ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА Дифференциальной геометрии и приложений

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

МЕТРИЧЕСКИЕ СЕГМЕНТЫ В КЛАССЕ ГРОМОВА–ХАУСДОРФА

Выполнила студентка
611 группы
Борисова Ольга Борисовна

____

подпись студента

Научный руководитель:
Профессор, д.ф.-м.н., Тужилин Алексей Августинович

____

подпись научного руководителя

Москва
2021 г.

Содержание

1 Введение

Расстояние Громова–Хаусдорфа — это величина, показывающая степень различия между двумя произвольными метрическими пространствами. Данное понятие тесно связано с расстоянием Хаусдорфа, впервые появившимся в 1914 году в книге Хаусдорфа «Теория множеств» [1]. Оно естественно определяет расстояние на непустых подмножествах некоторого метрического пространства и становится метрикой для замкнутых ограниченных подмножеств.

В 1981 Громов в своей работе [2] использовал изометричные вложения метрических пространств в одно общее метрическое пространство и рассматривал расстояние Хаусдорфа между их образами. Наименьшее возможное расстояние Хаусдорфа при таких вложениях принято называть расстоянием Громова–Хаусдорфа. Было доказано, что на метрических компактах, рассматриваемых с точностью до изометрии, данное расстояние является метрикой [3]. Независимо от Громова, шестью годами ранее, в работе Эдвардса [4] было введено эквивалентное расстояние между метрическими пространствами, но определенное несколько иным способом. Более подробный исторический обзор можно найти в работе [5].

Известно, что расстояние Громова–Хаусдорфа удовлетворяет неравенству треугольника, а на любых изометричных метрических пространствах равно нулю. Поэтому будем говорить о нем как о расстоянии между классами изометрии метрических пространств, вычисляя его на произвольном представителе класса (величина не зависит от выбора представителя). Так как на любом множестве можно определить метрику (например, положив равной 1 между любыми двумя различными элементами), семейство всех классов изометрии не могут образовать множество, по известному парадоксу Кантора. В данной работе мы будем использовать систему аксиом фон Неймана–Бернайса–Гёделя (NBG) теории множеств [6], чтобы корректно работать с такими семействами.

В теории NBG все объекты называются классами. Класс называют *множеством*, если существует класс, в котором этот класс является элементом. В противном случае класс называют *собственным классом*. Семейство всех множеств является собственным классом. Для классов стандартным образом определены операции отображения и декартова произведения. Таким образом, на собственном классе, как и на множестве, мы можем корректно задать функцию расстояния. Семейство классов изометрии метрических пространств (по приведенному выше замечанию) является собственным классом. Этот собственный класс с определенным на нём расстоянием Громова–Хаусдорфа — обобщенное псевдометрическое пространство, которое мы будем обозначать $\mathcal{GH}$. Пространство называют обобщенным псевдометрическим пространством, если определенная на его элементах функция расстояния удовлетворяет неравенству треугольника, но может принимать бесконечное значение и равняться нулю на паре не равных элементов.

В данной работе изучается класс элементов в пространства $\mathcal{GH}$, находящихся между двумя данными. А точнее, метрическое пространство $Z \in \mathcal{GH}$ лежит между $X, Y \in \mathcal{GH}$, если $d_{GH}(X, Z) + d_{GH}(Z, Y) = d_{GH}(X, Y)$, где $d_{GH}(\cdot)$ — обозначение расстояния Громова–Хаусдорфа. Класс всех таких Z называют *метрическим сегментом* и обозначают $[X, Y]$. Сегмент, у которого расстояние Громова–Хаусдорфа между концевыми точками равно нулю, называется *вырожденным*, иначе *невырожденным*.

В данной работе показано, что невырожденный метрический сегмент с непустой «внутренностью» (т.е. если в сегменте существует метрическое пространство с ненулевыми расстояниями до концевых точек) содержит в себе так много неизометричных метрических пространств, что уже является не множеством, а становится собственным классом. А именно, любое метрическое пространство с достаточно маленьким конечным диаметром является подпространством некоторого метрического пространства, лежащего в сегменте. Вырожденный сегмент является множеством.

При ограничении $\mathcal{GH}$ на множество компактных метрических пространств расстояние Громова–Хаусдорфа становится метрикой. Данное пространство называется *метрическим пространством Громова–Хаусдорфа* и обозначается $\mathcal{M}$. Геометрия этого пространства подробно описана в [3], [7]. В 2015 году А.О.Ивановым, Н.К.Николаевой и А.А.Тужилиным было доказано одно из важных свойств этой метрики — строгая внутренность [8], [9]. Это означает, что в метрическом пространстве Громова–Хаусдорфа любые две точки соединены кратчайшей геодезической, длина которой равна расстоянию между ее концами.

Особые кратчайшие геодезические, образованные с помощью оптимального соответствия (точное определение будет введено ниже) назовём R-геодезическими. Примеры применения техники соответствий, и в том числе оптимальных соответствий, встречаются во многих работах, например [10], [11] или [12]. Объединение всех R-геодезических, соединяющих $X, Y \in \mathcal{GH}$, называется *R-сегментом* и обозначается $[X, Y]_R$. В 2018 году Д. Клибус показала, что для $X, Y \in \mathcal{M}$ множество $[X, Y]_R \cap \mathcal{M}$ компактно [13]. В этом исследовании докажем, что для $X, Y \in \mathcal{M}$ невырожденный метрический сегмент $[X, Y] \cap \mathcal{M}$, рассматриваемый в метрическом пространстве Громова–Хаусдорфа, не является компактным множеством. А для

$X, Y \in \mathcal{GH}$ класс $[X, Y]_R$ — множество.

Вторая часть исследований заключается в изучении сохранения некоторых характеристик метрических пространств при переходе от концевой точки сегмента к внутренней. А именно, рассматриваются свойства компактности и плотности [16], где последнее, для метрических пространств с мощностью больше, чем континуум, является обобщением полной ограниченности. Было показано, что в R-сегменте внутренняя точка может быть компактом, только если и концевые пространства являются таковыми. И более общо, в случае бесконечных метрических пространств, если Z — внутренняя точка R-сегмента $[X, Y]_R$, то $\operatorname{den}(Z) = \max\{\operatorname{den}(X), \operatorname{den}(Y)\}$.

Для метрического сегмента в работе приведены два примера, в которых показана оценка снизу плотности метрических пространств, лежащих во внутренности сегмента, зависящая от плотности концевых пространств. Это прямолинейный сегмент $[X, \lambda X]$, где λ принадлежит ограниченному отрезку, а X имеет конечный диаметр, и сегмент, у которого концы — неизометричные симплексы с бесконечной мощностью.

Выражаю благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. профессору А.А. Тужилину, а также д.ф.-м.н. профессору А.О. Иванову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

2 Основные определения и предварительные результаты

Пусть X — произвольное множество. *Функцией расстояния* на X будем называть каждое симметричное отображение $d\colon X \times X \to [0, \infty]$, равное нулю на всех парах одинаковых элементов. Если d удовлетворяет неравенству треугольника, то отображение d называется *обобщенной псевдометрикой.* При выполнении условия $d(x, y) \neq 0$ для любых $x \neq y$, данное расстояние становится *обобщенной метрикой.* Если дополнительно справедливо неравенство $d(x, y) < \infty$ для любых $x, y \in X$, то это отображение назовем *метрикой* или *конечной метрикой*, чтобы подчеркнуть отличие от обобщенной метрики. Множество X с (обобщенной) (псевдо-)метрикой называется (*обобщенным*) (*псевдо-*)*метрическим пространством.*

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между точками $x, y \in X$ будем обозначать через $|xy|$. Иногда, для подчеркивания, о каком пространстве идет речь, будем добавлять нижний индекс $|xy|_X$. Для $x \in X$ и непустого $A \subset X$ положим $|xA| = \inf\bigl\{|xa| : a \in A\bigr\}$. Пусть $\mathcal{P}_0(X)$ — семейство всех непустых подмножеств X. Для $A, B \in \mathcal{P}_0(X)$

положим
$$d_H(A,B)=\max\bigl\{\sup_{a\in A}|aB|,\sup_{b\in B}|Ab|\bigr\}.$$
Величина $d_H(A,B)$ называется *расстоянием Хаусдорфа между A и B.*

Пусть $\mathcal{B}(X)\subset\mathcal{P}_0(X)$ — множество всех непустых ограниченных подмножеств X.

Предложение 2.1 ([3]). *Ограничение $d_H(A,B)$ на $\mathcal{B}(X)$ является псевдометрикой.*

Обозначим через $\mathcal{H}(X)\subset\mathcal{B}(X)$ множество всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств X.

Предложение 2.2 ([3]). *Ограничение $d_H(A,B)$ на $\mathcal{H}(X)$ является метрикой.*

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X',Y',Z'), состоящую из метрического пространства Z' и его двух подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X,Y). Положим
$$d_{GH}(X,Y)=\inf\bigl\{r:\exists\,(X',Y',Z'),\ d_H(X',Y')\le r\bigr\}.$$
Величина $d_{GH}(X,Y)$ называется *расстоянием Громова–Хаусдорфа между X и Y.*

Предложение 2.3 ([3]). *Расстояние Громова–Хаусдорфа удовлетворяет неравенству треугольника.*

Так как для любых изометричных метрических пространств расстояние Громова–Хаусдорфа равно нулю, будем считать изометричные пространства эквивалентными. Таким образом, расстояние Громова–Хаусдорфа определено на классах изометрии метрических пространств (оно не зависит от представителей классов). Заметим, что расстояние Громова–Хаусдорфа может принимать бесконечные значения, и также существуют примеры неизометричных ограниченно компактных метрических пространств, для которых $d_{GH}(X,Y)=0$, см. [3].

Семейство всех классов изометрии очень большое. Оно «не меньше» семейства всех множеств, так как на любом множестве мы можем задать метрику (например, положив расстояние 1 на всех парах различных точек). Из парадокса Кантора известно, что семейство всех множеств уже само не может быть множеством. В этой работе будем пользоваться аксиоматикой теории множеств фон Неймана–Бернайса–Гёделя (NBG) [6]. Напомним формулировки некоторых положений.

В NBG все объекты, аналоги привычных множеств, называются *классами*. Существует два вида классов: *множество* и *собственный класс*. Класс $\mathcal{A}$ называется *множеством*, если существует класс $\mathcal{C}$ такой, что $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$. Класс $\mathcal{A}$ называется *собственным классом*, если для каждого класса $\mathcal{C}$ верно $\mathcal{A} \notin \mathcal{C}$.

Предложение 2.4 ([6]). *Класс всех множеств является собственным классом.*

Для любых классов $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ определены операции $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ и $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ стандартным образом, поэтому мы можем говорить о функции расстояния на классах. Собственный класс всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, с расстоянием Громова–Хаусдорфа будем обозначать через $\mathcal{GH}$. Другим примером собственного класса является класс ограниченных метрических пространств, рассматриваемых с точность до изометрии. Этот класс с определенным на нем расстоянием Громова–Хаусдорфа будем обозначать через $\mathcal{B}$.

Предложение 2.5 ([3]). *Ограничение $d_{GH}(A, B)$ на $\mathcal{B}$ является псевдометрикой.*

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии.

Предложение 2.6 ([3]). *Ограничение $d_{GH}(A, B)$ на $\mathcal{M}$ является метрикой.*

Расстояние Громова–Хаусдорфа удобно изучать в терминах соответствий. Пусть X и Y — произвольные непустые множества. Положим $\mathcal{P}_0(X, Y) = \mathcal{P}_0(X \times Y)$. Элементы из $\mathcal{P}_0(X, Y)$ называются *отношениями между X и Y*.

Пусть $\pi_X\colon X \times Y \to X$ и $\pi_Y\colon X \times Y \to Y$ обозначают канонические проекции $\pi_X(x, y) = x$ и $\pi_Y(x, y) = y$. Отношение $\sigma \in \mathcal{P}_0(X, Y)$ называется *соответствием*, если ограничения π_X и π_Y на σ сюръективны. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X, Y)$.

Если X и Y — метрические пространства, то для каждого отношения $\sigma \in \mathcal{P}_0(X, Y)$ определено *искажение*

$$\operatorname{dis} \sigma = \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big| : (x, y),\ (x', y') \in \sigma\Big\}.$$

Предложение 2.7 ([3]). *Пусть X и Y — метрические пространства. Тогда*
$$d_{GH}(X,Y)=\frac{1}{2}\inf\bigl\{\operatorname{dis}R : R\in\mathcal{R}(X,Y)\bigr\}.$$

О расстоянии Громова–Хаусдорфа хорошо известны следующие факты, которые легко доказываются в том числе с помощью техники соответствий. Для произвольного метрического пространства X и числа $\lambda>0$ обозначим через λX метрическое пространство, которое отличается от X умножением всех расстояний на λ. Обозначим диаметр пространства X через $\operatorname{diam}X=\sup\bigl\{|ab| : a,b\in X\bigr\}$.

Предложение 2.8 ([3]). *Пусть X и Y метрические пространства. Тогда*

(1) *если X — одноточечное метрическое пространство, то $d_{GH}(X,Y)=\frac{1}{2}\operatorname{diam}Y$;*

(2) *если $\min\{\operatorname{diam}X,\operatorname{diam}Y\}<\infty$, то $d_{GH}(X,Y)\ge\frac{1}{2}|\operatorname{diam}X-\operatorname{diam}Y|$;*

(3) *$d_{GH}(X,Y)\le\frac{1}{2}\max\{\operatorname{diam}X,\operatorname{diam}Y\}$, в частности, для ограниченных X и Y имеем $d_{GH}(X,Y)<\infty$;*

(4) *для любых $\lambda>0$, $\mu>0$, если $\operatorname{diam}X<\infty$, то $d_{GH}(\lambda X,\mu X)=\frac{1}{2}|\lambda-\mu|\operatorname{diam}X$.*

Соответствие $R\in\mathcal{R}(X,Y)$ назовем *оптимальным*, если $d_{GH}(X,Y)=\frac{1}{2}\operatorname{dis}R$. Множество всех оптимальных соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}_{\text{opt}}(X,Y)$. Для $\varepsilon>0$ и метрических пространств X,Y, для которых $d_{GH}(X,Y)<\infty$, соответствие между X и Y назовем *ε-оптимальным*, если
$$\operatorname{dis}R-2d_{GH}(X,Y)<2\varepsilon.$$
Множество всех ε-оптимальных соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}_{\varepsilon\text{-opt}}(X,Y)$. Очевидно, что всегда $\mathcal{R}_{\varepsilon\text{-opt}}(X,Y)\ne\emptyset$. Соответствие называют *замкнутым*, если оно является замкнутым подмножеством $X\times Y$. Пусть $\mathcal{R}_c(X,Y)$ — множество всех замкнутых соответствий.

Предложение 2.9 ([9], [12]). *Для $X,Y\in\mathcal{M}$ имеем $\mathcal{R}_{\text{opt}}(X,Y)\cap\mathcal{R}_c(X,Y)\ne\emptyset$.*

Пусть X,Y — произвольные метрические пространства. При каждом $t\in(0,1)$ определим на $X\times Y$ функцию расстояния, положив
$$\bigl|(x,y)(x',y')\bigr|_t=(1-t)|xx'|+t|yy'|.$$

Предложение 2.10 ([9]). *Определенная выше функция $|\cdot|_t$ является метрикой при всех $t \in (0,1)$ на $X \times Y$.*

Для каждого $\sigma \in \mathcal{P}_0(X,Y)$, метрическое пространство $\bigl(\sigma, |\cdot|_t\bigr)$ обозначим через σ_t.

Предложение 2.11 ([9]). *Для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ и любого замкнутого $\sigma \in \mathcal{P}_0(X,Y)$ имеем $\sigma_t \in \mathcal{M}$ при каждом $t \in (0,1)$.*

Выберем произвольное $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ и доопределим семейство $R_t, t \in (0,1)$, в точках $t = 0, 1$, положив $R_0 = X$ и $R_1 = Y$.

Предложение 2.12 ([8], [9], [12], [14]). *Пусть X, Y — метрические пространства, для которых $d_{GH}(X,Y) < \infty$. Для произвольного соответствия $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ отображение $\gamma(t) = t \mapsto R_t, t \in [0,1]$, задает кривую в $\mathcal{GH}$, соединяющую X и Y. Если R — ε-оптимальное соответствие для некоторого $\varepsilon > 0$, то $|\gamma(t)| - d_{GH}(X,Y) < \varepsilon$. Если $R \in \mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y)$, то кривая $\gamma(t)$ является кратчайшей, причем ее длина равна $d_{GH}(X,Y)$.*

Предложение 2.13 ([14]). *Обобщенная псевдометрика Громова–Хаусдорфа на $\mathcal{GH}$ является внутренней.*

Предложение 2.14 ([8], [9], [12]). *Метрика пространства $\mathcal{M}$ — строго внутренняя.*

Пусть $\mathcal{A}$ — класс, наделенный обобщенной псевдометрикой, и $X, Y \in \mathcal{A}$. *Метрическим сегментом* или просто *сегментом* с концами X и Y назовём подкласс

$$[X,Y] = \bigl\{Z \in \mathcal{A} : |XZ| + |ZY| = |XY|\bigr\}.$$

Если $|XY| = 0$, то сегмент называют *вырожденным*, иначе *невырожденным*.

Пусть теперь $X, Y \in \mathcal{GH}$. Определим *R-сегмент* $[X,Y]_R \subset [X,Y]$ следующим образом: рассмотрим произвольное соответствие $R \in \mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y)$ (их может не быть) и пусть, как и выше, R_t — это R-геодезическая. Объединение всех таких R_t мы обозначим через $[X,Y]_R$.

Метрическое пространство Z будем называть *внутренней точкой сегмента (R-сегмента)*, если $Z \in [X,Y]$ $\bigl(Z \in [X,Y]_R\bigr)$ и при этом $d_{GH}(Z,X) > 0, d_{GH}(Z,Y) > 0$. Заметим, что для R-сегмента, по определению R-геодезической, это условие эквивалентно $Z \ne X, Y$. Объединение всех внутренних точек назовем *внутренностью* сегмента.

Предложение 2.15 ([13]). *Для любых $X, Y \in \mathcal{M}$, множество $[X,Y]_R \cap \mathcal{M}$ компактно.*

Пусть X — метрическое пространство и $\varepsilon > 0$. *Числом покрытия* $\operatorname{cov}(X, \varepsilon)$ называется наименьшее количество открытых шаров радиуса ε, которыми можно покрыть пространство X.

Следующее предложение называется *критерием Громова предкомпактности семейства метрических компактов.*

Предложение 2.16 ([3]). *Пусть C — непустое подмножество $\mathcal{M}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Существует число $D \geq 0$ и функция $N\colon (0, \infty) \to \mathbb{N}$ такие, что для всех $X \in C$ выполняется $\operatorname{diam} X \leq D$ и $\operatorname{cov}(X, \varepsilon) \leq N(\varepsilon)$.*

(2) *Семейство $C \subset \mathcal{M}$ предкомпактно.*

В данной работе мощность множества X или по-другому его кардинальное число (кардинал) будем обозначать через $\#X$. Напомним некоторые свойства кардинальных чисел.

Предложение 2.17 ([15]). *Класс всех кардинальных чисел является собственным классом.*

Два множества X, Y *равномощны* или *имеют одинаковое кардинальное число*, т.е. $\#X = \#Y$, если существует взаимно однозначное соответствие между X и Y. Говорят, что *кардинал множества X меньше кардинала множества Y*, и пишут $\#X < \#Y$, если существует биективное отображение X в U, где $U \subset Y$ и $U \neq Y$. Таким образом, на кардинальных числах определено отношение частичного порядка. Неравенство $\#X \leq \#Y$ обозначает, что либо $\#X < \#Y$, либо $\#X = \#Y$.

Предложение 2.18 (Теорема Кантора–Бернштейна–Шрёдера [6]). *Если для произвольных множеств X, Y верно $\#X \leq \#Y$ и $\#Y \leq \#X$, то $\#X = \#Y$.*

В данной работе мы будем принимать аксиому выбора построения теории множеств.

Класс называется *вполне упорядоченным*, если на нем установлено отношения порядка, и каждый его непустой подкласс имеет наименьший в смысле этого отношения элемент. Из определения следует, что во вполне упорядоченном классе любые два элемента сравнимы.

Предложение 2.19 (Принцип полного упорядочения [6]). *Всякое множество может быть вполне упорядочено.*

Опираясь на аксиому выбора, доказывается следующая теорема.

Предложение 2.20 ([15]). *Всякое множество кардинальных чисел с введенным выше отношением порядка является вполне упорядоченным.*

Обозначим мощность множества натуральных чисел через $\aleph_0$, а мощность множества действительных чисел через $\mathfrak{c}$.

Для кардинальных чисел определены арифметические операции. Пусть $\#X = m$ и $\#Y = n$. *Сумма* кардиналов m и n равна мощности множества $X \cup Y$ при условии $X \cap Y = \emptyset$. *Произведение* кардиналов m и n, имеющее обозначение $m \cdot n$, — это мощность множества $X \times Y$. Операция *возведения в степень* с обозначением n^m определена как мощность множества всех отображений из X в Y.

Предложение 2.21 ([16]). *Произведение или сумма двух кардинальных чисел, отличных от нуля, где хотя бы одно из них бесконечно, равно большему из них.*

Вернемся к метрическим пространствам.

Назовем *плотностью* метрического пространства X наименьшее такое кардинальное число m, что в пространстве X имеется всюду плотное подмножество мощности m. Обозначим плотность через $\operatorname{den}(X)$. Благодаря полной упорядоченности кардинальных чисел, минимальное по мощности всюду плотное подмножество всегда существует.

Предложение 2.22 ([16]). *Свойство "плотность $\le n$" является наследственным для метрических пространств. То есть свойство "плотность $\le n$" присуще каждому подпространству любого пространства X со свойством "плотность $\le n$".*

Предложение 2.23 ([16]). *При непрерывном отображении образ топологического пространства сохраняет свойство "плотность $\le n$".*

3 Сегмент как собственный класс и его не компактность в $\mathcal{M}$

Теорема 3.1. *Метрические пространства X и Y, удовлетворяющие условию $d_{GH}(X,Y) = 0$, имеют одинаковую плотность.*

Доказательство. Докажем неравенство $\operatorname{den}(X) \ge \operatorname{den}(Y)$, из которого будет следовать утверждение теоремы в силу симметричности формулировки относительно X и Y.

Пусть плотность X конечна. Тогда метрическое пространство X совпадает со своим всюду плотным подмножеством и $\#X = \operatorname{den}(X)$, то есть X конечно. Покажем от противного, что $\#X \ge \#Y$.

Пусть $\#X < \#Y$, тогда выберем $\#X + 1$ произвольных различных точек пространства Y и обозначим через ε минимальное расстояние между ними. Из условия $d_{GH}(X, Y) = 0$ по предложению 2.7 следует существование соответствия $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ такого, что $\operatorname{dis} R < \varepsilon$. Так как на R каноническая проекция $\pi_Y(x, y) = y$ сюрьективна, то существует пара точек $y_1, y_2 \in Y$ и точка $x \in X$, удовлетворяющие условиям $(x, y_1), (x, y_2) \in R$ и $|y_1y_2| \ge \varepsilon$. Но это противоречит условию $\operatorname{dis} R < \varepsilon$. Таким образом, $\operatorname{den}(X) = \#X \ge \#Y \ge \operatorname{den}(Y)$.

Пусть теперь плотность X бесконечна. Обозначим через $\widetilde{X}$ всюду плотное подмножество X такое, что $\#\widetilde{X} = \operatorname{den}(X)$. По предложению 2.7, для любого $n \in \mathbb{N}$ существует соответствие $R_{1/n} \in \mathcal{R}(X, Y)$, удовлетворяющее условию $\operatorname{dis} R_{1/n} < \frac{1}{n}$. Обозначим через $Y_{1/n}$ «однозначный образ» отображения $R_{1/n}(\widetilde{X})$, то есть

$$Y_{1/n} = \bigcup_{x \in \widetilde{X}} y_{1/n}(x),$$

где $y_{1/n}(x) \in Y$ — один произвольно выбранный элемент из образа $R_{1/n}(x)$. Тогда $\#Y_{1/n} \le \#\widetilde{X}$.

Покажем, что $\widetilde{Y} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(Y_{1/n})$ является всюду плотным подмножеством Y. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и $y \in Y$. Для натурального n, удовлетворяющему условию $\frac{\varepsilon}{2} > \frac{1}{n}$, выберем элемент x из прообраза $R_{1/n}^{-1}(y) = \{x \in X : (x, y) \in R_{1/n}\}$. Найдем элемент $\widetilde{x}$ из всюду плотного подмножества $\widetilde{X}$, для которого $|x\widetilde{x}| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для $\widetilde{y} = y_{1/n}(\widetilde{x}) \in Y_{1/n}$ получаем,

$$\big||x\widetilde{x}| - |y\widetilde{y}|\big| \le \operatorname{dis} R_{1/n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, существует $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$, для которого верно $|y\widetilde{y}| < \varepsilon$. Из арифметики кардинальных чисел следует, что

$$\#\widetilde{Y} \le \sum_{n=1}^{\infty} \#Y_{1/n} \le \aleph_0 \cdot \#\widetilde{X} = \max\{\aleph_0, \#\widetilde{X}\} \le \#\widetilde{X} = \operatorname{den}(X)$$

Тогда $\operatorname{den}(Y) \le \#\widetilde{Y} \le \operatorname{den}(X)$. $\square$

Следствие 3.2. *Для любого метрического пространства $X \in \mathcal{GH}$ класс $[X] := \{Z \in \mathcal{GH} : d_{GH}(X, Z) = 0\}$ является множеством. В частности, множеством является каждый вырожденный сегмент $[X, Y]$.*

Доказательство. Пусть для метрического пространства Z верно $Z \in [X]$. Тогда, по теореме 3.1, $\operatorname{den}(Z) = \operatorname{den}(X)$. Число элементов в метрическом пространстве не превосходит количества последовательностей из точек любого всюду плотного подмножества. Тогда $\#Z \le \operatorname{den}(Z)^{\aleph_0}$. Отметим также, что количество неизометричных метрических пространств с одинаковой мощностью m не превосходит $\mathfrak{c}^{m\cdot m}$, где $\mathfrak{c}$ — мощность множества вещественных чисел (континуум). Таким образом, получаем неравенство $\#[X] \le \mathfrak{c}^{m\cdot m}$, где $m = \operatorname{den}(Z)^{\aleph_0}$. Это означает, что $[X]$ — множество.

Так как вырожденный сегмент $[X, Y] = [X] = [Y]$, получаем, что любой вырожденный сегмент — множество. □

Следствие 3.3. *Пусть для $X, Y \in \mathcal{GH}$ сегмент $[X, Y]$ — невырожден, и для любого $Z \in [X, Y]$ верно, что либо $d_{GH}(X, Z) = 0$, либо $d_{GH}(Y, Z) = 0$. Тогда $[X, Y]$ — множество.*

Доказательство. По неравенству треугольника для расстояния Громова–Хаусдорфа любое метрическое пространство, находящееся на нулевом расстоянии до концевой точки сегмента, лежит в сегменте. Таким образом, $[X, Y]$ имеет следующий вид:

$$[X, Y] = [X] \cup [Y].$$

Из этого следует, что сегмент $[X, Y]$ — множество, как объединение двух множеств. □

В метрическом пространстве X замкнутый шар с центром в точке $x_0 \in X$ и радиусом $r > 0$ будем обозначать через $B_r(x_0)$. Чтобы подчеркнуть, в каком пространстве лежит шар, иногда будем добавлять верхний индекс. Таким образом, $B_r(x_0) = B_r^X(x_0) = \big\{x \in X : |xx_0| \le r\big\}$.

Для метрического пространства X и точки $x_0 \in X$ обозначим величину $\inf\big\{|xx_0| : x \in X, x \ne x_0\big\}$ через $S(x_0)$. Причем, если $X = x_0$, то $S(x_0) = +\infty$. Назовем точку $x_0 \in X$ *изолированной*, если $S(x_0) > 0$.

Теорема 3.4. *Пусть сегмент $[X, Y]$ невырожден для $X, Y \in \mathcal{GH}$. Пусть существует метрическое пространство $Z \in [X, Y]$ такое, что $d_{GH}(X, Z) > 0$ и $d_{GH}(Y, Z) > 0$. Тогда существует такое метрическое пространство $Z^* = Z \cup \{z^*\}$, где $z^* \in Z^*$ — изолированная точка, что $Z^* \in [X, Y]$, причем $d_{GH}(X, Z^*) = d_{GH}(X, Z)$, $d_{GH}(Y, Z^*) = d_{GH}(Y, Z)$.*

Доказательство. Построим необходимое метрическое пространство Z^*.

Зафиксируем произвольную точку $z_0 \in Z$ и произвольное конечное δ, где

$$0 < \delta < 2\min\big\{d_{GH}(X, Z), d_{GH}(Y, Z)\big\}.$$

Построим метрическое пространство $Z^* = Z \cup \{z^*\}$, сохранив расстояние между точками $z \in Z$ и определив расстояние до точки z^* следующим образом:

$$|z^*z|_{Z^*} = \begin{cases} \delta & \text{при } z \in Z \cap B^Z_\delta(z_0), \\ |z_0z|_Z & \text{при } z \in Z \setminus B^Z_\delta(z_0), \\ 0 & z = z^*. \end{cases}$$

Убедимся, что данная функция является метрикой. Для этого достаточно проверить неравенство треугольника для z_1, z_2, z^*, где $z_1, z_2 \in Z$, так как остальные аксиомы очевидно выполняются.

Рассмотрим различные случаи расположения точек z_1, z_2.

Пусть $z_1, z_2 \in Z \cap B^Z_\delta(z_0)$, тогда треугольник равнобедренный и

$$|z^*z_1|_{Z^*} \leq |z^*z_2|_{Z^*} + |z_2z_1|_{Z^*},$$

$$|z_1z_2|_{Z^*} = |z_1z_2|_Z \leq |z_1z_0|_Z + |z_0z_2|_Z \leq 2\delta = |z_1z^*|_{Z^*} + |z^*z_2|_{Z^*}.$$

Если же $z_1, z_2 \in Z \setminus B^Z_\delta(z_0)$, то расстояния между z_1, z_2, z^* соответственно равны расстояниям в Z между z_1, z_2, z_0. В последнем случае $z_1 \in Z \setminus B^Z_\delta(z_0)$, а $z_2 \in Z \cap B^Z_\delta(z_0)$, тогда

$$|z^*z_1|_{Z^*} = |z_0z_1|_Z \leq |z_0z_2|_Z + |z_2z_1|_Z \leq |z^*z_2|_{Z^*} + |z_2z_1|_{Z^*},$$

$$|z^*z_2|_{Z^*} = \delta \leq |z^*z_1|_{Z^*} \leq |z^*z_1|_{Z^*} + |z_1z_2|_{Z^*},$$

$$|z_1z_2|_{Z^*} = |z_1z_2|_Z \leq |z_1z_0|_Z + |z_0z_2|_Z \leq |z_1z^*|_{Z^*} + |z^*z_2|_{Z^*}.$$

Таким образом, $Z^* \in \mathcal{GH}$.

Далее, докажем, что $d_{GH}(X, Z^*) \leq d_{GH}(X, Z)$. Рассмотрим произвольное соответствие $R \in \mathcal{R}(X, Z)$ и построим по нему соответствие $R^* = R \cup \big(R^{-1}(z_0) \times \{z^*\}\big) \in \mathcal{R}(X, Z^*)$, где $R^{-1}(z_0) = \big\{x \in X : (x, z_0) \in R\big\}$. Подсчет искажения R^* разобьем на три части:

$$r_1 = \sup\Big\{\big||xx'| - |zz'|\big| : (x, z), (x', z') \in R^*; z, z' \in Z\Big\},$$

$$r_2 = \sup\Big\{\big||xx'| - |zz^*|\big| : |zz_0| > \delta; (x, z) \in R^*; x' \in R^{-1}(z_0)\Big\},$$

$$r_3 = \sup\Big\{\big||xx'| - |zz^*|\big| : |zz_0| \leq \delta; (x, z) \in R^*; x' \in R^{-1}(z_0)\Big\}.$$

Тогда $\operatorname{dis} R^* = \max\{r_1, r_2, r_3\}$. Оценим r_i сверху.

По построению соответсвия R^*, имеем $r_1 = \operatorname{dis} R$.

Так как в r_2 верно $|zz_0| > \delta$, то $|zz^*| = |zz_0|$ и

$$r_2 = \sup\Big\{\big||xx'| - |zz_0|\big| : |zz_0| > \delta; (x,z), (x', z_0) \in R\Big\} \le \operatorname{dis} R.$$

Теперь рассмотрим произвольные x, x', z из определения множества, по которому берется sup в определении r_3. Если $0 \le |xx'| - |zz^*|$, то

$$|xx'| - |zz^*| \le |xx'| - |zz_0| \le \operatorname{dis} R.$$

В противном случае,

$$0 < |zz^*| - |xx'| \le \delta \le 2d_{GH}(X, Z) \le \operatorname{dis} R,$$

поэтому и $r_3 \le \operatorname{dis} R$.

Таким образом,

$$\operatorname{dis} R^* \le \operatorname{dis} R.$$

Из этого неравенства и предложения 2.7 следует, что

$$d_{GH}(X, Z^*) \le d_{GH}(X, Z).$$

Аналогично доказывается

$$d_{GH}(Y, Z^*) \le d_{GH}(Y, Z).$$

Тогда из неравенства треугольника для расстояния Громова–Хаусдорфа следует оценка

$$d_{GH}(X, Z^*) + d_{GH}(Z^*, Y) \ge d_{GH}(X, Y) = d_{GH}(X, Z) + d_{GH}(Z, Y).$$

Тогда

$$d_{GH}(X, Z^*) - d_{GH}(X, Z) \ge d_{GH}(Z, Y) - d_{GH}(Z^*, Y) \ge 0.$$

Поэтому $d_{GH}(X, Z^*) = d_{GH}(X, Z)$. И аналогично показывается, что $d_{GH}(Y, Z^*) = d_{GH}(Y, Z)$.

Таким образом, метрическое пространство Z^* лежит во внутренности сегмента $[X, Y]$. $\square$

Пусть Z, Z^* — метрические пространства и $z^* \in Z$. Назовем W *пространством, полученным путем замены z^* на Z^**, если W это множество, равное $W = Z^* \sqcup Z \setminus \{z^*\}$, на котором определена функция расстояния:

$$|w_1 w_2|_W = \begin{cases} |w_1 w_2|_Z & \text{при } w_1, w_2 \in Z \setminus \{z^*\}, \\ |w_i z^*|_Z & \text{при } w_i \in Z, w_{3-i} \in Z^*, i \in \{1, 2\}, \\ |w_1 w_2|_{Z^*} & \text{при } w_1, w_2 \in Z^*. \end{cases}$$

Теорема 3.5. *Пусть сегмент $[X,Y]$ невырожден для некоторых $X, Y \in \mathcal{GH}$. Пусть во внутренности сегмента существует метрическое пространство Z с изолированной точкой z^*. Тогда для любого метрического пространства Z^*, у которого $\operatorname{diam} Z^* < 2\min\bigl\{d_{GH}(X,Z), d_{GH}(Z,Y), S(z^*)\bigr\}$, метрическое пространство W, полученное путем замены z^* на Z^*, также лежит в сегменте. При этом $d_{GH}(X,W) = d_{GH}(X,Z)$, $d_{GH}(Y,W) = d_{GH}(Y,Z)$.*

Доказательство. Докажем корректность формулировки теоремы, а именно, что W действительно является метрическим пространством. Достаточно проверить неравенство треугольника для различных точек W, так как аксиомы положительной определенности и симметрии очевидны. Если все три точки w_1, w_2, w_3 лежат в $Z \setminus \{z^*\}$ или же $w_i \in Z^*$, где $i \in \{1,2,3\}$, то неравенство треугольника сохраняется. Если $w_1, w_2 \in Z \setminus \{z^*\}$, а $w_3 \in Z^*$, то расстояния между этими точками соответственно равны расстояниям между $w_1, w_2, z^* \in Z$, значит опять неравенство выполняется. Если же $w_1 \in Z \setminus \{z^*\}$, а $w_2, w_3 \in Z^*$, то

$$|w_2w_3|_W \le \operatorname{diam} Z^* < 2S(z^*) \le 2|z^*w_1|_Z = |w_2w_1|_W + |w_1w_3|_W,$$

$$|w_1w_2|_W = |w_1z^*|_Z < |w_1z^*|_Z + |w_2w_3|_{Z^*} = |w_1w_3|_W + |w_3w_2|_W.$$

Аналогично с $|w_1w_3|_W$.

Докажем, что $d_{GH}(X,W) \le d_{GH}(X,Z)$.

Рассмотрим произвольное соответствие $R \in \mathcal{R}(X,Z)$ и построим по нему соответствие $V \in \mathcal{R}(X,W)$ следующим образом. Положим $(x,w) \in V$ тогда и только тогда, когда $w \in Z \setminus \{z^*\}$ и $(x,w) \in R$, либо $w \in Z^*$ и $(x,z^*) \in R$.

Посчитаем искажение V:

$$\operatorname{dis} V = \sup\Bigl\{\bigl||xx'| - |ww'|\bigr| : (x,w),(x',w') \in V\Bigr\}.$$

Рассмотрим два случая разбиения на пары элементов V. Пусть

$$v_1 = \sup\Bigl\{\bigl||xx'| - |ww'|\bigr| : (x,w),(x',w') \in V; w \in Z \setminus \{z^*\}, w' \in W\Bigr\},$$

$$v_2 = \sup\Bigl\{\bigl||xx'| - |ww'|\bigr| : (x,w),(x',w') \in V; w, w' \in Z^*\Bigr\}.$$

Тогда $\operatorname{dis} V = \max\{v_1, v_2\}$.

Для каждой пары $(x,w),(x',w') \in V$ из построения v_1 существует пара $(x,z),(x',z') \in R$, где $z, z' \in Z$ и $|ww'|_W = |zz'|_Z$, поэтому $v_1 \le \operatorname{dis} R$.

Оценим сверху v_2. Перепишем v_2 в эквивалентном виде, пользуясь тем, что $|ww'|_W = |ww'|_{Z^*}$ для $w, w' \in Z^*$, и определением соответствия V:

$$v_2 = \sup\Big\{\big||xx'| - |ww'|_{Z^*}\big| : (x, z^*), (x', z^*) \in R, w, w' \in Z^*\Big\}.$$

Так как $\operatorname{diam} Z^* < 2d_{GH}(X, Z)$ имеем $|ww'|_{Z^*} < 2d_{GH}(X, Z) \le \operatorname{dis} R$. Также для произвольных $x, x' \in X$ таких, что $(x, z^*), (x', z^*) \in R$, верно

$$|xx'| \le \operatorname{dis} R,$$

поэтому модуль разности величин $|xx'|$, $|ww'|_{Z^*}$ и сама величина v_2 тоже не превосходит $\operatorname{dis} R$.

Таким образом, доказано, что $\operatorname{dis} V = \max\{v_1, v_2\} \le \operatorname{dis} R$.

Из этого неравенства и предложения 2.7 следует, что

$$d_{GH}(X, W) \le d_{GH}(X, Z).$$

Аналогично доказывается неравенство $d_{GH}(Z, Y) \ge d_{GH}(W, Y)$.

Покажем теперь, что $d_{GH}(X, W) \ge d_{GH}(X, Z)$. Из неравенства треугольника для расстояния Громова–Хаусдорфа получаем оценку

$$d_{GH}(X, W) + d_{GH}(W, Y) \ge d_{GH}(X, Y) = d_{GH}(X, Z) + d_{GH}(Z, Y).$$

Тогда

$$d_{GH}(X, W) - d_{GH}(X, Z) \ge d_{GH}(Z, Y) - d_{GH}(W, Y) \ge 0.$$

Поэтому $d_{GH}(X, W) \ge d_{GH}(X, Z)$. Аналогично показывается, что $d_{GH}(Y, W) \ge d_{GH}(Y, Z)$.

Таким образом, метрическое пространство W лежит в сегменте $[X, Y]$, причем $d_{GH}(X, W) = d_{GH}(X, Z)$ и $d_{GH}(Y, W) = d_{GH}(Y, Z)$.

$\square$

Метрическое пространство X назовем *симплексом*, если все его ненулевые расстояния одинаковы. Заметим, что симплекс X компактен, если и только если он конечен. Симплекс, имеющий n вершин, расстояния между которыми равны λ, обозначим через $\lambda\Delta_n$.

Следствие 3.6. *Пусть у невырожденного сегмента $[X, Y]$, где $X, Y \in \mathcal{GH}$, существует внутренняя точка Z. Тогда сегмент $[X, Y]$ — собственный класс.*

Доказательство. По теореме 3.4 и теореме 3.5, в сегменте $[X, Y]$ лежат метрические пространства вида $W(m) = \widetilde{Z} \sqcup \mu\Delta_m$, где $\widetilde{Z}$ — метрическое пространство, а m — произвольное кардинальное число, для некоторого $\mu > 0$. Класс кардинальных чисел, удовлетворяющих условию $m \le \#\widetilde{Z}$, является множеством, потому что их количество не превосходит кардинала $\#\mathcal{P}_0(\widetilde{Z})$. Так как объединение двух множеств является множеством, от противного получаем, что класс $\mathcal{A} = \{m - \text{кардинал} : m > \#\widetilde{Z}\}$ — собственный класс. Построим сюръективное отображение сегмента $[X, Y]$ на собственный класс $\mathcal{A}$. Метрические пространства $W(m)$, где $m > \#\widetilde{Z}$, отобразим в соответствующий кардинал $m \in \mathcal{A}$, а все остальные точки сегмента — в кардинал $\#\mathcal{P}_0(\widetilde{Z})$. Таким образом, сегмент «не меньше», чем собственный класс, поэтому и сам является собственным классом. $\square$

Следствие 3.7. *Пусть X, Y — неизометричные компактные метрические пространства. Тогда сегмент $[X, Y] \cap \mathcal{M}$ не является компактом.*

Доказательство. По предложению 2.14, сегмент $[X, Y]$ всегда содержит компактное метрическое пространство Z, лежащее на ненулевых расстояниях от X, Y. Тогда, по теореме 3.4 и теореме 3.5, в сегменте лежит компактное метрическое пространство $W(m) = \widetilde{Z} \sqcup \mu\Delta_m$ для некоторого $\mu > 0$, некоторого метрического пространства $\widetilde{Z}$ и произвольного $m \in \mathbb{N}$. Но для $0 < \varepsilon < \frac{\mu}{2}$ число покрытия $\operatorname{cov}\big(W(m), \varepsilon\big)$ не меньше m, так как каждый открытый шар радиуса ε может покрыть не более одной точки из $\mu\Delta_m \subset W(m)$. Таким образом, для $\big\{W(m)\big\}_{m=1}^{\infty} \subset [X, Y]$ не существует функции $N\colon (0, \infty) \to \mathbb{N}$ такой, что для любого $m \in \mathbb{N}$ выполнялось бы неравенство $\operatorname{cov}\big(W(m), \varepsilon\big) \le N(\varepsilon)$. Тогда, по предложению 2.16, метрический сегмент $[X, Y] \cap \mathcal{M}$ не является предкомпактом и тем более компактом. $\square$

Теорема 3.8. *Пусть $X, Y \in \mathcal{GH}$ — произвольные непустые метрические пространства. Тогда R-сегмент $[X, Y]_R$ является множеством.*

Доказательство. Количество оптимальных соответствий между X и Y не превосходит $\#\mathcal{P}_0(X \times Y)$. Тогда мощность R-сегмента удовлетворяет неравенству $[X, Y]_R \le \#\mathcal{P}_0(X \times Y) \times \mathfrak{c}$. $\square$

4 Компактность и плотность внутренних точек сегмента

Теорема 4.1. *Пусть X, Y два метрических пространства и $\sigma \in \mathcal{P}_0(X, Y)$. Тогда при произвольном $t \in (0, 1)$ проекция метрического про-*

странства σ_t на X, равная $\pi_X(x,y) = x$, является $\frac{1}{1-t}$-липшицевой, а проекция σ_t на Y, равная $\pi_Y(x,y) = y$, является $\frac{1}{t}$-липшицевой.

Доказательство. Пусть $(x,y),(x',y') \in \sigma_t$ две произвольные точки метрического пространства. Тогда липшицевость следует из следующих неравенств:

$$|\pi_X(x,y)\pi_X(x',y')|_X = |xx'|_X \le |xx'| + \frac{t}{1-t}|yy'| = \frac{1}{1-t}|(x,y)(x',y')|_{\sigma_t},$$

$$|\pi_Y(x,y)\pi_Y(x',y')|_Y = |yy'|_Y \le \frac{1-t}{t}|xx'| + |yy'| = \frac{1}{t}|(x,y)(x',y')|_{\sigma_t}.$$

□

Для метрического пространства $\mathcal{M}$ удобней рассматривать подмножество R-сегмента $[X,Y]_{R_c} \subset [X,Y]_R$, состоящее из объединения всех R-геодезических, где $R \in \mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y) \cap \mathcal{R}_c(X,Y)$.

Следствие 4.2. *Пусть во внутренности R-сегмента $[X,Y]_R$, где $X,Y \in \mathcal{GH}$, лежит компактное метрическое пространство Z. Тогда $[X,Y]_{R_c} \subset \mathcal{M}$.*

Доказательство. По определению R-сегмента Z равно метрическому пространству R_t, где $R \in \mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y)$, а $t \in (0,1)$. Тогда, по теореме 4.1 и свойству сохранения компактности при непрерывном отображении, X и Y — компактные пространства. Следовательно, по предложению 2.11, сегмент $[X,Y]_{R_c}$ целиком лежит в $\mathcal{M}$. □

Замечание. При пересечении R-сегмента с $\mathcal{M}$ не по внутренней точке приведенное выше следствие будет неверным. Например, $X \in \mathcal{M}$ — одноточечное метрическое пространство, а Y — счетный симплекс. Тогда все пространства вида tY, где $t \in (0,1)$, лежат в $[X,Y]_R$, но не являются компактными.

Следствие 4.3. *Пусть Z — внутренняя точка сегмента $[X,Y]_R$, и известно, что хотя бы одно метрическое пространство Z,X,Y бесконечно. Тогда* $\operatorname{den}(Z) = \max\bigl\{\operatorname{den}(X), \operatorname{den}(Y)\bigr\}$.

Доказательство. Пусть пространство Z имеет вид R_t, где $R \in \mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y)$, а $t \in (0,1)$.

Докажем неравенство $\operatorname{den}(Z) \le \operatorname{den}(X)\operatorname{den}(Y)$. Пусть $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ плотные подмножества X, Y соответственно. Для метрического пространства $\bigl(X \times Y, |\cdot|_t\bigr) = (X\times Y)_t$, подмножество $\widetilde{X}\times\widetilde{Y}$ будет всюду плотным, так как для любого $\varepsilon > 0$ и любой точки $(x, y) \in (X \times Y)_t$ существуют $x' \in \widetilde{X}$ и $y' \in \widetilde{Y}$ такие, что $|xx'|_X < \frac{\varepsilon}{2(1-t)}$ и $|yy'|_Y < \frac{\varepsilon}{2t}$, откуда

$$|(x,y)(x',y')| = (1-t)|xx'| + t|yy'| < (1-t)\frac{\varepsilon}{2(1-t)} + t\frac{\varepsilon}{2t} < \varepsilon.$$

Из этого следует, что $\operatorname{den}\big((X \times Y)_t\big) \leq \operatorname{den}(X)\operatorname{den}(Y)$. Но метрическое пространство Z является подмножеством $(X \times Y)_t$, а по предложению 2.22, плотность подмножества метрического пространств не больше плотности самого метрического пространства. Поэтому $\operatorname{den}(Z) \leq \operatorname{den}(X)\operatorname{den}(Y)$. У бесконечных метрических пространств плотность бесконечна. Тогда из арифметики кардинальных чисел $\operatorname{den}(X)\operatorname{den}(Y) = \max\big\{\operatorname{den}(X), \operatorname{den}(Y)\big\}$.

По предложению 2.23, при непрерывном отображении сохраняется свойство $\operatorname{den}(\cdot) \leq n$, где n — кардинал. Тогда, из теоремы 4.1 следует, что $\operatorname{den}(Z) \geq \max\big\{\operatorname{den}(X), \operatorname{den}(Y)\big\}$. □

Замечание. Для конечных пространств приведенное утверждение будет верно, если ограничить построение геодезических только на неприводимые соответствия. В ином случае можно привести пример, противоречащий следствию. Так, для метрических пространств $X = 2\Delta_3$ и $Y = \Delta_2$ соответсвие $X \times Y$ будет оптимальным, и для внутренней точки симплекса $Z = (X \times Y)_t$, где $t \in (0, 1)$, имеем $\operatorname{den}(Z) = \operatorname{den}(X)\operatorname{den}(Y)$.

Множество X называется *ε-разделенным*, если расстояние между любыми двумя различными точками больше либо равно ε.

Предложение 4.4. *Пусть в метрическом пространстве X лежит ε-разделенное подмножество $X_A = \{x_a\}_{a \in A}$, где $\varepsilon > 0$. И пусть в метрическом пространстве Y для любого подмножества $\{y_a\}_{a \in A}$, индексируемого тем же множеством A, верно:*

$$\inf_{a,b \in A, a \neq b} |y_a y_b| = 0.$$

Тогда $2d_{GH}(X, Y) > \varepsilon$.

Доказательство. Возьмем произвольное соответствие $R \in \mathcal{R}(X, Y)$. Для $x_a \in X_A$ обозначим через y_a произвольный элемент Y такой, что $(x_a, y_a) \in R$. Тогда из условия $\inf\limits_{a,b \in A, a \neq b} |y_a y_b| = 0$ и $|x_a x_b| \geq \varepsilon$ имеем

$$\operatorname{dis} R \geq \sup_{a,b \in A} \big||x_a x_b| - |y_a y_b|\big| \geq \varepsilon.$$

Из произвольности соответствия R следует, что $2d_{GH}(X, Y) \geq \varepsilon$. □

Следствие 4.5. *Пусть в метрическом пространстве X с $\operatorname{diam} X < \infty$ существует ε-разделенное подмножество мощности $n > 1$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда, при $\lambda \in (1, 1 + \frac{2\varepsilon}{\operatorname{diam} X - \varepsilon})$, если $\varepsilon \neq \operatorname{diam} X$, и при $\lambda > 1$, если $\varepsilon = \operatorname{diam} X$, у метрического пространства $Z \in [X, \lambda X]$ плотность $\operatorname{den}(Z) \geq n$. Если n – бесконечное, то дополнительно $[X, \lambda X] \cap \mathcal{M} = \emptyset$.*

Доказательство. Докажем от противного. Пусть у метрического пространства $Z \in [X, \lambda X]$ плотность меньше, чем n. Тогда для любого подмножества $\{z_a\}_{a \in A}$, где $\#A = n$, имеем $\inf\big\{|z_a z_b| : a, b \in A, a \neq b\big\} = 0$. Последнее утверждение следует из свойства: мощность ε-разделенного подмножества для некоторого положительного ε не больше плотности. Если же Z — компакт, а n — счетно, то опять $\inf\big\{|z_a z_b| : a, b \in A, a \neq b\big\} = 0$, вытекающее из существования сходящийся подпоследовательности у любой бесконечной последовательности в компактном пространстве. Отсюда, по предложению 4.4, в обоих случаях получаем неравенства $2d_{GH}(X, Z) \geq \varepsilon$ и $2d_{GH}(\lambda X, Z) \geq \lambda\varepsilon$. А величина $2d_{GH}(X, \lambda X) = \operatorname{diam} X|\lambda - 1|$ по предложению 2.8. Тогда

$$2d_{GH}(X, Z) + 2d_{GH}(Z, \lambda X) \geq \varepsilon(1 + \lambda) > \operatorname{diam} X(\lambda - 1) = 2d_{GH}(X, \lambda X).$$

Пришли к противоречию. □

Замечание. Если для метрического пространства X неверно условие полной ограниченности, то для некоторого $\varepsilon > 0$, не существует конечной ε-сети. Тогда максимальное (по числу точек) ε-разделенное подмножество не может быть конечным, так как в таком случае оно было бы и конечной ε-сетью. Поэтому в любом метрическом пространстве, не являющимся вполне ограниченным, существует бесконечное ε-разделенное подмножество для некоторого $\varepsilon > 0$.

Можно привести пример существования компактного метрического пространства при нарушении неравенства в следствии 4.5. Пусть метрическое пространство $X = \frac{1}{3}\Delta_n \cup \{x\}$, где n — бесконечно, а расстояние от произвольной точки симплекса $\frac{1}{3}\Delta_n$ до x равно 1. Заметим, в X лежит $\frac{1}{3}$-разделенное подмножество. Тогда пусть $\lambda = 1 + \frac{2 * \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2$. Можно проверить, что в сегменте $[X, 2X]$ лежит компактное двухточечное метрическое пространство $(1 + \frac{1}{3})\Delta_2$.

Следствие 4.6. *Пусть n, m — бесконечные кардинальные числа и сегмент $[a\Delta_n, b\Delta_m]$ невырожденный. Тогда $[a\Delta_n, b\Delta_m] \cap \mathcal{M} = \emptyset$, и для любой внутренней точки сегмента $Z \in [a\Delta_n, b\Delta_m]$ верно $\operatorname{den}(Z) \geq \min\{n, m\}$.*

Доказательство. Исходя из техники соответствий, расстояние $d_{GH}(a\Delta_n, b\Delta_n)$ может равняться одной из следующих величин $\frac{|a-b|}{2}, \frac{a}{2}, \frac{b}{2}$. Пусть Z — компактное метрическое пространство и/или $\mathrm{den}(Z) < \min\{n, m\}$. Из предложения 4.4 получаем неравенство

$$2d_{GH}(a\Delta_n, Z)+2d_{GH}(Z, b\Delta_m) \geq a+b > \max\big\{a, b, |a-b|\big\} \geq 2d_{GH}(a\Delta_n, b\Delta_m).$$

□

5 Заключение

Таким образом, мы показали, что в классе Громова–Хаусдорфа метрический сегмент, в котором есть хотя бы один элемент, лежащий на ненулевых расстояниях до концевых точек сегмента, — собственный класс. В противном случае, метрический сегмент является множеством. При ограничении класса Громова–Хаусдорфа на компактные метрические пространства невырожденный метрический сегмент всегда является не компакнтым множеством. Также приведены примеры, показывающие, что существует связь между компактностью и/или плотностью концевых и внутренних точек сегмента.

Список литературы

[1] Hausdorff F. Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig: Veit, 1914 [reprinted by Chelsea in 1949].

[2] Gromov M. Groups of Polynomial growth and Expanding Maps. // В сборнике: Publications Mathematiques Paris: I.H.E.S., Vol. 53, 1981.

[3] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. Курс метрической геометрии. Москва – Ижевск: Изд-во Института компьютерных исследований, 2004. — 496 с.

[4] Edwards D. The Structure of Superspace. // В сборнике: Studies in Topology, ed. by Stavrakas N. M. and Allen K. R., New York London San Francisco: Academic Press, Inc., 1975.

[5] Tuzhilin A. A. Who Invented the Gromov–Hausdorff Distance? // ArXiv e-prints. 2017. arXiv:1612.00728.

[6] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. / Мендельсон Э.; пер. с англ. Ф.А. Кабакова под ред. С.И. Адяна. 2-ое из., исправленное. Москва, из. «Наука» гл. ред. физ-мат. лит., 1976. — 320 с.

[7] Иванов А. О., Тужилин А. А. Геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа: случай компактов. М.: Изд-во Попечительского совета мех-мат ф-та МГУ, 2017. — 111 с.

[8] Иванов А. О., Николаева Н. К., Тужилин А. А. Метрика Громова–Хаусдорфа на пространстве метрических компактов — строго внутренняя. // Матем. заметки. 2016. Т. 100, № 6. С. 947–950 (arXiv:1504.03830).

[9] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A., Realizations of Gromov–Hausdorff Distance. // ArXiv e-prints, 2016. arXiv:1603.08850.

[10] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A., Hausdorff realization of linear geodesics of Gromov–Hausdorff space. // ArXiv e-prints. 2019. arXiv: 1904.09281.

[11] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Isometry group of Gromov–Hausdorff space. // Matematicki Vesnik. 2019. Vol. 71, № 1–2. P. 123–154.

[12] Memoli F. On the Use of Gromov–Hausdorff Distances for Shape Comparison. // В сборнике: Proceedings of Point Based Graphics 2007,

Ed. by Botsch M., Pajarola R., Chen B., and Zwicker M., The Eurographics Association, Prague, 2007, pp. 81–90.

[13] Клибус Д.П. Курсовая работа. Компактная выпуклость шаров в пространстве Громова–Хаусдорфа. [Электронный ресурс]. / Сайт кафедры дифф.геом. и прилож. мех-мата МГУ: Москва: 2018. — Режим доступа: `http://dfgm.math.msu.su/files/0students/2018-kr5-klibus.pdf`, свободный.

[14] Borzov S.I., Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Extendability of Metric Segments in Gromov-Hausdorff Distance. // ArXiv e-prints. 2020. arXiv:2009.00458.

[15] John L. Kelley. General topology. / D. van Nostrand Company, Inc., New York, Toronto, and London, 1955.

[16] Энгелькинг Р. Общая топология. / пер. с англ. М. Я. Антоновского и А.В. Архангельского. Москва: Мир, 1986. — 752 с.