathrm{t}(X)$ являются положительными.

2.1. Каноническая проекция

Напомним, как по связному взвешенному графу построить псевдометрическое пространство. Всюду далее графы подразумеваются простыми, связными и взвешенными, причем весовая функция (заданная на ребрах графа) является неотрицательной. Множество вершин графа, как и множество ребер, может быть бесконечным. Точками графа будем называть его вершины. Ребро, соединяющее x и y, будет обозначаться через xy или $x \sim y$.

Определение 9. *Обобщенным путем* L в графе G, соединяющим его точки x и y, будем называть такую конечную последовательность $\big[x_i, i = 1 \dots N \mid x_1 = x, x_N = y\big]$, $N \geq 2$, что или $x_i x_{i+1}$ является ребром для всех i, или $x_i = x_{i+1}$. *Ребром обобщенного пути* будем называть ребро, соединяющее последовательные различные точки этого пути. *Длина пути* L определяется как $|L| = \sum_{i=1}^{N-1} \omega(x_i x_{i+1})$. *Множество обобщенных путей*, соединяющих x и y, будем обозначать через $\mathbb{L}(x, y)$.

В этой работе **вырожденный путь будем называть просто путем.**

Определение 10. Назовем отображение π, которое каждому связному взвешенному графу $X = (V, E, \omega)$ сопоставляет метрическое пространство (V, d_ω), *каноническим*, где

$$d_\omega(y_1, y_2) = \begin{cases} \inf\big\{ |L|, L \in \mathbb{L}(y_1, y_2) \big\} & y_1 \neq y_2, \\ 0 & y_1 = y_2. \end{cases}$$

Будем говорить, что такая проекция *сохраняет веса ребер*, если для любого $xy \in E$ верно $\omega(xy) = d_\omega(x, y)$.

Хорошо известно, что (Y, d_ω) является псевдометрическим пространством.

Замечание 5. *Пусть* $X = (V, E, \omega)$ *— граф. Если существует* $C > 0$ *такое, что* $\omega(e) \geq C$ *для всех* $\mathrm{e} \in E$*, то* $\pi(X)$ *является метрическим пространством.*

Определение 11. Пусть X — взвешенный граф, а z_1z_2 — его ребро. Тогда *неравенством многоугольника для нижнего основания* z_1z_2 и пути $L \in \mathbb{L}(z_1, z_2)$ назовем неравенство $\omega(z_1z_2) \leq |L|$.

Лемма 6. *Каноническая проекция сохраняет веса ребер тогда и только тогда, когда выполнены все неравенства многоугольников для всех нижних оснований* $xy \in E$ *и любых* $L \in \mathbb{L}(x, y)$*.*

Доказательство. Заметим, что $\inf\{|L| : L \in \mathbb{L}(x, y)\} \leq \omega(xy)$, так как xy лежит среди $\mathbb{L}(x, y)$. В силу неравенства многоугольника с нижним основанием xy, имеем $\omega(xy) \leq |L|$ для каждого L из $\mathbb{L}(x, y)$.

Если неравенство многоугольника не выполняется хотя бы для одной пары точек x, y, то есть, найдется путь $L \in \mathbb{L}(x, y)$ такой, что $\omega(xy) > |L|$, то $d_\omega(x, y) < \omega(xy)$. □

2.2. Подразбиение метрического пространства.

Обобщим понятие подразбиения графа.

Конструкция 7. *Рассмотрим произвольное метрическое пространство* X *как полный взвешенный граф* G' *с весовой функцией* ω*, равной расстоянию между точками. Для каждой пары точек* $\{u, v\}$ *добавим точки* $\alpha_i^{u,v}$*,* $i \in \mathcal{I}$ *в граф* G'*. Соединим каждую* $\alpha_i^{u,v}$ *с каждой* $\alpha_j^{u,v}$*, а точки* u*,* v *соединим со всеми* $\alpha_i^{u,v}$*. Обозначим его через* G*. На добавленных ребрах зададим веса произвольным образом так, чтобы в* $G_{u,v}$ *— подграфе, натянутом на вершины* $u, v, \alpha_i^{u,v}$*, выполнялись неравенства треугольников. Полученный граф обозначим через* G*.*

Положим $Z = \pi(G)$, а точки, полученные из X, будем обозначать также, как и в X. Напишем свойства пространства Z.

Лемма 8.

(1) *Проекция* π *сохраняет веса всех ребер.*

(2) *Расстояние между точками* x, y*, находящимся в* $G_{u,v}$ *и* $G_{u',v'}$ *соответственно, где* $uv \neq u'v'$ *и* $x, y \notin X$*, равно длине кратчайшего из путей*:

  (1) $L_1 = [x, u, u', y]$,
  (2) $L_2 = [x, u, v', y]$,
  (3) $L_3 = [x, v, u', y]$,
  (4) $L_4 = [x, v, v', y]$.

(3) *Расстояние от точки* x *— вершины* $G_{u,v}$*, где* $v \neq x \neq u$*, до* $u' \in X$*, где* $v \neq u' \neq u$ *равно длине кратчайшего из путей*:

  (1) $L_1 = [x, u, u']$,
  (2) $L_2 = [x, v, u']$.

Доказательство. Проверим (1). Для доказательства нужно проверить все неравенства многоугольников и применить лемму 6.

Рассмотрим пару точек u, v, которые были получены из пространства X. Любой путь, их соединяющий, можно разбить на участки $L_{i,j}$, целиком лежащие в G_{x_i,x_j}, причем соседние пути должны пересекаться по точкам из X. Длина каждого такого участка будет не меньше, чем $[x_i, x_j]$, значит, инфимум можно вычислять по путям, проходящим только через точки из X, а каждый такой путь будет не короче, чем $[u, v]$.

Рассмотрим ребро xy, которое лежит в $G_{u,v}$ и отлично от uv. Длина любого пути, соединяющего x, y, целиком лежащего в $G_{u,v}$, будет не меньше, чем $\omega(xy)$ в силу выполнения неравенств многоугольников. Если путь проходит через точку u и выходит из $G_{u,v}$, то он должен пройти через точку v, так как путь не проходит через одну точку u дважды, и граф $G \backslash \{u, v\}$ (подграф G, натянутый на все вершины графа G, кроме u, v) несвязен (а путь соединяет точки, лежащие в разных компонентах связности). Любой путь, соединяющий u, v, будет не короче, чем $[u, v]$ (см. первый пункт). Значит, путь не лежащий в $G_{u,v}$, будет не короче некоторого пути, целиком лежащего в $G_{u,v}$, а этот случай разобран в начале.

Теперь докажем пункт (2). Рассмотрим произвольный путь L, соединяющий x, y, и пусть его первая вершина, лежащая в X, есть a_1, а последняя — это a_2(путь должен проходить через точки из X, так как $G \backslash X$ не является связным графом, и точки x, y лежат в различных компонентах связности). Любой путь, соединяющий a_1 и a_2, будет не короче, чем $[a_1, a_2]$. Любой путь, который соединяет x, a_1, будет не короче, чем $[x, a_1]$, аналогично с y и a_2 в силу выполенения неравенств многоугольника. То есть, расстояние вычисляется как минимум из путей $[x, a_1, a_2, y]$. Точка a_1 должна была лежать в той же компоненте связности, что и x, а a_2 — что и y. Пункт доказан.

Наконец, докажем пункт (3). Произвольный путь, соединяющий x с u', должен пройти через некоторую $a \in \{u, v\}$, так как x и u' лежат в разных компонентах связности $G \backslash \{u, v\}$. Произвольный путь, соединяющий x, a, не короче $[x, a]$, а a и u' — не короче $[a, u']$. Лемма доказана. $\square$

В дальнейшем такую конструкцию будем называть *подразбиением метрического пространства X*. В данной статье эта конструкция будет использоваться в простейшей форме: $\#I = 1$.

2.3. Метрически выпуклые функции.

Определение 12. Непостоянную функцию $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, для которой $f(0) = 0$ и для любых $a \leq b + c$, $a, b, c \geq 0$, выполняется неравенство $f(a) \leq f(b) + f(c)$, будем называть *метрически выпуклой*.

Из определения моментально следуют простейшие свойства метрически выпуклых функций. Так как из неравенства $a \leq b + 0$ следует неравенство $f(a) \leq f(b)$, получаем, следующий результат.

Предложение 9. *Метрически выпуклая функция является неубывающей.*

Дважды применив определение, получаем.

Предложение 10. *Композиция метрически выпуклых функций является метрически выпуклой.*

Предложение 11. *Метрически выпуклая функция не обращается в нуль нигде кроме нуля.*

Доказательство. Действительно, если $f(a) = 0$ для $a > 0$, то $f(x) = 0$ для $x \leq a$. Пусть $a_0 = \sup\{\, x : f(x) = 0 \,\}$. Тогда для всех $y > a_0$, получаем $f(y) > 0$, но для $a_0 < y = 2a_0/3 + 2a_0/3$, имеем $0 < f(y) < f(2a_0/3) + f(2a_0/3) = 0$, противоречие. $\square$

Следствие 12. *Для любого метрического пространства (X, d_X) и метрически выпуклой функции f пара $(X, f \circ d_X)$ является метрикой.*

Через $f(X)$ будем обозначать метрическое пространство $(X, f \circ d_X)$. Для непустого подмножества $A \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$, положим $||f(x)||_A = \sup\bigl\{|f(x)| : x \in A\bigr\}$.

Предложение 13. *Неубывающая функция f, равная нулю в нуле, является метрически выпуклой тогда и только тогда, когда для произвольных $b, c > 0$ выполняется неравенство*

$$f(b + c) \leq f(b) + f(c).$$

Доказательство. Если f является метрически выпуклой, то неравенство выполняется в силу определения (достаточно положить $a = b + c$).

Обратно, если $0 < a \leq b + c$, то $f(a) \leq f(b + c) \leq f(b) + f(c)$. Если хотя бы одно из чисел a, b, c равно нулю, то неравенство выполняется в силу неубывания или неотрицательности. $\square$

Лемма 14. *Для любого метрического пространства X и метрически выпуклой функции f, верно неравенство*

$$2\,\mathrm{d_{GH}}\bigl(X, f(X)\bigr) \leq ||x - f(x)||_A,$$

где $A = \bigl[\mathrm{s}(X), \mathrm{diam}(X)\bigr]$*, если* $\mathrm{diam}(X) < \infty$*, и* $A = \bigl[\mathrm{s}(X), \infty\bigr)$ *иначе.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть $R = \bigl\{(u, u) \mid u \in X\bigr\}$, для него $\mathrm{dis}(R) \leq ||x - f(x)||_A$, где A — множество из условия теоремы. Значит, $2\,\mathrm{d_{GH}}(X, f(X)) \leq \mathrm{dis}(R) \leq ||x - f(x)||_A$. $\square$

3. Плотность семейства метрических пространств общего положения в $\mathcal{GH}$.

Определение 13. Назовём *ε-лестницей* следующую функцию:

$$l_\varepsilon(x) = \begin{cases} k\varepsilon, & x \in \big((k-1)\varepsilon, k\varepsilon\big];\ k = 1\ldots\infty, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

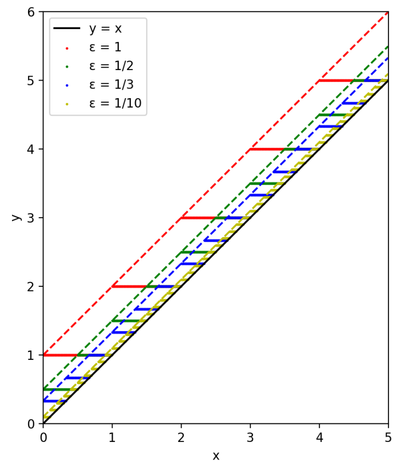

Рис. 1. Функции $l_\varepsilon(x)$.

Лемма 15. *Покажем, что ε-лестница является метрически выпуклой.*

Доказательство. Сразу будем считать, что $\varepsilon = 1$, так как остальные случаи получаются композицией с линейной функцией, а композиция метрически выпуклых является метрически выпуклой функцией. В силу предложения 13, достаточно проверить неравенство $l_1(a+b) \le l_1(a) + l_1(b)$ для $a, b > 0$. Представим a, b в виде $a = A - \alpha$, $b = B - \beta$, где $A, B \in \mathbb{N}$, а α и β неотрицательны и меньше единицы. В силу определения, $l_1(a) = A$, $l_1(b) = B$, а

$$l_1(a+b) = l_1(A + B - \alpha - \beta) \le l_1(A+B) = A + B = l_1(a) + l_1(b)$$

в силу неубывания. □

Обозначение 14. Пусть X — метрическое пространство, а $c > 0$. Через $X + c$ будем обозначать результат применения функции

$$f(x) = \begin{cases} x + c, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

к метрическому пространству X.

Замечание 16. *Такая функция действительно будет метрически выпуклой, так как для $x, y, z > 0$, $x \le y + z$, будут выполнятся неравенства $x + c \le y + c + z + c$, а если $y = 0$, то $f(x) \le f(y)$ в силу монотонности.*

Предложение 17. *Для метрического пространства X и $c > 0$,*

(1) $\mathrm{s}(X + c) = \mathrm{s}(X) + c$,

(2) $\mathrm{t}(X + c) = \mathrm{t}(X) + c$,

(3) $\mathrm{e}(X + c) = \mathrm{e}(X)$.

Лемма 18 ([3]). *Пусть $(X, \prec)$ — вполне упорядоченное множество и $\phi\colon X \to X$ — некоторая биекция, сохраняющая порядок. Тогда ϕ является тождественным отображением.*

Теорема 19. *Для любых неотрицательных δ и c, в $(\delta+c)$–окрестности метрического пространства $X \in \mathcal{GH}$ существует метрическое пространство общего положения U, причем $\mathrm{s}(U) \geq \delta/3+2c$, $\mathrm{t}(U) \geq 2c$ и $\mathrm{e}(U) \geq \delta/3$.*

Доказательство. Докажем теорему для случая $X = \triangle_1$. Рассмотрим трехточечное метрическое пространство $U = \big(\{u_1, u_2, u_3\}, d_u\big)$, где

(1) $d(u_1, u_2) = \delta/3 + 2c$,

(2) $d(u_2, u_3) = 2\delta/3 + 2c$,

(3) $d(u_1, u_3) = 3\delta/3 + 2c$.

Для такой метрики имеем $s(U) = 2c + \delta/3$, $t(U) = 2c$, $e(U) \geq \delta/3$, так как все расстояния в пространстве U отличаются минимум на $\delta/3$. Далее будем рассматривать случай $\#X > 1$.

Сначала применим простейшую ε–лестницу к исходному пространству для произвольного $\varepsilon > 0$. Тогда по лемме 14,

$$2\,\mathrm{d_{GH}}\big(X, l_\varepsilon(X)\big) \leq \|l_\varepsilon(x) - x\|_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \leq \varepsilon.$$

Положим $Z' = l_\varepsilon(X)$. Фиксируем на множестве Z' некоторый полный порядок (такой порядок существует по теореме Цермело) и обозначим его через $\prec$. Подразобьем метрическое пространство Z' следующим образом: для каждой упорядоченной пары точек (z_1, z_2) из $Z' \times Z'$, где $z_1 \prec z_2$, добавим новую точку z_3, которую соединим ребрами с z_1 и z_2 и определим веса этих ребер так: $\omega(z_3 z_2) = \varepsilon/4$, $\omega(z_1 z_3) = d_{Z'}(z_1, z_2) - \varepsilon/4$. В подграфе G_{z_1,z_2} выполняются неравенства треугольников.

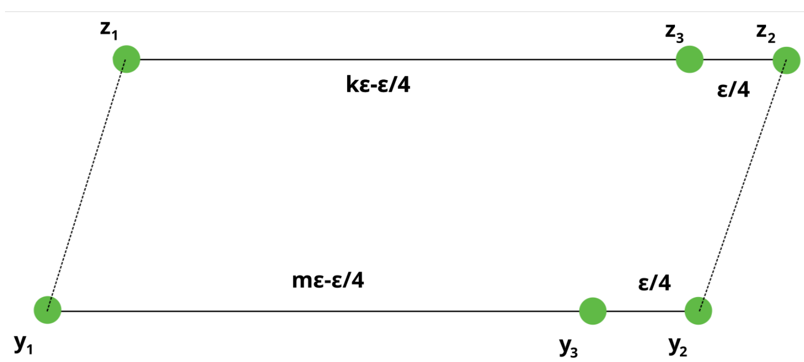

Рис. 2. Часть графа G, z_3 добавлена для пары $z_1 \prec z_2$, а y_3 — для пары $y_1 \prec y_2$.

Введем следующую терминологию.

(1) Точки графа G, лежащие в Z', будем называть *старыми*.

(2) Остальные точки графа G назовем *новыми*.

Пусть z_3 добавлена для пары $z_1 \prec z_2$.

(3) Заметим, что точки z_1 и z_2 являются единственными точками графа G, которые соединены ребром с z_3, причем $\omega(z_1 z_3) = k\varepsilon - \varepsilon/4$, а $\omega(z_3 z_2)$ равен $\varepsilon/4$. Точку z_2 назовем *правой*(z_3), а z_1 — *левой*(z_3). Через *ближайшую*(z_3) обозначим переменную, которая может принимать значение правая(z_3) или левая(z_3).

(4) Старую точку, которая не являются ближайшей(z_3), будем обозначать, как *дальняя*(z_3).

Здесь и далее z_3 и y_3 обозначают новые точки, $z_1 = \underline{\text{левая}}(z_3)$, $y_1 = \underline{\text{левая}}(y_3)$, $z_2 = \underline{\text{правая}}(z_3)$, $y_2 = \underline{\text{правая}}(y_3)$. Новая$\sim$правая обозначает неупорядоченную пару описанных выше типов различных точек, состоящую из некоторой новой z_3 и правой(z_3); новая$\sim$новая обозначает пару точек новая и новая; z_3 дальняя(z_3) обозначает пару {новая, дальняя(новой)}, и так далее.

Положим $Z = \pi(G)$, а образ Z' продолжим называть Z'. В силу леммы 8 проекция π сохранила расстояния. В силу замечания 5, пространство Z является метрическим. Также будем рассматривать Z в качестве взвешенного графа, где весовая функция — расстояние. В силу выполнения неравенств многоугольника, все веса ребер сохранились в пространстве Z (см. лемму 6). Опишем, как выглядят остальные расстояния в новом пространстве.

Проекция π сохраняет веса ребер, соединяющее старые точки и соединяющее новые с ближайшими к ним. Таким образом, $d(z_3, z_2) = \varepsilon/4$, $d(z_1, z_3) = k\varepsilon - \varepsilon/4$, $d(z_1, z_3) = k\varepsilon$ для некоторого натурального k, и для любых $u, v \in Z'$, $d(u, v) = m\varepsilon$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Если расстояние между точками равно $k\varepsilon + \alpha$ для $k \in \mathbb{N} \cup 0$ и $0 \le \alpha < \varepsilon$, то будем говорить, что расстояние между точками имеет вид $k\varepsilon + \alpha$ или $k\varepsilon - (\varepsilon - \alpha)$. Покажем, как устроены оставшиеся расстояния в Z.

Лемма 20. *Расстояние от новой z_3 до $y =$дальней(z_3) будет равно длине двуреберного пути L вида*

$$\left[\underline{\textit{новая}}\ z_3,\ \underline{\textit{ближайшая}}(z_3),\ \underline{\textit{старая}}\ y\right],$$

и будет иметь вид

(1) *$k\varepsilon - \varepsilon/4$, или*

(2) *$k\varepsilon + \varepsilon/4$*

для некоторого неотрицательного целого k.

Доказательство. В силу пункта 3 леммы 8, кратчайший путь L, соединяющий z_3 и y будет иметь вид

$$L = \left[\underline{\text{новая}}\ z_3,\ \underline{\text{ближайшая}}(z_3),\ \underline{\text{старая}}\ y\right],$$

и, в силу структуры весов ребер графа G, его длина будет равна

(1) $k\varepsilon - \varepsilon/4 + m\varepsilon$ для некоторых $k, m \in \mathbb{N}$, если L проходит через $z_1 = \underline{\text{левая}}\ (z_3)$, или

(2) $\varepsilon/4 + m\varepsilon$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, если L проходит через $z_2 = \underline{\text{правая}}\ (z_3)$.

□

Лемма 21. *Расстояние от новой z_3 до новой y_3 будет равно длине трехребрного пути L*

$$\left[\underline{\textit{новая}}\ z_3,\ \underline{\textit{ближайшая}}(z_3),\ \underline{\textit{ближайшая}}(y_3),\ \underline{\textit{новая}}\ y_3\right],$$

и будет иметь вид

(1) *$k\varepsilon - \varepsilon/2$, или*

(2) *$k\varepsilon + \varepsilon/2$, или*

(3) *$k\varepsilon$*

для некоторого неотрицательного целого k.

Доказательство. В силу пункта 2 леммы 8, кратчайший путь L будет иметь вид $\left[\underline{\text{новая}}\ z_3,\ u = \underline{\text{ближайшая}}(z_3),\ v = \underline{\text{ближайшая}}(y_3),\ \underline{\text{новая}}\ y_3\right]$ (вторая и третья точки пути могут совпасть), а его длина будет равна:

(1) $k\varepsilon - \varepsilon/4 + m\varepsilon + p\varepsilon - \varepsilon/4$, если $u = \underline{\text{левая}}(z_3)$, а $v = \underline{\text{левая}}(y_3)$,

(2) $\varepsilon/4 + m\varepsilon + \varepsilon/4$, если $u = \underline{\text{правая}}(z_3)$, а $v = \underline{\text{правая}}(y_3)$,

(3) $k\varepsilon - \varepsilon/4 + m\varepsilon + \varepsilon/4$ или $\varepsilon/4 + m\varepsilon + p\varepsilon - \varepsilon/4$, если одна из u, v является правой, а другая — левой,

для некоторых k, p — натуральных, и m — неотрицательного целого. □

Разделим все пары различных точек Z на 7 классов по типу расстояний между ними:

(1) $\varepsilon/4$: $\big($новая z_3~правая$(z_3)\big)$,

(2) $k\varepsilon$, $k \geq 1$: (старая~старая),

(3) $k\varepsilon - \varepsilon/4$, $k \geq 1$: $\big($новая~левая(новой)$\big)$,

(4) $k\varepsilon + \varepsilon/4$, $k \geq 1$: $\big($новая~дальняя(новой)$\big)$,

(5) $k\varepsilon - \varepsilon/4$, $k \geq 2$: $\big($новая~дальняя(новой)$\big)$,

(6) $k\varepsilon$, $k \geq 1$: (новая~новая),

(7) $k\varepsilon - \varepsilon/2$, $k \geq 1$: (новая~новая).

Если расстояние от старой точки y до новой точки z_3 лежит в классе (5) $\big($классе (4)$\big)$, то такую точку y будем называть *дальней левой*$(z_3)\big($*дальней правой*$(z_3)\big)$.

Рассмотрим произвольную биекцию $\phi\colon Z \to Z$ с $\mathrm{dis}(\phi) < \varepsilon/4$, тогда $\mathrm{dis}(\phi^{-1}) < \varepsilon/4$. Докажем, что $\phi = \mathrm{id}$.

Заметим, что для любых $k, m, p, l \in \mathbb{N}$, числа $k\varepsilon$, $m\varepsilon - \varepsilon/4$, $p\varepsilon + \varepsilon/4$, $l\varepsilon - \varepsilon/2$ отличаются как минимум на $\varepsilon/4$, значит, ϕ является изометрией.

Лемма 22. *Если расстояние между точками было равно $\varepsilon/4$, то есть, оказалось в первом классе, то расстояние между образами отображения ϕ может быть только из первого класса. Аналогично, неупорядоченная пара точек на расстоянии из* (3) *или* (5) *класса может перейти только в пару точек на расстоянии из класса* (3) *или класса* (5) *в силу различия расстояний в классах.*

Лемма 23. *Расстояние от новой z_3 до левой(z_3) строго меньше расстояния от z_3 до y = дальней левой(z_3) для каждого такого y.*

Доказательство. Действительно, расстояние от z_3 до произвольной дальней левой(z_3) будет вычисляться по двухреберному пути, проходящему через z_1, то есть, будет больше. □

Таким образом, левая(z_3) является ближайшей к z_3 среди всех точек, находящихся на расстоянии вида $k\varepsilon - \varepsilon/4$.

Лемма 24. *Если у точки x есть n точек на расстоянии $\varepsilon/4$ (n — кардинальное число), то у $\phi(x)$ тоже существует ровно n точек на расстоянии $\varepsilon/4$.*

Доказательство. Действительно, их не может быть меньше, так как образы точек, находящихся на расстоянии $\varepsilon/4$ от x, будут на расстоянии $\varepsilon/4$ от $\phi(x)$. Рассмотрев обратное отображение, получаем равенство. □

Лемма 25. *Новая точка z_3 переходит в некоторую новую y_3, а правая$(z_3) = z_2$ переходит в правую$(y_3) = y_2$.*

Доказательство. В силу леммы 22, неупорядоченная пара точек {новая, правая} переходит в неупорядоченную пару {новая, правая}. Предположим, что $\phi(z_3) = y_2 =$ правая(y_3), а $z_2 =$ правая(z_3) и $\phi(z_2) = y_3$.

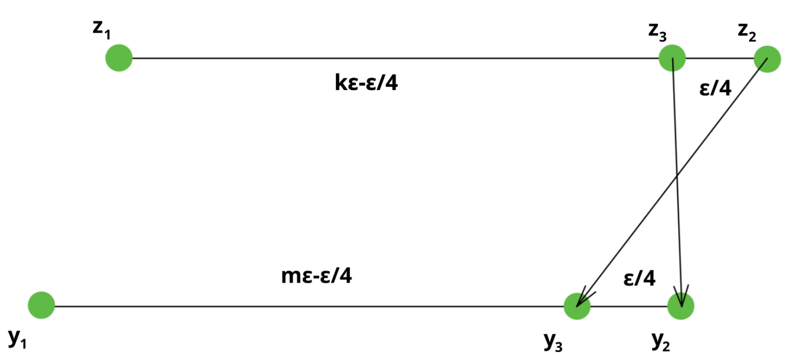

Рис. 3. Новая z_3 переходит в старую y_2 =правая(y_3), а z_2 = правая(z_3) переходит в новую y_3.

Наименьший элемент a_1 вполне упорядоченного множества Z' будем называть первым, а наименьший элемент упорядоченного множества $Z' \backslash \{a_1\}$ — вторым a_2.

В силу того, что a_1 — это единственная точка Z, которая не имеет точек на расстоянии $\varepsilon/4$, то по лемме 24, точка a_1 перейдет сама в себя. У z_3 существует ровно одна точка на расстоянии $\varepsilon/4$, значит, у $y_2 = \phi(z_3)$ есть ровно одна точка на расстоянии $\varepsilon/4$ в силу предложения 24, то есть, ровно одна новая точка, для которой y_2 есть правая, значит, ровно один $z \in Z'$ такой, что $z \prec y_2$, то есть, y_2 — второй элемент множества Z', а y_1 — первый. Рассмотрев обратное отображение, получаем, что $y_1 = a_1 = z_1$, и $z_2 = a_2 = y_2$. Так как $d(z_1, z_3) = k\varepsilon - \varepsilon/4$ в силу того, что $z_1 z_3$ есть пара левая-новая, а из сказанного выше, $d\big(\phi(z_1), \phi(z_3)\big) = d(y_1, y_2) = k\varepsilon$, противоречие. $\square$

Получаем, что любые новые будут переходить в новые, а правые от них — в правые. Теперь докажем, что левая будет переходить в левую.

Лемма 26. *Пусть $\phi(z_3) = y_3$. Тогда $\phi(z_1) = y_1$, где $y_1 =$ левая(y_3), а $z_1 =$ левая(z_3).*

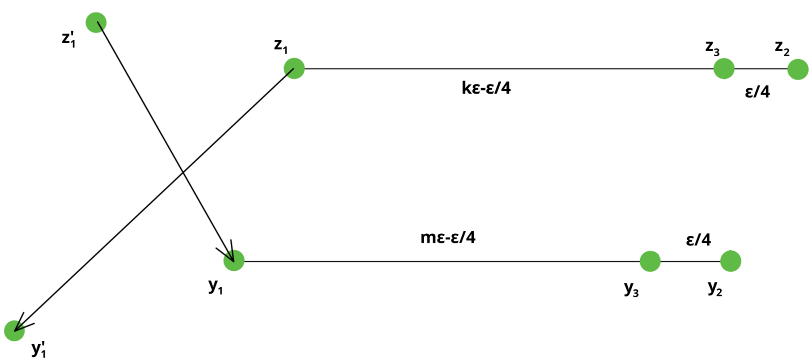

Рис. 4. Левая z_1 переходит в дальнюю левую$(y_3) = y'_1$.

Доказательство. Действительно, пусть $y_3 = \phi(z_3)$, $y_1 =$ левая(y_3) и $y_2 =$ правая(y_3). Нужно доказать, что $\phi(z_1) = y_1$. Пусть это не так. Тогда $\phi(z_1) = y'_1 =$ дальняя левая(y_3) в силу леммы 22. Пусть $\phi^{-1}(y_1) = z'_1$. Это точка должна быть дальней левой(z_3), так как левой быть не может в силу биективности. Пусть $d(z_1, z_2) = k_z\varepsilon$, тогда $d(z_1, z_3) = k_z\varepsilon - \varepsilon/4$. В силу того, что ϕ сохраняет расстояния, $d\big(z_1, z_3\big) = d\big(\phi(z_1), \phi(z_3)\big) = k_z\varepsilon - \varepsilon/4$. Положим $d(y_1, y_2) = k_y\varepsilon$. Тогда $d(y_1, y_3) = k_y\varepsilon - \varepsilon/4 < d(y_3, y'_1) = k_z\varepsilon - \varepsilon/4$ в силу леммы 23, значит, $k_y < k_z$. Рассмотрев обратное отображение, получаем $k_z < k_y$. Противоречие. Значит, $\phi(z_1) = y_1$. $\square$

Если $x \prec y$ $(x, y \in Z')$, то найдем u, которая является новой для пары x, y. Тогда $\phi(u)$ есть некоторая новая, для которой $\phi(x)$ и $\phi(y)$ являются левой и правой соответственно, значит, $\phi(x) \prec \phi(y)$, то есть ϕ сохраняет порядок. В силу леммы 18, ограничение ϕ на Z' — тождественное отображение. В силу построения Z, отображение ϕ будет тождественным отображением на всем Z.

Таким образом, $\mathrm{e}(Z) \geq \varepsilon/4$ и $s(Z) \geq \varepsilon/4$. Заметим, что $\mathrm{d_{GH}}(X, Z) \leq \mathrm{d_{GH}}(X, Z') + \mathrm{d_{GH}}(Z, Z') \leq \varepsilon/2 + \mathrm{d_H}(Z, Z') \leq 3\varepsilon/4$, так как Z' вкладывается в Z через отождествление.

Теперь воспользуемся леммой 17 для произвольного $c > 0$. Тогда $\mathrm{e}(Z + 2c) \geq \varepsilon/4$, $\mathrm{s}(Z + 2c) \geq \varepsilon/4 + 2c$, $\mathrm{t}(Z + 2c) \geq 2c$. Положив $\delta = 3\varepsilon/4$ и $U = Z + 2c$, получим $\mathrm{d_{GH}}(X, U) \leq \delta + c$ в силу леммы 14, $\mathrm{e}(U) \geq \delta/3$, $\mathrm{s}(U) \geq \delta/3 + 2c$, $\mathrm{t}(U) \geq 2c$. $\square$

Таким образом, пространства общего положения всюду плотны в $\mathcal{GH}$.

Список литературы

[1] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии*, Москва-Ижевск, институт компьютерных исследований, 2004.

[2] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Isometry Group of Gromov-Hausdorff Space. 2018, ArXiv e-prints, arXiv:1806.02100.

[3] S. Roman, Lattices and Ordered Sets, Springer, New York, NY, 2008.

[4] Gromov M. Groups of Polynomial growth and Expanding Maps. // В сборнике: Publications Mathematiques Paris: I.H.E.S., Vol. 53, 1981.

[5] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Isometric Embeddings of Bounded Metric Spaces into the Gromov-Hausdorff Class. 2022, ArXiv e-prints, arXiv:2203.02904 [math.MG].