Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

КУРСОВАЯ РАБОТА

Проблема Ферма–Торричелли в нормированных пространствах
The Fermat–Torricelli problem in normed spaces

Выполнил студент 4 курса
Илюхин Д.А.
Научный руководитель
д.ф.м.н., проф. А.А.Тужилин

Москва 2023

Аннотация

В статье изучается обобщение классической проблемы Ферма–Торричелли на нормированные пространства произвольной конечной размерности. Получены необходимые и достаточные условия единственности решения задачи Ферма–Торричелли для любых n точек в фиксированном пространстве, изложены более точные условия для нормированных плоскостей и трёхмерных пространств. Кроме того, приведены примеры применения критерия в нормах, заданных правильными многогранниками.

1 Введение

Задача поиска точки, минимизирующей сумму расстояний от неё до заданного множества точек в метрическом пространстве, впервые упоминается в 17 веке. В 1643 году Ферма поставил задачу для трёх точек на евклидовой плоскости, и в том же веке Торричелли предложил решение этой проблемы ([4]).

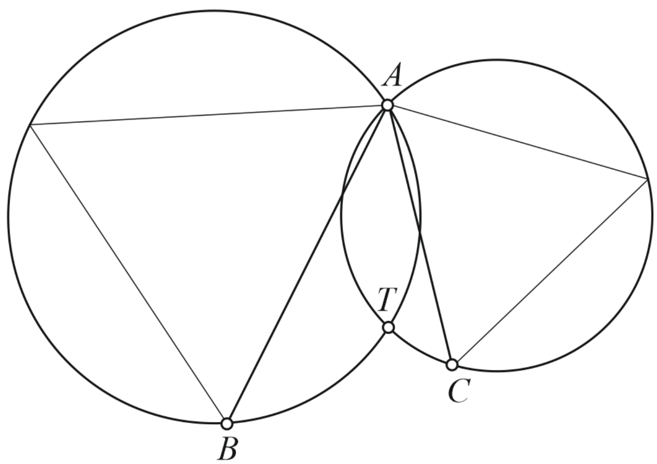

Рис. 1: Конструкция, предложенная Торричелли. Точка T является решением задачи для заданных точек A, B, C ([14])

С тех пор были рассмотрены различные обобщения этой проблемы. Задача была сформулирована для произвольных количества точек, размерности пространства, а также нормы, заданной в этом пространстве. Простота формулировки позволяет рассматривать задачу даже в произвольном метрическом пространстве. К примеру, задача для четырёх точек на евклидовой плоскости решена Д. Фаньяно ([3], [11]). А для случая пяти точек было доказано, что задача неразрешима в радикалах, доказательство приведено в [1] и [6]. Кроме того, существует обобщённая задача, в которой вершины рассматриваются вместе с некоторыми положительными величинами, называемых весами. О развитии взвешенной задачи можно прочитать в работах [15], [16], [13]. В частности, были доказаны существование и единственность решения такой задачи для трёх точек на евклидовой плоскости ([11]).

В этой статье будет рассматриваться классический вариант задачи: поиск точки, для которой достигается минимум суммы расстояний до элементов подмножества метрического пространства. Такую формулировку будем называть *обобщённой проблемой Ферма–Торричелли* (или просто *проблемой Ферма–Торричелли*). Работа опирается на статью [12], в ней описано применение геометрического подхода к задаче и изложены некоторые новые результаты, которые получены в рамках вещественных конечномерных нормированных пространств, называемых *пространствами Минковского*.

В текущей статье поставлена задача найти необходимое и достаточное условие единственности решения задачи Ферма–Торричелли для любых n точек в произвольном пространстве Минковского.

Выражаю благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. профессору А.А. Тужилину, а также д.ф.-м.н. профессору А.О. Иванову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

2 Проблема Ферма–Торричелли и методы её решения

Все утверждения этого раздела будут сформулированы для пространства Минковского, поэтому это не будет уточняться.

Определение 2.1. Точка x_0 называется *точкой Ферма–Торричелли* для точек $A = \{x_1, ..., x_n\}$, если $x = x_0$ минимизирует $\sum_{i=1}^n |xx_i|$. Множество всех таких точек обозначим $\mathrm{ft}(A)$.

Из свойств функции $\sum_{i=1}^n |xx_i|$ можно получить следующее утверждение про множество решений задачи Ферма–Торричелли, см. например [5].

Предложение 2.2. *Пусть* $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *— точки в пространстве. Тогда* $\mathrm{ft}(A)$ *— непустое, компактное и выпуклое множество.*

Приведём два примера решения задачи Ферма–Торричелли на плоскости. На рисунке 2 изображены вершины равностороннего треугольника сначала в евклидовой плоскости, а затем в норме, заданной правильным шестиугольником. В первом случае множеству решений принадлежит единственная точка, построенная так, что углы между лучами, выходящими из неё в направлении вершин треугольника, равны. Во втором случае уточним расположение точек заданного множества: пусть одна из них находится в начале координат, а две другие — в соседних вершинах единичной окружности. При таких условиях в множество решений войдут все точки построенного треугольника, включая внутренность и границы.

Теперь будет изложен геометрический метод построения решения задачи Ферма–Торричелли. Чтобы его использовать, наряду с исходным пространством X нужно рассматривать двойственное к нему пространство X^*, состоящее из линейных функционалов.

Определение 2.3. Функционал $\varphi \in X^*$ называется *нормирующим для вектора* $x \in X$, если $\|\varphi\| = 1$ и $\varphi(x) = \|x\|$.

Легко заметить, что элементы пространства X, полученные умножением вектора x на положительное число k, имеют тот же набор нормирующих функционалов. То есть множество таких функционалов можно описать с помощью точек единичной сферы. Рассмотрим нормирующие функционалы на некоторой нормированной плоскости.

На рисунке 3 приведён участок единичной окружности S, содержащий как уплощенние, так и гладкий участок. Построим нормирующие функционалы для векторов с началом в нуле и концом в точке, лежащей на S. В точке z единичная окружность имеет единственную

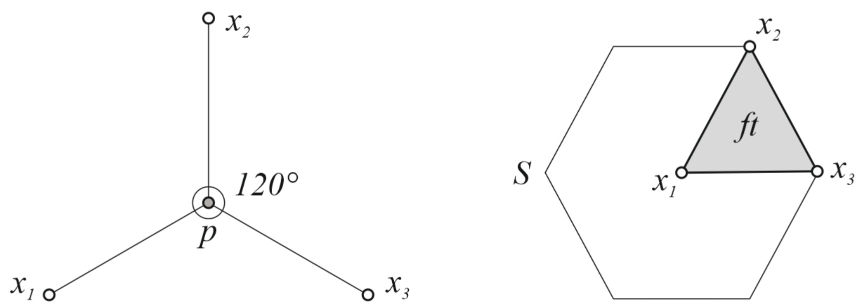

Рис. 2: Примеры решений задачи Ферма–Торричелли на евклидовой плоскости и на λ-плоскости

опорную прямую, тогда для соответствующего вектора существует единственный нормирующий функционал φ_4, его линия уровня совпадает с этой опорной прямой. Внутренним точкам уплощения xy тоже соответствуют векторы с единственным нормирующим функционалом. В точке x единичная окружность имеет больше одной опорной прямой. Каждая из них задаёт нормирующий функционал, то есть для вектора с концом в x существует бесконечно много нормирующих функционалов. Функционалы φ_1 и φ_2 задаются предельными положениями опорной прямой, а φ_3 — произвольной.

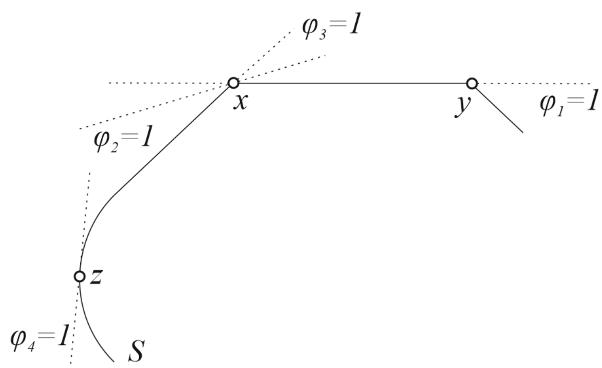

Рис. 3: Построение нормирующих функционалов по опорным прямым к единичной окружности

Следующая теорема является критерием принадлежности некоторой точки множеству решений задачи Ферма–Торричелли.

Теорема 2.4 ([7], [9]). *Пусть x_0, x_1, ..., x_n — точки в пространстве и $x_0 \neq x_i$ для $i = 1, ..., n$. Тогда x_0 — точка Ферма–Торричелли для $A = \{x_1, ..., x_n\}$ тогда и только тогда, когда для каждого вектора $x_i - x_0$, $i = 1, ..., n$, существует нормируюший функционал φ_i такой, что $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i = 0$.*

Приведём простейший пример использования этой теоремы на евклидовой плоскости. Рассмотрим три точки на окружности, расположенные на равном расстоянии друг от друга, и предположим, что начало координат является решением задачи Ферма–Торричели для них. Для каждой из точек x_1, x_2, x_3 существует единственная опорная прямая, которая является линией уровня $\varphi_i = 1$ некоторого функционала. Три построенные прямые образуют равносторонний треугольник и равноудалены от начала координат, следовательно, сумма функционалов, которые они задают, равна нулю. По теореме 2.4 точка $p = 0$ принадлежит множеству решений.

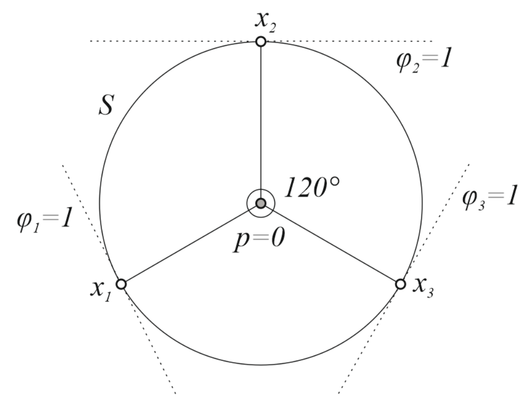

Рис. 4: Начало координат принадлежит множеству решений для точек x_1, x_2, x_3

Допустим, что найдена точка, являющаяся решением для множества A. Теперь с помощью функционалов из теоремы 2.4 можно построить всё множество $\mathrm{ft}(A)$. Для этого введём новый объект.

Определение 2.5. Пусть даны функционал $\varphi \in X^*$ и точка $x \in X$. Определим *конус* $C(x,\ \varphi) = x - \{a :\ \varphi(a) = \|a\|\}$.

Рассмотрим два примера построения конуса на манхэттенской плоскости (рисунок 5). Пусть функционал φ_1 задаётся опорной прямой, пересекающей единичную окружность в одной точке, а φ_2 - прямой, содержащей уплощение. Множество $\{a :\ \ \varphi_1(a) = \|a\|\}$ является лучом, который выходит из начала координат и проходит через эту точку. Для второго функционала это будет целый набор лучей, пересекающих все точки уплощения. В обоих случаях далее отражаем построенное множество относительно начала координат и параллельным переносом сдвигаем так, чтобы вершина попала в заданную точку.

Теорема 2.6 ([7])**.** *Пусть $A = \{x_1,\ ...,\ x_n\}$ — точки в пространстве и $p \in \mathrm{ft}(A) \setminus A$. По теореме 2.4 для каждого вектора $x_i - p$, $i = 1, ..., n$, существует нормирующий функционал φ_i такой, что $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i = 0$. Тогда $\mathrm{ft}(A) = \cap_{i=1}^{n} C(x_i,\ \varphi_i)$.*

Теоремы 2.4 и 2.6 составляют геометрический метод поиска решения задачи Ферма–Торричелли. Чтобы описать применение этой теоремы, рассмотрим подробнее пример с вершинами равностороннего треугольника в шестиугольной норме (рисунок 6).

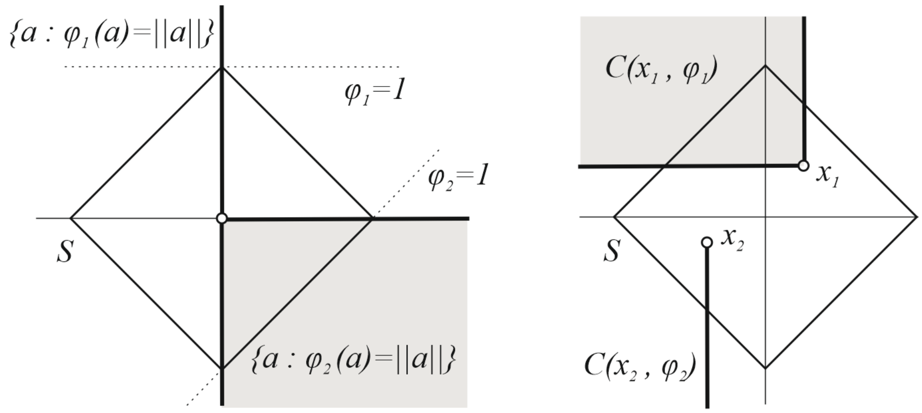

Рис. 5: Построение конусов на манхэттенской плосокости

Во-первых, найдём хотя бы одно решение. Возьмём $p = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ и с помощью теоремы 2.4 докажем, что $p \in \mathrm{ft}(A)$. Для этого рассмотрим векторы $x_1 - p, x_2 - p, x_3 - p$ и построим их нормирующие функционалы. Так как они лежат на одних направлениях с внутренними точками уплощений, то для каждого из векторов $x_i - p$ существует ровно один функционал φ_i, линия уровня которого содержит соответствующее уплощение. Уплощения равноудалены от начала координат и задают равносторонний треугольник, следовательно, сумма функционалов, построенных по ним, равна нулю, и условие теоремы выполнено.

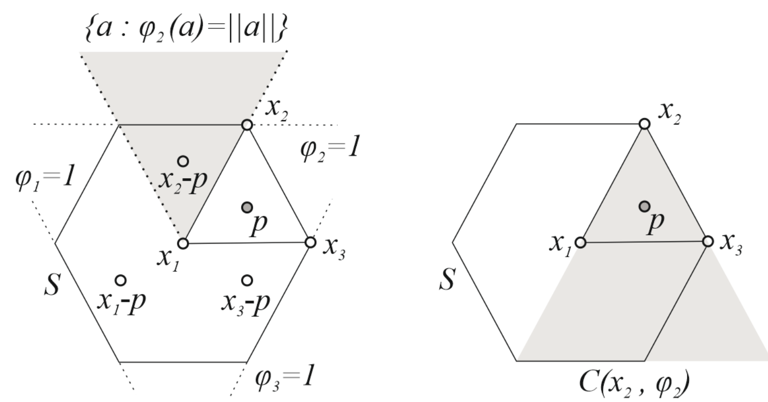

Рис. 6: Построение полного множества решений для точек x_1, x_2, x_3 на плоскости с шестиугольной нормой

Теперь воспользуемся теоремой 2.6, чтобы отыскать все решения. Построим конус, задаваемый функционалом φ_2 и вектором $x_2 - p$. Так как функционал является нормирующим для всех точек уплощения, множество $\{a : \ \varphi_2(a) = \|a\|\}$ представляет собой набор лучей, выходящих из начала координат и проходящих через точки уплощения, то есть угол, стороны которого содержат две соседние вершины. Теперь отразим угол относительно начала координат и совершим параллельный перенос так, чтобы вершина угла оказалась в точке x_2. После аналогичного построения двух других конусов получим, что их пересечением является весь треугольник $x_1x_2x_3$.

Замечание 2.7. Утверждение теоремы 2.6 не зависит от выбора точки p и функционалов φ_i.

Геометрический метод даёт общее описание решений задачи Ферма–Торричелли для различных заданных множеств — это пересечение некоторых конусов с вершинами, расположенными в точках этого множества. Это наблюдение позволяет сформулировать следующие утверждения:

Предложение 2.8 ([12]). *Пусть в пространстве точки множества* $A = \{x_1, \ldots, x_{2k+1}\}$ *расположены на одной прямой в порядке их нумерации. Тогда* $\mathrm{ft}(A) = \{x_{k+1}\}$. *Если* $A = \{x_1, \ldots, x_{2k}\}$, *то* $\mathrm{ft}(A) = \overline{x_k x_{k+1}}$

3 Критерий единственности

3.1 Критерий для n точек в пространстве размерности d

Пусть X это пространство Минковского размерности d. В X поставим задачу Ферма–Торричелли для n точек. Если $x_i \in X, 1 \leq i \leq n$, то решением называется множество $\mathrm{ft}(x_1, \ldots, x_n)$, в которое входят все точки $x \in X$, на которых достигается минимум функции $\sum_{i=1}^{n} |xx_i|$.

Рассмотрим единичную сферу S пространства X.

Определение 3.1. *Гранью* единичной сферы называется её пересечение с некоторой опорной гиперплоскостью. Если линейная оболочка точек грани является подпространством X размерности k, то такая грань называется $(k-1)$-*мерной*.

Определение 3.2. Возьмём конечное множество граней единичной сферы S пространства Минковского. Для каждой из них выберем опорную гиперплоскость π_i, пересекающуюся с S только по этой грани. Пусть гиперплоскость π_i задаёт поверхность уровня $\varphi_i = 1$ некоторого линейного функционала φ_i. Если найдётся набор опорных гиперплоскостей такой, что сумма построенных функционалов равна нулевому, то такое множество граней будем называть *согласованным*.

Из определения следует, что если взять по одной точке из каждой грани согласованного множества, то получим набор точек, для которого $x = 0$ является одним из решений задачи Ферма–Торричелли. В зависимости от размерностей граней, входящих в множество, и их взаимного расположения, можно получать различные типы решений, в том числе единственные и неединственные. Оказывается, что задача поиска в пространстве X множества точек с неединственным решением эквивалентна существованию в этом пространстве согласованного множества граней с определёнными свойствами.

Теорема 3.3. *Пусть X - пространство Минковского размерности d.*

Если $n \geq 3$ нечётно, то в пространстве X найдутся n точек, для которых решение задачи Ферма–Торричелли неединственно, тогда и только тогда, когда в X существует согласованное множество из n граней единичной сферы S, для которого выполняется условие:

- *Пересечение линейных оболочек всех граней, входящих в это согласованное множество, содержит прямую.*

Если $n \geq 4$ чётно, то в пространстве X решение задачи Ферма–Торричелли единственно для любых n точек, не лежащих на одной прямой, тогда и только тогда, когда единичная сфера строго выпукла.

Доказательство. Пусть n нечётно.

Достаточность. Докажем, что если такое согласованное множество A существует, то существует набор точек, для которых решение задачи Ферма–Торричелли неединственно. Возьмём по одной внутренней точке из каждой грани. Пусть это точки $x_1, \ldots, x_n$. По теореме 2.4 точка $x = 0$ является одним из решений. По теореме 2.6 полное решение это пересечение конусов, выходящих из вершин, и содержащих точку $x = 0$. Причём из k-мерной грани выходит $(k+1)$-мерный конус. По условию существует прямая l, принадлежащая линейной оболочке любой грани из A, то есть линейной оболочке любого конуса. Тогда каждый из этих конусов содержит некоторую одномерную окрестность точки $x = 0$ на прямой l. Следовательно, пересечение всех конусов тоже содержит окрестность нуля. Решение неединственно.

Необходимость. Пусть в пространстве X нашлись n точек $x_1, \ldots, x_n$, для которых решение задачи Ферма–Торричелли неединсвтенно. Пусть точка p входит в решение. Тогда решение для точек $x_i - p$ тоже неединственно, и $x = 0$ — одно из решений. По теореме 2.6 множество $\mathrm{ft}(x_1 - p, \ldots, x_n - p)$ — пересечение некоторых конусов $C_1, \ldots, C_n$, выходящих из точек $x_i - p$. Рассмотрим нормирующие функционалы, по которым построены конусы, а именно, пересечения единичной сферы с опорными гиперплоскостями $\varphi_i = 1$. Получим n граней, которые очевидно составляют согласованное множество. Так как решение неединственно и является пересечением конусов, то оно содержит некоторый непустой отрезок, содержащий $x = 0$. Каждый конус также содержит этот отрезок. Тогда в линейной оболочке конуса лежит прямая, содержащая этот отрезок. Следовательно, пересечение линейных оболочек всех граней содержит прямую.

Пусть n чётно.

Пусть норма строго выпукла. Тогда решение задачи Ферма–Торричелли для любых n точек есть пересечение одномерных конусов с вершинами в этих точках. Так как вершины не лежат на одной прямой, то конусы могут пересекаться только по одной точке, то есть решение всегда единственно.

Пусть единичная сфера содержит грань, которая не является точкой. Возьмём в ней любые $\frac{n}{2}$ различных внутренних точек $x_1, \ldots, x_{\frac{n}{2}}$. Рассмотрим множество решений для набора $\pm x_1, \ldots, \pm x_{\frac{n}{2}}$. Для каждой из точек зададим функционал, поверхность уровня которого является опорной гиперплоскостью, задающей грань, которой принадлежит точка. Так как грани противоположны, и содержат одинаковое число точек, то сумма функционалов равна нулю. По теореме 2.4 $x = 0$ — одно из решений. Полное решение является пересечением конусов. Все конусы имеют одну и ту же размерность, лежат в одном подпространстве той же размерности и содержат точку $x = 0$ как внутреннюю. Таким образом, пересечению всех конусов принадлежит некоторая окрестность нуля соответствующей размерности. Решение неединственно.

Теорема доказана. □

Замечание 3.4. Так как линейной оболочкой грани максимальной размерности является всё пространство, то в условии теоремы можно рассматривать пересечение только немаксимальных граней. Таким образом, если согласованное множество состоит из одних лишь максимальных граней, то дополнительное условие выполняется автоматически.

Если размерность пространства d равна 2 или 3, то эквивалентное условие удаётся уточнить. Рассмотрим подробнее эти два случая.

3.2 Критерий для n точек на плоскости

Пусть X это плоскость Минковского. В X поставлена задача Ферма–Торричелли для n точек. Единичная окружность S имеет грани только двух типов. Будем называть их точками и уплощениями.

Предложение 3.5. *Если в X найдётся согласованное множество граней единичной окружности, состоящее из n уплощений, то в этой плоскости найдутся точки $x_1, \ldots, x_n$, для которых множество $\mathrm{ft}(x_1, \ldots, x_n)$ — невырожденный многоугольник.*

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — внутренние точки уплощений из согласованного множества. Тогда взяв функционалы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ из определения 3.2, по теореме 2.4 получаем, что $p = 0$ принадлежит $\mathrm{ft}(x_1, \ldots, x_n)$. По теореме 2.6 $\mathrm{ft}(x_1, \ldots, x_n)$ является пересечением конусов, выходящих из точек $x_1, \ldots, x_n$. Так как все функционалы содержат уплощения, все конусы являются невырожденными углами. Причём каждый из них содержит некоторую полномерную окрестность нуля в силу того, что точки x_i не являются границами уплощений. Следовательно, конусы в пересечении образуют многоугольник. □

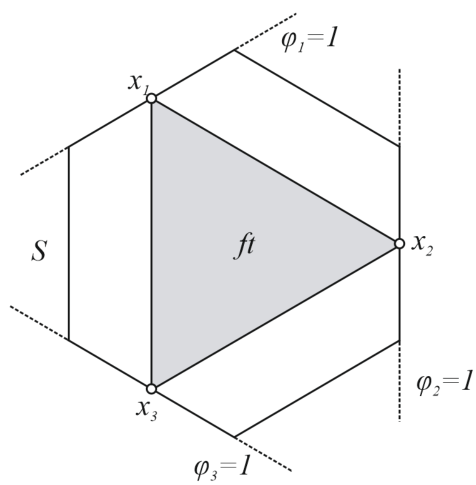

Рис. 7: Первое условие неединсвтенности при $n = 3$

Предложение 3.6. *Если в X найдётся согласованное множество граней единичной окружности, состоящее из $n-1$ уплощения и одной точки, то в этой плоскости найдутся $x_1, \ldots, x_n$, для которых множество решений $\mathrm{ft}(x_1, \ldots, x_n)$ — невырожденный отрезок.*

Доказательство. Пусть точки $x_1, \ldots, x_{n-1}$ — внутренние точки уплощений, а x_n — точка из согласованного множества. Аналогично предыдущему доказательству получаем, что $p = 0$ принадлежит $\mathrm{ft}(x_1, \ldots, x_n)$. Конусы, выходящие из $x_1, \ldots, x_{n-1}$, содержат окрестность нуля, а из точки x_n выходит луч, проходящий через начало координат. Следовательно, в пересечении получаем невырожденный отрезок. □

Предложение 3.7. *Пусть $2 \le k \le n-1$. Если в X найдётся согласованное множество граней единичной окружности, состоящее из k уплощений и $n-k$ точек, причём линейная оболочка точек это прямая, то в этой плоскости найдутся $x_1, \dots, x_n$, для которых множество решений $\mathrm{ft}(x_1, \dots, x_n)$ — невырожденный отрезок.*

Доказательство. Пусть $x_1, \dots, x_k$ — внутренние точки уплощений, а $x_{k+1}, \dots, x_n$ — точки из согласованного множества. Функционалы $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ из определения 3.2 удовлетворяют теореме 2.4, и точка $x = 0$ принадлежит $\mathrm{ft}(x_1, \dots, x_n)$. По теореме 2.6 решение $\mathrm{ft}(x_1, x_2, x_3)$ является пересечением k лучей, содержащих начало координат и лежащих на одной прямой, и $n-k$ невырожденных углов, каждый из которых содержит окрестность нуля. Получаем отрезок. □

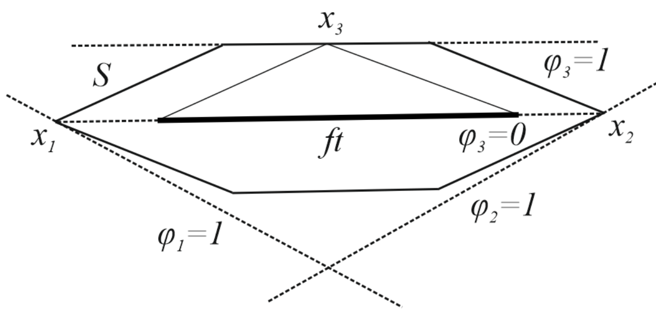

Рис. 8: Третье условие неединственности при $n = 3$

Теорема 3.8. *Если $n \ge 3$ нечётно, то в нормированной плоскости решение задачи Ферма–Торричелли единственно для любых n точек тогда и только тогда, когда любое согласованное множество граней единичной окружности состоит не более чем из $n-2$ уплощений и размерность линейной оболочки граней-точек равна 2.*

Если $n \ge 4$ чётно, то в нормированной плоскости решение задачи Ферма–Торричелли единственно для любых n точек, не лежащих на одной прямой, тогда и только тогда, когда норма строго выпукла.

Доказательство. В обоих утверждениях необходимость следует из предложений 3.5, 3.6 и 3.7. Докажем достаточность. Пусть n нечётно и нашлись точки $x_1, \dots, x_n$, для которых множество решений задачи Ферма–Торричелли неединственно. Так как решение является пересечением конусов, то это либо многоугольник, либо отрезок. В случае многоугольника все конусы — невырожденные углы. Рассмотрим функционалы, задающие конусы. Их линии уровня содержат уплощения единичной окружности, которые очевидно составляют согласованное множество граней.

Отрезок может получиться пересечением хотя бы одного невырожденного угла и лежащих на одной прямой лучей. Если все конусы — лучи, то все точки x_i лежат на одной прямой, но по предложению 2.8 в таком случае решение единственно. Аналогично рассмотрим функционалы, задающие конусы. Так как все вырожденные конусы лежат на одной прямой, то точки пересечения единичной окружности и линий уровня функционалов также лежат на одной прямой. То есть линейная оболочка точек согласованного множества равна 1.

Утверждение для чётного n следует из теоремы 3.3.

□

3.3 Критерий для n точек в трёхмерном пространстве

Пусть X это трёхмерное пространство Минковского. В X поставлена задача Ферма–Торричелли для n точек.

Теорема 3.9. *Если $n \geq 3$ нечётно, то в трёхмерном пространстве Минковского X найдутся n точек, для которых решение задачи Ферма–Торричелли неединственно, тогда и только тогда, когда в X существует согласованное множество из n граней единичной сферы S, для которого выполняются условия:*

- *Пересечение линейных оболочек граней-точек, входящих в это согласованное множество, содержит прямую,*
- *Для любой пары грани-точка и грани-отрезка, входящих в это согласованное множество, размерность их линейной оболочки равна 2,*
- *Пересечение линейных оболочек граней-отрезков, входящих в это согласованное множество, содержит прямую.*

Если $n \geq 4$ чётно, то в трёхмерном пространстве Минковского решение задачи Ферма–Торричелли единственно для любых n точек, не лежащих на одной прямой, тогда и только тогда, когда норма строго выпукла.

Доказательство. Пусть n нечётно.

Достаточность. Пусть нашлось согласованное множество из n граней, для которого все условия выполняются. Построим решение задачи Ферма–Торричелли для набора внутренних точек данных граней. По теореме 2.4 точка $x = 0$ входит в решение. Полное решение — это пересечение некоторых конусов, выходящих из вершин и содержащих $x = 0$ как внутреннюю точку.

Пусть согласованное множество имеет грани-точки. Линейная оболочка такой грани — прямая, содержащая саму точку и $x = 0$. Исходя из первого условия, накладываемого на согласованное множество, для всех его точек эта прямая совпадает. Пусть это прямая l. Пересечение всех одномерных конусов, выходящих из граней-точек содержит непустой отрезок, лежащий в l и содержащий $x = 0$ как внутреннюю точку.

Линейные оболочки граней второго типа — это плоскости, в которых лежат двумерные конусы, выходящие из данных элементов. По условию каждая такая плоскость содержит все грани-точки, а значит, и прямую l, на которой они лежат. Существует непустой отрезок, лежащий в l и содержащий $x = 0$ как внутреннюю точку, который лежит в каждом из двумерных конусов. Получаем, что пересечение всех одномерных и двумерных конусов, содержит как минимум отрезок. Если в согласованном множестве нет граней-точек, то по условию возьмём в качестве прямой l любую прямую, лежащую в пересечении плоскостей.

Так как в пересечение трёхмерных конусов входит некоторая полномерная окрестность точки $x = 0$, то их пересечение с полученным отрезком неединственно. То есть пересечение всех конусов содержит как минимум отрезок. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть в пространстве X нашлись n точек $x_1, \ldots, x_n$, для которых решение задачи Ферма–Торричелли неединственно. Пусть точка p входит в решение. Тогда решение для точек $x_i - p$ тоже неединственно, и $x = 0$ — одно из решений. По теореме 2.6 множество $\mathrm{ft}(x_1 - p, \ldots, x_n - p)$ — пересечение некоторых конусов $C_1, \ldots, C_n$, выходящих из точек $x_i - p$. Рассмотрим нормирующие функционалы, по которым построены конусы, а именно, пересечения единичной сферы с опорными плоскостями $\varphi_i = 1$. Получим согласованное множество граней единичной сферы. Определим, какие условия накладываются на данное множество.

Все одномерные конусы, выходящие из граней-точек, должны лежать на одной прямой, иначе их пересечение будет содержать только точку $x = 0$. Другими словами, пересечение линейных оболочек этих граней и есть эта прямая. Пусть это прямая l.

Из граней-отрезков выходят двумерные конусы. Так как решение неединственно, пусть в их пересечении лежит непустой отрезок, содержащий $x = 0$. Пусть также этот отрезок принадлежит прямой l, если согласованное множество содержит точки и такая прямая построена. Тогда линейная оболочка любой грани-отрезка, то есть плоскость, содержащая соответствующий конус, содержит прямую, содержащую этот отрезок. Получили, что пересечение линейных оболочек граней-отрезков содержит прямую. При наличии граней-точек, это будет прямая l. Значит, плоскость, содержащая грань-отрезок, содержит и любую грань-точку. То есть линейная оболочка любой пары грани-точки и грани-отрезка имеет размерность 2. Все условия на согласованное множество выполнены.

Утверждение для чётного n следует из теоремы 3.3.

$\square$

4 Правильные многогранники и трёхмерные нормированные пространства

В статье [8] было показано применение критерия на лямбда-плоскостях — нормированных плоскостях, заданных правильными многоугольниками. Рассмотрим задачу в некоторых трёхмерных пространствах.

Утверждение 4.1. *Существует всего пять правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр. Четыре из них, все кроме тетраэдра, задают норму в трёхмерном пространстве.*

Проверим, единственно ли решение задачи Ферма–Торричелли для любых трёх точек в данных пространствах. Для этого нужно исследовать существующие в них согласованные множества граней.

Лемма 4.2. *Если три грани единичной сферы пространства Минковского составляют согласованное множество, то они попарно не пересекаются.*

Доказательство. Каждой грани из согласованного множества соответствует функционал, поверхность уровня которого содержит данную грань. Сумма функционалов всех граней равна нулю. Если какие-то две грани имеют общую точку, то сумма их функционалов в этой точке равна 2. Тогда третий функционал принимает значение -2 в этой точке, и он не является нормирующим. Противоречие. $\square$

Предложение 4.3. *В нормированном пространстве, заданном правильным кубом, существуют три точки, для которых решение задачи Ферма–Торричелли неединственно. Более того, если решение неединственно, то оно является отрезком.*

Доказательство. Пусть X — рассматриваемое пространство. Рассмотрим в X все возможные варианты согласованных множеств.

Пусть в X существует согласованное множество, и хотя бы две из них — двумерные грани. По лемме 4.2 они не имеют общих точек. Значит, они противоположны, и сумма их функционалов равна нулю. Но тогда третий функционал нулевой. Противоречие.

Пусть согласованное множество содержит ровно одну двумерную грань. Она не может иметь общих точек с любой из двух других граней. Если оставшиеся две грани — рёбра куба, то они принадлежат противоположной двумерной грани и не являются соседними. Функционал, соответствующий двумерной грани, принимает значение -1 на обоих рёбрах. Тогда каждый из двух других функционлов равен нулю на другом ребре. Это значит, что их плоскости уровня составляют с соседнимим гранями куба угол в 45 градусов. Плоскости пересекаются по прямой, на которой сумма двух функционалов равна 2. Однако первый функционал принимает значение $-\frac{3}{2}$ на этой прямой. Сумма функционалов не равна нулю. Противоречие. Вторая и третья грани также не могут быть ребром и точкой или двумя точками, так как в таком случае их линейная оболочка не содержит прямую, как это должно быть в условии критерия.

Пусть согласованное множество состоит из трёх рёбер. Если какие-то два ребра принадлежат одной грани, то третье обязательно принадлежит противоположной. Пусть оно симметрично одному из первых двух. Тогда задача сводится к построению функционалов для трёх вершин квадрата, задающего норму на плоскости. Такие функционалы существуют. Пусть линии уровня функционалов, соответствующих симметричным вершинам, пересекаются на продолжении диагонали квадрата в точке нормы 2. А линия уровня третьего функционала проходит через оставшуюся вершину перпендикулярно этой диагонали. Тогда сумма функционалов равна нулю. Аналогично строятся функционалы для рёбер куба. Пересечение линейных оболочек рёбер является прямой. Взяв три произвольные внутренние точки на этих рёбрах, в решении получим непустой отрезок, лежащий на этой прямой.

Если третье ребро расположено непараллельно, то пересечение линейных оболочек всех рёбер является точкой. Если ни одна пара рёбер не принадлежит одной грани, то снова получаем точку в пересечении их линейных оболочек. Не выполнено условие критерия.

Если согласованное множество состоит из двух рёбер и точки, то эта точка должна лежать в одном двумерном подпространстве с каждым из рёбер. В этом случае получим, что точка является концом одного из двух рёбер. Если согласованное множество состоит из одного ребра и двух вершин, то прямая, проходящая через вершины, есть диагональ куба, и она должна лежать в одной плоскости с ребром, но такого ребра не существует.

Таким образом, в X существуют только согласованные множества, состоящие из трёх параллельных рёбер, а решение задачи Ферма–Торричелли является либо отрезком, либо точкой. Утверждение доказано.

$\square$

Предложение 4.4. *В нормированном пространстве, заданном правильным октаэдром, решение задачи Ферма–Торричелли единственно для любых трёх точек.*

Доказательство. В нормированном пространстве, в котором единичная сфера это правильный октаэдр, норма для точки с координатами $a = (x, y, z)$ задаётся формулой $\|a\| = |x|+|y|+|z|$. Тогда для точек $a_i = (x_i, y_i, z_i)$ и точки $a = (x, y, z)$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} |aa_i| = \sum_{i=1}^{n} \|a - a_i\| = \sum_{i=1}^{n}(|x - x_i| + |y - y_i| + |z - z_i|) = \sum_{i=1}^{n} |x - x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y - y_i| + \sum_{i=1}^{n} |z - z_i|$$

То есть задача сводится к покоординатной, а по утверждению 2.8 решение для трёх точек, расположенных на одной прямой, единственно. Утверждение доказано. □

Предложение 4.5. *В нормированном пространстве, заданном правильным додекаэдром, существуют три точки, для которых решение задачи Ферма–Торричелли неединственно. Более того, если решение неединственно, то оно является отрезком.*

Доказательство. Рассмотрим в X все возможные варианты согласованных множеств. Для удобства введём обозначения и формулировки для элементов додекаэдра. Для обозначения двумерных граней используются f_i. Ребро, принадлежашее граням f_i, f_j будем обозначать $e_{i,j}$, а вершину принадлежащую граням f_i, f_j, f_k обозначим $v_{i,j,k}$. Грани f_1 и f_{12} назовём верхней и нижней соответственно. Рёбра и вершины принадлежат экватору додекаэдра, если не пересекаются с верхней и нижней гранями.

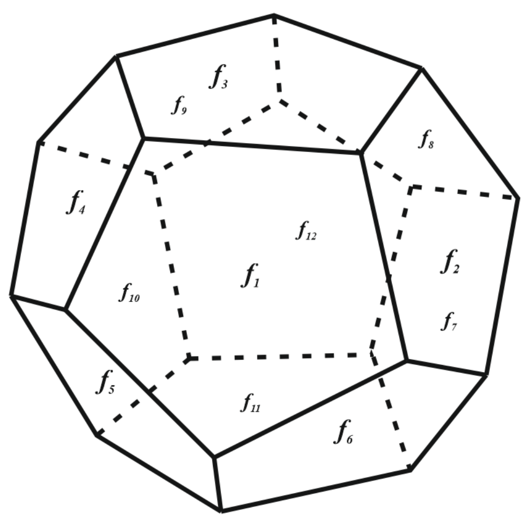

Рис. 9: Правильный додекаэдр задаёт норму в трёхмерном пространстве

Допустим, что согласованное множество содержит хотя бы две двумерные грани. По лемме 4.2 они не могут быть соседними и противоположными, поэтому будем считать, что это грани f_1 и f_7. Если третий элемент согласованного множества — тоже двумерная грань, то это может быть только f_9 или f_{10}. Так как они расположены симметрично относительно первых двух граней, то одновременно дополняют или не дополняют их до согласованного множества. Но если дополняют, то их функционалы должны совпадать, а это неверно.

Пусть третий элемент — ребро. Все рёбра кроме $e_{9,10}$ имеют симметричные относительно двух рассматриваемых граней, поэтмоу не могут входить в согласованное множество. Функционал ребра $e_{9,10}$ равен -1 в вершине $v_{2,6,7}$. В этой же вершине функционал грани f_7 равен 1, но функционал грани f_1 не равен нулю. Сумма функционалов не равна нулю.

Пусть третий элемент — вершина. Аналогично предыдущим рассуждениям, достаточно проверить только вершину $v_{4,9,10}$. В этом случае в вершине $v_{2,6,7}$ сумма функционалов снова не равна нулю.

Рассмотрим вариант, когда согласованное множество содержит единственную грань f_1. Пусть другие два элемента — рёбра. Если одно из рёбер принадлежит нижней грани, то через него проходит нулевой уровень функционала второго ребра. Но в этом случае это одно из рёбер граничащих с верхней гранью, что невозможно по лемме 4.2. Пусть одно из рёбер соединияет экватор и нижнюю грань. Но тогда любое из оставшихся рёбер имеет симметричное относительное рассматриваемых грани и ребра и не может дополнять их до согласованного множества. Тогда оба ребра должны принадлежать экватору, причём они симметричны относительно центра. Плоскость, проходящая через эти рёбра, является нулевым уровнем функционала грани f_1, но не параллельна ей, что невозможно.

Пусть грань f_1 дополняют ребро и вершина, лежащие в одной плоскости. В подпространствах, заданных рёбрами из экватора, лежат только вершины, являющиеся концами самого ребра и противоположного ему. Каждая из них имеет симметричную себе. Аналогично ребро нижней грани также не может входить в согласованное множество. Остались рёбра между нижней гранью и экватором. Достаточно проверить ребро $e_{8,9}$ и вершину $v_{5,6,11}$. В этом случае на прямой, соединяющей вершины $v_{5,6,11}$ и $v_{3,8,9}$ функционала грани f_1 равен нулю. Но это прямая не параллельна плоскости грани. Противоречие.

Если грань f_1 дополняют две симметричные вершины, то это обязательно пара вершин из экватора. Но проходящая через них прямая не параллельна плоскости грани. Противоречие, так как функционал грани на этой прямой должен равняться нулю.

Остались варианты согласованных множеств, не содержащие ни одной грани. Допустим, что согласованное множество состоит из трёх рёбер, пересечение подпространств которых содержит хотя бы прямую. Пусть два из них являются противоположными, например это $e_{1,4}$ и $e_{7,12}$. Их общее двумерное подпространство задаёт нулевой уровень функционала третьего ребра. Данной плоскости параллельны только рёбра $e_{2,6}$ и $e_{9,10}$. Они симметричны, поэтому достаточно рассмотреть первое.

Пусть уровень функционала φ_1 проходит через ребро $e_{2,6}$ и составляет равные двугранные углы с соседними гранями. Уровни функционалов φ_2 и φ_3 содержат рёбра $e_{1,4}$ и $e_{7,12}$ соответственно. В плоскости этих двух рёбер сумма функционалов равна нулю. Теперь рассмотрим плоскость, содержащую ребро $e_{2,6}$ и середины рёбер $e_{1,4}$ и $e_{7,12}$. Сечение додекаэдра этой плоскостью изображено на рисунке 10. Так как сумма функционалов равна нулю, то точка пересечения линий уровня $\varphi_2 = 1$ и $\varphi_3 = 1$ принадлежит прямой $\varphi_1 = -2$. Пусть α — двугранный угол между уровнем $\varphi_1 = 0$ и гранью, а β — угол, между уровнями $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = 1$. Если $\beta > \alpha$, то такие функционалы существуют, и согласованное множество из соответствующих рёбер тоже. Докажем, что это действительно так. Угол α — это половина двугранного угла правильного додекаэдра, то есть

$$\alpha = \frac{1}{2} \arccos(-\frac{1}{\sqrt{5}})$$

Длины рёбер $e_{2,6}$ и $e_{9,10}$ равны $a = 1$. Длины остальных сторон получившегося в сечении

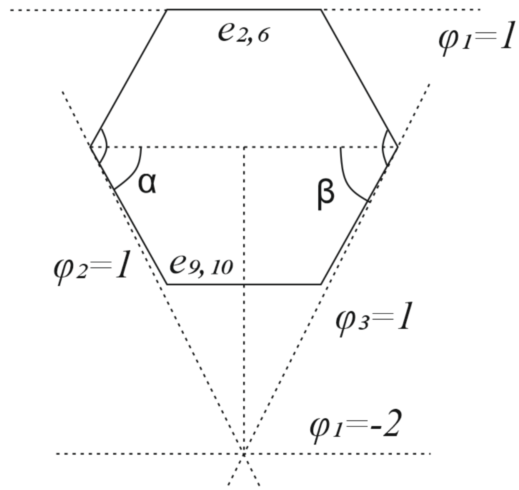

Рис. 10

шестиугольника равны высоте правильного пятиугольника, то есть $b = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$. Вычислим катеты прямоугольного треугольника с гипотенузой b и острым углом α:

$$c = b\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, d = b\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$$

Теперь можем вычислить тангенс угла β:

$$\tan\beta = \frac{2d}{c+\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}+\frac{1}{2}} = 2$$

Так как $\arctan 2 > \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, то $\beta > \alpha$, и рёбра додекаэдра составляют согласованное множество. Так как двумерные подпространства, заданные этими тремя рёбрами, пересекаются по прямой, то данное множество даёт неединственные решения задачи Ферма–Торричелли, причём принадлежащие некоторой прямой, то есть отрезки.

Если среди трёх рёбер додекаэдра нет ни одной пары противоположных, то двумерные подпространства, содержащие рёбра, пересекаются не больше, чем по точке.

Согласованное множество додекаэдра не может состоять из двух рёбер и вершины, так в этом случае вершина должна лежать в одной плоскости с каждым и рёбер. Получаем, что рёбра противоположны, а вершина является концом одного из рёбер, что невозможно по лемме 4.2.

Также не существует согласованного множества из одного ребра и двух вершин, лежащих в одной плоскости. Если это так, то по лемме 4.2 вершины являются концами ребра, противолежащего данному. Используя рисунок 10 допустим, что рассматривается ребро $e_{2,6}$, а вершины — это концы ребра $e_{9,10}$. Тогда линии уровней функционалов φ_2 и φ_3 проходят через данные вершины и пересекаются на линии $\varphi_1 = -2$. Из рисунка видно, что это невозможно.

Таким образом, додекаэдр имеет только согласованные множества, состоящие из трёх рёбер. Причём если с помощью них получено неединственное решение, то это отрезок. Утверждение доказано. □

Предложение 4.6. *Если единичная сфера трёхмерного нормированного пространства является призмой, то для любого $n \geq 2$ существуют n точек, для которых решение задачи Ферма–Торричелли неединственно.*

Доказательство. Рассмотрим нормированную плоскость, единичная окружность которой совпадает с основанием призмы. В этой нормированной плоскости возьмём любое согласованное множество и задающие его функционалы. Проведём линии уровня этих функционалов у двух оснований призмы. Через них проходит единсвтенный набор опорных плоскостей, задающий n функционалов в исходном пространстве. Их сумма равна нулю, а линейная оболочка граней содержит прямую. Условие критерия 3.9 выполнено, и утверждение доказано. □

Список литературы

[1] Bajaj C. 1988, "The algebraic degree of geometric optimization problems.", Discr. Comput. Geom., 3, 177–191.

[2] Bannikova A. G., Ilyutko D. P., Nikonov I. M. 2016, "The Length of an Extremal Network in a Normed Space: Maxwell Formula", Journal of Mathematical Sciences, 214:5, 593–608.

[3] Boltyanski V., Martini H., Soltan V. 1999, "Geometric methods and optimization problems.", Kluwer Acad. Publ.

[4] Brazil M., Graham R. L., Thomas D. A., Zachariasen M. 2013, "On the History of the Euclidean Steiner Tree Problem."

[5] Cieslik D. 1988, "The Fermat-Steiner-Weber-problem in Minkowski spaces.", Optimization 19, 485–489.

[6] Cockayne E. J., Melzak Z. A. 1969, "Euclidean constructibility in graph-minimization problems", Math. Mag., 42, 206–208.

[7] Durier R., Michelot C. 1985, "Geometrical properties of the Fermat-Weber problem.", Europ. J. Oper. Res. 20, 332–343.

[8] Ilyukhin D. A. 2022, "The Fermat–Torricelli problem in the case of three-point sets in normed planes", Chebyshevskii Sbornik. T. 23(5): 72-86.

[9] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. 2002, "Branching geodesics in normed spaces", Izvestiya: Mathematics, 2002, 66:5, 905–948.

[10] Jarník V., Kössler M. 1934, "O minimálních grafech obsahujících n daných bodu", Ĉas, Pêstování Mat. (Essen) T. 63: 223—235.

[11] Kupitz Y. S., Martini H. 1997, “Geometric aspects of the generalized Fermat–Torricelli problem.“, Bolyai Society Mathematical Studies 6, 55-127.

[12] Martini H., Swanepoel K. J., Weis G. 2002, “The Fermat–Torricelli problem in normed planes and spaces.“, Journal of Optimization Theory and Applications 115, 283-314.

[13] Nguyen S. D. 2018, “Constrained Fermat-Torricelli-Weber Problem in real Hilbert Spaces“, ArXiv e-prints, arXiv:1806.04296.

[14] Torricelli E. 1919, “De maximis et minimis.“ Opere di Evangelista Torricelli, Faenza, Italy.

[15] Uteshev A. Y. 2014, “Analytical solution for the generalized Fermat–Torricelli problem“, The American Mathematical Monthly 121(4), 318–331.

[16] Zachos A. N. 2014, “An analytical solution of the weighted Fermat-Torricelli problem on the unit sphere“, ArXiv e-prints, arXiv:1408.6495.