ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ПРИЛОЖЕНИЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

«РАССТОЯНИЯ ГРОМОВА-ХАУСДОРФА ДО СИМПЛЕКСОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ МОЩНОСТИ, А ТАКЖЕ ДО 2-ПРОСТРАНСТВ»

Выполнил студент
611 группы
Григорьев Дмитрий Сергеевич

подпись студента

Научный руководитель:
профессор, д.ф-м.н. Тужилин Алексей Августинович

подпись научного руководителя

Москва
2021 г.

Содержание

1 Введение

«Пространства пространств» и «пространства подмножеств» часто появляются в таких важных приложениях, как сравнение и распознавание образов, а также имеют очевидную теоретическую значимость, поэтому привлекают внимание специалистов на протяжении многих лет. Один из естественных подходов к изучению таких пространств — определить на них функцию расстояния, как «меру несхожести» соответствующих объектов. В 1914 году Ф. Хаусдорф [1] ввел в рассмотрение неотрицательную симметричную функцию на парах непустых подмножеств метрического пространства X, равную точной нижней грани таких чисел r, что каждое из этих множеств содержится в r-окрестности оставшегося.

Позднее, Д. Эдвардс [2] и, независимо, М. Громов [4] обобщили эту конструкцию на семейство всех компактных метрических пространств, используя их изометрические вложения во всевозможные объемлющие пространства, см. определение ниже. Полученная функция называется расстоянием по Громову–Хаусдорфу. Отметим, что это расстояние симметрично и удовлетворяет неравенству треугольника, хотя может как равняться бесконечности, так и быть нулевым даже между неизометричными пространствами. Тем не менее, если ограничиться семейством $\mathcal{M}$ всех метрических компактов, рассматриваемых с точностью до изометрии, то расстояние Громова-Хаусдорфа будет удовлетворять всем аксиомам метрики. Множество $\mathcal{M}$, вместе с расстоянием Громова-Хаусдорфа, называется пространством Громова-Хаусдорфа. Геометрия этого метрического пространства оказалась довольно причудливой и активно изучается в последнее время. Хорошо известно, что $\mathcal{M}$ — линейно связное, полное, сепарабельное, геодезическое пространство, а также, что $\mathcal{M}$ не является ограниченно компактным. Подробное введение в геометрию пространства Громова–Хаусдорфа можно найти в [9] и [10].

Задача вычисления расстояния по Громову–Хаусдорфу между двумя конкретными пространствами весьма нетривиальна. Даже в случае конечных пространств эффективный алгоритм не известен, а прямой перебор, основанный на технике соответствий, см. ниже, работает плохо уже для пространств, состоящих из десятков точек.

В первой части данной работы изучается задача вычисления и оценки расстояний Громова-Хаусдорфа от произвольных ограниченных метрических пространств до так называемых симплексов — метрических пространств, в которых все ненулевые расстояния одинаковы. Симплексы и расстояния до них играют важную роль в изучении группы симметрий пространства $\mathcal{M}$, см. [11]. В работе [8], в ряде частных случаев, были вычислены расстояния от конечных симплексов до компактных метрических пространств.

Мы же не ограничиваемся ни конечными симплексами, ни компактными пространствами, и определяем ряд дополнительных характеристик ограниченных метрических пространств, в терминах которых мы или приводим точные формулы для расстояния Громова–Хаусдорфа до произвольных симплексов, или даем точные верхние и нижние оценки этих расстояний.

Во второй части работы изучается задача вычисления и оценки расстояний Громова-Хаусдорфа между двумя, так называемыми, 2-пространствами — то есть, метрическими пространствами, у которых расстояние между различными точками принимает только два значения. В настоящее время, особенно интенсивно исследуются конечные подмножества евклидова пространства, обладающие этим свойством. Дело в том, что они тесно связаны с такими популярными темами как сферические коды и сферический дизайн, см. например [14].

Нам же удалось найти критерии для понимания того, когда расстояние Громова-Хаусдорфа между двумя конечными 2-пространствами принимает половину значения наибольшего из четырех расстояний. В работе [6] было вычислено расстояние между произвольным конечным 2-пространством с неравными расстояниями и произвольным конечным симплексом. Можно заметить, что симплекс — это предельное состояние 2-пространства, поэтому полученные нами критерии дают соответствующие предельные следствия, которые полностью согласуются с результатами работы [6].

2 Основные определения и предварительные результаты

Пусть X — произвольное множество, через $\#X$ будем обозначать его мощность.

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между его точками x и y будем обозначать через $|xy|$. Через $\operatorname{diam} X$ будем обозначать диаметр X.

Если $A, B \subset X$ — непустые подмножества, определим расстояние между ними как $|AB| = \inf\bigl\{|ab| : a \in A, b \in B\bigr\}$, при этом, если $A = \{a\}$, то вместо $\bigl|\{a\}B\bigr| = \bigl|B\{a\}\bigr|$ будем писать $|aB|$.

Для любой точки $x \in X$ и числа $r > 0$ через $U_r(x)$ будем обозначать открытый шар с центром в точке x и радиусом r; для каждого непустого $A \subset X$ и числа $r > 0$ положим $U_r(A) = \bigcup_{\alpha\in A} U_r(a)$.

2.1 Расстояния Хаусдорфа, Громова–Хаусдорфа и аппарат соответствий

Определение 2.1. Для непустых $A, B \subset X$ положим

$$d_H(A,B) = \inf\bigl\{r > 0 : A \subset U_r(B) \ \&\ B \subset U_r(A)\bigr\} = \max\bigl\{\sup_{a\in A} |aB|, \sup_{b\in B} |Ab|\bigr\}.$$

Полученная величина назвается расстоянием Хаусдорфа между A и B.

Хорошо известно [9], [10], что расстояние Хаусдорфа, рассматриваемое на множество всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств из X, является метрикой.

Определение 2.2. Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных X и Y соответственно, назовем реализацией пары (X, Y).

Определение 2.3. Расстоянием $d_{GH}(X, Y)$ по Громову–Хаусдорфу между X и Y назовем точную нижнюю грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что $d_H(X', Y') \le r$.

Хорошо известно [9], [10], что на множестве M всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, функция d_{GH} является метрикой.

Определение 2.4. Пусть X и Y — произвольные непустые множества. Отношением между множествами X и Y называется каждое подмножество декартова произведения $X \times Y$. Множество всех непустых отношений между X и Y обозначим через $\mathcal{P}(X, Y)$.

Будем смотреть на каждое отношение $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$, как на многозначное отображение, которое может иметь область определения меньшую, чем X. Тогда, по аналогии с тем, как это принято для отображений, для каждого $x \in X$ и каждого $A \subset X$ определены их образы

$$\sigma(x) = \{y \in Y : (x, y) \in \sigma\} \quad \text{и} \quad \sigma(A) = \bigcup_{a \in A} \sigma(a),$$

а для каждого $y \in Y$ и каждого $B \subset Y$ — их прообразы

$$\sigma^{-1}(y) = \{x \in X : (x, y) \in R\} \quad \text{и} \quad \sigma^{-1}(B) = \bigcup_{b \in B} \sigma^{-1}(b).$$

Определение 2.5. Отношение $R \in \mathcal{P}(X, Y)$ называется соответствием, если ограничения на R канонических проекций $\pi_X : (x, y) \to x$ и $\pi_Y : (x, y) \to y$ сюръективны. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X, Y)$.

Определение 2.6. Пусть X и Y — произвольные метрические пространства. Искажением $\operatorname{dis} \sigma$ отношения $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$ назовем число

$$\operatorname{dis} \sigma = \sup \Big\{ \big| |xx'| - |yy'| \big|, \, (x, y), \, (x', y') \in \sigma \Big\}.$$

Легко видеть, что для любых отношений $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{P}(X, Y)$ таких, что $\sigma_1 \subset \sigma_2$, выполняется $\operatorname{dis} \sigma_1 \le \operatorname{dis} \sigma_2$. Иными словами, отображение dis: $\mathcal{P}(X, Y) \to \mathbb{R}$ монотонно, если на $\mathcal{P}(X, Y)$ рассматривается частичный порядок, заданный включением.

Утверждение 2.7 ([9], [10]). *Для любых метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf \big\{ \operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X, Y) \big\}.$$

Минимальные по включению соответствия из $\mathcal{R}(X,Y)$ назовем неприводимыми. Множество всех неприводимых соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}^0(X,Y)$.

Отметим (см. [13]), что каждое неприводимое соответствие $R\in\mathcal{R}^0(X,Y)$ задает разбиения D_X^R и D_Y^R пространств X и Y, а также биекцию $f_R:D_X^R\to D_Y^R$, для которой

$$R=\bigcup_{X_i\in D_X^R} X_i\times f_R\left(X_i\right). \tag{1}$$

При этом, если $\#X_i>1$, то $\#f_R\left(X_i\right)=1$, и если $\#f_R\left(X_i\right)>1$, то $\#X_i=1$. Более того, каждая биекция f между произвольными разбиениями D_X и D_Y пространств X и Y, удовлетворяющая описанным только что свойствам, порождает неприводимое соответствие по формуле (1).

Утверждение 2.8 ([13])**.** *Для каждого $R\in\mathcal{R}(X,Y)$ существует неприводимое соответствие R_0 такое, что $R_0\subset R$.В частности, $\mathcal{R}^0(X,Y)\ne\emptyset$.*

Учитывая монотонность искажения dis, сразу получаем следующий результат.

Следствие 2.9. *Для любых метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(X,Y)=\frac{1}{2}\inf\left\{\operatorname{dis}R:R\in\mathcal{R}^0(X,Y)\right\}.$$

С помощью соответствий легко доказываются следующие хорошо известные факты. Для произвольного метрического пространства X и числа $\lambda>0$ через λX обозначим метрическое пространство, которое отличается от X умножением всех расстояний на λ.

Утверждение 2.10 ([9], [10])**.** *Пусть X и Y — метрические пространства. Тогда*

(1) *если $X-$ одноточечное метрическое пространство, то $d_{GH}(X,Y)=\frac{1}{2}\operatorname{diam}Y$;*

(2) *если $\operatorname{diam}X<\infty$, то*

$$d_{GH}(X,Y)\ge\frac{1}{2}|\operatorname{diam}X-\operatorname{diam}Y|;$$

(3) *$d_{GH}(X,Y)\le\frac{1}{2}\max\{\operatorname{diam}X,\operatorname{diam}Y\}$, в частности, для ограниченных X и Y имеем $d_{GH}(X,Y)<\infty$;*

(4) *для любых $X,Y\in\mathcal{M}$ и любого $\lambda>0$ имеем $d_{GH}(\lambda X,\lambda Y)=\lambda d_{GH}(X,Y)$. Более того, при $\lambda\ne1$ единственным пространством, которое при такой операции не меняется, является одноточечное пространство. Иными словами, операция умножения метрики на число $\lambda>0$ является гомотетией пространства $\mathcal{M}$ с центром в одноточечном метрическом пространстве.*

2.2 Несколько элементарных соотношений

Для вычислений расстояний Громова–Хаусдорфа нам будут полезны следующие простые соотношения, доказательства которых приведены в [8].

Утверждение 2.11. *Для любых неотрицательных a и b выполнено неравенство*

$$\max\{a, |b-a|\} \le \max\{a, b\}.$$

Утверждение 2.12. *Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — непустое ограниченное подмножество вещественной прямой, и пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\sup_{a \in A} |\lambda - a| = \max\{\lambda - \inf A, \sup A - \lambda\} = \left|\lambda - \frac{\inf A + \sup A}{2}\right| + \frac{\sup A - \inf A}{2}.$$

Утверждение 2.13. *Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — непустое ограниченное подмножество вещественной прямой,* $\inf A \ge 0,$ *и пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\sup_{a \in A}\{\lambda, |\lambda - a|\} = \max\{\lambda, \sup A - \lambda\}.$$

Следствие 2.14. *Для любого $a \ge 0$ и любого λ выполняется*

$$\max\{\lambda, |a-\lambda|\} = \max\{\lambda, a-\lambda\}.$$

2.3 Элементы теории графов

Для второй части работы нам понадобится ввести некоторые понятия, связанные с графами.

Определение 2.15. Кликой в произвольном простом графе H называется каждый его подграф, в котором всякие две вершины соединены ребром, т.е. который является полным графом.

Отметим, что каждый одновершинный подграф также является кликой. Для удобства, множества вершин клики также будем называть кликой.

Определение 2.16. Числом кликового покрытия $\theta(H)$ графа H называется наименьшее возможное число клик, покрывающее граф H.

Легко видеть, что число $\theta(H)$ также равно наименьшему числу клик, множества вершин которых разбивают $V(H)$.

Другой популярной задачей является поиск наименьшего числа цветов, в которые можно покрасить вершины простого графа H так, чтобы смежные вершины были покрашены в разные цвета.

Определение 2.17. Это число обозначается через $\gamma(H)$ и называется хроматическим числом графа H.

Для простого графа H через H' обозначим двойственный ему граф, т.е. граф имеющий то же самое множество вершин и дополнительное множество ребер (две вершины в H' соединены ребром, если и только если они не соединяются ребром в H). Следующий факт хорошо известен.

Предложение 2.18. *Для любого простого графа H выполняется $\theta(H) = \gamma(H')$.*

Обозначим через $k(H)$ количество связных компонент графа H.

Лемма 2.19. *Для любого простого графа H выполняется $k(H) \le \theta(H)$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда граф H совпадает с дизъюнктным объединением своих максимальных клик: множества вершин этих клик попарно не пересекаются.*

Рассмотрим метрическое пространство X с двумя расстояниями $a < b$, $\#X = n$. И построим на множестве X простой граф G, ребра которого состоят из всех пар точек пространства X, находящихся друг от друга на расстоянии a ("граф минимальных расстояний"). Ясно, что $1 \le k(G) \le \theta(G) \le n-1$.

Приведем теорему из [6], которая будет связана с нашими результатами.

Теорема 1. *Пусть X — конечное метрическое пространство с двумя ненулевыми расстояниями $a < b$, $n = \#X$, и $\lambda\Delta$ — симплекс, $m = \#\lambda\Delta$. Обозначим через G граф с множеством вершин X и ребрами, состоящими из всех пар точек из X, находящихся на расстоянии a. Пусть $k := k(G)$ — число связных компонент графа G, а $\theta := \theta(G)$ — его число кликового покрытия. Тогда*

(1) *если $k = \theta$, то*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \begin{cases} b & \text{при } m = 1, \\ \max\{b, \lambda - b\} & \text{при } 1 < m < k = \theta, \\ \max\{b-\lambda, a, \lambda - b\} & \text{при } m = k = \theta, \\ \max\{b-\lambda, a, \lambda - a\} & \text{при } k = \theta < m < n, \\ \max\{b-\lambda, \lambda - a\} & \text{при } m = n, \\ \max\{b-\lambda, \lambda\} & \text{при } m > n; \end{cases}$$

(2) *если $k < \theta$, то*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \begin{cases} b & \text{при } m = 1, \\ \max\{b, \lambda - b\} & \text{при } 1 < m \le k, \\ \max\{b, \lambda - a\} & \text{при } k < m < \theta, \\ \max\{b-\lambda, a, \lambda - a\} & \text{при } \theta \le m < n, \\ \max\{b-\lambda, \lambda - a\} & \text{при } m = n, \\ \max\{b-\lambda, \lambda\} & \text{при } m > n. \end{cases}$$

3 Расстояние между ограниченным метрическим пространством и симплексом

Определение 3.1. Метрическое пространство X назовем симплексом, если все его ненулевые расстояния одинаковы. Симплекс, в котором ненулевые расстояния равны $\lambda > 0$, обозначим через $\lambda\Delta$.

3.1 Расстояние до симплексов с большим числом точек

Следующий результат обобщает теорему 4.1 из [8].

Теорема 2. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $\#X < \#\lambda\Delta$, тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\{\lambda, \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

Доказательство. Если $\#X = 1$, то $\operatorname{diam} X = 0$ и, по утверждению 2.10,

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \operatorname{diam} \lambda\Delta = \lambda = \max\{\lambda, \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

Пусть теперь $\#X > 1$. Выберем произвольное $R \in \mathcal{R}(\lambda\Delta, X)$. Так как $\#X < \#\lambda\Delta$, то существует $x \in X$ такое, что $\#R^{-1}(x) \geq 2$, поэтому $\operatorname{dis} R \geq \lambda$ и, значит, $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) \geq \lambda$.

Рассмотрим произвольную последовательность $(x_i, y_i) \in X \times X$ такую, что $|x_i y_i| \to \operatorname{diam} X$. Если в ней существует подпоследовательность (x_{i_k}, y_{i_k}), для которой при каждом i_k можно найти такое $z \in \lambda\Delta$, что $(z, x_{i_k}), (z, y_{i_k}) \in R$, то dis $R \geq \operatorname{diam} X$ и, значит, $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) \geq \max\{\lambda, \operatorname{diam} X\}$.

Если такой подпоследовательности нет, то существует подпоследовательность (x_{i_k}, y_{i_k}), для которой при каждом i_k можно найти различные $z_k, w_k \in \lambda\Delta$ такие, что $(z_k, x_{i_k}), (w_k, y_{i_k}) \in R$, и тогда $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) \geq \max\{\lambda, |\operatorname{diam} X - \lambda|\}$.

По утверждению 2.11,

$$\max\{\lambda, \operatorname{diam} X\} \geq \max\{\lambda, |\operatorname{diam} X - \lambda|\},$$

поэтому в любом случае $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) \geq \max\{\lambda, |\operatorname{diam} X - \lambda|\}$.

Выберем произвольное $x_0 \in X$, тогда, в силу предположения, $\#X > 1$ и, значит, множество $X \setminus \{x_0\}$ непусто. Так как $\#X < \#\lambda\Delta$, то в $\lambda\Delta$ существует подмножество $\lambda\Delta'$, равномощное $X \setminus \{x_0\}$. Пусть $g : \lambda\Delta' \to X \setminus \{x_0\}$ – произвольная биекция, и $\lambda\Delta'' = \lambda\Delta \setminus \lambda\Delta'$, тогда $\lambda\Delta'' \neq \emptyset$.

Рассмотрим соответствие

$$R_0 = \{(z', g(z')) : z' \in \lambda\Delta'\} \cup (\{x_0\} \times \lambda\Delta'').$$

Тогда dis $R_0 \leq \max\{\lambda, |\operatorname{diam} X - \lambda|\}$, откуда

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\{\lambda, |\operatorname{diam} X - \lambda|\}.$$

Осталось применить следствие 2.14. □

3.2 Расстояние до симплексов с не превосходящим числом точек

Пусть X — произвольное множество и m — кардинальное число, не превосходящее $\#X$. Через $\mathcal{D}_m(X)$ обозначим семейство всевозможных разбиений множества X на m непустых подмножеств.

Пусть теперь X — метрическое пространство. Тогда для каждого $D = \{X_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D}_m(X)$ положим

$$\operatorname{diam} D = \sup_{i\in I} \operatorname{diam} X_i.$$

Далее, для любых непустых $A, B \subset X$ пусть

$$|AB| = \inf\{|ab| : (a,b) \in A\times B\} \quad \text{и} \quad |AB|' = \sup\{|ab| : (a,b) \in A\times B\},$$

и для каждого $D = \{X_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D}_m(X)$ определим

$$\alpha(D) = \inf\{|X_iX_j| : i\ne j\} \quad \text{и} \quad \beta(D) = \sup\left\{|X_iX_j|' : i\ne j\right\}.$$

Пусть теперь $\lambda\Delta$ — симплекс мощности m. Выберем произвольное $D \in \mathcal{D}_m(X)$, любую биекцию $g : \lambda\Delta \to D$ и зададим соответствие $R_D \in \mathcal{R}(\lambda\Delta, X)$ следующим образом:

$$R_D = \bigcup_{z\in\lambda\Delta} \{z\}\times g(z).$$

Ясно, что каждое соответствие R_D — неприводимое.

Следующий результат обобщает предложение 4.5 из [8].

Утверждение 3.2. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство, $\lambda\Delta$ — симплекс, $\lambda > 0$. Тогда для любого $R \in \mathcal{R}^0(X, Y)$ имеем*

$$\operatorname{dis} R = \max\left\{\operatorname{diam} D^R_{\lambda\Delta}, \operatorname{diam} D^R_X, \operatorname{diam} X - \lambda, \lambda - \alpha\left(D^R_X\right)\right\}$$

Доказательство. Пусть $D^R_X = \{X_i\}_{i\in I}$. Из определения искажения можно заключить, что

$$\operatorname{dis}\, R = \sup\left\{\operatorname{diam} D^R_{\lambda\Delta}, \operatorname{diam} D^R_X, |\lambda - |x_1x_2|| : x_1 \in X_i, x_2 \in X_j, i\ne j\right\}.$$

Далее, используя утверждение 2.12, получим:

$$\sup\left\{\operatorname{diam} D^R_{\lambda\Delta}, \operatorname{diam} D^R_X, |\lambda - |x_1x_2|| : x_1 \in X_i, x_2 \in X_j, i\ne j\right\} = \\ = \max\left\{\operatorname{diam} D^R_{\lambda\Delta}, \operatorname{diam} D^R_X, \lambda - \alpha\left(D^R_X\right), \beta\left(D^R_X\right) - \lambda\right\}.$$

Отметим, что $\operatorname{diam} D^R_X \le \operatorname{diam} X$ и $\beta(D^R_X) \le \operatorname{diam} X$.

При этом, если $\operatorname{diam} D^R_X < \operatorname{diam} X$, и $(x_i, y_i) \in X\times X$ — последовательность, для которой $|x_iy_i| \to \operatorname{diam} X$, то, начиная с некоторого номера i, точки x_i и y_i лежат в разных элементах разбиения D^R_X, следовательно, в этом случае $\beta(D^R_X) = \operatorname{diam} X$, и формула доказана.

Пусть теперь $\operatorname{diam} D^R_X = \operatorname{diam} X$, тогда $\beta(D^R_X) - \lambda \le \operatorname{diam} X$ и $\operatorname{diam} X - \lambda \le \operatorname{diam} X$.

Поэтому

$$\max\{\operatorname{diam} D^R_{\lambda\Delta}, \operatorname{diam} D^R_X, \lambda - \alpha(D^R_X), \beta(D^R_X) - \lambda\} = \\ = \max\{\operatorname{diam} D^R_{\lambda\Delta}, \operatorname{diam} X, \lambda - \alpha(D^R_X)\} = \\ = \max\{\operatorname{diam} D^R_{\lambda\Delta}, \operatorname{diam} D^R_X, \lambda - \alpha(D^R_X), \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

Доказательство закончено.

$\square$

Из этого утверждения непосредственно получается следствие, которое понадобится нам в дальнейшем.

Следствие 3.3. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $m = \#\lambda\Delta \le \#X$. Тогда для любого $D \in \mathcal{D}_m(X)$ имеем*

$$\operatorname{dis} R_D = \max\{\operatorname{diam} D, \lambda - \alpha(D), \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

Сформулируем и докажем теперь аналог предложения 4.6 из [8], не используя теорему 4.3 оттуда же.

Утверждение 3.4. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $m = \#\lambda\Delta \le \#X$. Тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \inf_{D\in\mathcal{D}_m(X)} \operatorname{dis} R_D$$

Доказательство. По следствию 2.9, $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \inf_{R\in\mathcal{R}^0(\lambda\Delta,X)} \operatorname{dis} R$, поэтому достаточно показать, что для любого неприводимого соответствия $R \in \mathcal{R}^0(\lambda\Delta, X)$ существует такое $D \in \mathcal{D}_m(X)$, что $\operatorname{dis} R_D \le \operatorname{dis} R$.

Выберем произвольное $R \in \mathcal{R}^0(\lambda\Delta, X)$, не представимое в виде R_D, тогда разбиение $D^R_{\lambda\Delta}$ не точечное, т.е. существует $x \in X$, для которого $\#R^{-1}(x) \ge 2$, поэтому $\operatorname{dis} R \ge \lambda$.

Зададим на множестве $D^R_{\lambda\Delta}$ метрику, положив расстояние между различными элементами равным λ, тогда это метрическое пространство изометрично некоторому симплексу $\lambda\Delta'$.

Соответствие R порождает естественным образом соответствие $R' \in \mathcal{R}(\lambda\Delta', X)$: если $D^R_{\lambda\Delta} = \{\Delta_i\}_{i\in I}$ и $f_R : D^R_{\lambda\Delta} \to D^R_X$ — биекция, порожденная R, то

$$R' = \bigcup_{i\in I} \{\Delta_i\} \times f_R(\Delta_i).$$

Легко видеть, что $\operatorname{dis} R = \max\{\lambda, \operatorname{dis} R'\}$. Кроме того, R' порождается разбиением $D' := D^R_X$, т.е. $R' = R_{D'}$, поэтому, в силу следствия 3.3, имеем

$$\operatorname{dis}\ R' = \max\{\operatorname{diam} D', \lambda - \alpha(D'), \operatorname{diam} X - \lambda\},$$

откуда

$$\operatorname{dis} R = \max\{\lambda, \operatorname{diam} D', \lambda - \alpha(D'), \operatorname{diam} X - \lambda\} = \max\{\lambda, \operatorname{diam} D', \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

Так как $\#D' \le m$, у разбиения D' существует подразбиение $D \in \mathcal{D}_m(X)$. Ясно, что $\operatorname{diam} D \le \operatorname{diam} D'$, поэтому

$$\begin{aligned}\operatorname{dis} R_D = \max\{\operatorname{diam} D, \lambda - \alpha(D), \operatorname{diam} X - \lambda\} \le \\ \le \max\{\operatorname{diam} D', \lambda, \operatorname{diam} X - \lambda\} = \operatorname{dis} R,\end{aligned}$$

что и требовалось. $\square$

Следствие 3.5. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $m = \#\lambda\Delta \le \#X$. Тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \inf_{D\in\mathcal{D}_m(X)} \max\{\operatorname{diam} D, \lambda - \alpha(D), \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

Для произвольного метрического пространства X положим

$$\varepsilon(X) = \inf\{|xy| : x, y \in X, x \ne y\}.$$

Отметим, что $\varepsilon(X) \le \operatorname{diam} X$, причем для ограниченного X равенство достигается, если и только если X является симплексом.

Из следствия 3.5 мгновенно вытекает следующая теорема, доказанная в [8].

Теорема 3. *Пусть X — конечное метрическое пространство и $\#\lambda\Delta = \#X$, тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\{\lambda - \varepsilon(X), \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

Приведем основные результаты, связанные с нахождением расстояний до симплексов с не превосходящим числом точек.

Для произвольного метрического пространства $X, m \le \#X$, положим

$$\alpha_m^-(X) = \inf_{D\in\mathcal{D}_m(X)} \alpha(D), \quad \alpha_m(X) = \alpha_m^+(X) = \sup_{D\in\mathcal{D}_m(X)} \alpha(D),$$
$$d_m(X) = d_m^-(X) = \inf_{D\in\mathcal{D}_m(X)} \operatorname{diam} D, \quad d_m^+(X) = \sup_{D\in\mathcal{D}_m(X)} \operatorname{diam} D.$$

Замечание 3.6. Мы ввели упрощенные переобозначения для $\alpha_m^+(X)$ и $d_m^-(X)$ потому, что эти величины, в отличии от их «близнецов» $\alpha_m^-(X)$ и $d_m^+(X)$, встречаются в приводимых ниже формулах намного чаще.

Отметим, что $\alpha_m(X) = 0$ тогда и только тогда, когда для любого $D \in \mathcal{D}_m(X)$ выполняется $\alpha(D) = 0$.

Пример 3.7. Пусть X — бесконечное компактное метрическое пространство, а m — любой бесконечный кардинал, $m \le \#X$. Тогда $\alpha_m(X) = 0$.

Действительно, выберем произвольное $D = \{X_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D}_m(X)$, а в каждом X_i– по одной точке $x_i \in X_i$. Тогда, в силу компактности X, множество $\{x_i\}_{i\in I}$ содержит сходяшуюся последовательность $\{x_{i_k}\}$, состоящую из попарно различных точек. Но тогда $\left|X_{i_k}X_{i_{k+1}}\right| \to 0$ при $k \to \infty$, поэтому $\alpha(D) = 0$.

Пример 3.8. . Пусть X — ограниченное бесконечное метрическое пространство, представленное в виде дизъюнктного объединение n бесконечных компактов, и m — бесконечное кардинальное число, $n < m \le \#X$, тогда $\alpha_m(X) = 0$.

Действительно, пусть $\{Z_j\}_{j\in J}$, $\#J = n$, — разбиение пространства X на n компактов Z_j. Выберем произвольное $D = \{X_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D}_m(X)$. Так как $n < m$, то для некоторого $j \in J$ семейство всех непустых пересечений $X_i \cap Z_j$ образует бесконечное разбиение компакта Z_j. Осталось воспользоваться рассуждениями примера 3.7.

Пример 3.9. Пусть X — связное ограниченное метрическое пространство, а $m \ge 2$ — любой кардинал, $m \le \#X$. Тогда $\alpha_m(X) = 0$.

Действительно, выберем произвольное $D = \{X_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D}_m(X)$, в нем — произвольное X_i, и положим $X_i' = \cup_{i\ne j\in I} X_j$, тогда $D' = \{X_i, X_i'\} \in \mathcal{D}_2(X)$. Так как пространство X — связное, то $|X_iX_i'| = 0$, пюэтому можно выбрать последовательность $X_{j_k}, j_k \ne i$, для которой $|X_iX_{j_k}| \to 0$ при $k \to \infty$, откуда $\alpha(D) = 0$.

Аналогично разбирается следующий пример.

Пример 3.10. Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство, состоящее из n связных компонент, и m — кардинальное число, $n < m \le \#X$, тогда $\alpha_m(X) = 0$.

Из следствия 3.5 вытекает следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство, $m = \#\lambda\Delta \le \#X$, и $\alpha_m(X) = 0$, тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\{d_m(X), \lambda, \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

Рассмотрим график зависимости величины $2d_{GH}(\lambda\Delta, X)$ из теоремы 4 от λ, см. рис. 1. Из графика, приведенного на рис. 1, непосредственно получается следующий результат.

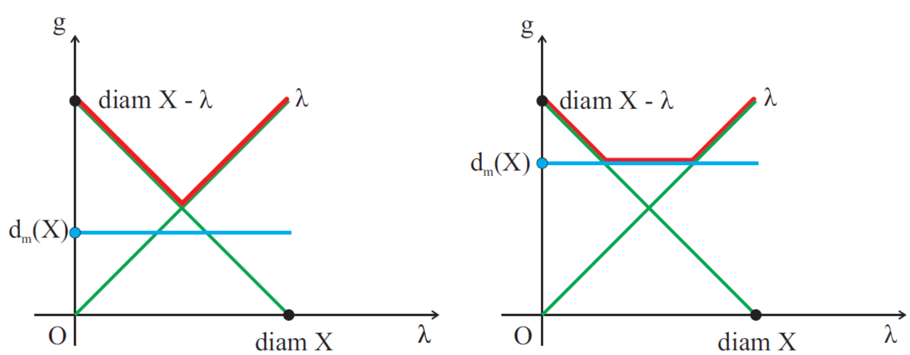

Рис. 1: График функции $g(\lambda) = 2d_{GH}(\lambda\Delta, X)$ при $\alpha_m(X) = 0$ и разных значениях $d_m(X)$.

Следствие 3.11. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство, $m = \#\lambda\Delta \le \#X$, причем $\alpha_m(X) = 0$, тогда*

(1) *если* $d_m(X) \le \frac{1}{2}\operatorname{diam} X$, *то*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \begin{cases} \operatorname{diam} X - \lambda & \text{\textit{при}} \quad \lambda \le \frac{1}{2}\operatorname{diam} X, \\ \lambda & \text{\textit{при}} \quad \lambda \ge \frac{1}{2}\operatorname{diam} X; \end{cases}$$

(2) *если* $d_m(X) > \frac{1}{2}\operatorname{diam} X$, *то*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \begin{cases} \operatorname{diam} X - \lambda & \text{\textit{при}} \quad \lambda \le \operatorname{diam} X - d_m(X) \\ d_m(X) & \text{\textit{при}} \quad \operatorname{diam} X - d_m(X) \le \lambda \le d_m(X) \\ \lambda & \text{\textit{при}} \quad \lambda \ge d_m(X) \end{cases}$$

Еще один частный случай получается, если $d_m(X) = \operatorname{diam} X$, что случается в точности тогда, когда $\operatorname{diam} D = \operatorname{diam} X$ для всех $D \in \mathcal{D}_m(X)$.

Пример 3.12. Для каждого симплекса $X = \lambda\Delta$, кардинального числа $0 < m < \#\lambda\Delta$ и любого $D \in \mathcal{D}_m(X)$ имеем $\operatorname{diam} D = \lambda = \operatorname{diam} X$, поэтому $d_m(X) = \operatorname{diam} X$.

Пример 3.13. Пусть $X = S^1$ — стандартная единичная окружность на евклидовой плоскости, и $m = 2$. Тогда $d_m(X) = \operatorname{diam} X = 2$.

Действительно, предположим противное, т.е. существует $D = \{X_1, X_2\} \in \mathcal{D}_m(X)$ такое, что $\operatorname{diam} D < 2$. Для $x \in X$ через x' обозначим диаметрально противоположную x точку окружности X. Из сделанного предположения вытекает, что для каждого $x \in X_1$ точка x' лежит в X_2 и, значит, некоторая окрестность точки x принадлежит X_1. Таким образом, X_1 и, аналогично, X_2 являются непустьми открытыми подмножествами X, образующими разбиение, что противоречит связности X.

Следствие 3.14. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство, $m = \#\lambda\Delta \le \#X$, причем $d_m(X) = \operatorname{diam} X$, тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\{\operatorname{diam} X, \lambda - \alpha_m(X)\}.$$

В частности,

(1) *при* $\lambda \le \operatorname{diam} X + \alpha_m(X)$ *имеем* $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \operatorname{diam} X$;

(2) *при* $\lambda \ge \operatorname{diam} X + \alpha_m(X)$ *выполняется* $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \lambda - \alpha_m(X)$.

4 Расстояние между 2-пространствами

В этой части работы исследовано расстояние Громова-Хаусдорфа между конечными метрическими пространствами с двумя различными ненулевыми расстояниями (2-пространствами). Полученные результаты выражаются в терминах числа кликового покрытия для графов минимальных расстояний.

Утверждение 4.1. *Пусть X и Y — конечные метрические пространства с двумя расстояниями $a_1 \le b_1$ и $a_2 < b_2$, соответственно. И пусть $b_2 > b_1$. Определим граф G, как граф минимальных расстояний для Y. Тогда $2d_{GH} < b_2$, если и только если, $\theta(G) \le \#X$.*

Доказательство. Предположим, что $2d_{GH} < b_2$.

Тогда найдется такое соответствие R, для которого любой точке $x \in X$ ставится в соответствие клика $R(x)$. И так как R — соответствие, его каноническая проекция на Y сюръективна, поэтому совокупность клик $R(x_i)$ для всех $x_i \in X$ является кликовым покрытием. Из этого следует, что $\theta(G)$, как наименьшее, будет меньше или равно $\#X$.

Теперь докажем утверждение в другую сторону. Пусть $\theta(G) \le \#X$.

В этом случае каждой точке $x \in X$ можно поставить в соответствие какую-то из клик наименьшего кликового покрытия(разным точкам можно сопоставлять одну и ту же клику). Следовательно $2d_{GH} < b_2$, так как точки из Y на расстоянии b_2 соответствуют разным точкам из X. $\square$

Из этого утверждения естественным образом вытекает следствие.

Следствие 4.2. *Пусть X и Y — конечные метрические пространства с двумя расстояниями $a_1 \le b_1$ и $a_2 < b_2$, соответственно. И пусть $b_2 > b_1$. Определим граф G, как граф минимальных расстояний для Y. Тогда $2d_{GH} = b_2$, если и только если, $\theta(G) > \#X$.*

Доказательство. Пусть $2d_{GH} = b_2$. Предположим, что $\theta(G) \le \#X$, тогда, по предыдущему утверждению, $2d_{GH} < b_2$. Противоречие.

В другую сторону. Пусть $\theta(G) > \#X$. Предположим, что $2d_{GH} < b_2$, тогда, по предыдущему утверждению, $\theta(G) \le \#X$. Противоречие. $\square$

Рассмотрим теперь случай, когда $b_1 = b_2$. Для него верно аналогичное утверждение.

Утверждение 4.3. *Пусть X и Y — конечные метрические пространства с двумя расстояниями $a_1 < b_1$ и $a_2 < b_2$, соответственно. И пусть $b_2 = b_1$. Определим граф G_X, как граф минимальных расстояний для X, а G_Y, как граф минимальных расстояний для Y. Тогда $2d_{GH} < b_1 = b_2$, если и только если, $\theta(G_Y) \le \#X$ и $\theta(G_X) \le \#Y$.*

Доказательство. Пусть $2d_{GH} < b_1 = b_2$.

В этом случае найдется такое соответствие R, для которого любому $x \in X$ ставится в соответствие клика $R(x)$ из Y. Тогда в частности, получаем $\theta(G_Y) \le \#X$. Аналогично рассуждая в другую сторону, получим $\theta(G_X) \le \#Y$.

Пусть теперь $\theta(G_Y) \le \#X$ и $\theta(G_X) \le \#Y$.

Без ограничения общности мы можем считать, что $\theta(G_X) \le \theta(G_Y)$. Рассмотрим наименьшие кликовые покрытия для G_X и G_Y. По любому из этих покрытий мы можем построить кликовые разбиения C_X и C_Y той же мощности. А так как $\theta(G_Y) \le \#X$ и одноточечное множество тоже является кликой, мы можем подразбить C_X(полученое разбиение обозначим C'_X)

до количества элементов в C_Y. Таким образом мы имеем два кликовых разбиения $C'_X = \{X_1, ..., X_{\theta(G_Y)}\}$ и $C_Y = \{Y_1, ..., Y_{\theta(G_Y)}\}$. Они одинаковой мощности, значит существует биекция между их элементами. Тогда мы можем рассмотреть соответствие $\cup X_i \times Y_i$, искажение которого будет меньше $b_1 = b_2$, так как элементам каждой клики из разбиения C'_X соответствуют только элементы некоторой клики из C_Y. Получаем $2d_{GH} < b_1 = b_2$. □

Так же получаем следствие

Следствие 4.4. *Пусть X и Y — конечные метрические пространства с двумя расстояниями $a_1 < b_1$ и $a_2 < b_2$, соответственно. И пусть $b_2 = b_1$. Определим граф G_X, как граф минимальных расстояний для X, а G_Y, как граф минимальных расстояний для Y. Тогда $2d_{GH} = b_1 = b_2$, если и только если, $\theta(G_Y) > \#X$ или $\theta(G_X) > \#Y$.*

Доказательство. Пусть $2d_{GH} = b_1 = b_2$. Предположим, что $\theta(G_Y) \leq \#X$ и $\theta(G_X) \leq \#Y$, тогда, по предыдущему утверждению, $2d_{GH} < b_2$. Противоречие.

В другую сторону. Пусть $\theta(G_Y) > \#X$ или $\theta(G_X) > \#Y$. Предположим, что $2d_{GH} < b_1 = b_2$, тогда, по предыдущему утверждению, $\theta(G_Y) \leq \#X$ и $\theta(G_X) \leq \#Y$. Противоречие. □

В работе [6] была получена Теорема 1, которая описывает расстояние Громова-Хаусдорфа между конечным 2-пространстом и симплексом. Заметитм, что симплекс является предельным случаем 2-пространства, поэтому можно получить следствия некоторых из предыдущих утверждений, перенеся их на этот предельный случай. Посмотрим как будут согласовываться эти следствия с Теоремой 1.

Следствие 4.5. *Пусть $\lambda\Delta$ — конечный симплекс, а X — конечное метрическое пространство с двумя расстояниями $a < b$. И пусть $\lambda < b$. Определим граф G, как граф минимальных расстояний для X. Тогда $2d_{GH} < b$, если и только если, $\theta(G) \leq \#\lambda\Delta$.*

Следствие 4.6. *Пусть $\lambda\Delta$ — конечный симплекс, а X — конечное метрическое пространство с двумя расстояниями $a < b$. И пусть $\lambda < b$. Определим граф G, как граф минимальных расстояний для X. Тогда $2d_{GH} = b$, если и только если, $\theta(G) > \#\lambda\Delta$.*

Если применить наши условия к Теореме 1, из нее получится следующий результат.

Следствие 4.7. *Пусть X — конечное метрическое пространство с двумя ненулевыми расстояниями $a < b$, $n = \#X$, и $\lambda\Delta$ — симплекс, $m = \#\lambda\Delta$, $\lambda < b$. Обозначим через G граф с множеством вершин X и ребрами, состоящими из всех пар точек из X, находящихся на расстоянии a. Пусть $\theta := \theta(G)$ — его число кликового покрытия. Тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \begin{cases} b & \text{при } m < \theta, \\ < b & \text{при } m \geq \theta \end{cases}$$

Как можно увидеть, Следствия 4.5 и 4.6 полностью согласуются со Следствием 4.7, а значит и с Теоремой 1.

5 Заключение

В данной работе частично были расширены результаты статьи [8] на бесконечный случай. Полностью найдено расстояние Громова-Хаусдорфа между произвольным ограниченным метрическим пространством и произвольным симплексом с большим числом точек. Найдены формулы для вычисления искажений неприводимых соответствий, а также нахождения через них расстояния Громова-Хаусдорфа между ограниченным метрическим пространством и произвольным симплексом с не превосходящим числом точек. Для некоторых частных случаев вычислены явные значения. Также был найден ряд критериев для нахождения расстояния Громова-Хаусдорфа между двумя 2-пространствами и установлена их согласованность с результатами работы [6].

Список литературы

[1] Hausdorff, F. 1914, *Grundzuge der Mengenlehre*, Veit, Leipzig [reprinted by Chelsea in 1949].

[2] Edwards D.A. *"The Structure of Superspace." In: Studies in Topology*, Academic Press, 1975.

[3] Gromov M.L. *Structures metriques pour les varietes riemanniennes*, Textes mathematiques. Recherche (v. 1), CEDIC/Fernand Nathan, 1981.

[4] Gromov M.L. *Groups of Polynomial growth and Expanding Maps*, Publications mathematiques I.H.E.S., v. 53, 1981.

[5] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Geometry of Compact Metric Space in Terms of Gromov-Hausdorff Distances to Regular Simplexes*, ArXiv e-prints, arXiv:1607.06655.

[6] A.O.Ivanov, A.A.Tuzhilin *The Gromov-Hausdorff Distance between Simplexes and Two–Distance Spaces*, ArXiv e-prints, arXiv:1907.09942, 2019

[7] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Gromov–Hausdorff Distance, Irreducible Correspondences, Steiner Problem, and Minimal Fillings*, ArXiv e-prints, 1604.06116, 2016.

[8] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. *Geometry of Compact Metric Space in Terms of Gromov- Hausdorff Distances to Regular Simplexes*, ArXiv e-prints, arXiv:1607.06655, 2016.

[9] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[10] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова-Хаусдорфа: случай компактов.* Изд-во Попечительского совета мех-мат ф-та МГУ, Москва, 2017.

[11] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Isometry group of Gromov–Hausdorff space.* Matematicki Vesnik. — 2019. — Vol. 71, no. 1-2. — P. 123–154.

[12] Tuzhilin A.A. *Calculation of Minimum Spanning Tree Edges Lengths using Gromov–Hausdorff Distance.* ArXiv e-prints, arXiv:1605.01566, 2016.

[13] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Gromov–Hausdorff Distance, Irreducible Correspondences, Steiner Problem, and Minimal Fillings.* ArXiv e-prints, 1604.06116, 2016.

[14] O. R. Musin, *Spherical Two-Distant Sets*, J. of Comb. Theory, Ser. A, 116, 988 (2009).