

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ПРИЛОЖЕНИЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
магистра

**ТОПОЛОГИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ БИЛЛИАРДОВ НА
ПЛОСКОСТИ МИНКОВСКОГО С ГУКОВСКИМ
ПОТЕНЦИАЛОМ**

Выполнил студент
группы М2 магистратуры
Скворцов Антон Игоревич

подпись студента

Научный руководитель:
академик РАН, зав. кафедрой
Фоменко Анатолий Тимофеевич

подпись научного руководителя

Соруководитель:
ассистент, кандидат физ.-мат. наук
Ведюшкина Виктория Викторовна

подпись соруководителя

Москва
2020 г.

Содержание

1	Введение	3
1.1	Интегрируемые бильярды	3
1.2	Постановка задачи	4
2	Основные определения и теоремы	6
2.1	Симплектические многообразия	6
2.2	Вполне интегрируемые по Лиувиллю системы	7
3	Основные результаты	8
3.1	Теорема об интегрируемости исследуемой задачи	8
3.2	Переход к эллиптическим координатам	10
3.3	Исследование бильярда в эллипсе	12
3.3.1	Особенности использования эллиптических координат	12
3.3.2	Исследование случая с притягивающим потенциалом	14
3.3.3	Исследование случая с отталкивающим потенциалом	20
3.3.4	Примечание	25
4	Заключение	25
4.1	Итоги работы	25
	Список литературы	26

1 Введение

1.1 Интегрируемые бильярды

Математический бильярд - это движение материальной точки на плоскости в области, ограниченной кусочно-гладкой кривой. Исследованиями в области интегрируемости таких систем в зависимости от типа границы такой области занимались многие учёные. В частности, интегрируемость бильярда в эллипсе на евклидовой плоскости была доказана Дж.Д. Биркгофом в работе [1].

При изучении интегрируемости задачи о геодезических на n -мерном эллипсоиде возникает интересный геометрический факт, отражённый в знаменитой теореме Якоби-Шаля (см. книгу [8]).

Теорема Якоби-Шаля. *Касательные прямые к геодезической линии квадрики в \mathbb{R}^{n+1} , проведённые во всех точках геодезической, касаются кроме этой квадрики ещё $n - 1$ конфокальных с ней квадратик, одних и тех же для всех точек геодезической.*

Устремляя к нулю одну из полуосей эллипсоида в \mathbb{R}^3 , получим важное свойство траекторий эллиптического бильярда: отрезки прямых, из которых состоит траектория (или их продолжения), касаются одной и той же софокусной с эллипсом коники.

В том случае, когда граница бильярда образована из дуг софокусных квадратик, пересекающихся под углом, равным $\frac{\pi}{2}$, рассматриваемая динамическая система также будет интегрируемой. В.В. Козлов и Д.В. Трещёв пришли к тому факту, что в динамических системах данного типа существует дополнительный первый интеграл, являющийся функционально независимым, а следовательно, такие системы вполне интегрируемы по Лиувиллю (см. книгу [8]).

В работах В. Драгович и М. Раднович [5, 14] были исследованы интересные и важные примеры интегрируемых бильярдов. Также в их работах приводится описание топологии возникающих здесь изоэнергетических многообразий в терминах инвариантов Фоменко-Цишанга.

Элементарным бильярдом называется связная компактная часть плоскости, граница которой образована из дуг софокусных квадратик и не содержит углов, равных $\frac{3\pi}{2}$. При этом софокусные квадратики всегда пересекаются под прямыми углами.

Топологическим бильярдом называется двумерная ориентируемая поверхность (возможно, с краем), полученная изометричными склейками конечного числа элементарных бильярдов вдоль некоторых сегментов границ. Также здесь необходимо выполнение следующих условий. Во-первых, склеиваемые бильярды должны быть расположены по одну сторону от общего сегмента. Во-вторых, в каждой вершине склейки суммарный угол всех элементарных бильярдов, примыкающих к данной вершине, должен быть равен $\frac{\pi}{2}$, π или 2π .

В работах В.В. Фокичевой [11, 12, 15] была получена полная классификация элементарных и топологических бильярдов.

В работе В. Драгович и М. Раднович [4] проводится исследование бильярда в эллипсе на плоскости Минковского. Также в их работе содержится описание траектории системы и построение меченой молекулы - инварианта Фоменко-Цишанга слоения Лиувилля данной системы.

Изучением связи теории бильярдов с дифференциальной геометрией, классической механикой и геометрической оптикой, а также вариационных принципов бильярдной динамики, симплектической геометрии лучей света, вопроса о существовании каустик, вполне интегрируемых по Лиувиллю бильярдов и других вопросов, связанных с теорией математических бильярдов, занимался С.Л. Табачников (см., например, книгу [9]).

Многочисленные результаты в области исследования теории бильярдов также были получены в работах В.В. Ведюшкиной и А.Т. Фоменко [3, 12, 15].

Топологическая классификация бильярдов, ограниченных дугами софокусных квадрик на плоскости Минковского, в классическом случае была получена Е.Е. Каргиновой в соответствующей работе [6]. Там же были введены определения простых эллиптических и гиперболических бильярдов на плоскости Минковского и была произведена классификация всех бильярдов такого вида. Также в работе были вычислены инварианты Фоменко-Цишанга для каждого такого бильярда.

1.2 Постановка задачи

В настоящей работе рассматриваются бильярды, ограниченные дугами софокусных квадрик на плоскости Минковского, в поле с центральным гукковским потенциалом. В частности, в ходе исследований была обнаружена интегрируемость по Лиувиллю систем такого рода. Также проводилось исследование топологии возникающих в данной задаче слоений Лиувилля и построение инвариантов Фоменко [2].

Напомним, что *плоскостью Минковского* называется вещественная двумерная плоскость \mathbb{R}^2 , на которой скалярное произведение задано следующим соотношением:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2. \quad (1)$$

Расстояние между двумя точками на плоскости Минковского определяется по следующей формуле:

$$dist(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}. \quad (2)$$

Скалярное произведение на плоскости Минковского может принимать отрицательные значения. Отсюда следует, что все векторы на плоскости Минковского можно разделить на три типа в зависимости от принимаемого значения скалярного произведения: *пространственно-подобные*, *световые (изотропные)* и *времени-подобные*. В первом случае скалярное произведение положительное (длина вектора вещественная), во втором - нулевое (длина вектора нулевая), а в третьем - отрицательное (длина вектора чисто мнимая).

Также отметим здесь и то, что два вектора на плоскости Минковского будут являться ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю (световые векторы будут ортогональны сами себе).

Ниже на рис. 1 указано расположение всех векторов на плоскости Минковского.

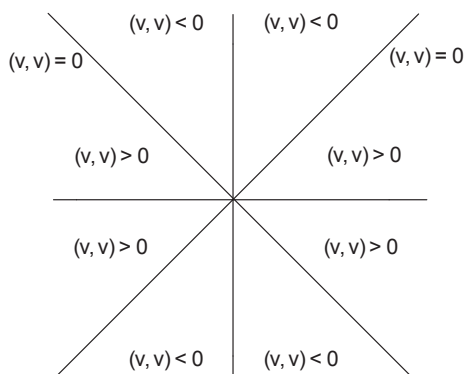


Рис. 1: Расположение векторов различного типа на плоскости Минковского

Отметим, что изотропные векторы расположены на двух прямых, которые разбивают плоскость Минковского на четыре части. Эти две прямые мы назовём *изотропными*.

Рассмотрим на плоскости Минковского эллипс, заданный соотношением:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1, \quad (3)$$

где a и b - вещественные числа, $a > b > 0$.

В нашем случае семейство софокусных квадрик задаётся следующим уравнением:

$$\frac{x^2}{a - \lambda} + \frac{y^2}{b + \lambda} = 1, \quad (4)$$

где λ - параметр квадрики. Отметим также, что при $-b < \lambda < a$ квадрика является эллипсом, при $\lambda < -b$ квадрика является гиперболой с действительной осью Ox , а при $\lambda > a$ квадрика является гиперболой с действительной осью Oy .

Данное семейство изображено на рис. 2.

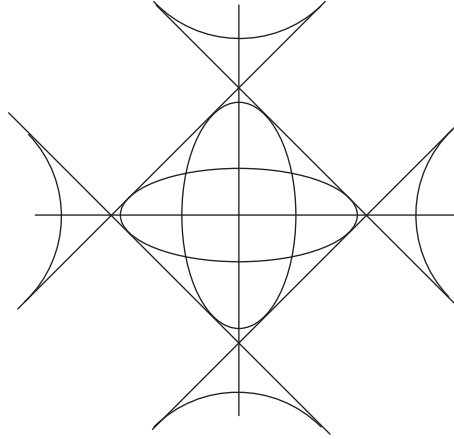


Рис. 2: Семейство софокусных квадрик на плоскости Минковского

При значениях параметра λ , равных $-b$, a или $\pm\infty$, квадрика вырождается и становится либо осью Ox , либо осью Oy , либо соответственно прямой на бесконечности.

С данным семейством софокусных квадрик на плоскости Минковского связаны достаточно интересные и значимые факты. Например, все невырожденные квадрики из этого семейства имеют четыре общих касательных, которые задаются следующими уравнениями:

$$x \pm y = \pm\sqrt{a+b}. \quad (5)$$

Также у данного семейства есть четыре фокуса: $F_1 = (-\sqrt{a+b}, 0)$, $F_2 = (\sqrt{a+b}, 0)$, $G_1 = (0, -\sqrt{a+b})$ и $G_2 = (0, \sqrt{a+b})$. При этом вещественной частью эллипса (гиперболы) условимся называть ту часть, к которой касательные векторы являются вещественными, а мнимой соответственно ту часть, к которой касательные векторы являются мнимыми.

Отметим здесь, что в случае эллипса, заданного параметром λ , сумма расстояний от фокусов F_1 и F_2 до любой точки, принадлежащей вещественной части эллипса, равна $2\sqrt{a-\lambda}$, а от фокусов G_1 и G_2 до любой точки, принадлежащей мнимой части эллипса, равна соответственно $2i\sqrt{b+\lambda}$. В случае же гиперболы, заданной параметром λ , разность расстояний от фокусов F_1 и F_2 до любой точки, принадлежащей вещественной части гиперболы, равна $2\sqrt{a-\lambda}$, а от фокусов G_1 и G_2 до любой точки, принадлежащей мнимой части гиперболы, равна соответственно $2i\sqrt{b+\lambda}$ (см. работу [6]). Также отметим и то, что если две квадрики данного семейства пересекаются в какой-либо точке, то касательные векторы к таким квадрикам являются ортогональными друг другу в этой точке (здесь имеется в виду ортогональность по Минковскому).

Опишем теперь, как устроено отражение в бильярде на плоскости Минковского. Пусть v - вектор, а l - некоторая прямая. Тогда вектор v можно представить в таком виде: $v = v_n + v_l$, где v_n - нормальная составляющая вектора скорости, а v_l принадлежит l . Биллиардным отражением вектора v от прямой l на плоскости Минковского будем называть вектор $v' = -v_n + v_l$.

Отметим, что в случае, когда v_l световой, отражение, очевидно, не определено.

Далее в нашем случае в систему был добавлен гуковский потенциал с коэффициентом k , действующий на материальную точку:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -kx; \\ \ddot{y} = -ky. \end{cases} \quad (6)$$

В том случае, когда $k > 0$, у нас имеется притягивающий потенциал, а в случае, когда $k < 0$, потенциал соответственно отталкивающий.

Следует отметить, что в данном случае биллиардный закон будет отличаться от классического случая на плоскости Минковского, который рассматривался в работах [4, 6]. Дело в том, что в последнем случае при отражении сохраняется евклидова длина вектора скорости, в то время как в случае, исследуемом в настоящей работе, при отражении у вектора скорости сохраняется длина Минковского, а не евклидова.

Ранее в бильярдах, ограниченных дугами софокусных квадрик, предполагалось, что при отражении длина Минковского будет меняться. Однако в случае, рассматриваемом в настоящей работе, этого не происходит. Данный факт является важным и оказывает влияние на результат и интегрируемость системы.

Таким образом, выше было приведено подробное описание исследуемой задачи.

Автор данной работы выражает глубокую благодарность своему научному руководителю - академику РАН А.Т. Фоменко за постановку задачи, конструктивные обсуждения и многочисленные консультации в процессе обучения, а также развитие интереса в области топологии и симплектической геометрии. Также автору хочется поблагодарить В.В. Ведюшкину за ценные консультации и замечания в процессе написания текущей работы. Помимо этого, автор выражает отдельную благодарность Ф.Ю. Попеленскому и А.С. Мищенко за ценные консультации и помощь в написании курсовой работы, а также развитие интереса в области алгебраической топологии, теории векторных расслоений и теории спектральных последовательностей.

2 Основные определения и теоремы

2.1 Симплектические многообразия

Определение 1. *Симплектическим многообразием* называется гладкое многообразие M^{2n} чётной размерности с замкнутой невырожденной 2-формой ω .

Определение 2. На симплектическом многообразии по любой гладкой функции H мы можем построить гамильтоново векторное поле $v_H = \text{sgrad } H = \omega^{-1}dH$, которое называется *косым градиентом* функции H .

Здесь стоит также отметить, что в канонических координатах $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ симплектическая структура ω задаётся матрицей $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, а вектор $\text{sgrad } H$ соответственно имеет вид $(-\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_n}, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n})$.

Векторное поле $v_H = \text{sgrad } H$ задаёт на симплектическом многообразии M^{2n} динамическую систему, которая в локальных координатах (x_1, \dots, x_{2n}) имеет следующий вид:

$$\dot{x}_i = \omega(\text{sgrad } x_i, \text{sgrad } H). \quad (7)$$

2.2 Вполне интегрируемые по Лиувиллю системы

Определение 3. Гладкая функция f называется *первым интегралом* векторного поля v , если её значение сохраняется вдоль интегральных траекторий данного векторного поля.

Отметим также, что для гамильтоновых векторных полей это равносильно условию $\omega(\text{sgrad } f, \text{sgrad } H) = 0$.

Определение 4. Динамическая система $v = \text{sgrad } H$, заданная на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) , называется *вполне интегрируемой по Лиувиллю*, если существуют n гладких функций f_1, \dots, f_n , которые удовлетворяют следующим условиям:

1. f_1, \dots, f_n - первые интегралы векторного поля $\text{sgrad } H$;
2. f_1, \dots, f_n являются функционально независимыми;
3. $\{f_i, f_j\} = 0$ при любых $i, j = 1, \dots, n$;
4. векторные поля $\text{sgrad } f_i$ полны.

Определение 5. *Слоением Лиувилля*, отвечающим вполне интегрируемой системе $v = \text{sgrad } H$, называется разбиение многообразия M^{2n} на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов f_1, \dots, f_n .

Рассмотрим гамильтонову систему $v = \text{sgrad } H$ на четырёхмерном симплектическом многообразии M^4 .

Определение 6. *Изоэнергетической поверхностью* Q_h^3 называется множество точек, задаваемое уравнением $H = h = \text{const}$. Она всегда является инвариантной поверхностью относительно поля v .

Определение 7. Пусть M^{2n} - симплектическое многообразие с интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системой $v = \text{sgrad } H$, и f_1, \dots, f_n - независимые инволютивные интегралы. Определим гладкое отображение $\mathcal{F} : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $\mathcal{F}(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Такое отображение \mathcal{F} называется *отображением момента*.

Определение 8. Точка x из M называется *критической (или особой) точкой отображения момента* \mathcal{F} , если ранг $d\mathcal{F}(x)$ меньше n . Её образ $\mathcal{F}(x)$ в \mathbb{R}^n называется *критическим значением*.

Пусть K - совокупность всех критических точек отображения момента в M .

Определение 9. Образ K при отображении момента, т.е. множество $\Sigma = \mathcal{F}(K) \subset \mathbb{R}^n$, называется *бифуркационной диаграммой*.

Таким образом, бифуркационная диаграмма - это совокупность всех критических значений отображения момента.

Определение 10. Гладкая функция называется *функцией Морса*, если все её критические точки невырождены.

Определение 11. Функция f называется *функцией Ботта* на многообразии Q , если все её критические точки организованы в невырожденные критические подмногообразия.

Это означает, что множество критических точек является несвязным объединением некоторых гладких подмногообразий, причём каждое из них невырождено в следующем смысле. Второй дифференциал d^2f невырожден на подпространстве, трансверсальном к подмногообразию (в каждой его точке). Другими словами, ограничение функции f на трансверсаль к подмногообразию является функцией Морса.

Пусть f - функция Морса на гладком многообразии M^2 . Рассмотрим произвольную поверхность уровня $f^{-1}(a)$ и её компоненты связности, которые мы назовём слоями. В результате многообразии разбивается в объединение слоёв. Получается слоение с особенностями. Объявляя каждый слой одной точкой и вводя естественную фактор-топологию в пространстве Γ слоёв, получаем некоторое факторпространство. Его можно рассматривать как базу этого слоения. Для функции Морса пространство Γ является графом.

Определение 12. Граф Γ называется *графом Роба* для функции Морса f на многообразии M^2 .

Определение 13. Граф Роба вместе с указанными атомами в соответствующих точках на нём называется *грубой молекулой* для функции f на многообразии M^2 .

Определение 14. Грубая молекула, оснащённая метками r_i, ε_i, n_i , называется *меченой молекулой (или инвариантом Фоменко-Цишанга)*.

Перейдём теперь уже непосредственно к решению исследуемой задачи.

3 Основные результаты

3.1 Теорема об интегрируемости исследуемой задачи

Рассмотрим фазовое пространство $M^4 = \{x, y, \dot{x}, \dot{y}\}$, где (x, y) - декартовы координаты материальной точки в бильярде, (\dot{x}, \dot{y}) - соответствующие координаты вектора скорости. При отражении точки от границы бильярда вектора скорости до и после соответствующего отражения отождествляются по стандартному закону. Далее введём на многообразии M^4 симплектическую структуру ω , заданную следующей матрицей $\Omega = (\omega_{ij})$:

$$(\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Также определим стандартную скобку Пуассона.

В ходе исследований настоящей работы оказалось, что такая динамическая система является интегрируемой по Лиувиллю.

Для доказательства её интегрируемости необходимо предъявить два интеграла, которые являются функционально независимыми и находятся в инволюции.

Возьмём следующий гамильтониан:

$$H = \frac{k(x^2 - y^2)}{2} + \frac{\dot{x}^2 - \dot{y}^2}{2}. \quad (9)$$

Такой гамильтониан удовлетворяет метрике Минковского.

Оказалось, что в качестве дополняющего интеграла данной системы можно взять следующий интеграл, который был найден В.В. Ведюшкиной:

$$F = \frac{\dot{x}^2}{a} + \frac{\dot{y}^2}{b} - \frac{(x\dot{y} - \dot{x}y)^2}{ab} - k\left(1 - \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}\right). \quad (10)$$

Теорема 1 (Ведюшкина-Скворцов). *Биллиард, ограниченный дугами софокусных квадрик на плоскости Минковского, в поле с гуковским потенциалом является интегрируемым по Лиувиллю. Интегралами являются следующие функции:*

$$H = \frac{k(x^2 - y^2)}{2} + \frac{\dot{x}^2 - \dot{y}^2}{2},$$

$$F = \frac{\dot{x}^2}{a} + \frac{\dot{y}^2}{b} - \frac{(x\dot{y} - \dot{x}y)^2}{ab} - k\left(1 - \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}\right).$$

При этом симплектическая структура задаётся вышеуказанной матрицей (8).

Доказательство. Для начала необходимо убедиться, что дополняющий интеграл F постоянен вдоль траекторий биллиарда.

Для этого продифференцируем F по t :

$$\dot{F} = \frac{2\dot{x}\ddot{x}}{a} + \frac{2\dot{y}\ddot{y}}{b} - \frac{2(x\dot{y} - \dot{x}y)(x\ddot{y} - \ddot{x}y)}{ab} - k\left(1 - \frac{2x\dot{x}}{a} - \frac{2y\dot{y}}{b}\right). \quad (11)$$

Теперь подставим сюда значения \ddot{x} и \ddot{y} из исходной системы, описывающей действие гуковского потенциала на нашу материальную точку. В результате получим 0. Отсюда следует, что дополняющий интеграл F постоянен вдоль траекторий биллиарда.

Теперь убедимся, что интеграл F сохраняется при отражении от стенок биллиарда.

Любая стенка биллиарда, рассматриваемого в нашей задаче, является дугой софокусных квадрик из указанного выше семейства.

Посмотрим на формулу интеграла F . Можно заметить, что в ней последнее слагаемое при отражении не меняется.

Для удобства перепишем формулу интеграла F в следующем виде:

$$F + k\left(1 - \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}\right) = \frac{\dot{x}^2}{a} + \frac{\dot{y}^2}{b} - \frac{(x\dot{y} - \dot{x}y)^2}{ab}. \quad (12)$$

Далее раскроем скобки в последнем слагаемом правой части равенства и выразим сначала x^2 через y^2 , а затем аналогичным образом y^2 через x^2 из уравнения (4), описывающего семейство софокусных квадрик. Подставим получившиеся выражения для x^2 и y^2 в соответствующие места раскрытой скобки, после чего сделаем некоторые алгебраические преобразования.

В итоге получим следующее:

$$F + k\left(1 - \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}\right) = \frac{1}{ab}\left(x^2\dot{x}^2\frac{b+\lambda}{a-\lambda} + 2xy\dot{x}\dot{y} + y^2\dot{y}^2\frac{a-\lambda}{b+\lambda}\right) + \frac{\lambda(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{ab}. \quad (13)$$

Далее можно заметить, что первое слагаемое в правой части является полным квадратом. Поэтому получаем следующее:

$$F + k\left(1 - \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}\right) = \frac{(a-\lambda)(b+\lambda)}{ab}\left(\dot{x}\frac{x}{a-\lambda} + \dot{y}\frac{y}{b+\lambda}\right)^2 + \frac{\lambda(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{ab}. \quad (14)$$

Первое слагаемое в правой части является квадратом скалярного произведения вектора скорости на нормаль к софокусной квадрике. Отсюда следует, что значение интеграла F после отражения не изменится.

Перейдём теперь уже непосредственно к доказательству интегрируемости по Лиувиллю данной системы.

Сначала докажем тот факт, что два интеграла H и F находятся в инволюции.

Найдём частные производные H и F :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = kx; \\ \frac{\partial H}{\partial y} = -ky; \\ \frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = \dot{x}; \\ \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} = -\dot{y}, \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2kx}{a} - \frac{2\dot{y}(xy - \dot{x}y)}{ab}; \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2ky}{b} + \frac{2\dot{x}(xy - \dot{x}y)}{ab}; \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \frac{2\dot{x}}{a} + \frac{2y(xy - \dot{x}y)}{ab}; \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \frac{2\dot{y}}{b} - \frac{2x(xy - \dot{x}y)}{ab}. \end{cases} \quad (16)$$

Далее считаем скобку Пуассона от этих интегралов (при этом берём симплектическую структуру, определяемую матрицей (8)):

$$\begin{aligned} \{H, F\} &= -2kx\left(\frac{\dot{x}}{a} + \frac{(xy - \dot{x}y)}{ab}y\right) - 2ky\left(\frac{\dot{y}}{b} - \frac{(xy - \dot{x}y)}{ab}x\right) + 2\dot{x}\left(\frac{kx}{a} - \frac{(xy - \dot{x}y)}{ab}\dot{y}\right) + \\ &+ 2\dot{y}\left(\frac{ky}{b} + \frac{(xy - \dot{x}y)}{ab}\dot{x}\right) = -\frac{2kx\dot{x}}{a} - \frac{2kxy(xy - \dot{x}y)}{ab} - \frac{2ky\dot{y}}{b} + \frac{2kxy(xy - \dot{x}y)}{ab} + \\ &+ \frac{2kx\dot{x}}{a} - \frac{2\dot{x}y(xy - \dot{x}y)}{ab} + \frac{2ky\dot{y}}{b} + \frac{2\dot{x}y(xy - \dot{x}y)}{ab} = 0. \end{aligned}$$

Т.к. скобка Пуассона равна нулю, то следовательно интегралы H и F находятся в инволюции.

Докажем теперь, что эти два интеграла являются функционально независимыми.

Для этого выпишем дифференциалы dH и dF , воспользовавшись полученными в (15) и (16) результатами:

$$dH = (kx, -ky, \dot{x}, -\dot{y}); \quad (17)$$

$$dF = 2\left(\left(\frac{kx}{a}, \frac{ky}{b}, \frac{\dot{x}}{a}, \frac{\dot{y}}{b}\right) - \frac{(xy - \dot{x}y)}{ab}(\dot{y}, -\dot{x}, -y, x)\right). \quad (18)$$

Нетрудно заметить, что dH и dF являются линейно независимыми. Следовательно, интегралы H и F являются функционально независимыми.

Итак, настоящая система действительно является интегрируемой по Лиувиллю. ■

3.2 Переход к эллиптическим координатам

Для дальнейшего анализа нам необходимо перейти к эллиптическим координатам.

В нашем случае уравнения перехода от декартовых координат к эллиптическим будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} x^2 = \frac{(a-\lambda_1)(a-\lambda_2)}{a+b}; \\ y^2 = \frac{(b+\lambda_1)(b+\lambda_2)}{a+b}. \end{cases} \quad (19)$$

В таких координатах интеграл H запишется следующим образом:

$$H = -\frac{k}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{2(a - \lambda_1)(b + \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_1^2 + \frac{2(a - \lambda_2)(b + \lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} \mu_2^2, \quad (20)$$

где μ_1, μ_2 - сопряжённые импульсы.

Дополняющий интеграл F будет иметь следующий вид:

$$F = -\frac{k}{2}\lambda_1^2 + 2(a - \lambda_1)(b + \lambda_1)\mu_1^2 - H\lambda_1. \quad (21)$$

Предложение 1. *Стоит отметить, что интеграл F также можно переписать и в таком виде:*

$$F = -\frac{k}{2}\lambda_2^2 + 2(a - \lambda_2)(b + \lambda_2)\mu_2^2 - H\lambda_2. \quad (22)$$

Доказательство. Для этого сначала нужно вычесть правую часть равенства (22) из правой части равенства (21), в результате чего получим следующее:

$$-\frac{k}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2) + 2(a - \lambda_1)(b + \lambda_1)\mu_1^2 - 2(a - \lambda_2)(b + \lambda_2)\mu_2^2 - H(\lambda_1 - \lambda_2).$$

Затем вынесем за скобки множитель $(\lambda_1 - \lambda_2)$:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\left(-\frac{k}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{2(a - \lambda_1)(b + \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}\mu_1^2 + \frac{2(a - \lambda_2)(b + \lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}\mu_2^2 - H\right)$$

Нетрудно заметить, что во втором множителе находится формула интеграла H . Отсюда получаем, что

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(H - H) = 0.$$

Таким образом, интеграл F действительно можно переписать в виде, указанном в формуле (22). ■

Далее нам необходимо воспользоваться следующей формулой:

$$\dot{\lambda}_i = \frac{\partial H}{\partial \mu_i}. \quad (23)$$

Она известна нам из механики. В результате получаем такую систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \mu_1} = \frac{4(a - \lambda_1)(b + \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}\mu_1; \\ \frac{\partial H}{\partial \mu_2} = \frac{4(a - \lambda_2)(b + \lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}\mu_2. \end{cases} \quad (24)$$

Зафиксируем уровни интегралов H и F : $H = h$ и $F = f$. Далее выразим сопряжённые импульсы μ_1 и μ_2 из формул для интеграла F и подставим получившиеся выражения в данную систему. В результате получим следующие уравнения:

$$\dot{\lambda}_i = \pm \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{V(\lambda_i)}, \quad (25)$$

где $V(\lambda_i) = V(z) = (a - z)(b + z)(f + \frac{k}{2}z^2 + hz)$.

Это уравнения движения. Они описывают то, какие значения принимает вектор скорости в каждой конкретной точке бильярда.

С помощью данных уравнений мы сможем найти прообраз проекции слоя в Q^3 на бильярд.

Таким образом, мы ввели на рассматриваемом многообразии M^4 новые координаты. Более конкретно, мы перешли от координат (x, y, \dot{x}, \dot{y}) к координатам $(\lambda_1, \lambda_2, \dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2)$.

Стоит также отметить, что вектора скорости (\dot{x}, \dot{y}) и $(\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2)$ связаны друг с другом заменой координат с помощью якобиана перехода от декартовых координат к эллиптическим:

$$(\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2) = (\dot{x}, \dot{y})J^T, \quad (26)$$

где J - соответствующий якобиан преобразования координат.

Из уравнений для $\dot{\lambda}_i$ можно получить некоторые условия на сами координаты λ_i , а именно: $V(\lambda_1) \geq 0$ и $V(\lambda_2) \geq 0$. Используя эти условия, а также условия, накладываемые самой бильярдной областью, получаем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{k}{2}(a - \lambda_1)(b + \lambda_1)(\lambda_1 - \eta)(\lambda_1 - \xi) \geq 0; \\ \frac{k}{2}(a - \lambda_2)(b + \lambda_2)(\lambda_2 - \eta)(\lambda_2 - \xi) \geq 0; \\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \Sigma, \end{cases} \quad (27)$$

где $\eta = \frac{-h - \sqrt{h^2 - 2kf}}{k}$ и $\xi = \frac{-h + \sqrt{h^2 - 2kf}}{k}$ - корни многочлена $V(z)$, а Σ - бильярдная область.

Теперь нам необходимо зафиксировать конкретные значения η и ξ (или значения h и f соответственно), чтобы разрешить данную систему относительно λ_i . В итоге мы получим решение этой системы, которое и задаёт область возможного движения в бильярде.

Отметим также, что если решения нет, то движения на уровне (h, f) не существует.

3.3 Исследование бильярда в эллипсе

3.3.1 Особенности использования эллиптических координат

Рассмотрим случай, когда бильярдный стол имеет форму эллипса (рис. 3).

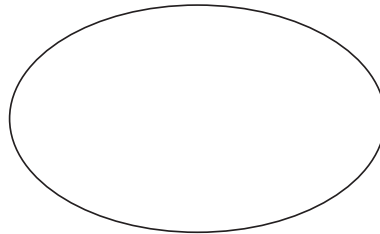


Рис. 3: Бильярдный стол - эллипс

Однако здесь стоит отметить, что в случае с евклидовой плоскостью семейство софокусных квадрик устроено таким образом, что через каждую точку этой плоскости с ненулевыми координатами проходят ровно две квадрики этого семейства (эллипс и гипербола). Так выбираются криволинейные координаты λ_1 и λ_2 в евклидовом случае (см. книгу [8]). В нашем же случае ситуация обстоит несколько сложнее (действительно, если посмотреть на рис. 2, можно заметить, что здесь выбрать криволинейные координаты таким способом не удастся).

Тем не менее, в нашем случае есть способ воспользоваться криволинейными координатами с помощью имеющегося семейства софокусных квадрик. Положив $\lambda = 0$, мы получим квадрику, представляющую собой эллипс. Этот эллипс возьмём в качестве границы нашего бильярдного стола. Тогда в качестве криволинейных координат можно выбрать две квадрики из нашего семейства таким образом: первой координатой будет являться параметр λ_1 квадрики, принимающей значения в промежутке $(-b; 0]$, а второй координатой - параметр λ_2 квадрики, принимающей значения в промежутке $[0; a)$ (напомним, что при

значениях параметра λ , равных $-b$ или a , происходит вырождение квадрики, и квадратика становится либо осью Ox , либо осью Oy). В таком случае через каждую точку нашего бильярдного стола с ненулевыми координатами будут проходить ровно две квадрики имеющегося семейства (обе будут являться эллипсами).

Чтобы в этом убедиться, рассмотрим уравнение (4), задающее семейство имеющихся в нашем случае софокусных квадрик. Перепишем его в следующем виде:

$$\frac{x^2}{a - \lambda} + \frac{y^2}{b + \lambda} - 1 = 0. \quad (28)$$

При фиксированных ненулевых значениях x, y получаем функцию $f(\lambda)$, график которой изображён на рис. 4.

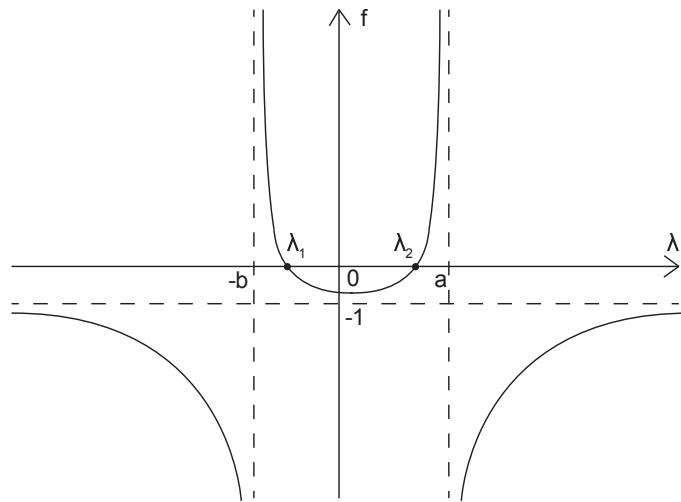


Рис. 4: График функции $f(\lambda)$ в нашем случае принимает такой вид

Действительно, такое уравнение имеет два корня λ_1 и λ_2 , заключённых в промежутках $(-b; 0]$ и $[0; a)$.

Отметим, что такой способ не удастся применить ко всем точкам на плоскости Минковского вообще (опять же, это можно заметить, если посмотреть на рис. 2). Действительно, на плоскости Минковского существуют такие точки с координатами (x, y) , для которых рассмотренное выше уравнение не будет иметь корней. Для них график функции $f(\lambda)$ будет иметь вид, изображённый на рис. 5.

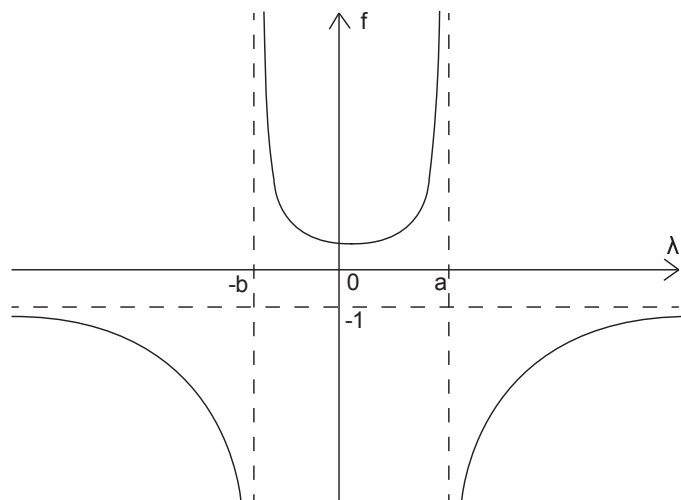


Рис. 5: График функции $f(\lambda)$ в общем случае может принимать и такой вид

Теперь перейдём к более детальному исследованию нашего случая.

Напомним, что в случае, если $k > 0$, то у нас имеется притягивающий потенциал, а в случае, когда $k < 0$, потенциал отталкивающий.

3.3.2 Исследование случая с притягивающим потенциалом

Для начала, рассмотрим случай для $k > 0$.

Построим таблицу, состоящую из решений такой системы.

Таблица 1: Результаты для случая эллипса и $k > 0$

Случай эллипса, $k > 0$		
№	Значения η, ξ	Решение системы
1	$\eta \leq \xi \leq -b \leq 0 \leq a$	$\lambda_1 \in [-b; 0], \lambda_2 \in [0; a]$
2	$\eta \leq -b \leq \xi \leq 0 \leq a$	$\lambda_1 \in [\xi; 0], \lambda_2 \in [0; a]$
3	$\eta \leq -b \leq 0 \leq \xi \leq a$	—
4	$\eta \leq -b \leq 0 \leq a \leq \xi$	—
5	$-b \leq \eta \leq \xi \leq 0 \leq a$	$\lambda_1 \in [-b; \eta] \cup [\xi; 0], \lambda_2 \in [0; a]$
6	$-b \leq \eta \leq 0 \leq \xi \leq a$	$\lambda_1 \in [-b; \eta], \lambda_2 \in [\xi; a]$
7	$-b \leq \eta \leq 0 \leq a \leq \xi$	—
8	$-b \leq 0 \leq \eta \leq \xi \leq a$	$\lambda_1 \in [-b; 0], \lambda_2 \in [0; \eta] \cup [\xi; a]$
9	$-b \leq 0 \leq \eta \leq a \leq \xi$	$\lambda_1 \in [-b; 0], \lambda_2 \in [0; \eta]$
10	$-b \leq 0 \leq a \leq \eta \leq \xi$	$\lambda_1 \in [-b; 0], \lambda_2 \in [0; a]$

Образ отображения момента представляет собой совокупность точек (h, f) на $\mathbb{R}^2(h, f)$, для которых область будет непустой.

В нашем случае для построения бифуркационной диаграммы имеет смысл воспользоваться методом, предложенным Харламовым в [13], согласно которому если для каждой точки окрестности значения (h, f) область изменений параметров получается гомеоморфной области для данного значения, то это значение будет являться регулярным (в противном случае значение будет являться критическим). Данный метод позже получил название *метода геометрического разделения переменных*.

Ниже приведена бифуркационная диаграмма для данного случая (см. рис. 6). На этой бифуркационной диаграмме присутствуют две прямые, заданные уравнениями $f = bh - \frac{kb^2}{2}$ и $f = -ah - \frac{ka^2}{2}$, а также парабола, заданная уравнением $f = \frac{1}{2k}h^2$ соответственно.

Для того, чтобы определить камеры для каждого из решений системы, необходимо взять соответствующие неравенства, для которых у системы существует решение, и подставить указанные выше выражения для η и ξ , поскольку каждое из них содержит в себе как h , так и f . После чего необходимо проделать некоторые алгебраические преобразования с полученными неравенствами, в результате чего получим соответствующие ограничения на h и f , которые и определяют области камер на бифуркационной диаграмме.

Например, ограничение сверху параболой для нескольких камер на бифуркационной диаграмме возникает в тех случаях, когда в цепочке неравенств для значений η и ξ имеется неравенство $\eta \leq \xi$. Чтобы в этом убедиться, подставим сюда указанные выше выражения для η и ξ :

$$\frac{-h - \sqrt{h^2 - 2kf}}{k} \leq \frac{-h + \sqrt{h^2 - 2kf}}{k}.$$

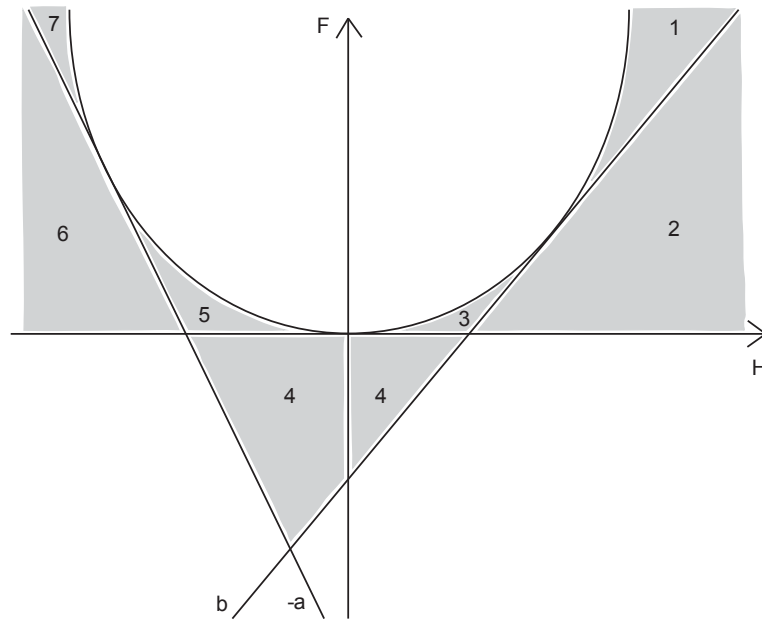


Рис. 6: Бифуркационная диаграмма для случая эллипса при $k > 0$

Домножив данное неравенство на k и прибавив ко всем его частям h , перенеся корень в правую часть, получаем, что

$$0 \leq 2\sqrt{h^2 - 2kf}.$$

В конечном итоге, мы придём к ограничению, связанному с параболой:

$$f \leq \frac{1}{2k}h^2.$$

Остальные ограничения получаются аналогичным образом.

Далее приводятся области возможного движения для каждой из камер. Отметим, что области возможного движения являются проекциями торов Лиувилля на бильярдный стол.

Предложение 2. *Области возможного движения (проекции торов Лиувилля) для случая с притягивающим потенциалом имеют вид, указанный на рис. 7-12.*

Доказательство. См. бифуркационную диаграмму на рис. 6. ■

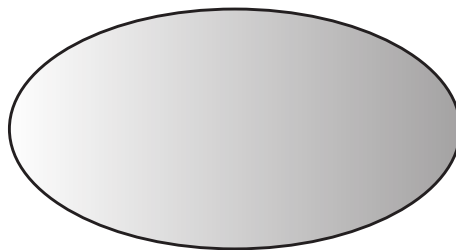


Рис. 7: Область возможного движения для камер 1 и 7

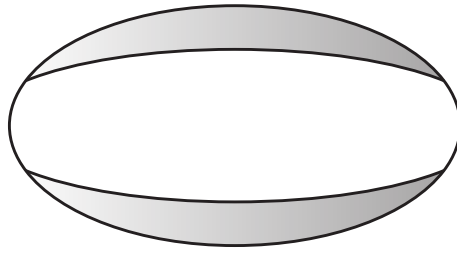


Рис. 8: Область возможного движения для камеры 2

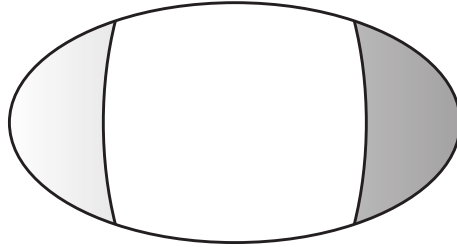


Рис. 9: Область возможного движения для камеры 6

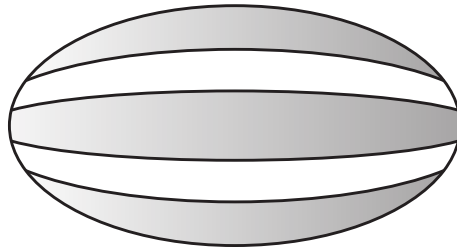


Рис. 10: Область возможного движения для камеры 3

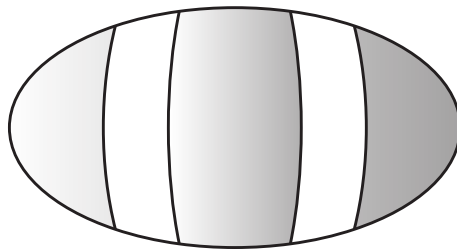


Рис. 11: Область возможного движения для камеры 5

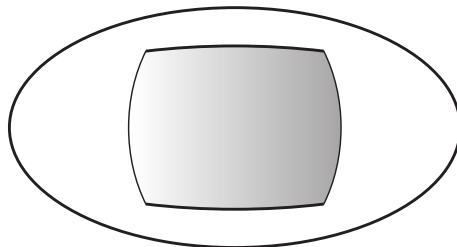


Рис. 12: Область возможного движения для камеры 4

Выпишем все грубые молекулы, получившиеся в результате анализа данной бифуркационной диаграммы.

Теорема 2. *Грубые молекулы для случая с притягивающим потенциалом имеют вид, указанный на рис. 13-16.*

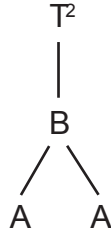


Рис. 13: Молекула 1



Рис. 14: Молекула 2



Рис. 15: Молекула 3



Рис. 16: Молекула 4

Доказательство. Напомним, что зафиксировав уровень энергии $H = h = \text{const}$, мы получим изоэнергетическую поверхность Q_h^3 .

Проведём пунктиром на бифуркационной диаграмме прямые, соответствующие уравнениям $H = h_i$, где h_i - это те точки H , в которых происходит качественная перестройка изоэнергетической поверхности. Тем самым получаем некоторые области на прямой H , каждой из которых соответствует определённая изоэнергетическая поверхность Q_h^3 .

Зафиксируем уровень энергии $H = h$. На рис. 17 ему соответствует прямая, заданная уравнением $H = h$. Данная прямая пересекает образ отображения момента по конечному отрезку. При этом саму бифуркационную диаграмму эта прямая пересекает в нескольких точках на данном отрезке.

Таким образом, мы получаем все изоэнергетические поверхности Q_h^3 , по которым дальше строятся грубые молекулы. Отметим теперь, при каких значениях уровня энергии h получается каждая из молекул.

Молекуле 1 соответствуют значения $h > kb$ и $h < -ka$. Молекуле 2 соответствуют значения $\frac{kb}{2} < h < kb$ и $-ka < h < -\frac{ka}{2}$. Молекуле 3 соответствуют значения $-\frac{ka}{2} < h < \frac{kb}{2}$ за исключением $h = 0$. Молекуле 4 соответствует значение $h = 0$.

Итак, в случае с притягивающим потенциалом мы получаем семь зон уровней энергии и четыре молекулы. ■

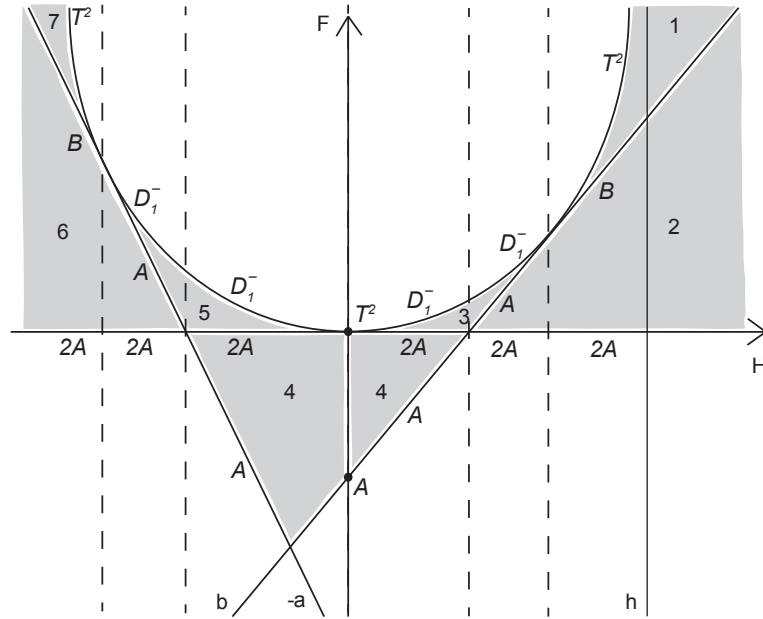


Рис. 17: Бифуркационная диаграмма для случая эллипса при $k > 0$ с указанием уровней энергии

Комментарий. В данном случае через T^2 обозначен критический тор, а через D_1^- обозначен особый слой атома D_1 .

Здесь стоит отметить, что появление в молекулах D_1^- представляет особый интерес, поскольку это - новый эффект, который ранее в топологии слоений Лиувилля исследуемых интегрируемых систем не возникал. Логичнее всего предположить, что на верхней границе некоторых камер, которую в данном случае представляет собой парабола, должен находиться атом A либо же критический тор T^2 . Однако здесь это не так. Данный эффект связан с тем, что мы переопределили биллиардный закон иначе, чем в работах [4, 6].

Область возможного движения на параболе в случае с D_1^- имеет вид, указанный на рис. 18, где пунктиром обозначена критическая область возможного движения.

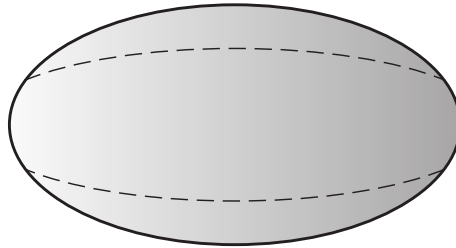


Рис. 18: Область возможного движения для камер 3 и 5 на параболе

Проблема заключается в том, что по полученным грубым молекулам не удастся построить инварианты Фоменко-Цишанга, поскольку в верхней части молекул метки посчитать нельзя. Но тем не менее, для некоторых молекул можно посчитать метки частично - только на тех рёбрах, где это возможно. Таким образом, в данном случае представляется возможным построение инварианта Фоменко (имеется в виду построение грубой молекулы, оснащённой метками в тех частях графа, где это возможно).

Теорема 3. В случае молекулы 1 инвариант Фоменко имеет вид, изображённый на рис. 19.

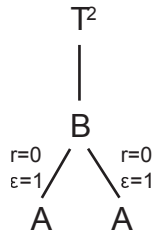


Рис. 19: Инвариант Фоменко для молекулы 1

Доказательство. В данном случае построение инварианта Фоменко возможно только для молекулы 1. Этот инвариант имеет вид, изображённый на рис. 19. На верхнем ребре метки посчитать нельзя, поскольку данная молекула завершается критическим тором T^2 . Поэтому для молекулы 1 нельзя построить инвариант Фоменко-Цишанга. Но тем не менее, в данном случае можно посчитать метки частично - только на двух оставшихся рёбрах. Таким образом, мы получаем инвариант Фоменко для молекулы 1.

Для молекул 2-4 в данном случае построение инварианта Фоменко не представляется возможным (см. комментарий выше). ■

В данном случае циклы выбираются следующим образом: на торе атома A в качестве цикла λ возьмём отрезок координатной оси Ox , а в качестве цикла μ - дугу интегрального эллипса. Выберем на нём ориентацию, согласованную с ориентацией критического цикла. На торе атома B в качестве цикла λ возьмём дугу интегрального эллипса, согласовав на этом цикле ориентацию с ориентацией критического цикла. В качестве цикла μ возьмём отрезок координатной оси Ox .

В итоге получаем, что матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Отсюда находим метки: $r = 0, \varepsilon = 1$.

Следует отметить, что при вычислении матрицы склейки ориентация на цикле μ на торе атома B и на цикле λ на торе атома A фиксировалась так, чтобы определитель матрицы был равен -1. Циклы с ориентацией показаны на рис. 20-21.

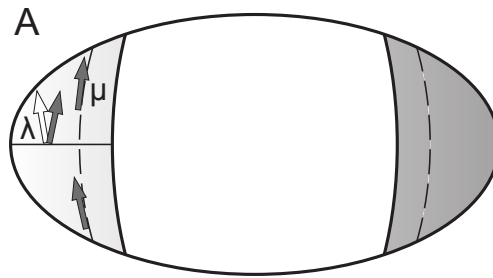


Рис. 20: Выбор циклов на торе атома A

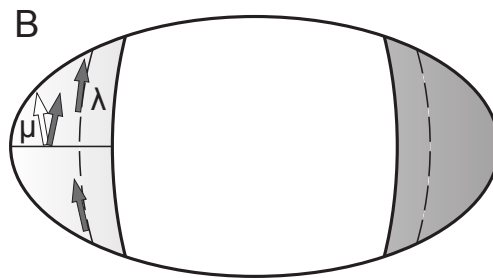


Рис. 21: Выбор циклов на торе атома B

В связи с получившимися особенностями у грубых молекул для случая $k > 0$ возникает мысль провести дополнительное исследование интеграла F на боттовость.

Зафиксировав уровень энергии h у F , получаем, что F зависит от трёх переменных - $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1$.

Далее нам нужно исследовать, упадёт ли ранг второго дифференциала у F .

Найдём первые дифференциалы F :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \frac{\lambda_1^2}{4} \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(a - \lambda_1)(b + \lambda_1) - (\lambda_1 - \lambda_2)^2(a - b - 2\lambda_1)}{(a - \lambda_1)^2(b + \lambda_1)^2} - k\lambda_1 - h; \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \frac{\lambda_1^2}{4} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{(a - \lambda_1)(b + \lambda_1)}; \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \frac{\lambda_1^2}{4} \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{(a - \lambda_1)(b + \lambda_1)}. \end{cases} \quad (29)$$

Поскольку вычисление вторых дифференциалов в данной ситуации представляется достаточно сложной задачей, автором были проделаны соответствующие расчёты с использованием Wolfram Mathematica. Действительно, вычисления оказались бы достаточно громоздкими и трудными для ручного подсчёта.

В конечном счёте оказалось, что ранг действительно упал (он стал равным 1) - получившаяся матрица имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

Таким образом, мы выяснили, что функция F действительно является неботтовской.

3.3.3 Исследование случая с отталкивающим потенциалом

Теперь рассмотрим случай для $k < 0$.

Построим таблицу, состоящую из решений такой системы.

Таблица 2: Результаты для случая эллипса и $k < 0$

Случай эллипса, $k < 0$		
№	Значения η, ξ	Решение системы
1	$\xi \leq \eta \leq -b \leq 0 \leq a$	—
2	$\xi \leq -b \leq \eta \leq 0 \leq a$	—
3	$\xi \leq -b \leq 0 \leq \eta \leq a$	$\lambda_1 \in [-b; 0], \lambda_2 \in [0; \eta]$
4	$\xi \leq -b \leq 0 \leq a \leq \eta$	$\lambda_1 \in [-b; 0], \lambda_2 \in [0; a]$
5	$-b \leq \xi \leq \eta \leq 0 \leq a$	—
6	$-b \leq \xi \leq 0 \leq \eta \leq a$	$\lambda_1 \in [\xi; 0], \lambda_2 \in [0; \eta]$
7	$-b \leq \xi \leq 0 \leq a \leq \eta$	$\lambda_1 \in [\xi; 0], \lambda_2 \in [0; a]$
8	$-b \leq 0 \leq \xi \leq \eta \leq a$	—
9	$-b \leq 0 \leq \xi \leq a \leq \eta$	—
10	$-b \leq 0 \leq a \leq \xi \leq \eta$	—

Аналогично случаю с притягивающим потенциалом, образ отображения момента представляет собой совокупность точек (h, f) на $\mathbb{R}^2(h, f)$, для которых область будет непустой.

Для построения бифуркационной диаграммы использовался тот же метод, предложенным Харламовым в [13].

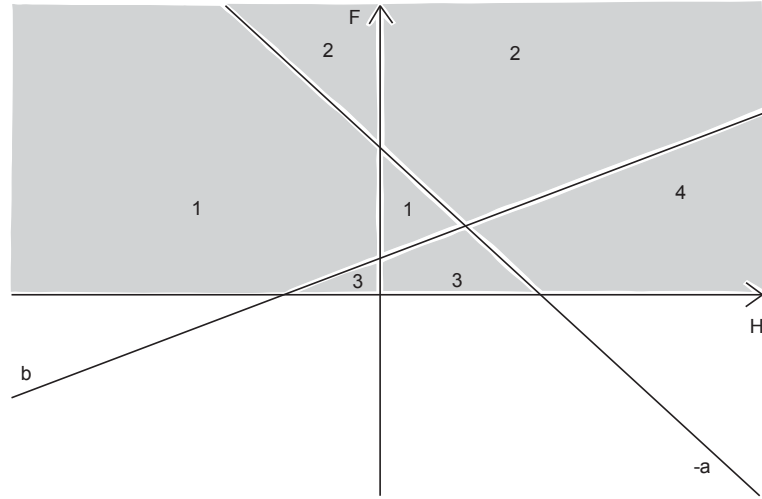


Рис. 22: Бифуркационная диаграмма для случая эллипса при $k < 0$

Выше приведена бифуркационная диаграмма для данного случая (см. рис. 22). На этой бифуркационной диаграмме присутствуют две прямые, заданные уравнениями $f = bh - \frac{kb^2}{2}$ и $f = -ah - \frac{ka^2}{2}$ соответственно. Параболы здесь уже нет.

Камеры для каждого из решений системы определяются аналогично случаю с притягивающим потенциалом.

Рассмотрим, например, случай с камерой 4 на бифуркационной диаграмме. Для того, чтобы получить ограничения на h и f , которые определяют область этой камеры на бифуркационной диаграмме, рассмотрим соответствующую цепочку неравенств:

$$-b \leq \xi \leq 0 \leq a \leq \eta.$$

Рассмотрим сначала неравенство $-b \leq \xi \leq 0$. Подставим сюда указанное выше выражение для ξ :

$$-b \leq \frac{-h + \sqrt{h^2 - 2kf}}{k} \leq 0.$$

Домножив данное неравенство на k и прибавив ко всем его частям h , получаем, что

$$h \leq \sqrt{h^2 - 2kf} \leq -kb + h.$$

В конечном итоге, мы придём к первым двум ограничениям на область камеры 4:

$$0 \leq f \leq bh - \frac{kb^2}{2}.$$

Рассмотрим теперь неравенство $a \leq \eta$. Подставим сюда указанное выше выражение для η :

$$a \leq \frac{-h - \sqrt{h^2 - 2kf}}{k}.$$

Аналогично, далее получаем, что

$$\sqrt{h^2 - 2kf} \leq -ka - h.$$

В результате мы получаем третье ограничение на область камеры 4:

$$f \geq -ah - \frac{ka^2}{2}.$$

Далее приводятся области возможного движения для каждой из камер.

Предложение 3. *Области возможного движения (проекции торов Лиувилля) для случая с отталкивающим потенциалом имеют вид, указанный на рис. 23-26.*

Доказательство. См. бифуркационную диаграмму на рис. 22. ■

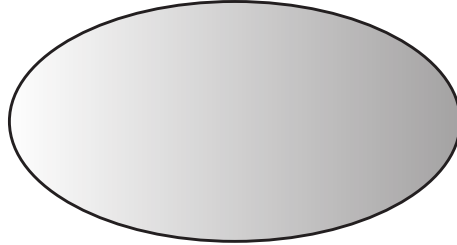


Рис. 23: Область возможного движения для камеры 2

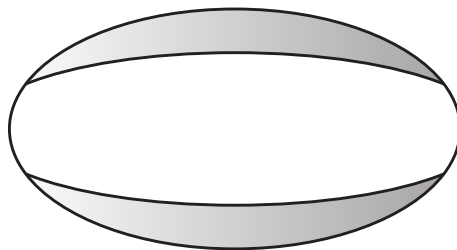


Рис. 24: Область возможного движения для камеры 4

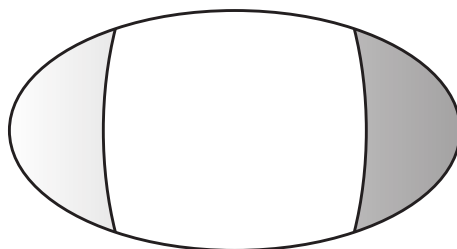


Рис. 25: Область возможного движения для камеры 1

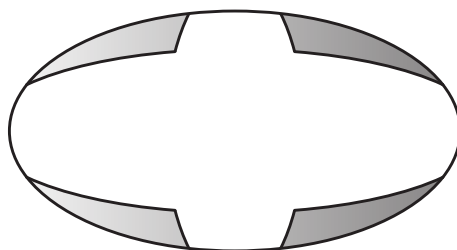


Рис. 26: Область возможного движения для камеры 3

Аналогично случаю с притягивающим потенциалом, выпишем все грубые молекулы, получившиеся в результате анализа данной бифуркационной диаграммы.

Теорема 4. *Грубые молекулы для случая с отталкивающим потенциалом имеют вид, указанный на рис. 27-29.*

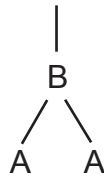


Рис. 27: Молекула 5

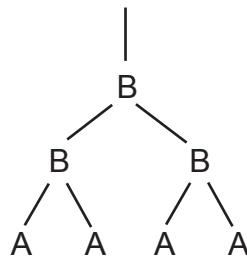


Рис. 28: Молекула 6

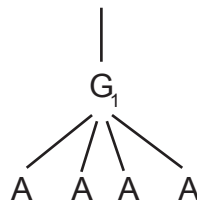


Рис. 29: Молекула 7

Доказательство. Грубые молекулы получаем таким же образом, как и в случае с притягивающим потенциалом.

На рис. 30 изображена бифуркационная диаграмма для случая с отталкивающим потенциалом с указанием уровней энергии.

Таким образом, мы получаем все изоэнергетические поверхности Q_h^3 , по которым дальше строятся грубые молекулы. Отметим теперь, при каких значениях уровня энергии h получается каждая из молекул.

Молекуле 5 соответствуют значения $h < \frac{kb}{2}$ и $h > -\frac{ka}{2}$. Молекуле 6 соответствуют значения $\frac{kb}{2} < h < -\frac{ka}{2}$ за исключением $h = -\frac{k}{2}(a-b)$. Молекуле 7 соответствует значение $h = -\frac{k}{2}(a-b)$.

Итак, в случае с отталкивающим потенциалом мы получаем пять зон уровней энергии и три молекулы.

Отметим, что в данном случае молекулы являются некомпактными, поскольку в верхней части молекул никаких атомов нет. Это связано с тем, что камеры на бифуркационной диаграмме сверху ничем не ограничены и продолжают вверх сколь угодно долго. ■

Комментарий. Опять же, по полученным грубым молекулам не удастся построить инварианты Фоменко-Цишанга, поскольку молекулы являются некомпактными. Но тем не менее, для данных молекул можно посчитать метки частично - только на тех рёбрах, где это возможно. Таким образом, в данном случае представляется возможным построение инварианта Фоменко.

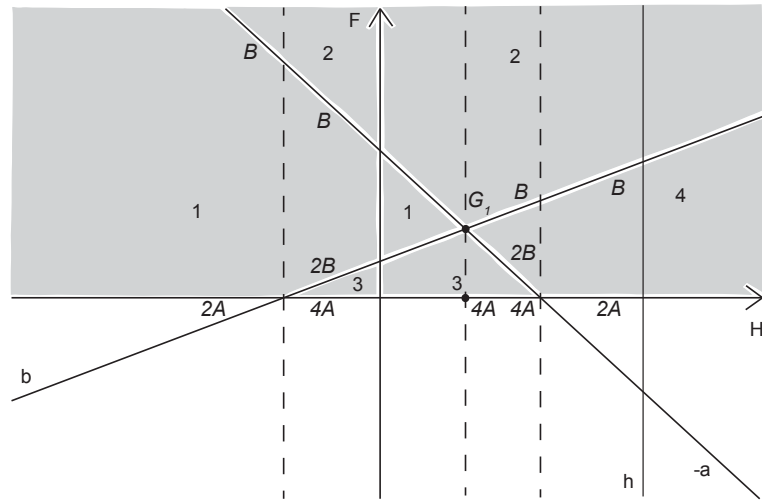


Рис. 30: Бифуркационная диаграмма для случая эллипса при $k < 0$ с указанием уровней энергии

Теорема 5. В случае молекул 5-7 инварианты Фоменко имеют вид, изображённый на рис. 31-33.

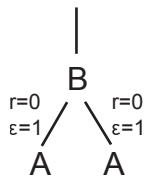


Рис. 31: Инвариант Фоменко для молекулы 5

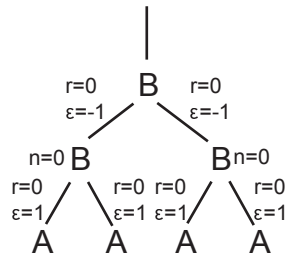


Рис. 32: Инвариант Фоменко для молекулы 6

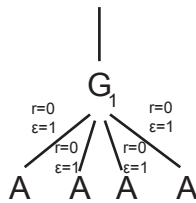


Рис. 33: Инвариант Фоменко для молекулы 7

Доказательство. В данном случае построение инвариантов Фоменко возможно для всех молекул. Эти инварианты имеют вид, изображённый на рис. 31-33. На верхних рёбрах метки посчитать нельзя, поскольку молекулы в данном случае являются некомпактными (см. комментарий выше). Поэтому для молекул 5-7 нельзя построить инвариант Фоменко-Цишанга. Опять же, в данном случае можно посчитать метки частично - только на оставшихся рёбрах. Таким образом, мы получаем инварианты Фоменко для молекул 5-7. ■

Здесь выбор циклов происходит аналогичным образом (нужно только правильно согласовать ориентацию в каждом конкретном случае). Матрицы склейки также получаются аналогично случаю с притягивающим потенциалом.

Метки n вычисляются следующим образом: для атома B метка $n = -\frac{0}{1} - \frac{0}{1} + \frac{0}{-1} = 0$, поскольку в данном случае у нас имеются два входящих ребра и одно выходящее.

3.3.4 Примечание

Можно заметить, что в случае с притягивающим потенциалом некоторые молекулы оказываются достаточно нетипичными, поскольку они завершаются особым слоем атома D_1 . Это, на первый взгляд, может показаться странным. С другой стороны, исследуемая задача носит достаточно теоретический характер (даже если говорить о том, какой здесь гамильтониан H), а интеграл фактически был нами угадан. Другие молекулы завершаются критическим тором T^2 .

В случае с отталкивающим потенциалом у нас получаются некомпактные молекулы. Но в целом, такое явление не является чем-то достаточно особенным. Некомпактные бифуркации ранее исследовались в работе С.С. Николаенко [16]. Помимо этого некомпактные бифуркации исследовались в работе Д.А. Федосеева [10], где также приведены примеры задач и систем, в которых возникают такие бифуркации.

Также ещё раз отметим, что по полученным грубым молекулам построить инвариант Фоменко-Цишанга не представляется возможным, поскольку у нас для каждой из них сверху получается либо критический тор T^2 , либо особый слой атома D_1 , либо же молекула является некомпактной (сверху ничего нет). Тем не менее, в ряде случаев здесь удаётся построить инвариант Фоменко, что и было сделано выше.

4 Заключение

4.1 Итоги работы

В настоящей работе была обнаружена интегрируемость билиардов, ограниченных дугами софокусных квадрик на плоскости Минковского, в поле с гуковским потенциалом. Также проводилось исследование билиарда в эллипсе, где в свою очередь был найден способ введения криволинейных координат с помощью соответствующего семейства софокусных квадрик на плоскости Минковского, что помогло использовать метод разделения переменных для последующего анализа.

В работе рассматривались случаи как с притягивающим, так и с отталкивающим гуковским потенциалом. Также были построены бифуркационные диаграммы для обоих случаев и получены достаточно интересные результаты.

Помимо этого для всех случаев были построены грубые молекулы. В тех случаях, когда это возможно, по грубым молекулам были построены инварианты Фоменко.

Список литературы

- [1] Биркгоф Дж.Д. Динамические системы. Издательский дом "Удмуртский университет". — Ижевск, 1999.
- [2] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т.1,2. — Ижевск НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 1999.
- [3] Ведюшкина (Фокичева) В.В., Фоменко А.Т. "Интегрируемые топологические бильярды и эквивалентные динамические системы". Известия РАН, серия: математика, **81**, №4, 2017, 20-67.
- [4] Драгович В., Раднович М. "Топологические инварианты эллиптических бильярдов и геодезических потоков на эллипсоиде". Фундаментальная и прикладная математика, **20**, №3, 2015, 51–64.
- [5] Драгович В., Раднович М. *Интегрируемые бильярды, квадратики и многомерные поризмы Понселе*. — М.; Ижевск НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010.
- [6] Каргинова Е.Е. *Бильярды, ограниченные дугами софокусных квадратики на плоскости Минковского*. - Матем. сб., 211:1 (2020), 3–31.
- [7] Козлов В.В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде. //Прикладная математика и механика, том 59, вып. 1 1995.
- [8] Козлов В.В., Трещёв Д.В. *Генетическое введение в динамику систем с ударами*. — Изд-во МГУ, М., 1991.
- [9] Табачников С.Л. *Геометрия и бильярды*. — М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2011.
- [10] Федосеев Д.А., Фоменко А.Т. Некомпактные особенности интегрируемых динамических систем // *Фундаментальная и прикладная математика*. — 2016. — Т. 21, № 6. — С. 217–243.
- [11] Фокичева В.В. "Топологическая классификация бильярдов в локально-плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадратики". Математический Сборник, **206**, №10, 2015, 127–176.
- [12] Фокичева В.В., Фоменко А.Т. "Интегрируемые бильярды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твёрдого тела". Доклады РАН, серия: математика, **465**, №2, 2015, 150-153.
- [13] Харламов М.П. Топологический анализ и булевы функции: I. Методы и приближения к классическим системам. //Нелинейная динамика, том 6, №4, 769-805.
- [14] Dragovic V., Radnovic M. "Bifrucations of Liouville tori in elliptical billiards". Математический ин-т им. В. А. Стеклова РАН, Regul. Chaotic Dyn., 14, №4-5, 2009, 479–494.
- [15] Fokicheva V.V., Fomenko A.T. "Billiard Systems as the Models for the Rigid Body Dynamics". *Studies in Systems, Decision and Control, Advances in Dynamical Systems and Control*, **69**, 13–32.
- [16] Nikolaenko S.S. Topological classification of the goryachev integrable systems in the rigid body dynamics: Non-compact case // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. — 2017. — Vol. 38, no. 6. — P. 1050–1060.