

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ПРИЛОЖЕНИЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА  
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)  
специалиста

**ОСОБЕННОСТИ СЛОЕНИЙ ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ БИЛЛИАРДОВ В  
НЕВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ**

Выполнил студент  
607 академической группы  
Москвин Виктор Александрович

---

подпись студента

Научные руководители:  
Академик Анатолий Тимофеевич Фоменко

---

подпись научного руководителя

Ассистент Ведюшкина Виктория Викторовна

---

подпись научного руководителя

Москва  
2020

## Содержание

<b>1</b>	<b>Введение.</b>	<b>3</b>
1.1	Определение бильярда. . . . .	4
<b>2</b>	<b>Бильярдная область. Однородные бильярды.</b>	<b>5</b>
2.1	Выбор бильярдной области. . . . .	5
2.2	Интегрируемость. . . . .	5
2.3	Пополнение изоэнергетической поверхности $Q^3$ особыми точками . . . . .	6
2.4	Элементарные бильярды. . . . .	6
2.5	Однородные бильярды. . . . .	7
<b>3</b>	<b>Известные результаты теории бильярдов.</b>	<b>8</b>
3.1	Описание топологии слоений Лиувилля для элементарных бильярдов. . . . .	8
3.2	Описание регулярных слоев невыпуклых бильярдов. . . . .	9
<b>4</b>	<b>Разбиение однородного бильярда на элементарные.</b>	<b>10</b>
4.1	Разбиение однородного бильярда . . . . .	10
4.2	Области возможного движения . . . . .	11
4.3	Разбиение областей возможного движения . . . . .	11
4.4	Отношение эквивалентности на невыпуклых бильярдах. . . . .	13
<b>5</b>	<b>Определение 3-атома для однородных невыпуклых бильярдов.</b>	<b>13</b>
<b>6</b>	<b>Окрестности особых слоев <math>\Lambda = \lambda_i</math>. Описание топологии атомов <math>U_{\lambda_i}</math>.</b>	<b>17</b>
6.1	Определение разрезающих комплексов $T_i$ . . . . .	18
6.2	Описание комплекса $U_{\lambda_i} \setminus \tilde{U}_{\lambda_i}$ . . . . .	18
6.3	Описание не седловых бифуркационных слоев. . . . .	19
<b>7</b>	<b>Особый слой <math>\Lambda = b</math>. Описание топологии атомов <math>U</math>.</b>	<b>24</b>
7.1	Определение 2-атомов. . . . .	24
7.2	Теорема сохранения рода. . . . .	25
7.3	Основная теорема. . . . .	26
<b>8</b>	<b>Заключение.</b>	<b>31</b>
<b>9</b>	<b>Список литературы.</b>	<b>31</b>

## 1 Введение.

Математический бильярд — динамическая система, описывающая движение без трения материальной точки внутри области с абсолютно упругим отражением от границы (угол падения равен углу отражения). В книге С.Л. Табачникова [1] дан обзор современных исследований бильярдных систем. В настоящей работе исследуются плоские бильярды, ограниченные дугами софокусных квадрик, причем допускается, что области могут быть невыпуклыми, т.е. границы бильярдных систем могут содержать вершины углов  $3\pi/2$ . Интегрируемость таких бильярдных систем была замечена В.В. Козловым и Д.В. Трещевым в [3]: первый интеграл — полная энергия, сохраняющаяся в силу отсутствия трения, а дополнительный интеграл — это параметр каустики. Каустика — это софокусная квадрика семейства, обладающая тем свойством, что если траектория касается каустики в одной точке, то она обязана касаться той же каустики после отражения от границы бильярда.

Цель данной работы — исследовать топологию изоэнергетической поверхности бильярда  $Q^3$ , некомпактного 3-многообразия пар вида  $(x, v)$ , где  $x$  — координата точки на плоскости, а  $v$  — единичный вектор скорости точки. Изоэнергетическое многообразие расслоено на совместные поверхности уровни интегралов системы, где почти все уровни являются регулярными, а конечное число уровней является критическими. Теорема Лиувилля [1] для бильярдных систем, ограниченных дугами софокусных квадрик без невыпуклых углов на границе, гарантировала, что регулярные совместные поверхности уровня интегралов — это двумерные торы, а В.В. Ведюшкиной [4 — 7] были также исследованы и критические уровни слоения Лиувилля, которые описывались с помощью атомов А.Т. Фоменко [2]. Однако, в силу того, что в вершинах невыпуклых углов невозможно корректно определить бильярдное отражение, сохранив непрерывность системы, потоки в таких бильярдах уже не будут полны, а это приведет к невыполнимости условий теоремы Лиувилля, так как невозможно корректно определить отражение в вершине  $3\pi/2$ , сохранив непрерывность системы. В. Драгович и М. Раднович [8-12] представили описание всех регулярных совместных поверхностей уровня интегралов для невыпуклых бильярдных систем: для всех значений интеграла в таких бильярдах связная компонента совместной поверхности уровня будет сферой с ручками и проколами.

Теперь, для дальнейшего исследования топологии изоэнергетической поверхности  $Q^3$  нужно описать все критические интегральные поверхности, а также, описать их окрестности, т.е. описать как именно критические поверхности уровня (не являющиеся сферами с ручками и проколами) приклеиваются к регулярным. Ранее автором было представлено полное описание топологии слоений Лиувилля в невыпуклых бильярдах с единственным углом  $3\pi/2$  (см. [18]), а в работе [19] также автором был представлен алгоритм построения двумерных особых слоев. В настоящей работе исследована топология фазового многообразия в окрестностях критических значений интеграла, а именно, дано описание трехмерных окрестностей двумерных комплексов, являющихся прообразами критических значений дополнительного интеграла. Дальнейшее исследование результатов теории математических бильярдных систем и теории интегрируемых систем см. в [7—18].

Первый тип критических уровней традиционно возникает в бильярдных системах и при переходе через этот уровень меняется тип бильярдной каустики — эллиптический на гиперболический. Второй тип критических уровней является уникальным для невыпуклых бильярдных систем и возникает, когда каустика проходит через вершины углов  $3\pi/2$ . Можно заметить, что при переходе через любой из бифуркационных уровней меняется топология совместных поверхностей уровня интегралов: меняется количество и род поверхностей, лежащих в прообразах регулярных значений интеграла. В главе 5 описана топология окрестностей бифуркационных слоев в окрестности не седлового уровня, а в главе 7 — седлового.

Автор приносит благодарность А.Т. Фоменко за постановку задачи и внимание к работе, В.В. Ведюшкиной — за многочисленные ценные обсуждения.

### 1.1 Определение бильярда.

Рассмотрим динамическую систему, описывающую движение (материальной) точки внутри области  $\Omega$  с естественным отражением на границе  $P = \partial\Omega$ . Эту систему назовём бильярдом в области. Траектории, попавшие в прямые углы, мы доопределим, как обычно, по непрерывности (попадая в вершину прямого угла, точка отражается по той же траектории). Легко видеть, что поступить так же с траекториями, попавшими в вершину угла  $3\pi/2$ , сохраняя при этом непрерывность системы (свойство, что близкие траектории после отражения остаются близкими), невозможно: так как предел траекторий справа и предел траекторий слева не совпадает (см. рис. 1). Далее будем считать, что если траектория попала в вершину угла  $3\pi/2$ , то она заканчивается в этой вершине. Обозначим вершины углов  $\pi/2$  через  $x_t$ , а углов  $3\pi/2$  через  $x_k$ . Следовательно, некомпактным фазовым пространством данного бильярда является многообразие

$$M^4 := \{(x, v) | x \in \Omega, x \neq x_k \forall k, v \in T_x^2\mathbb{R}, |v| > 0 / \sim\},$$

где отношение эквивалентности задается так:

$$(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \in P, |v_1| = |v_2|, v_1 - v_2 \perp T_{x_1}P$$

$$(x_t, v_i) \sim (x_t, v) \Leftrightarrow |v| = |v_i|, v + v_i = 0.$$

Здесь через  $T_xP$  обозначена касательная прямая к границе области  $\Omega$  в точке  $x$ , а через  $|v|$  евклидова длина вектора  $v$ . Это отношение эквивалентности иногда будем называть бильярдным законом. Для удобства изучения топологии мы перейдем от рассмотрения

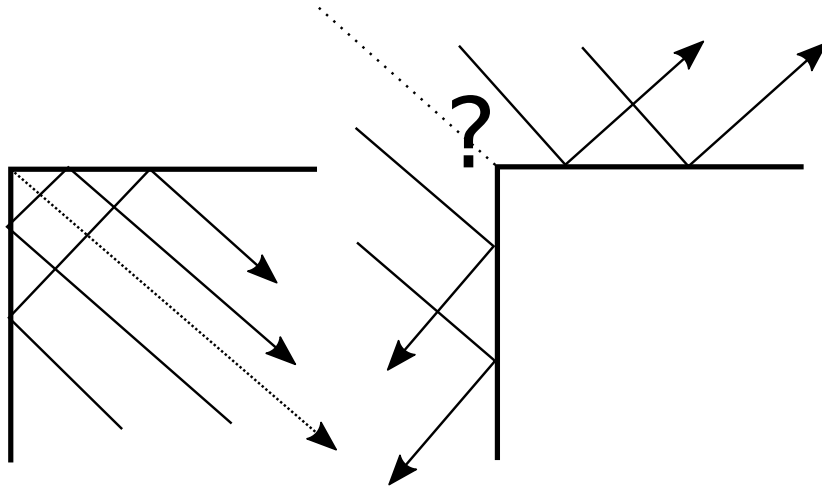


Рис. 1: Отражение точки от вершины прямого угла (слева) и иллюстрация невозможности корректного продолжения траектории при отражении от вершины тупого угла (справа)

фазового пространства  $\tilde{M}^4$  к пополненному фазовому пространству  $M^4$  в который включены точки вида  $(x_k, v_0)$ , где  $v_0 = 0$ . Отметим, что  $M^4$  уже не будет являться фазовым пространством бильярда  $\Omega$ , однако  $\tilde{U}^4$  будет тривиальным образом восстанавливаться из  $U^4$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Сложностью бильярда назовем число  $k$  — число углов излома граничной кривой, равных  $\frac{3\pi}{2}$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Кусочно-гладкое (некомпактное) 3-многообразиие

$$\tilde{Q}^3 = \{x \in M^4 : |v(x)| = \text{const}\}$$

с краем назовем «настоящей» изоэнергетической 3-поверхностью данного бильярда (см. главу 2.3).

**Замечание 1.** Каждой точке бильярдной области  $\Omega$  соответствует окружность векторов скорости, за исключением вершин углов  $\pi/2$  или  $3\pi/2$ . Подробное доказательство этого факта можно найти в [3].

## 2 Бильярдная область. Однородные бильярды.

### 2.1 Выбор бильярдной области.

Мы будем понимать под бильярдной областью  $\Omega$  односвязную область плоскости, ограниченную дугами софокусных квадрик из семейства:

$$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (a - \lambda)(b - \lambda), \quad \lambda \leq a.$$

Здесь  $\infty > a > b > 0$  — фиксированная пара чисел (определяющая семейство софокусных квадрик),  $\lambda$  — параметр семейства (определяющий квадрику семейства). При  $\lambda \in (0, a)$ , где  $\lambda \neq b$ , — это эллипсы или гиперболы. При  $\lambda = b$  — это объединение вырожденной гиперболы (образованной двумя горизонтальными лучами из фокусов) и вырожденного эллипса (отрезка между фокусами). Вертикальную прямую, соответствующую параметру  $\lambda = a$ , мы будем называть гиперболой (а не вырожденной гиперболой), хоть по сути это вертикальный отрезок, но это не будет влиять на дальнейшие рассуждения. Также потребуем, чтобы бильярд  $\Omega$  не содержал фокусов вне области или на ее границе. В дальнейшем под термином бильярд  $\Omega$  будет пониматься и динамическая система, и область одновременно.

### 2.2 Интегрируемость.

Первым интегралом гамильтоновой системы называется постоянная вдоль траекторий функция. Мы ограничимся рассмотрением плоских бильярдов, ограниченных дугами софокусных квадрик, и интегрируемость таких бильярдов была замечена В.В. Козловым и Д.В. Трещевым [3]. Первый интеграл — полная энергия, которая сохраняется в силу отсутствия трения в системе. Дополнительный интеграл — это параметр каустики. Каустика — это софокусная квадрика семейства, обладающая тем свойством, что если траектория касается каустики в одной точке, то она обязана касаться той же каустики после отражения от границы бильярда. Представим их формульную запись:

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

(полная энергия)

$$\Lambda = \frac{\dot{x}^2}{a} + \frac{\dot{y}^2}{b} - \frac{(\dot{x}y - x\dot{y})^2}{ab}$$

(параметр каустики)

Здесь  $a$  и  $b$  — параметры семейства софокусных квадрик (см. 2.1).

### 2.3 Пополнение изоэнергетической поверхности $Q^3$ особыми точками

Несмотря на невозможность определения корректного отражения в вершине угла  $3\pi/2$ , удобно рассматривать точки вида  $(x_k, v) \in Q^3$ , как настоящие, а не выколотые точки многообразия. Расслоим  $\tilde{Q}^3$  на линии уровня функции  $A = \alpha$  и пополним изоэнергетическую поверхность  $\tilde{Q}^3$  следующим образом: на каждый уровень  $A = \alpha$ , где в вершину  $x_k$  угла  $3\pi/2$  попадает хотя бы одна траектория, добавим одну точку  $(x_k, v_0)$ , где  $A(x_k, v_0) = \alpha$ . Обозначим получившуюся поверхность через  $Q^3$  и в дальнейшем будем изучать именно ее.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.** Назовем естественной проекцией  $\pi$  многообразия  $Q^3$  на бильярдную область  $\Omega$  гладкое отображение, действующее по правилу  $(x, v) \rightarrow x$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.** Назовем особыми точками области (бильярда) вершины углов  $3\pi/2$ , а особыми точками многообразия  $Q^3$  — прообразы при естественной проекции  $\pi$  особых точек области.

**Замечание 2.** Вершины угла  $\pi/2$  не будут считаться особыми точками бильярда, так как в них задано корректно определённое по непрерывности отражение (см. рис 1, см. пункт 1.1).

Рассмотрим интегрируемый бильярд  $\Omega$  с дополнительным интегралом  $A$ . Часто будет рассматриваться полный прообраз множества точек  $A \subset \Omega$  при естественной проекции  $\pi$  и при фиксированных значениях интеграла  $A(x, y, v_1, v_2) \in [c, d]$ . Это множество задается как

$$\pi^{-1}(A)|_{A \in [c, d]} = \{(x, v) \in Q^3 : x \in A, A(x, v) \in [c, d]\}.$$

### 2.4 Элементарные бильярды.

Начнем с определения элементарного бильярда — бильярда без особых точек, топология слоения Лиувилля для таких бильярдов была изучена В.В. Ведюшкиной в работе [4].

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.** Рассмотрим компактный плоский (часть плоскости) односвязный бильярд без особых точек (вершин угла  $3\pi/2$ ), ограниченный дугами софокусных квадрик. Такой бильярд будем называть элементарным бильярдом.

Приведем отношение эквивалентности на множестве элементарных бильярдов, данное в работах В.В. Ведюшкиной.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.** Элементарный бильярд  $\Sigma$ , ограниченный дугами квадрик из софокусного семейства, называется эквивалентным другому элементарному бильярду  $\Sigma'$ , ограниченному дугами квадрик из того же семейства, если  $\Sigma$  можно получить из  $\Sigma'$  путем композиции перечисленных ниже преобразований.

1. Последовательное изменение сегментов границы путем непрерывной деформации в классе квадрик. Потребуем, чтобы во все время деформации сегмент границы лежал либо на софокусном эллипсе (т.е. их параметр квадрики, на которой он лежит, меняется в пределах  $(-\infty, b)$ ), либо на софокусной гиперболе (т.е. параметры квадрики, на которой он лежит, меняется в пределах  $(b, a]$ ), либо является отрезком фокальной прямой (т.е. параметр софокусной квадрики, на которой он лежит, равен  $b$  во все время деформации);
2. Симметрия относительно оси семейства;

3. Объединение нескольких простейших элементарных билиардов в один или же путем разбиения одного билиарда на более мелкие (объединение и разбиение как подмножеств  $\mathbb{R}^2$ ).

Также В.В. Ведюшкиной элементарные билиарды были классифицированы с точностью до указанного выше отношения эквивалентности.

**Утверждение 1** (В.В. Ведюшкина [4]). *Любой односвязный элементарный билиард  $\Sigma$  эквивалентен билиарду, принадлежащему одному из следующих двух серий (все они представлены на рисунках):*

1. Односвязные элементарные билиарды содержащие отрезок фокальной прямой между фокусами (внутри билиарда или на границе). Существует ровно шесть типов. Представители всех классов этой серии изображены на рисунке 2. Для каждого класса укажем  $f$  — количество фокусов, принадлежащих области,  $f'$  — число фокусов принадлежащих границе билиарда. Такие билиарды будем обозначать  $A_f$ , если их граница не содержит отрезок фокальной прямой, и  $A'_f$  иначе.
2. Односвязные элементарные билиарды не содержащие отрезка фокальной прямой между фокусами. Каждый такой билиард ограничивает четырёхугольник, состоящий из дуг двух эллипсов и двух гипербол (быть может совпадающих). Существует ровно шесть типов. Представители всех классов этой серии изображены на рисунке 3. Такие билиарды будем обозначать либо  $B_n$ , либо  $B'_n$ , либо  $B''_n$  в зависимости от того, ноль, один или два отрезка границы лежат на фокальной прямой, где  $n$  — это количество связных компонент фокальной прямой в билиарде. Будем называть их билиардами типа  $B$ .

При этом области, принадлежащие к различным сериям ( $A$  или  $B$ ) неэквивалентны между собой, а также неэквивалентны между собой внутри каждой серии области с различными индексами.

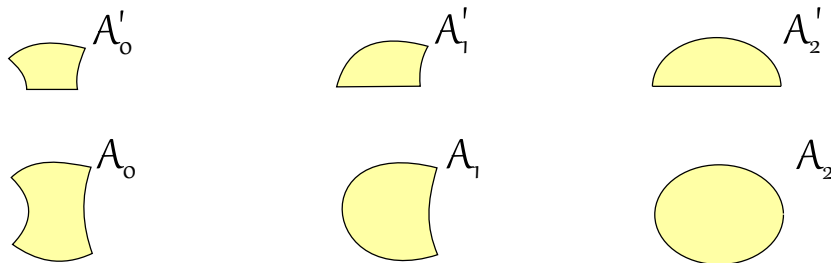
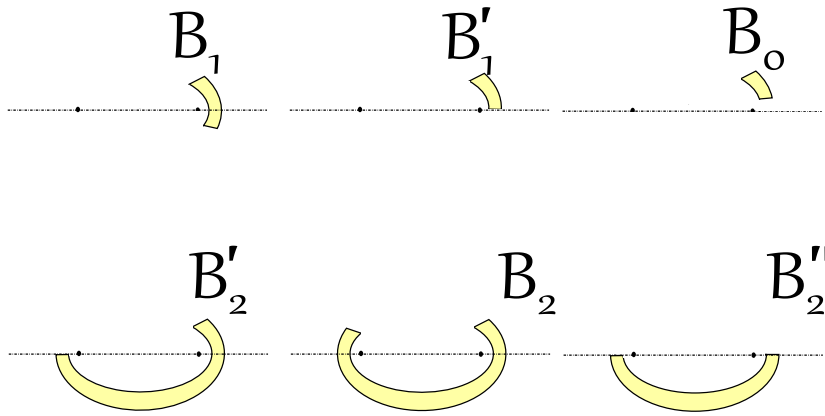


Рис. 2: Элементарные билиарды серии  $A$ .

## 2.5 Однородные билиарды.

Наличие внутри билиарда сегментов фокальной прямой одновременно вне и внутри фокусов значительно усложняет топологию бифуркационных уровней. Поэтому мы сузим класс рассматриваемых билиардов до однородных билиардов.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.** Рассмотрим плоский (не обязательно элементарный) билиард  $\Omega$  произвольной сложности  $k$ . Если билиард  $\Omega$  не содержит участка фокальной прямой между фокусами (сегментов вырожденного эллипса), то назовем его однородно-эллиптическим. Если любой связный сегмент фокальной прямой, содержащийся в билиарде  $\Omega$ , лежит между фокусами, то назовем его однородно-гиперболическим. В ином случае, будем

Рис. 3: Элементарные билиарды серии  $B$ .

называть его неоднородным. Билиард  $\Omega$ , который не пересекает фокальную прямую, будем считать и однородно-гиперболическим, и однородно-эллиптическим (см. рис. 4).

**Замечание 3.** Однородно-эллиптическими элементарными билиардами являются все билиарды серии  $B$ , однородно-гиперболическими элементарными билиардами — билиарды  $A_0$ ,  $A'_0$  и  $B_0$ . Остальные элементарные билиарды неоднородны (элементарный билиард  $B_0$  одновременно однородно-эллиптический и однородно-гиперболический, так как не пересекает фокальную прямую).

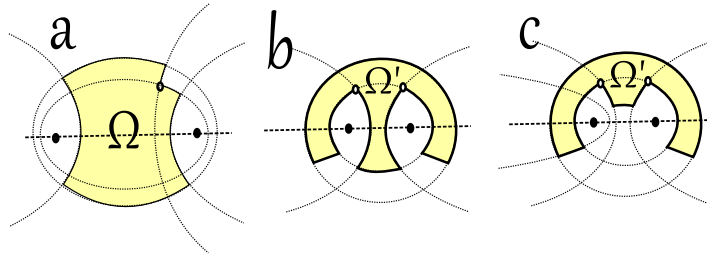


Рис. 4: а — пример однородно-гиперболического билиарда, б — пример неоднородного билиарда, с — пример однородно-эллиптического билиарда

### 3 Известные результаты теории билиардов.

#### 3.1 Описание топологии слоений Лиувилля для элементарных билиардов.

Начнем с определения критических и регулярных значений дополнительного интеграла  $\Lambda$ .

Зафиксируем  $H = const$  и ограничим наше многообразие  $M^4$  на изоэнергетическую поверхность  $Q^3$ . Тогда, в случае элементарных билиардов у слоения Лиувилля было три особых уровня:  $\Lambda = 0$ ,  $\Lambda = b$  и  $\Lambda = a$ . Топология  $Q^3$  в элементарных билиардах менялась только при переходе дополнительного интеграла через эти значения. А в теории билиардов с невыпуклыми углами к ним также добавятся  $2k$  новых особых значений дополнительного интеграла  $\Lambda$  при переходе через которые топология  $Q^3$  изменится, где  $k$  — сложность билиарда (см. опр. 1), а именно, число углов излома граничной кривой билиарда, равных  $3\pi/2$ .



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Фиксируем бильярд  $\Omega$ . Граница области  $\Omega$  образована сегментами эллипсов и гипербол семейства. Если эти сегменты границы не содержат особых точек, то обозначим через  $\min_i$  и  $\max_j$  значения параметра  $\Lambda$ , которым соответствуют эллиптические и гиперболические сегменты границы области  $\Omega$  такого типа. Если область  $\Omega$  имеет непустое пересечение с прямой  $Oy$ , то дополним набор  $\max_j$  значением  $a$ . Значение параметра  $\Lambda$  сегментов границы, на которых лежат особые точки, обозначим через  $\lambda_i$ .

Назовем особыми следующие значения интеграла  $\Lambda$ :

1. (Локально) минимальные значения интеграла  $\Lambda = \min_i$ ;
2. Седловое значение интеграла  $\Lambda = b$ ;
3. (Локально) максимальные значения интеграла  $\Lambda = \max_j$ ;
4. Значения  $\Lambda = \lambda_i$ , где  $1 \leq i \leq 2k$  (так как каждая особая точка лежит либо на пересечении эллипса и гиперболы семейства, либо гиперболы и вырожденного эллипса).

В. В. Ведюшкиной [4] были построены инварианты Фоменко-Цишанга для элементарных бильярдных, приведем только часть ее результата — описание грубых молекул.

**Теорема 1** (В.В. Ведюшкина). *Прообраз  $b-\varepsilon \leq \Lambda \leq b+\varepsilon$  в изоэнергетической поверхности  $Q^3$  элементарного бильярда  $\Sigma$  при достаточно малом значении  $\varepsilon$  гомеоморфен следующим трёхмерным многообразиям (перечисленные ниже атомы трёхмерные):*

1. атом  $B$  для областей  $A_2, A_0$ ;
2. атом  $A^*$  для области  $A_1$ ;
3. атом  $B_n$  для  $B_n, B'_{n+1}$ , где  $n > 0$ ;
4. произведение тора на отрезок для областей  $A'_2, A'_1, A'_0, B_0, B'_1, B''_2$ ;

### 3.2 Описание регулярных слоев невыпуклых бильярдных.

Предоставим описание регулярных слоёв интеграла для бильярдных с  $k \neq 0$ . Ранее описание регулярных слоёв бильярдных произвольной сложности возникало в работах В. Драгович и М. Раднович [4-6], эти работы базируются на анализе динамики интегральных траекторий.

**Теорема 2** (В. Драгович, М. Раднович). *Для всех неособых значений интеграла поверхность уровня интеграла  $\Lambda$  в изоэнергетической поверхности  $Q^3$  бильярда  $\Omega$  гомеоморфна объединению поверхностей рода  $(k' + 1)$ , где  $k'$  — количество особых точек вне интегрального эллипса, если  $\Lambda < b$ , или внутри интегральной гиперболы, если  $\Lambda > b$  (в «настоящей» изоэнергетической поверхности  $\tilde{Q}^3$  на каждом уровне будет выколото  $k'$  точек).*

Любая регулярная поверхность уровня для произвольного бильярда  $\Omega$  будет гомеоморфна сфере с некоторым количеством ручек и проколов (будем обозначать такую сферу через  $G_2^{(k'+1)}$ ) и как видно из теоремы 2, род этой поверхности меняется при изменении  $k'$  — числа особых точек в области возможного движения. Таким образом, сформулируем ключевую идею изучения топологии слоения Лиувилля для невыпуклых бильярдных — на критических значениях интеграла ( $\Lambda = b$  и  $\Lambda = \lambda_i$ ) меняется  $k'$  и, как следствие теоремы 2, меняется топология совместных поверхностей уровней  $\Lambda = \alpha$  (см. рис. 5, рис. 6).

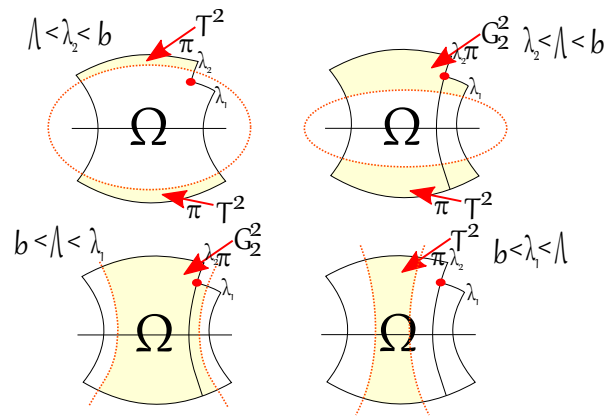


Рис. 5: Области возможного движения при различных регулярных значениях интеграла и их прообразы в  $Q^3$ .

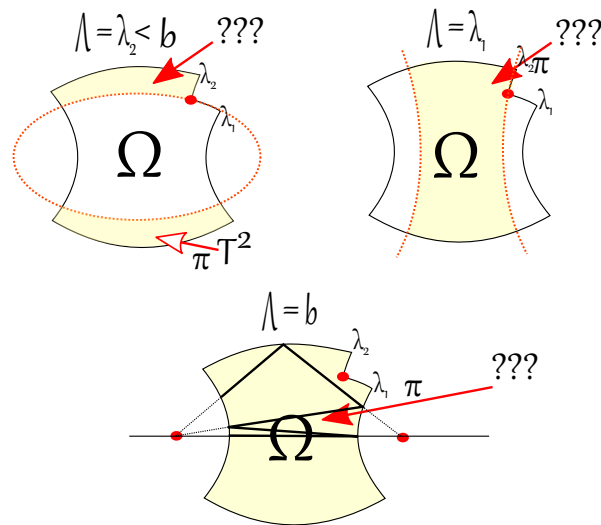


Рис. 6: Области возможного движения при критических значениях интеграла.

## 4 Разбиение однородного биллиарда на элементарные.

### 4.1 Разбиение однородного биллиарда

Главной идеей изучения топологии многообразия  $Q^3$  будет разрезание этого многообразия на более мелкие и простые части. Для этого мы сначала разобьем биллиард  $\Omega$  на элементарные биллиарды  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$  специальным образом, а потом «поднимем» это разбиение на уровень многообразия  $Q^3$  с помощью естественной проекции  $\pi : Q^3 \rightarrow \Omega$ , где  $\pi(x, v) = x$ . Так как топология окрестности особого слоя для элементарных биллиардов уже изучена, то мы сможем использовать это для построения топологии  $Q^3$ .

Представим способ выбора разбиения на однородном биллиарде: будем разрезать по одному типу квадратик, которые проходят через особые точки.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.** Рассмотрим однородно-гиперболический биллиард  $\Omega$  произвольной сложности  $k$ . Будем выбирать на нем разбиение  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$  следующим образом: проведем все, в том числе и вырожденную, гиперболы на которых лежат особые точки (вершины углов  $3\pi/2$ ).

В результате биллиард  $\Omega$  разобьётся на не более чем  $2k$  элементарных биллиардов  $\Sigma$

(несколько особых точек могут лежать на одной гиперболе (эллипсе)).

Назовем такое разбиение однородного бильярда разбиением  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$ , числом  $N$  будем обозначать количество элементов в нем, а через  $n$  обозначим количество гипербол  $\lambda_i$  по которым совершались разрезы.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.** Рассмотрим однородно-эллиптический бильярд  $\Omega$  произвольной сложности  $k$ . Будем выбирать на нем разбиение  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$  следующим образом: проведем все, в том числе и вырожденный, эллипсы на которых лежат особые точки (вершины углов  $3\pi/2$ ).

В результате бильярд  $\Omega$  разобьётся на не более чем  $2k$  элементарных бильярдов  $\Sigma$  (несколько особых точек может лежать на одном эллипсе).

Назовем такое разбиение однородного бильярда разбиением  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$ , числом  $N$  будем обозначать количество элементов в нем, а через  $n$  обозначим количество эллипсов  $\lambda_i$  по которым совершались разрезы.

В обоих определениях  $N > n$ , так как разрез по каждой квадрике добавляет хотя бы один новый элементарный бильярд  $\Sigma_j$  в разбиение.

## 4.2 Области возможного движения

Выше мы выбрали разбиение всего бильярда  $\Omega$  на элементарные бильярды. Однако, бильярдное движение не обязательно происходит внутри целого бильярда, т.е. при некоторых значениях дополнительного интеграла  $A = \alpha$  некоторые точки  $x \in \Omega$  могут не оснащаться ни одним вектором скорости. Подробнее, фиксируем значение дополнительного интеграла  $A = \alpha$  и рассмотрим такие точки  $x \in \Omega$  бильярда  $\Omega$ , в которых существует такой вектор скорости  $v$ , чтобы пара  $(x, v)$  лежала в  $Q^3$  и  $A(x, v) = \alpha$ . В силу теоремы Якоби-Шаля [1] в бильярдах существует три типа областей возможного движения в зависимости от  $\alpha$ :

1. Если  $\alpha < b$ , то область возможного движения заполняет бильярд  $\Omega$  вне эллипса семейства с параметром  $\lambda = \alpha$ ;
2. Если  $\alpha = b$ , то область возможного движения заполняет весь бильярд  $\Omega$ ;
3. Если  $\alpha > b$ , то область возможного движения заполняет бильярд  $\Omega$  внутри гиперболы семейства с параметром  $\lambda = \alpha$ .

## 4.3 Разбиение областей возможного движения

Теперь разобьем не только целый однородный бильярд  $\Omega$  на элементарные бильярды, но и все возможные области возможного движения, возникающие в бильярде  $\Omega$  при фиксировании значений дополнительного интеграла  $A = \alpha$ . Очевидно, что в таком случае разрезы будут проводиться по некоторому подмножеству квадрик  $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n} \subseteq \lambda_1, \dots, \lambda_n$ , так как некоторые квадрики  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  могут оказаться вне области возможного движения. Таким образом, зафиксировав разбиение однородного бильярда  $\Omega$  на элементарные бильярды  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$ , мы фиксируем также и разбиение всех возможных областей движения на элементарные бильярды  $\Sigma'_1, \dots, \Sigma'_{N'}$ , где каждый элементарный бильярд  $\Sigma'_1, \dots, \Sigma'_{N'}$  эквивалентен некоторому бильярду из множества  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$  (см. рис. 7).

Теперь уточним определение граничной дуги гиперболы  $\lambda_i$ . Сначала дадим определение для однородно-гиперболического бильярда, потом — для однородно-эллиптического.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.** Рассмотрим однородно-гиперболический бильярд  $\Omega$  с выбранным на нем разбиением  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$ . Назовем граничной дугой гиперболы  $\lambda_i$  объединение всех

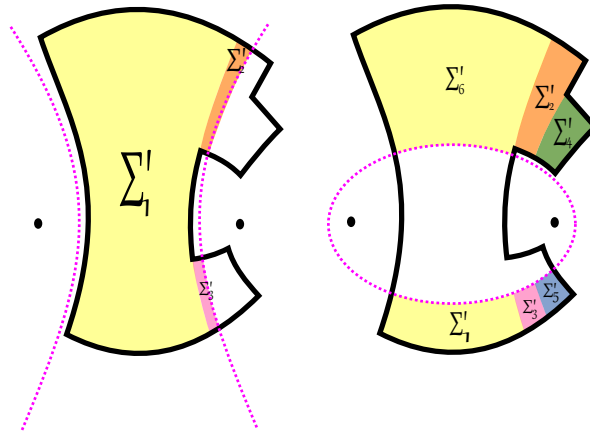


Рис. 7: Фиолетовым изображена каустика, белые участки бильярда не входят в область возможного движения. Изображен пример разбиения области возможного движения при эллиптических значениях интеграла (справа) и при гиперболических значениях интеграла (слева).

сегментов границ элементарных бильярдov  $\Sigma_j$  лежащих на гиперболе с параметром  $\lambda_i$  (см. рис. 8)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Рассмотрим однородно-эллиптический бильярд  $\Omega$  с выбранным на нем разбиением  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$ . Назовем граничной дугой эллипса  $\lambda_i$  объединение всех сегментов границ элементарных бильярдov  $\Sigma_j$  лежащих на эллипсе с параметром  $\lambda_i$ .

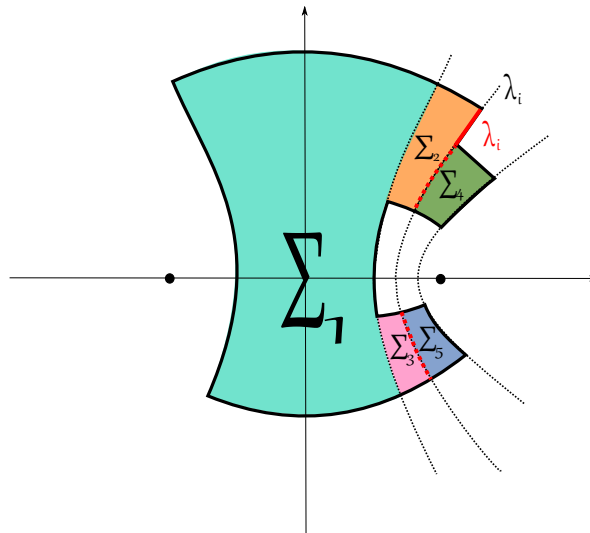


Рис. 8: Пример однородно-гиперболического бильярда  $\Omega$  с выбранным на нем разбиением. Черным пунктиром обозначена гипербола с параметром  $\lambda_i$ , а красным — дуга граничной гиперболы  $\lambda_i$ .

Отметим, что дуги граничной квадрики определённые подобным образом действительно могут быть несвязными, так как некоторые границы между элементарными бильярдами разбиения — внутренние. Однако, для будущего анализа нам проще рассматривать границы между элементарными бильярдами разбиения как настоящие границы, на некоторых сегментах которых отменен бильярдный закон. В дальнейшем под  $\lambda_i$  будут подразумеваться граничные дуги гиперболы с параметром, также обозначаемым  $\lambda_i$ .

#### 4.4 Отношение эквивалентности на невыпуклых биллиардах.

Зададим отношение эквивалентности на множестве однородных биллиардов. Теперь рассмотрим два однородных биллиардов  $\Omega$  и  $\Omega'$  с выбранными на них разбиениями на элементарные биллиарды  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$  и  $\Sigma'_1, \dots, \Sigma'_N$  соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Однородный биллиард  $\Omega$ , ограниченный дугами квадратик из софокусного семейства, называется эквивалентным другому однородному биллиарду  $\Omega'$ , ограниченному дугами квадратик из того же семейства, если:

1. между множествами элементарных биллиардов  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$  и  $\Sigma'_1, \dots, \Sigma'_N$  существует биекция  $E$ , причем  $E(\Sigma_j) \sim \Sigma'_j$  в смысле предыдущего определения;
2. если элементарные биллиарды  $\Sigma_j$  и  $\Sigma_i$  пересекались по сегменту граничной дуги  $\lambda_{i,t}$  и на дуге  $\lambda_{i,t}$  лежало  $t$  особых точек, то элементарные биллиарды  $E(\Sigma_j)$  и  $E(\Sigma_i)$  вновь пересекутся по дуге граничной гиперболы с таким же количеством особых точек  $t$  на ней (см. рис. 9).

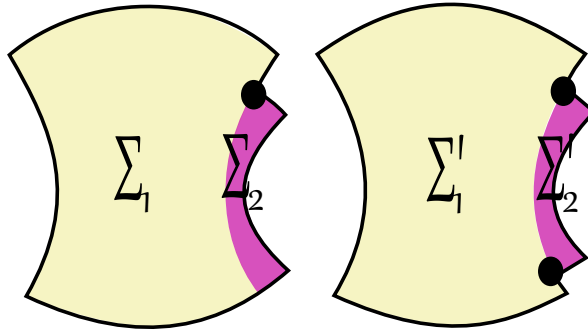


Рис. 9: Пример двух неэквивалентных в смысле определения 13 биллиардов. Нарушается условие 2:  $\Sigma_1 \sim \Sigma'_1$  и  $\Sigma_2 \sim \Sigma'_2$  как элементарные биллиарды, однако, условие два, очевидно, не выполняется. Отметим, что в силу Теоремы 2 слоение Лиувилля у правого и левого биллиарда будут отличаться.

В дальнейшем все биллиарды предполагаются однородными, рассматриваемыми с точностью до эквивалентности в смысле определения 7.

## 5 Определение 3-атома для однородных невыпуклых биллиардов.

Для исследования биллиардов с невыпуклыми углами на границе области следует расширить определение атома, так как на совместных поверхностях уровня интеграла могут лежать выколотые точки, а, как следствие, окрестности поверхностей уровня интегралов удобнее рассматривать как клеточные комплексы. Дадим определение для атома на критическом, не минимаксном, уровне  $c$  ( $c = b$  или  $c = \lambda_i$  для некоторого  $i$ ).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Трехмерным атомом (3-атомом) назовем трехмерную окрестность  $U \subset Q^3$  двумерного особого слоя  $G$ , задаваемую неравенством

$$c - \varepsilon \leq \Lambda \leq c + \varepsilon$$

для достаточно малого  $\varepsilon$ , расслоенную на двумерные поверхности уровня функции  $\Lambda$  и рассматриваемую с точностью до послышной эквивалентности. Трехмерный атом для окрестности особого уровня  $\Lambda = b$  обозначим через  $U$ , для  $\lambda = \lambda_i$  — через  $U_{\lambda_i}$ .

Также обозначим через  $U_{(\lambda_i)}$  окрестность произвольного особого слоя. Рассмотрим однородный билиард  $\Omega$  с выбранным на нем разбиением  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$  с граничными гиперболами (эллипсами)  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Также обозначим через  $\Omega_c^+$  — область возможного движения при фиксированном дополнительном интеграле  $\Lambda = c + \varepsilon$ , через  $\Omega_c^-$  — при фиксированном дополнительном интеграле  $\Lambda = c - \varepsilon$ , а через  $\Omega_c$  — область возможного движения при фиксированном дополнительном интеграле  $\Lambda = c$ . Заметим, что в силу определения билиардной каустики (см. 2.2), граница областей возможного движения на всех уровнях интеграла, кроме уровня  $\Lambda = b$ , содержит сегменты каустики.

1. Выберем 0-клетки. Рассмотрим билиард  $\Omega$  и области возможного движения  $\Omega_c^-$ ,  $\Omega_c$ ,  $\Omega_c^+$ , зафиксировав дополнительный интеграл  $\Lambda$  равным  $c - \varepsilon$ ,  $c$  или  $c + \varepsilon$  соответственно. На всех трех областях возможного движения проведем: все граничные квадрики  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  из разбиения  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$ , а в случае  $c = b$  дополнительно проведем фокальную прямую. Рассмотрим пересечения проведенных квадриков с границами областей возможного движения  $\Omega_c^-$ ,  $\Omega_c$ ,  $\Omega_c^+$ . Обозначим данное множество точек через  $P$ . 0-клетками трехмерных комплексов  $U_{(\lambda_i)}$  будут прообразы при естественной проекции  $\pi$  выбранных вершин пересечений при заданных значениях дополнительного интеграла  $\Lambda$  (см. пример на рис. 10).

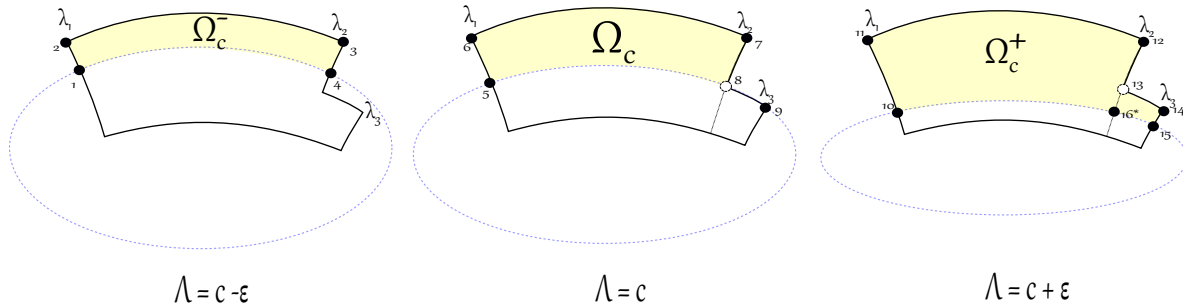


Рис. 10: Пример 0-клеток комплекса  $U_{\lambda_2}$  для билиарда, изображённого на рисунке с зафиксированными значениями дополнительного интеграла  $\Lambda = \lambda_2 - \varepsilon$  (слева),  $\Lambda = \lambda_2$  (в центре) и  $\Lambda = \lambda_2 + \varepsilon$  (справа). Области возможного движения обозначены желтым. Всего в комплексе  $U_{\lambda_2}$  17 0-клеток, а множество  $P$  состоит 16 элементов. Если номер точки из  $P$  помечен звездочкой, то в данную точку проецируются естественной проекцией  $\pi$  две 0-клетки из  $U_{\lambda_2}$ , иначе — одна. Белым отмечены особые точки билиарда  $\Omega$ .

2. 1-клетки комплекса  $U_{(\lambda_i)}$  будут двух разных типов, то есть  $U_{(\lambda_i)}^1 = U_{(\lambda_i)}^{1,1} \cup U_{(\lambda_i)}^{1,2}$ . Первый тип 1-клеток комплекса  $U_{(\lambda_i)}$  — это связные в  $U_{(\lambda_i)}$  прообразы при естественной проекции  $\pi$  точек из множества  $P$  при всех значениях дополнительного интеграла  $\Lambda$  из множества  $(c - \varepsilon, c) \cap (c, c + \varepsilon)$ . Связные прообразы при естественной проекции  $\pi$  — это в точности такие пары  $(x, v) \in U_{(\lambda_i)}$ , где векторы скорости  $v$  направлены в одном направлении (от правого фокуса, от левого фокуса, к правому фокусу или к левому фокусу) на каждом уровне интеграла  $\Lambda$ . Построим теперь второй тип 1-клеток, рассмотрим все ограниченные точками из  $P$  связные сегменты границ областей возможного движения  $\Omega_c^+$ ,  $\Omega_c$  и  $\Omega_c^-$  (эллиптические и гиперболические) и сегменты квадрики  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , обозначим множество таких сегментов через  $Q$ . Также, в случае седлового атома  $\Lambda = b$ , добавим в  $Q$ , если таковой имеется, сегмент фокальной прямой между точками из  $P$ . Второй тип 1-клеток — это все связные прообразы сегментов квадрики из  $Q$  при естественной проекции  $\pi$ , при фиксированных значениях интеграла  $\Lambda = c - \varepsilon$ ,  $\Lambda = c$  и  $\Lambda = c + \varepsilon$  (см. пример на рис. 11).

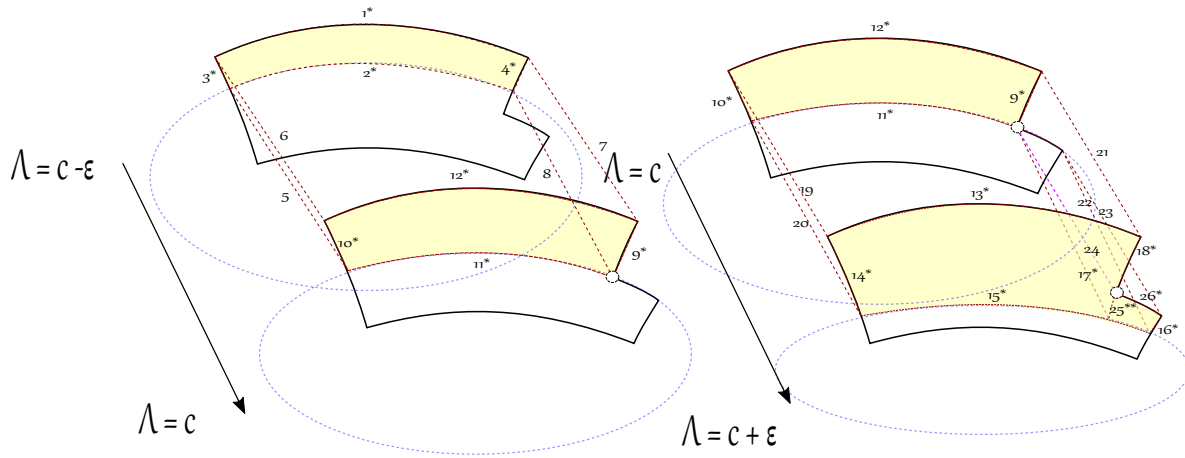


Рис. 11: Пример 1-клеток комплекса  $U_{\lambda_2}$  для биллиарда, изображённого на рисунке. Желтым обозначены области возможного движения. Слева изображены 1-клетки, соответствующие значениям дополнительного интеграла  $\Lambda \leq c$ , справа —  $\Lambda \geq c$ . Всего в комплексе  $U_{\lambda_2}$  будет 46 одномерных клетки (они отмечены красным цветом), из них 14 клеток первого типа и 32 второго (множество  $Q$  состоит из 15 элементов). Если номер отрезка помечен звездочкой, то в данный отрезок проектируется две клетки из  $U_{\lambda_2}$  при естественной проекции  $\pi$ , если двумя звездочками — четыре, иначе — одна. Белым отмечены особые точки.

3. Построим 2-клетки, для этого вновь рассмотрим множество граничных квадрик  $Q$ , построенных в предыдущем пункте. 2-клеток вновь будет два типа, то есть  $U_{(\lambda_i)}^2 = U_{(\lambda_i)}^{2,1} \cup U_{(\lambda_i)}^{2,2}$ . Первый тип 2-клеток — это связные компоненты при естественной проекции  $\pi$  квадрик из  $Q$  при всех значениях дополнительного интеграла  $\Lambda$  из множества  $\Lambda \in (c - \epsilon, c) \cap (c, c + \epsilon)$ . Второй тип 2-клеток — это связные прообразы пересечений областей возможного движения  $\Omega_c^-, \Omega_c$  и  $\Omega_c^+$  с элементарными биллиардами разбиения  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$  при фиксированных значениях дополнительного интеграла  $\Lambda = c - \epsilon, \Lambda = c$  и  $\Lambda = c + \epsilon$  соответственно (см. пример на рис. 12).
4. Завершим построение комплексов  $U_{(\lambda_i)}$ , построив трехмерные клетки. Рассмотрим произвольное значение интеграла  $\Lambda = \alpha \in [c - \epsilon, c + \epsilon]$  и область возможного движения  $\Omega_\alpha$  для такого значения интеграла. Рассмотрим связные компоненты прообразов при естественной проекции  $\pi$  пересечений внутренностей областей возможного движения  $\Omega_\alpha$  с элементарными биллиардами разбиения  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$ . Эти связные прообразы еще раз разобьем на две части по значениям дополнительного интеграла  $\Lambda$ , разрезав клетки по линии уровня функции  $\Lambda = c$  (см. пример на рис. 13).

**Утверждение 2.** *Рассмотрим однородный биллиард  $\Omega$  с выбранным на нем разбиением  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$  с граничными гиперболами (эллипсами)  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Данное выше определение комплексов  $U$  и  $U_{\lambda_i}$  корректно, то есть, все указанные клетки действительно гомеоморфны дискам соответствующей размерности и все свойства CW-комплексов выполнены.*

*Доказательство.* 1. Проверим, что  $n$ -мерные клетки действительно гомеоморфны  $n$ -мерным дискам и что граница  $i$ -мерной клетки содержится в объединении клеток меньшей размерности. Без ограничения общности, рассмотрим однородно-гиперболический биллиард  $\Omega$  с выбранным на нем разбиением на элементарные биллиарды  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$ . Рассмотрим сначала не седловой особый уровень дополнительного интеграла  $\Lambda =$

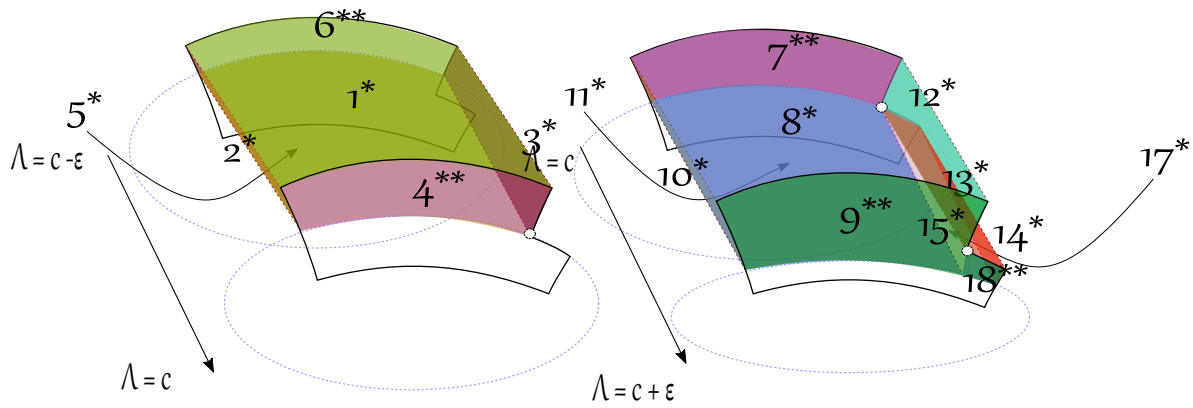


Рис. 12: Пример 2-клеток комплекса  $U_{\lambda_2}$  для бильярда, изображённого на рисунке. Слева изображены 2-клетки, соответствующие значениям дополнительного интеграла  $\Lambda \leq c$ , справа —  $\Lambda \geq c$ . Всего в комплексе  $U_{\lambda_2}$  будет 46 двумерные клетки. Из них 26 клетки первого типа и 20 клеток второго типа. Если номер поверхности помечен звездочкой, то в данную поверхность проектируется две клетки из  $U_{\lambda_2}$  при естественной проекции  $\pi$ , если двумя звездочками — то четыре, иначе — одна. Белым отмечены особые точки.

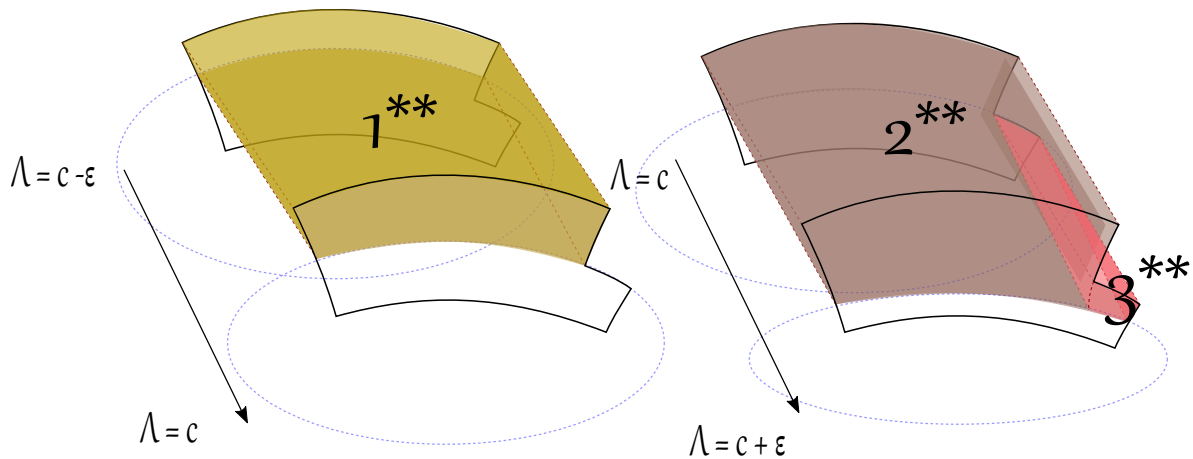


Рис. 13: Пример 3-клеток комплекса  $U_{\lambda_2}$  для бильярда, изображённого на рисунке. Слева изображены 3-клетки, соответствующие значениям дополнительного интеграла  $\Lambda \leq c$ , справа —  $\Lambda \geq c$ . Всего в комплексе  $U_{\lambda_2}$  будет 12 трехмерных клеток. В каждую трехмерную поверхность проектируется четыре клетки из  $U_{\lambda_2}$ .

$\lambda_i$ . В следствие теоремы Якоби-Шаля [1], в любой внутренней точке  $x$  бильярда  $\Omega$  можно выбрать четыре различных вектора скорости, направленных по касательной к каустике. В вершинах углов  $\pi/2$  все четыре вектора скорости склеиваются в один в силу определения отражения в углах (см. опр. 1.1), а в вершинах углов  $3\pi/2$  векторы скорости не определены. Вне вершин углов, на тех сегментах границы бильярда  $\Omega$ , которые попадают в область возможного движения, векторы скорости попарно склеиваются в силу бильярдного закона отражения, т.е. в таких точках бильярда определены только два несовпадающих вектора скорости. Также два вектора скорости определены в точках, лежащих на каустике, так как в таких точках можно задать только два лежащих касательных вектора, которые лежат на одной прямой.



В случае  $\Lambda = b$  в силу оптического свойства квадрик, на таком уровне вектора скорости всех точек обязаны лежать на прямых, проходящих через фокусы (каустика на данном уровне не определена). В таком случае, два вектора скорости будут определены также в точках фокальной прямой и только один вектор скорости будет определён в точках пересечения фокальной прямой и границы бильярда.

Очевидно, что 0-клетки комплекса  $U_{(\lambda_i)}$  гомеоморфны 0-мерным дискам. Далее, рассмотрим одномерные клетки комплексов  $U_{(\lambda_i)}$  первого типа. В точке  $x$  из  $P$  может быть определен либо один единственный вектор скорости, либо два. Тогда при изменении дополнительного интеграла  $\Lambda$  вектор скорости в точке  $x$  будет меняться непрерывно, а потому множества  $(x, v)$ , где  $x \in P$  будут гомеоморфны либо одному отрезку (если в точке  $x$  был определен 1 вектор), либо двум (если в точке  $x$  было определено 2 вектора). Также заметим, что границами 1-клеток первого будут 0-клетки, так как это будут точки вида  $(x, v)$ ,  $x \in P$ ,  $\Lambda = c \pm \varepsilon$ ,  $\Lambda = c$ , что в точности совпадает с 0-клетками. Второй тип 1-клеток гомеоморфен отрезкам и его границами являются 0-клетки по определению.

Рассмотрим 2-клетки. Начнем с 2-клеток первого типа и рассмотрим сегмент границы бильярда  $\Omega$  из  $Q$  (ограниченный точками из  $P$ ). В каждой точке  $x$  такого сегмента  $q$ , на каждом уровне интеграла  $\Lambda = \alpha$ , можно определить два вектора скорости, следовательно, каждая 2-клетка гомеоморфна произведению квадрики  $q$  на отрезок (так как мы выбираем связную компоненту). В итоге, каждая 2-клетка первого типа гомеоморфна 2-диску и ее границей будут 1-клетки первого типа (пары  $(x, v)$ , с фиксированной точкой  $x$ ). Легко заметить, что границами таких клеток будут 1-клетки. 2-клетки второго типа, очевидно, гомеоморфны 2-дискам и их границами являются 1-клетки второго типа.

Теперь рассмотрим 3-клетки. В каждой внутренней точке  $x$  области возможного движения  $\Omega_\alpha$  определены четыре вектора скорости и  $\Omega_\alpha \cong \Omega_\beta$ , если и только если  $\alpha$  и  $\beta$  одновременно больше  $c$ , одновременно равны  $c$ , либо одновременно меньше  $c$ . Следовательно каждая двумерная клетка гомеоморфна  $A \times I$ , где  $A$  — область бильярда, гомеоморфная пересечению  $\Omega_\alpha$  с некоторым элементарным бильярдом разбиения  $\Sigma_j$ . Также легко заметить, что их границами являются 2-клетки первого и второго типа.

Аксиомы  $C$  и  $W$  выполнены в силу конечности размерности и количества клеток каждой размерности. □

## 6 Окрестности особых слоев $\Lambda = \lambda_i$ . Описание топологии атомов $U_{\lambda_i}$ .

Особый интерес при исследовании бильярдов с невыпуклыми углами на границе бильярдной области представляют атомы на уровне  $\Lambda = \lambda_i$ , где  $\lambda_i$  — параметр квадрики на которой лежат вершины углов  $3\pi/2$ . При переходе через эти критические уровни меняется род регулярной поверхности, так как в области возможного движения меняется количество особых точек. В выпуклых бильярдах не существует аналогов таких слоев.

Перейдем к рассмотрению случаю  $\Lambda = \lambda_i$  и, соответственно, к изучению топологии трехмерного комплекса  $U_{\lambda_i}$ . Зафиксируем плоский, односвязный и однородный бильярд на плоскости  $\Omega$ . Также без ограничения общности будем предполагать, что бильярд однородно-гиперболический, что особые точки лежат только на правой дуге гиперболы и что вблизи гиперболы  $\lambda_i$  нет других дуг граничных гипербол, содержащих особые

точки (см. замечания после Теоремы 3). Начнем изучение топологии комплекса  $U_{\lambda_i}$  с определения комплекса  $\tilde{U}_{\lambda_i} \subset U_{\lambda_i}$ , проектирующегося при естественной проекции  $\pi : Q^3 \rightarrow \Omega$  на область биллиарда  $\Omega_{\lambda_i} = \{x \in \Omega \mid d(x, \lambda_i) \leq \varepsilon, \exists(x, v) \in U_{\lambda_i} : \pi(x, v) = x\}$ , где  $d(x, y)$  — стандартная метрика на плоскости, то есть в участок области возможного движения при фиксированном интеграле  $\Lambda = \lambda_i$  вблизи гиперболы с параметром  $\lambda_i$ . Введем некоторые обозначения. Рассмотрим область биллиарда  $\Omega_{\lambda_i}$ , разрежем ее по гиперболе  $\lambda_i$ . Обозначим через  $\nu$  число компонент связности внутри гиперболы  $\lambda_i$ , а через  $\xi$  — число компонент связности вне гиперболы  $\lambda_i$  (см. рис. 14).

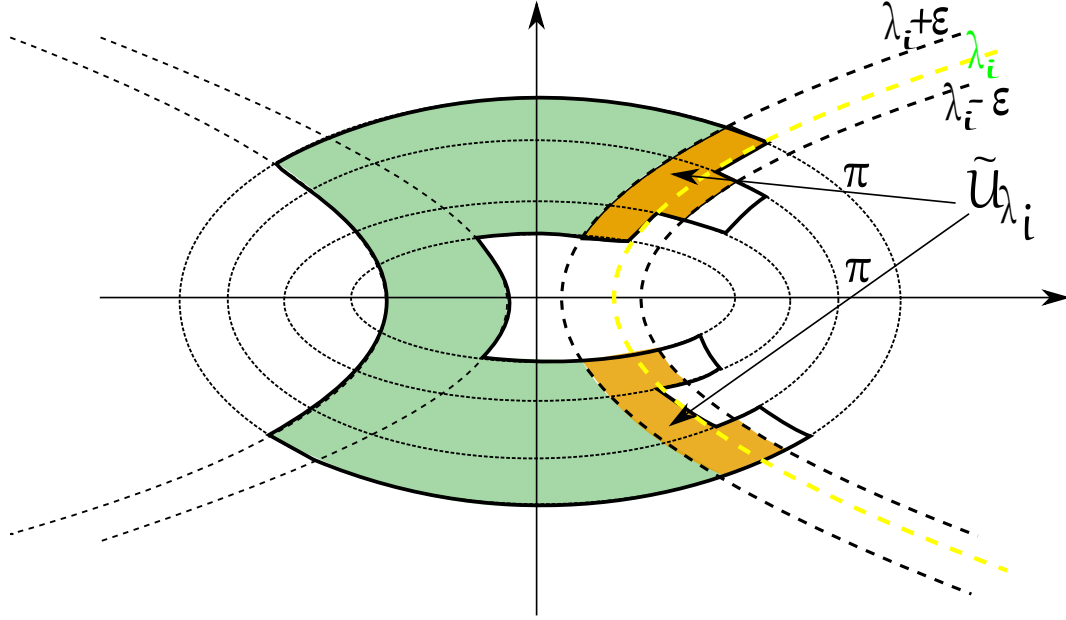


Рис. 14: Пример. Область  $\Omega_{\lambda_i}$  — это область между двумя гиперболами с параметрами  $\lambda_i + \varepsilon$  и  $\lambda_i - \varepsilon$ . Здесь  $\nu = 2, \xi = 3$ .

Перейдем от разбиения  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$  биллиарда  $\Omega$  к разбиению «полосы»  $\Omega_{\lambda_i}$ . Рассмотрим элементарные биллиарды  $\Sigma'_j = \Sigma_j \cap \Omega_{\lambda_i}$ . Получившиеся в итоге разбиение участка биллиарда  $\Omega_{\lambda_i}$  обозначим через  $\Sigma'_1, \dots, \Sigma'_t, \dots, \Sigma'_{\xi+\nu}$ , где  $\xi + \nu \leq N$ .

### 6.1 Определение разрезающих комплексов $T_i$ .

Рассмотрим трехмерный комплекс  $\tilde{U}_{\lambda_i}$ , определенный выше. Определим двумерный подкомплекс  $T_i$  в трехмерном комплексе  $\tilde{U}_{\lambda_i}$ , который будет прообразом граничной дуги при естественной проекции  $\pi$  при фиксированном дополнительном интеграле  $\Lambda \in [\lambda_i - \varepsilon, \lambda_i + \varepsilon]$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.** Рассмотрим однородно-гиперболический (эллиптический) биллиард  $\Omega$  с выбранным на нем разбиением  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$  и рассмотрим двумерный остов  $T_i \subset \tilde{U}_{\lambda_i}$  трехмерного подкомплекса  $\tilde{U}_{\lambda_i} \in U_{\lambda_i}$ , где клетки выбраны как показано в главе 5.

### 6.2 Описание комплекса $U_{\lambda_i} \setminus \tilde{U}_{\lambda_i}$ .

Перед подробным анализом топологии трехмерного комплекса  $\tilde{U}_{\lambda_i}$  сначала рассмотрим трехмерный комплекс  $U_{\lambda_i} \setminus \tilde{U}_{\lambda_i}$ , где пары  $(x, v) \in U_{\lambda_i} \setminus \tilde{U}_{\lambda_i}$  проектируются естественной проекцией  $\pi$  в биллиардную область «вне дуги  $\lambda_i$ », то есть, в область биллиарда  $\Omega \setminus \Omega_{\lambda_i}$ . Заметим, что движение в области  $\Omega \setminus \Omega_{\lambda_i}$  на уровнях дополнительного интеграла  $\Lambda \in [\lambda_i - \varepsilon, \lambda_i + \varepsilon]$  происходит аналогично движению на неособом уровне, так как область

возможного движения меняется в окрестности гиперболы  $\lambda_i$ , а каждая точка внутренняя области  $\Omega \setminus \Omega_{\lambda_i}$  по прежнему оснащается четырьмя векторами скорости.

Для этого рассмотрим произвольный однородно-гиперболический бильярд  $\Omega$  и его произвольный неособый слой  $\Lambda = \alpha$ , описывающийся теоремой 2. Теперь обрежем этот бильярд по произвольной гиперболе, обозначим получившийся «обрезанный» бильярд через  $\hat{\Omega}$  и найдем чему теперь гомеоморфен слой  $\Lambda = \alpha$ .

**Утверждение 3.** *Рассмотрим однородно-гиперболический бильярд  $\Omega$  и неособый слой дополнительного интеграла  $\Lambda = \alpha$ . Теперь разрежем бильярд  $\Omega$  по дуге гиперболы с параметром  $\theta$ , не содержащей вершин углов, обозначим получившийся бильярд (внутри дуг разрезанной гиперболы) через  $\hat{\Omega}$ . Тогда полный прообраз при проекции  $\pi$  бильярда  $\hat{\Omega}$  в  $Q^3$  гомеоморфен поверхности рода  $g+1$  с  $g$  выколотыми и где  $\nu$  ручек этой поверхности разрезаны. Здесь  $g$  — количество особых точек, лежащих внутри области возможного движения при дополнительном интеграле  $\Lambda = \alpha$  и лежащих внутри бильярда  $\hat{\Omega}$ . А  $\nu$  — число связных компонент граничной дуги гиперболы с параметром  $\theta$ .*

*Доказательство.* В силу теоремы 2 [4] неособый слой дополнительного интеграла  $\Lambda$  у бильярда  $\hat{\Omega}$  был бы гомеоморфен поверхности рода  $g + 1$  с  $g$  выколотыми точками, если бы на гиперболе разреза  $\theta$  выполнялся бы бильярдный закон. Обозначим этот двумерный (значение обоих интегралов фиксировано) комплекс через  $G$ . Выберем заполнение бильярда  $\Omega$  софокусными гиперболами семейства, тогда мы также сможем расслоить  $G$  на одномерные прообразы гипербол расслоения при естественной проекции  $\pi$ . Найдем прообраз произвольной гиперболы из расслоения, оснащенной векторами скорости, направленными вправо. Каждая внутренняя точка  $x$  бильярда  $\Omega$ , лежащая в области возможного движения, может быть оснащена двумя векторами скорости, каждая точка  $x$ , лежащая на границе бильярда — двумя, которые склеиваются по бильярдному закон. Тогда прообраз такой оснащенной гиперболы —  $\nu$  окружностей, где  $\nu$  ее число компонент связности. Тогда отмена бильярдного закона на гиперболе  $\theta$  — это разрез  $\nu$  ручек.  $\square$

### 6.3 Описание не седловых бифуркационных слоев.

Следующая теорема описывает топологию трёхмерного комплекса  $\tilde{U}_{\lambda_i}$  (см. рис. 15).

**Теорема 3.** *Рассмотрим однородно-гиперболический бильярд  $\Omega$  с выбранным на нем разбиением  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$ . Рассмотрим окрестность  $\Lambda \in [\lambda_i - \varepsilon, \lambda_i + \varepsilon]$  особого слоя второго интеграла  $\Lambda = \lambda_i$  и, соответственно, трехмерные комплексы  $U_{\lambda_i}$  и  $\tilde{U}_{\lambda_i}$ . Также рассмотрим область  $\Omega_{\lambda_i} \subset \Omega$  и перейдем к ее фокальному разбиению на элементарные бильярды  $\Sigma'_1, \dots, \Sigma'_{\nu+\xi}$ . Вырежем из комплекса  $U_{\lambda_i}$  трехмерный комплекс  $\tilde{U}_{\lambda_i}$ , а из  $\tilde{U}_{\lambda_i}$  вырежем двумерный разрезающий комплекс  $T_i$ . Тогда:*

1. Трехмерный комплекс  $U_{\lambda_i} \setminus \tilde{U}_{\lambda_i} \cong G_g \times I$ , где  $G_g$  — поверхность рода  $g + 1$  с  $g$  выколотыми и где  $\nu$  ручек этой поверхности разрезаны. Здесь  $g$  — количество особых точек, лежащих внутри области возможного движения при дополнительном интеграле  $\Lambda = \alpha \in [\lambda_i - \varepsilon, \lambda_i + \varepsilon]$  и лежащих внутри бильярда  $\Omega \setminus \Omega_{\lambda_i}$ ;
2. Двумерный комплекс  $T_i \cong Gr_i \times I$ , где  $Gr_i$  — граф, построенный по Алгоритму 1;
3. Трехмерный комплекс  $\tilde{U}_{\lambda_i} \setminus T_i|_{\Lambda=\alpha, \alpha \in [\lambda_i - \varepsilon, \lambda_i]} \cong (C_1 \cup \dots \cup C_{2\nu+2\xi}) \times I$ ;  
Трехмерный комплекс  $\tilde{U}_{\lambda_i}|_{\Lambda=\alpha, \alpha \in [\lambda_i, \lambda_i + \varepsilon]} \cong (C_1 \cup \dots \cup C_{2\nu}) \times I$ ;
4. Трехмерный комплекс  $\tilde{U}_{\lambda_i} \setminus T_i|_{\Lambda=\alpha, \alpha \in [\lambda_i - \varepsilon, \lambda_i]}$  приклеивается к двумерному комплексу  $T_i$  послойно: на каждом уровне  $\Lambda = \alpha, \alpha < \lambda_i$  все цилиндры  $(C_1 \cup \dots \cup C_{2\nu+2\xi})$  приклеиваются к графу  $Gr_i$  по Алгоритму 2, а при  $\Lambda = \lambda_i$  к графу  $Gr_i$  приклеиваются

только цилиндры  $C_1 \cup \dots \cup C_{2\nu}$  (Алгоритм 2 применяется только для элементарных билиардов  $\Sigma'_1, \dots, \Sigma'_N$ ).

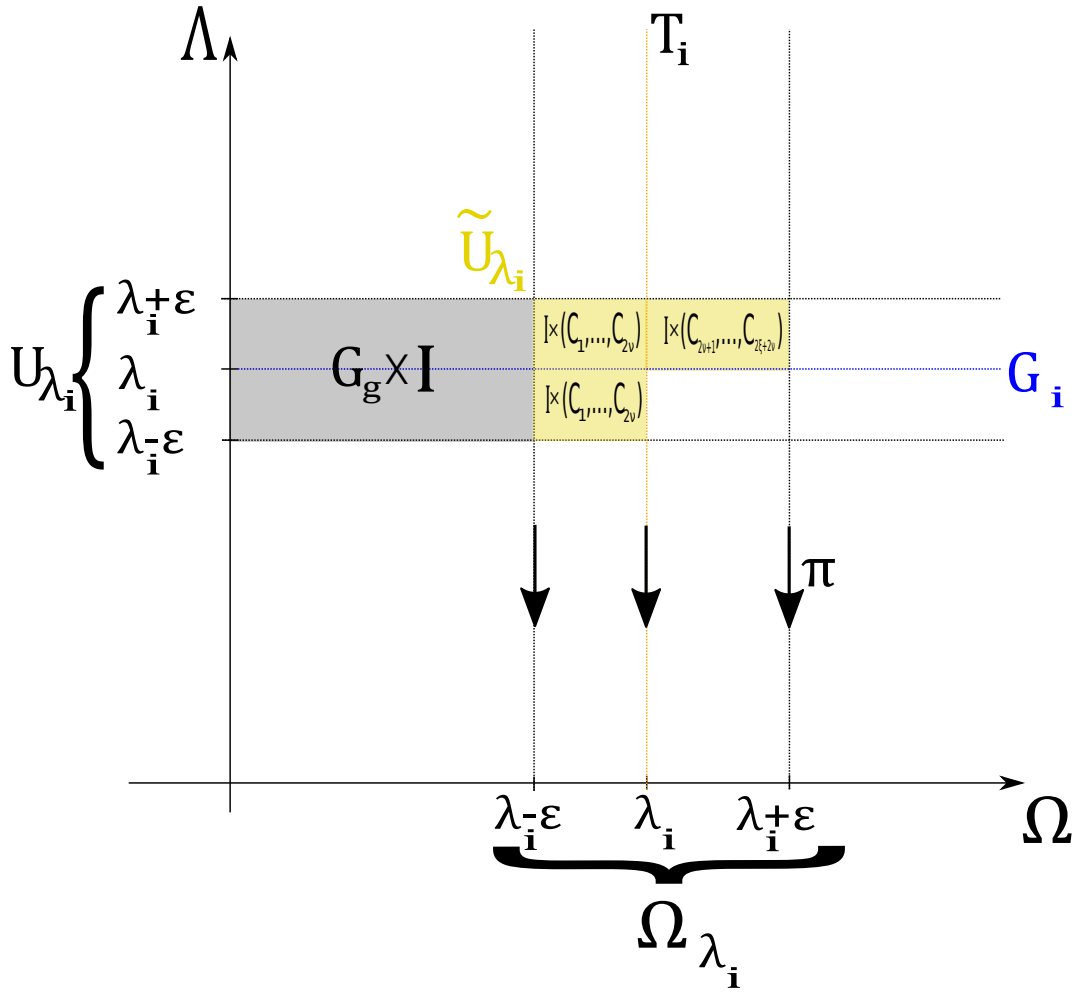


Рис. 15: Иллюстрация теоремы 3. По оси абсцисс обозначены значения естественной проекции  $\pi$ , а по оси ординат — значения дополнительного интеграла  $\Lambda$ .

**Алгоритм 1.** Алгоритм построения графа  $Gr_i$  — прообраза дуги  $\lambda_i$  при естественной проекции  $\pi$  при любом фиксированном значении дополнительного интеграла  $\Lambda = \alpha \neq b$ .

Шаг 1. Рассмотрим ту часть граничной дуги  $\lambda_i$  билиарда  $\Omega$ , которая попадает в область возможного движения  $\Omega_\alpha$  при заданном значении интеграла  $\Lambda = \alpha \neq b$ . Рассмотрим пересечения этой дуги  $\lambda_i$  с границами области возможного движения билиарда  $\Omega_\alpha$ . На этой части дуги  $\lambda_i$  отметим черными точками

$$b_1^i, \dots, b_{n_i^b}^i$$

все вершины углов  $\pi/2$  или  $3\pi/2$ . Белыми точками

$$w_1^i, \dots, w_{n_i^w}^i$$

отметим пересечения дуги  $\lambda_i$  с границами области возможного движения  $\Omega_\alpha$  вне вершин углов. Обозначим множество черных точек на граничной дуге  $\lambda_i$  через

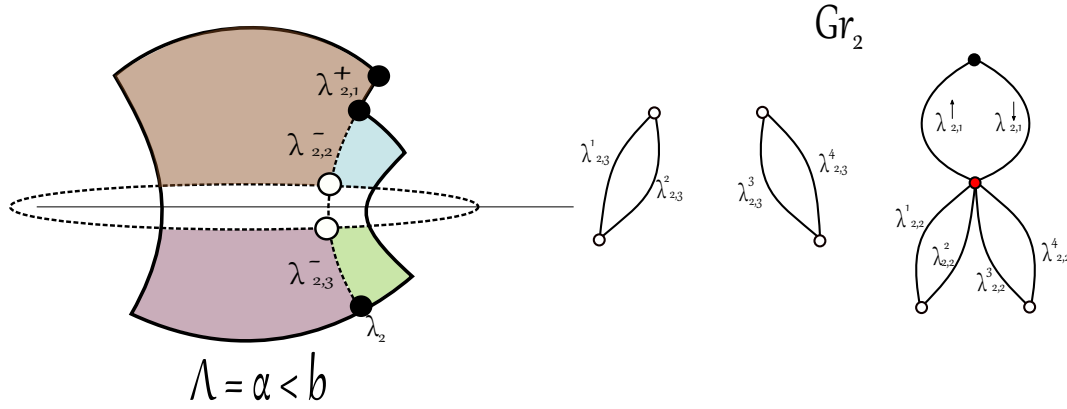


Рис. 16: Пример построения графа  $Gr_2$  по Алгоритму 1 для дуги граничной гиперболы  $\lambda_2$  биллиарда, изображенного на рисунке.

$B_i$ , а белых —  $W_i$ . Теперь рассмотрим сегменты граничной дуги  $\lambda_i$ , ограниченные отмеченными точками и попадающие в область возможного движения. Назовем их  $\lambda_{i,t}$ , введя на дуге  $\lambda_i$  естественную нумерацию сегментов  $t$ , здесь  $t \in 1, \dots, n_i^w + n_i^b$ . Дополнительно пометим сегменты граничных дуг  $\lambda_{i,t}$  символом «+», если сегмент является частью границы области возможного движения  $\Omega_\alpha$ , и символом «-», если сегмент  $\lambda_{i,t}$  является границей между элементарными биллиардами разбиения, но не является сегментом границы объемлющей области возможного движения  $\Omega_\alpha$ .

Шаг 2. Рассмотрим граничную дугу  $\lambda_i$  и завершим построение  $Gr_i \cong \pi^{-1}(\lambda_i)|_{\Lambda=\alpha}$ . Каждой черной точке из множества  $B_i$  соответствует одна вершина графа

$$b_1^i, \dots, b_{n_i^b}^i.$$

Каждой белой точке из множества  $W_i$  соответствуют две вершины (всего  $2n_i^w$  вершин) графа  $Gr_i$ , обозначаемые

$$w_1^{i,r}, w_1^{i,l}, \dots, w_{n_i^w}^{i,r}, w_{n_i^w}^{i,l}.$$

Каждому граничному сегменту  $\lambda_{i,t}^+$  будут соответствовать два ребра (векторы в  $Q^3$  будут направлены вверх и вниз)

$$\lambda_{i,t}^\uparrow, \lambda_{i,t}^\downarrow \in Gr_{\lambda_i},$$

а каждому граничному сегменту  $\lambda_{i,t}^-$  — четыре:

$$\lambda_{i,t}^1, \lambda_{i,t}^2, \lambda_{i,t}^3, \lambda_{i,t}^4 \in Gr_{\lambda_i}.$$

Теперь расставим на ребрах  $\lambda_{i,t}^v$  графа  $Gr_{\lambda_i}$  буквы

$$b_1^i, \dots, b_{n_i^b}^i, w_{n_i^b+1}^{i,r}, w_{n_i^b+1}^{i,l}, \dots, w_{n_i^w+n_i^b}^{i,r}, w_{n_i^w+n_i^b}^{i,l}$$

по таблицам на рис. 17. Теперь повторим Шаг 2 для всех значений  $i \in 1, \dots, n$  и для всех значений  $t \in 1, \dots, n_i^w + n_i^b$ . Проведем склейку по совпадающим буквам. Выкалываем все черные точки графов  $Gr_{\lambda_i}$ , соответствующие особым точкам биллиарда  $\Omega$ .

Теперь нужно указать способ, которым цилиндры  $C_1 \cup \dots \cup C_{t+s}$  приклеиваются к графам  $Gr_i$ .

**Алгоритм 2. Склейка графов  $Gr_i$  и цилиндров (двумерных прообразов при естественной проекции  $\pi$  элементарных билиардов  $\Sigma_j$  без границ)  $C_1, \dots, C_{\nu+\xi}$  на произвольном не седловом уровне дополнительного интеграла  $\Lambda = \alpha \neq b$ .**

Шаг 1. Рассмотрим два двумерных цилиндра  $S^1 \times I$  для каждого элемента фокального разбиения  $\Sigma'_j$  области возможного движения  $\Omega_\alpha$  (см. главу 4.2). Обозначим один из них через  $C_j^L$ , а другой —  $C_j^R$ . Будем помечать граничные окружности каждого цилиндра буквами  $\lambda_{i,t}^v$  ( $v = 1, 2, 3, 4, \uparrow, \downarrow$ ) по следующему правилу: Рассмотрим элементарный билиард  $\Sigma'_j$  и одну из его дуг граничных гипербол с параметром  $\lambda_i$ . Пусть на этой границе билиарда  $\Sigma'_j$  отмечены  $L + L'$  сегментов граничных гипербол

$$\lambda_{i,1}^{+,-}, \dots, \lambda_{i,L+L'}^{+,-},$$

где на сегменте выставлен либо символ «+» (таких сегментов  $L$ ), либо символ «-» (таких сегментов  $L'$ ). Рассмотрим одну из граничных окружностей  $S_R^1$  цилиндра  $C_j^R$  (аналогично окружность  $S_L^1$  цилиндра  $C_j^L$ ). Разделим окружность  $S_R^1$  на  $2L + 2L'$  частей. Выберем точку на окружности  $S_R^1$  на границе любых из  $2L + 2L'$  частей. Будем ставить в соответствие частям окружности  $S_R^1$  ( $S_L^1$ ) сегменты  $\lambda_{i,t}^{+,-}$ . Поставим в соответствие первому  $\lambda_{i,1}^{+,-}$  две части окружности: справа и слева от отмеченной на  $S_R^1$  ( $S_L^1$ ) точки. Следующему сегменту  $\lambda_{i,t}^{+,-}$  будут соответствовать две следующие части окружности  $S_R^1$  ( $S_L^1$ ): опять же справа и слева от точки, и.т.д. В результате каждому сегменту граничной гиперболы  $\lambda_{i,t}^{+,-}$  поставим в соответствие четыре сегмента граничных окружностей (отрезка)  $S_R^1$  и  $S_L^1$ . Соответствующие сегменту  $\lambda_{i,t}^{+}$  отрезки помечаются следующим образом: на обоих цилиндрах ставятся одинаковые буквы  $\lambda_{i,t}^\uparrow, \lambda_{i,t}^\downarrow$ . Соответствующие сегменту  $\lambda_{i,t}^-$  отрезки помечаются следующим образом: на  $S_R^1$  ставим  $\lambda_{i,t}^1, \lambda_{i,t}^2$ , а на  $S_L^1$  ставим  $\lambda_{i,t}^3, \lambda_{i,t}^4$ .

Шаг 2. Повторим Шаг 1 для всех элементарных билиардов  $\Sigma'_j$  из фокального разбиения области возможного движения  $\Omega_\alpha$  на элементарные билиарды.

*Доказательство.* Рассмотрим однородно-гиперболический билиард  $\Omega$ , его подобласть  $\Omega_{\lambda_i} \subset \Omega$  и разбиение области  $\Omega_{\lambda_i}$  на элементарные билиарды  $\Sigma'_1, \dots, \Sigma'_{t+s}$ . Проведем дугу гиперболы с параметром  $\lambda_i$ .

Зафиксируем произвольное значение второго интеграла  $\Lambda = \alpha, \alpha \in [\lambda_i - \varepsilon, \lambda_i + \varepsilon]$ . Рассмотрим область возможного движения  $\Omega_\alpha$ , находящуюся внутри «полосе»  $\Omega_{\lambda_i}$ , а именно, рассмотрим область  $\tilde{\Omega}_\alpha = \Omega_{\lambda_i} \cap \Omega_\alpha$  и ее разбиение на элементарные билиарды (см. 4.2). В следствие теоремы Якоби-Шаля [1], в любой внутренней точке  $x$  билиарда  $\Omega$  можно выбрать четыре различных вектора  $v_1, v_2, v_3, v_4$  скорости, направленных по касательной к каустике. Расслоим область  $\tilde{\Omega}_\alpha$  на невырожденные гиперболы из софокусного семейства. Рассмотрим множества в  $\tilde{U}_{\lambda_i}$ , задаваемые как пары  $(x \in \Sigma'_j, v_1)$ , где  $v_1$  — вектор, направленный от левого фокуса и пары  $(x \in \Sigma'_j, v_2)$ , где  $v_2$  — вектор, направленный к правому фокусу. На эллиптических границах билиардной области  $\Omega_\alpha$  множества пар  $(x, v_1)$  и  $(x, v_2)$  склеятся по билиардному закону, а, следовательно, множества пар  $(x \in \Sigma'_j, v_1)$  и  $(x \in \Sigma'_j, v_2)$  склеются в  $\tilde{U}_{\lambda_i}$  по прообразу этой границы при естественной проекции  $\pi$ . Пары  $(x \in \Sigma'_j, v_3)$  и  $(x \in \Sigma'_j, v_4)$  склеются аналогично на гиперболических границах билиарда. Теперь осталось заметить, что  $(x \in \Sigma'_j, x \notin \partial \Sigma'_j, v_l), l = 1, 2, 3, 4$  гомеоморфно двумерному диску  $I \times I$ , так как все элементарные билиарды разбиения имеют форму квадрата с границами из эллипсов и гипербол. В результате, заметим, что каждому

элементарному бильярду разбиения (без границы) соответствует два двумерных цилиндра  $C_j^R$  и  $C_j^L$ .

1. Трехмерный комплекс  $U_{\lambda_i} \setminus \tilde{U}_{\lambda_i}$  послоен на двумерные комплексы, соответствующие значениям второго интеграла  $\Lambda = \alpha, \alpha \in [\lambda_i - \varepsilon, \lambda_i + \varepsilon]$ . В силу выбора достаточно малого  $\varepsilon$  в области возможного движения при таких значениях интеграла будет лежать одинаковое количество вершин углов  $3\pi/2$ , а следовательно, в силу теоремы 2 на каждом уровне  $\Lambda = \alpha$  в  $U_{\lambda_i}/\tilde{U}_{\lambda_i}$  будут лежать поверхности одного рода (до разрезания). Дальше остается только применить Утверждение 3.
2. Рассмотрим дополнительный интеграл  $\Lambda$ . Если  $\Lambda = \alpha, \alpha \in [\lambda_i - \varepsilon, \lambda_i]$ , то дуга гиперболы  $\lambda_i$  попадает в область возможного движения. Рассмотрим уровень  $\Lambda = \alpha$ , на дуге гиперболы  $\lambda_i$  следующим образом определены вектора скорости: один вектор для вершин углов, два вектора для точек, лежащих на границе бильярда  $\Omega$  и четыре вектора для точек, лежащих вне границы бильярда. Прообразом дуги гиперболы  $\lambda_i$  будет граф  $\pi^{-1}(\lambda_i)|_{\Lambda=\alpha} \cong Gr_i$ , причем этот граф не меняется при изменении  $\alpha$  в пределах отрезка  $[\lambda_i - \varepsilon, \lambda_i]$ , так как количество прообразов при естественной проекции  $\pi$  у точки зависит только от ее типа (граничная, угловая или особая) в бильярде  $\Omega$ . При  $\Lambda = \alpha, \alpha \in (\lambda_i, \lambda_i + \varepsilon]$  гипербола  $\lambda_i$  не попадает в область возможного движения  $\Omega_\alpha$ , следовательно, прообраз будет пустым.
3. В силу рассуждения выше и его независимости от значения второго интеграла, если элементарный бильярд  $\Sigma'_j$  попадает в область возможного движения при заданном значении интеграла  $\Lambda$ , то его прообразом при естественной проекции  $\pi$  в  $\tilde{U}_{\lambda_i}$  будут два цилиндра. После вырезания дуги гиперболы  $\lambda_i$ , область  $\Omega_{\lambda_i}$  распадется на элементарные бильярды  $\Sigma'_1, \dots, \Sigma'_{\nu+\xi}$ . Пока дополнительный интеграл  $\Lambda \leq \lambda_i$ , то в область возможного движения попадают все элементарные бильярды  $\Sigma'_1, \dots, \Sigma'_{\nu+\xi}$ , а после того, как интеграл  $\Lambda$  превысит значение  $\lambda_i$  — только  $\nu$  элементарных бильярдов, лежащих левее внутри гиперболы с параметром  $\lambda_i$ .
4. На каждом уровне  $\Lambda = \alpha$  происходит склейка векторов  $(x, v_u), x \in \lambda_i, u = 1, 2, 3, 4$  по бильярдному закону. Это склейка поднимается естественной проекцией  $\pi$  до послойной склейки комплекса  $T_i$  и комплекса  $\tilde{U}_{\lambda_i} \setminus T_i|_{\Lambda=\alpha, \alpha \in [\lambda_i - \varepsilon, \lambda_i]}$ . Если  $\Lambda = \lambda_i$ , то в область возможного движения попадают только элементарные бильярды фокального разбиения  $\Sigma'_1, \dots, \Sigma'_\nu$  и дуга гиперболы  $\lambda_i$ , так как только они лежат внутри гиперболы  $\lambda_i$ . Если  $\Lambda < \lambda_i$ , то в область возможного движения попадают все элементарные бильярды  $\Sigma'_1, \dots, \Sigma'_{\nu+\xi}$ . Конструкция склейки по бильярдному закону не зависит от уровня интеграла  $\Lambda$ , а потому, нужно выставить метки  $\lambda_{i,t}^{+,-}$  на граничной дуге  $\lambda_i$  всех элементарных бильярдов  $\Sigma'_1, \dots, \Sigma'_{\nu+\xi}$ , но при  $\Lambda = \lambda_i$  последние  $\xi$  элементарных бильярдов разбиения не будут приклеиваться к графу  $Gr_i$ . Зафиксируем произвольное значение интеграла  $\Lambda = \alpha$ . Рассмотрим множества  $\tilde{\lambda}_i^u = ((x, v_u) \in Q^3 | x \in \lambda_i, u = \rightarrow, \leftarrow)$  и разделим  $\tilde{\lambda}_i^u$  на сегменты  $\tilde{\lambda}_{i,t}^u$ , аналогично Алгоритму 1. Поскольку на сегментах  $\tilde{\lambda}_{i,t}^u$ , которые помечены символом «+», происходит склейка по бильярдному закону, то к этому множеству приклеиваются граничные окружности цилиндров  $C_j^R$  и  $C_j^L$  и склеиваются друг с другом. Если сегмент  $\tilde{\lambda}_{i,t}^u$  помечен знаком «-», то на нем склейки не происходит и, в результате,  $\tilde{\lambda}_{i,t}^u$  не склеиваются друг с другом, но к ним приклеиваются граничные окружности цилиндров  $C_j^R, C_{j'}^R$  и  $C_j^L, C_{j'}^L$ , где  $\Sigma'_{j'}$  и  $\Sigma'_{j'}$  — элементарные бильярды с общим граничным сегментом  $\tilde{\lambda}_{i,t}^u$ . Двумерные цилиндры  $C_j^R, C_{j'}^R$  приклеиваются по граничной окружности к  $\tilde{\lambda}_{i,t}^u$ , где  $u = (\rightarrow)$ , а левые цилиндры соответственно к  $\tilde{\lambda}_{i,t}^u$ , где  $u = (\leftarrow)$ . Легко заметить, что Алгоритм 2 описывает идентичный механизм склейки.

□

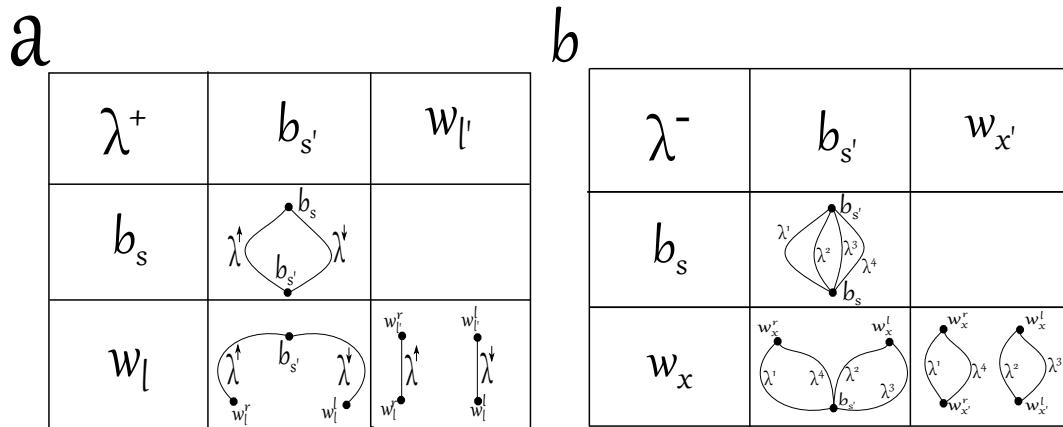


Рис. 17: Таблица построения граничных графов для Алгоритмов 1, где а — для сегментов дуги  $\lambda_{i,t}$ , отмеченных знаком «+», а б — для сегментов, отмеченных знаком «-».

**Замечание 4.** Из доказательства и утверждения 3 легко видеть, что в случае, если на обеих (на правой и на левой) дугах гиперболы  $\lambda_i$  лежат особые точки однородно-гиперболического бильярда  $\Omega$ , то комплекс  $U_{\lambda_i} \setminus \tilde{U}_{\lambda_i}$  разрежется по  $\nu + \xi$  ручками, где  $\nu$  — число компонент связности правой граничной дуги гиперболы  $\lambda_i + \varepsilon$ , а  $\xi$  — левой. Комплекс  $\tilde{U}_{\lambda_i}$  будет состоять из двух несвязных частей, каждая из которых построена в точности по теореме 3.

**Замечание 5.** Для однородно-эллиптических бильярдов, в силу односвязности, теорема 3 будет верна без изменений.

## 7 Особый слой $\Lambda = b$ . Описание топологии атомов $U$ .

Перейдем к рассмотрению окрестности  $U \subset Q^3$  особого слоя  $\Lambda = b$ . Совместные поверхности уровня дополнительного интеграла при  $\Lambda < b$  — несвязное объединение поверхностей рода меньшего или равного сложности бильярда  $k$ , при этом траектории бильярда на таких уровнях касаются интегральных эллипсов, прижатых к сегменту фокальной прямой между фокусами. Поверхности уровня дополнительного интеграла при  $\Lambda > b$  — несвязное объединение поверхностей рода меньшего или равного сложности бильярда  $k$ , при этом траектории бильярда касаются интегральных гипербол, прижатых к сегментам фокальной прямой вне фокусов. В классической теории (элементарных бильярдов, см. [2]) была верна теорема, описывающая строение 3-атомов  $U$  через 2-атомы. Представим аналогичный результат для невыпуклых бильярдов: сначала дадим определение 2-атомов, потом представим теорему сохранения рода, описывающую случаи, когда сумма родов поверхностей рода на совместной поверхности уровня меняется при переходе через  $\Lambda = b$  и, наконец, будет представлена теорема, описывающая топологию трехмерного комплекса  $U$ .

### 7.1 Определение 2-атомов.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16.** Двумерным атомом называется пара  $(P_2, K)$ , где  $P_2$  — связная компактная поверхность с краем, ориентируемая или неориентируемая, а  $K$  — связный граф в ней такой, что выполняются следующие условия.



1. Либо  $K$  состоит только из одной точки, т.е. изолированной вершины степени ноль, либо все вершины графа  $K$  имеют степень 4.
2. Каждая связная компонента множества  $P_2 \setminus K$  гомеоморфна кольцу  $S^1 \times (0, 1]$  и множество этих колец можно разбить на два класса — положительные кольца и отрицательные кольца так, так чтобы:
3. К каждому ребру графа  $K$  примыкало ровно одно положительное кольцо и ровно одно отрицательное кольцо.

При этом атомы обычно рассматривают с точностью до естественной эквивалентности: два атома  $(P_2, K)$  и  $(P'_2, K')$  эквивалентны, если существует гомеоморфизм, переводящий  $P'_2$  в  $P_2$ , и  $K'$  в  $K$ .

Рассмотрим встречающиеся в плоских компактных билиярдах двумерные атомы: атом  $A$ , атом  $B$ , атом  $C_2$  и атом  $D_1$ . В силу теоремы А.Т. Фоменко (см. теорему 3.3 в 2) трёхмерные атомы  $A$ ,  $B$ ,  $C_2$  и  $D_1$  получаются из их двумерных экземпляров прямым умножением на окружность  $S^1$  (это утверждение неверно для атомов «со звёздочками»).

В случае билиардов критическая окружность на атомах  $\Lambda = b$  есть в точности прообраз фокальной прямой при естественной проекции  $\pi$ , так как точки фокальной прямой могут быть оснащены только двумя векторами скорости на этом уровне — от правого фокуса или к правому фокусу.

В дальнейшем нам понадобится разрезать билиарды по фокальной прямой, а поэтому представим «эквивалентную» операцию на 2-атомах.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17.** Рассмотрим однородный билиард  $\Omega$ . Разрежем его по фокальной (введем на ней билиардный закон) оси. Обозначим через  $\Omega^{top}$  — билиард в области выше фокальной оси, а через  $\Omega^{bot}$  — ниже фокальной оси. Атомы этих билиардов будем также помечать верхними индексами  $top$  и  $bot$ .

**Утверждение 4.** Рассмотрим элементарный билиард  $\Sigma$  без фокусов, внутренность которого имеет непустое пересечение с фокальной прямой. Пусть особый слой  $G$  3-атома  $U$  билиарда  $\Sigma$  получается из 2-атома  $V$  умножением на окружность  $S^1$ . Тогда объединение особых слоев  $G^{top}$  и  $G^{bot}$  3-атомов  $U^{top}$  и  $U^{bot}$  будет получаться домножением атома  $K$ , разрезанного по вершинам, на окружность.

*Доказательство.* Рассмотрим 3-атом  $U \cong V \times S^1$  и его проекцию  $p : U \rightarrow V$  на 2-атом. В вершины графа  $K$  в 2-атоме  $V$  при проекции  $p$  проектируются в точности точки, соответствующие точкам критической окружности атома  $U$ . Как было замечено — это в точности точки, которые при естественной проекции  $\pi$  проектируются на фокальную прямую.  $\square$

Таким образом, мы можем разбить кольца, которые получаются после разрезания атома  $K$  по вершинам на два класса — проектирующиеся в билиард  $\Sigma^{top}$  и в  $\Sigma^{bot}$ .

## 7.2 Теорема сохранения рода.

**Теорема 4.** Рассмотрим билиард  $\Omega$  и значения дополнительного интеграла  $\Lambda \in [b - \varepsilon, b + \varepsilon]$ . Пусть на совместных поверхностях уровня дополнительного интеграла  $\Lambda < b$  лежат поверхности рода  $g_1, \dots, g_f$ . А на поверхностях уровня  $\Lambda > b$  лежат поверхности рода  $g'_1, \dots, g'_s$ . В этом случае,

$$g_1 + \dots + g_f = g'_1 + \dots + g'_s$$

тогда и только тогда, когда вершины углов  $3\pi/2$  не лежат на фокальной прямой.

*Доказательство.* Согласно теореме 2 топология совместных поверхностей уровня интегралов в  $Q^3$  описывается количеством связных компонент области возможного движения и количеством углов  $3\pi/2$ , лежащим внутри этих областей. А именно, каждой связной компоненте поверхности уровня соответствует сфера с количеством ручек (и выколотых точек), равным  $k' + 1$ , где  $k'$  — количество вершин углов  $3\pi/2$  внутри области возможного движения. Условие сохранения рода в точности означает, что количество вершин углов  $3\pi/2$  в области возможного движения при фиксированном дополнительном интеграле  $\Lambda = b - \varepsilon$  равно количеству вершин углов  $3\pi/2$  в области возможного движения при фиксированном дополнительном интеграле  $\Lambda = b + \varepsilon$ . Интегральными квадраками на таких уровнях интеграла будут: эллипс с параметром близким к  $b$  («прижатый» к сегменту фокальной прямой между фокусами) и гипербола с параметром близким к  $b$  («прижатая» к участку фокальной прямой вне фокусов). Сумма родов может измениться только в том случае, если вершины углов  $3\pi/2$  лежат внутри такого интегрального или такой интегральной гиперболы. В силу произвольности  $\varepsilon$  это условие означает, что вершины углов обязаны лежать на фокальной прямой.  $\square$

**Замечание 6.** В случае, когда вершины углов  $3\pi/2$  лежат на фокальной прямой перестройки двух разных типов (с падением ранга и без) происходят «одновременно» на уровне  $\Lambda = b$ .

### 7.3 Основная теорема.

Аналогично случаю  $\Lambda = \lambda_i$  определим двумерный подкомплекс  $T_i$  в трехмерном комплексе  $U$ , который будет соответствовать дуге граничной гиперболы  $\lambda_i$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18.** Рассмотрим однородный бильярд  $\Omega$  с выбранным на нем разбиением  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$  и рассмотрим двумерную клетку  $T_i \subset U$ , состоящую из таких пар  $(x, v)$ , которые проектируются естественной проекцией  $\pi$  на дугу квадраки  $\lambda_i$ . Клетки выбраны как показано в главе 5.

Рассмотрим элементарные бильярды разбиения  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$ . Топология 3-атомов  $U$  для каждого из таких элементарных бильярдов полностью описывается теоремой 4. Воспользуемся теоремой и обозначим соответствующие 2-атомы для таких бильярдов через  $V_j$ .

Рассмотрим однородный бильярд  $\Omega$ , каустику с параметром  $\lambda = b - \varepsilon$  и интегральную гиперболу семейства с параметром  $\lambda = b + \varepsilon$ . Теперь рассмотрим области возможного движения при таких значениях дополнительного интеграла  $\Lambda$ . Обозначим область возможного движения для  $\Lambda = b - \varepsilon$  (область бильярда  $\Omega$  вне эллипса, «близкого» к фокальной оси) через  $\Omega_{b-\varepsilon}$ . Аналогично область возможного движения при значениях интеграла  $\Lambda = b + \varepsilon$  (между дуг гиперболы, «прижатых» к фокальной прямой) обозначим через  $\Omega_{b+\varepsilon}$ . Заметим, что области  $\Omega_{b+\varepsilon}$  и  $\Omega_{b-\varepsilon}$  могут оказаться несвязанными.

Теперь рассмотрим разбиение  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$  бильярда  $\Omega$ . Выберем разбиения областей возможного движения  $\Omega_{b+\varepsilon}$  и  $\Omega_{b-\varepsilon}$  на элементарные билиарды  $\Sigma_1^>, \dots, \Sigma_{N'}^>$  и  $\Sigma_1^<, \dots, \Sigma_{N''}^<$  соответственно (см. опр. разбиения).

Сформулируем основной результат — теорему описания топологии седлового особого слоя для однородного бильярда. Графическую интерпретацию теоремы можно найти на рис. 18.

**Теорема 5.** Рассмотрим однородно-гиперболический бильярд  $\Omega$  с выбранным на нем разбиением  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$ . Рассмотрим окрестность значений дополнительного интеграла  $b - \varepsilon \leq \Lambda \leq b + \varepsilon$  и соответствующий этой окрестности 3-атом  $U$ . Вырежем из трехмерного комплекса  $U$  все двумерные подкомплексы  $T_i$  для всех дуг граничных гипербол  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  разбиения  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$ . Тогда:

1. Двумерный комплекс  $T_i$  расслаивается на одномерные графы следующим образом:  $T_i|_{\Lambda < b} \cong Gr_i^<$ ,  $T_i|_{\Lambda = b} \cong Gr_i^=$ ,  $T_i|_{\Lambda > b} \cong Gr_i^>$ , где графы  $Gr_i^<$ ,  $Gr_i^=$ ,  $Gr_i^>$  строятся по алгоритму 4;
2. Трёхмерный комплекс  $U \setminus (T_1 \cup \dots \cup T_n) \cong 2(V_1 \times I) \cup \dots \cup 2(V_N \times I)$ , где объединение несвязно в силу однородности бильярда  $\Omega$ ;
3. Двумерные комплексы  $(T_1 \cup \dots \cup T_n)$  приклеиваются к трёхмерному комплексу  $U \setminus (T_1 \cup \dots \cup T_n)$  послойно (где на 2-атомах выбрано слоение на окружности), таким образом, к графам  $Gr_i^<$ ,  $Gr_i^=$ ,  $Gr_i^>$  приклеиваются произведение колец атомов  $V_{\Sigma_j}$  на окружности (цилиндры) и произведение графов  $K$  этих атомов на окружность. Данная склейка описывается алгоритмом 5.

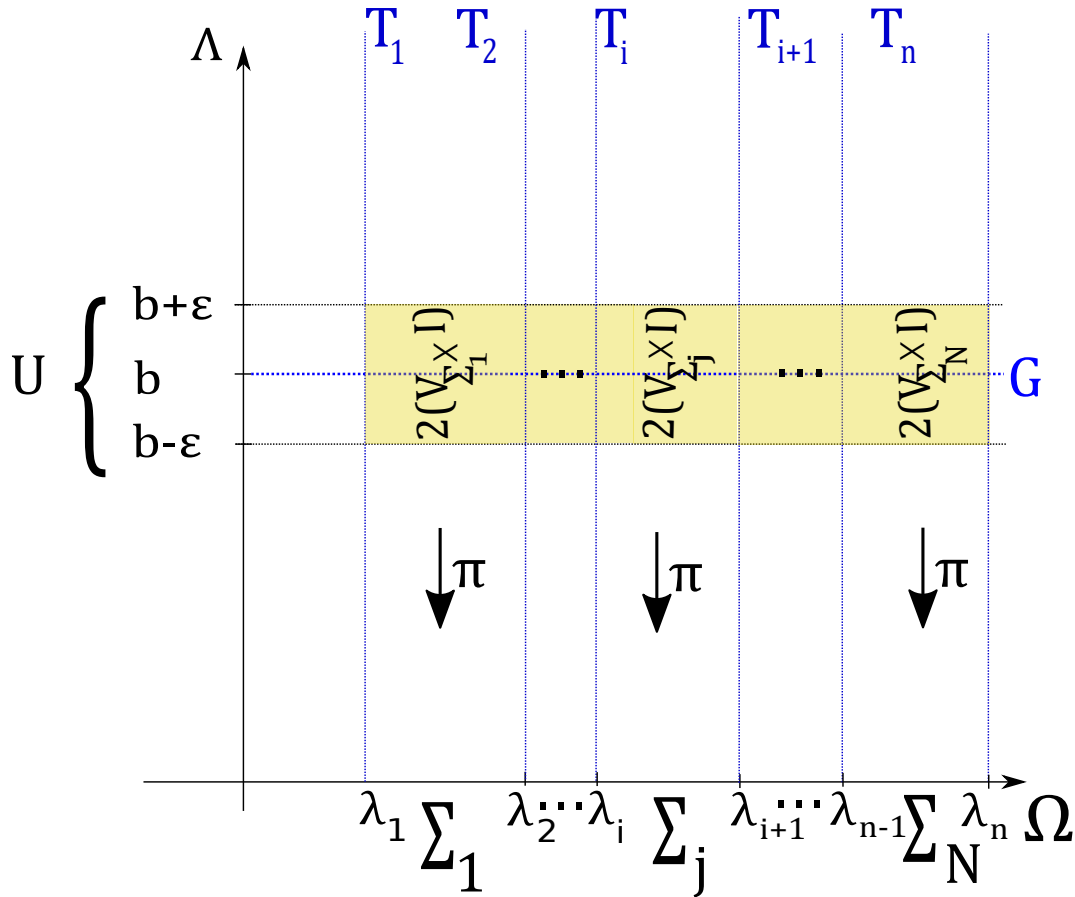


Рис. 18: Иллюстрация теоремы 5. По оси абсцисс обозначены значения естественной проекции  $\pi$ , а по оси ординат — значения дополнительного интеграла  $\Lambda$ .

#### Алгоритм 4.

1. Рассмотрим бильярд  $\Omega$  и его разбиение на элементарные бильярды  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$ . Рассмотрим дуги граничных гипербол такого разбиения  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Теперь рассмотрим области  $\Omega_{b+\varepsilon}$  и  $\Omega_{b-\varepsilon}$  и их разбиения на элементарные бильярды  $\Sigma_1^>, \dots, \Sigma_N^>$  и  $\Sigma_1^<, \dots, \Sigma_N^<$ ;
2. Построим графы  $Gr_i^>$  и  $Gr_i^<$ , так как слои  $b-\varepsilon$  и  $b+\varepsilon$  не критические, то воспользуемся Алгоритмом 1 для их построения, применив его дважды: для области возможного

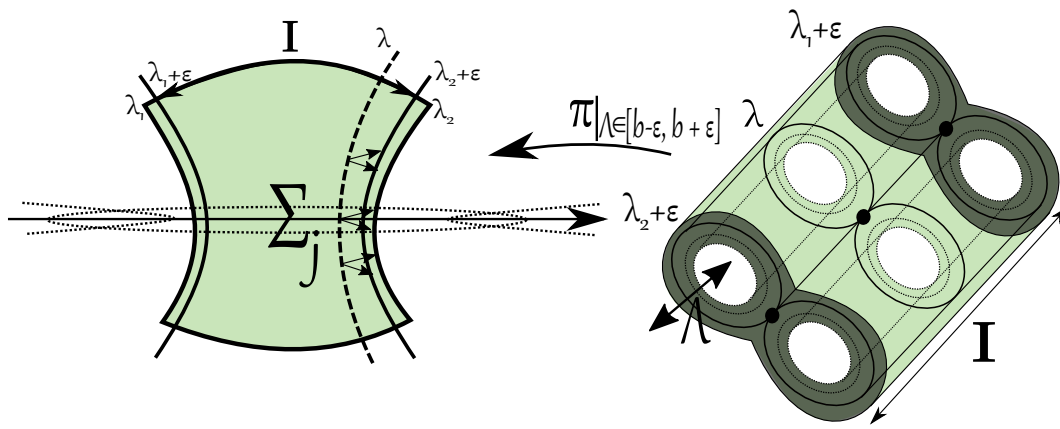


Рис. 19: Пример проекции двумерной клетки из  $U$  на элементарный билиард  $\Omega$  разбиения (без сегментов граничных гипербол). Двумерная клетка гомеоморфна  $B \times I$ , где  $B$  — двумерный атом. В образ клетки попадают только точки, оснащенные векторами, направленными вправо.

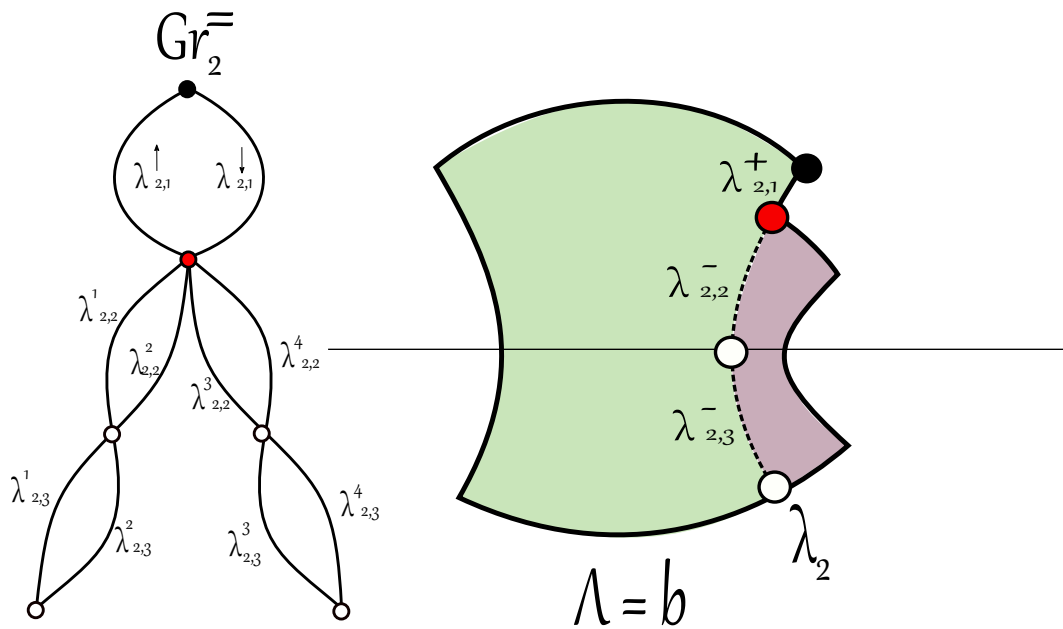


Рис. 20: Пример построения графа  $Gr_2^=$  по Алгоритму 4 для дуги граничной гиперболы  $\lambda_2$  билиарда, изображенного на рисунке.

движения  $\Omega_{b-\epsilon}$  с зафиксированным дополнительным интегралом  $\Lambda = b - \epsilon$  и для области возможного движения  $\Omega_{b+\epsilon}$  с зафиксированным дополнительным интегралом  $\Lambda = b + \epsilon$ ;

- Теперь построим граф  $Gr_i^=$ . Воспользуемся модифицированным Алгоритмом 1 для дуги граничной гиперболы  $\lambda_i$  и билиардов элементарного разбиения  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$ : на шаге 1 дополнительно отметим белыми точками пересечения граничной дуги гиперболы  $\lambda_i$  с фокальной прямой.

**Алгоритм 5.**

1. Рассмотрим элементарный бильярд  $\Sigma_j^>$  из разбиения  $\Sigma_1^>, \dots, \Sigma_{N'}^>$ . Также рассмотрим положительные кольца  $S^1$  2-атома  $V_j$  и построенные алгоритмом 3 графы  $Gr_i^>$  и  $Gr_{i'}^>$ . Здесь  $\lambda_i$  и  $\lambda_j$  суть границы элементарного бильярда  $\Sigma_j^>$ . Поставим в соответствие каждому положительному кольцу  $S^1$  по два цилиндра  $S^1 \times I$  и обозначим их через  $\Sigma_j^{R,>}$  и  $\Sigma_j^{L,>}$ . Применим алгоритм 2 к элементарному бильярду  $\Sigma_j^>$  и графам  $Gr_i^>$  и  $Gr_{i'}^>$ .
2. Аналогично применим алгоритм 2 для элементарного бильярда  $\Sigma_j^<$  и графам  $Gr_i^<$  и  $Gr_{i'}^<$ .
3. Разделим бильярд  $\Omega$ , 2-атомы всех элементарных бильярдов  $\Sigma_j$  и все графы  $Gr_i^{\bar{}}$  на две части. Проведем фокальную прямую и разобьем бильярд  $\Omega$  на два бильярда:  $\Omega^{top}$  и  $\Omega^{bot}$ . Теперь рассмотрим все элементарные бильярды  $\Sigma_j$  из разбиения  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$  и соответствующие им двумерные атомы  $V_j$  с графами  $K_j$ . Теперь разрежем граф  $K_j$  по вершинам и поставим бильярдам  $\Omega^{top}$  и  $\Omega^{bot}$  в соответствие получившиеся кольца  $K_j^{top}$  и  $K_j^{bot}$  (см. главу 6.1). Граф  $Gr_i^{\bar{}}$  мы также разрежем на два графа  $GrTop_i^{\bar{}}$  и  $GrBot_i^{\bar{}}$  по точкам (белым или черным), соответствующим точкам пересечения граничной дуги гиперболы  $\lambda_i$  с фокальной прямой.
4. Рассмотрим получившиеся в результате разреза графа 2-атома  $K_j$  кольца. Домножим эти кольца на отрезок и рассмотрим два экземпляра итогового произведения. Если на кольце лежала вершина графа  $K$ , то поставим на одном из ребер получившегося цилиндра букву  $\lambda_{0,t}$ , где индексом  $t$  соответственно пронумеруем участки фокальной прямой между дугами  $\lambda_i$ . Обозначим получившиеся цилиндры через

$$C_{1,j}^R, \dots, C_{\nu,j}^R, C_{\nu+1,j}^L, \dots, C_{2\nu,j}^L$$

Разделим получившиеся цилиндры на два класса — относящиеся к бильярду  $\Omega^{top}$  (такие пометим символом  $\bar{\phantom{x}}$ ) и на относящиеся к бильярду  $\Omega^{bot}$  (см. главу 6.1).

5. Теперь будем применять Алгоритм 2 по отдельности к бильярдам  $\Omega^{top}$  и  $\Omega^{bot}$ . А именно, при помощи Алгоритма 2 приклеим все графы  $GrTop_i^{\bar{}}$  к тем цилиндрам, которые на предыдущем шаге были помечены волной. Аналогично приклеим остальные цилиндры к графам  $GrBot_i^{\bar{}}$ . Обозначим получившиеся в результате склейки комплексы  $U^{top}$  и  $U^{bot}$  соответственно: это суть 3-атомы бильярдов  $\Omega^{top}$  и  $\Omega^{bot}$ .
6. Теперь склеим  $U^{top}$  и  $U^{bot}$  по одинаковым буквам  $\lambda_{0,t}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим однородно-гиперболический бильярд  $\Omega$  и дополнительный интеграл  $\Lambda \in [b - \varepsilon, b + \varepsilon]$ .

Сначала убедимся, что Алгоритм 4 действительно строит двумерные подкомплексы  $T_i$ . Пусть точка  $x \in \Omega$  гиперболы  $\lambda_i$  попадает в область возможного движения при некотором значении интеграла  $\Lambda$  близкого или равного  $b$ , тогда:

1. Если точка  $x$  не лежит на границе бильярда  $\Omega$  или на фокальной прямой, то в ней определены 4 вектора скорости, направленные либо по касательной к каустике ( $\Lambda \neq b$ ), либо по траекториям, проходящим через фокусы ( $\Lambda = b$ ). В алгоритме такая точка  $x$  лежит на отмеченном знаком « $-$ » сегменте;
2. Если точка  $x$  лежит на границе бильярда  $\Omega$ , то, в силу бильярдного закона, в такой точке определены только два вектора скорости. В алгоритме такая точка  $x$  лежит на отмеченном знаком « $+$ » сегменте;;

3. Если точка  $x$  лежит на фокальной прямой, то на уровне  $\Lambda = b$  в ней определены только два вектора скорости, а на всех остальных уровнях дополнительного интеграла — 4. В алгоритме такие точки дополнительно отмечены белым;
4. Если точка  $x$  лежит в вершине прямого угла, то ей соответствует один вектор скорости, а если в вершине угла  $3\pi/2$ , то все пары  $(x, v)$  склеятся в  $Q^3$ . В алгоритме такие точки дополнительно отмечены черным;
5. Если точка  $x$  границы биллиарда  $\Omega$  лежит на каустике  $\lambda = \alpha$ , то в ней также будет определён лишь один вектор скорости, в силу закона отражения. Такие точки в алгоритме также отмечены черным;
6. Если точка внутренняя точка  $x$  биллиарда  $\Omega$  лежит на каустике  $\lambda = \alpha$ , то в ней также будет определено два вектора скорости, в силу закона отражения. Такие точки в алгоритме также отмечены белым;

Рассмотрим прообраз дуги  $\lambda_i$  при фиксированном значении дополнительного интеграла  $\Lambda = \alpha \in [b - \varepsilon, b + \varepsilon]$  и при фиксированном значении интеграла  $\Lambda = \beta \in [b - \varepsilon, b + \varepsilon]$ . Обозначим эти (одномерные) прообразы через  $Gr_\beta$  и  $Gr_\alpha$  соответственно. Заметим, что структура  $Gr_\beta$  и  $Gr_\alpha$  зависит только от области возможного движения при  $\Lambda = \alpha$  и  $\Lambda = \beta$ , а она, в силу малости  $\varepsilon$ , зависит только от соотношений  $\alpha, \beta$  и  $b$ . А именно,  $Gr_\beta \cong Gr_\alpha$  в том и только том случае, если либо  $\alpha < b$  и  $\beta < b$ ,  $\alpha = \beta = b$ , либо  $\alpha > b$  и  $\beta > b$ . В итоге, алгоритм 4 действительно строит графы  $Gr_i^<$ ,  $Gr_i^=$  и  $Gr_i^>$ , так как структура одномерных комплексов границ меняется только при переходе через критическое значение.

Теперь перейдём к доказательству второго утверждения теоремы 5: рассмотрим комплекс  $A = U \setminus (T_1 \cup \dots \cup T_n)$ . Зафиксируем некоторое значение интеграла  $\Lambda = \alpha \in [b - \varepsilon, b + \varepsilon]$  и спроецируем комплекс  $A$  на биллиард  $\Omega$  естественной проекцией  $\pi$ . В итоге получится несвязное объединение элементарных биллиардов  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$  без границ. Рассмотрим один из таких биллиардов  $\Sigma_j$  и введём биллиардный закон на его границах: это будет плоский элементарный биллиард, а потому в его прообразе при естественной проекции будет слой  $\Lambda = \alpha$  одного из атомов. Тогда, варьируя  $\alpha$ , мы получаем, что прообраз  $\Sigma_j$  при  $\Lambda \in [b - \varepsilon, b + \varepsilon]$  и введённом биллиардном отражении на «вырезанных» границах, гомеоморфен 3-атому из списка теоремы 3, а точнее, гомеоморфен  $V_j \times S^1$ . Теперь уберем биллиардное отражение на границе элементарного биллиарда  $\Sigma_j$ : каждый слой  $V_j$  гомеоморфен прообразу оснащённой векторами скорости гиперболы, а значит, при убирании двух таких многообразия  $V_j \times S^1$  разобьётся на два многообразия  $V_j \times I$ , что и требовалось доказать.

Перейдем к заключительному пункту теоремы 3. Докажем, что алгоритм 5 действительно корректно склеивает двумерные клетки  $T_i$  с трехмерными клетками  $2(V_j \times I)$ . Для всех слоев интеграла  $\Lambda \neq b$  доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 3, так как эти слои не являются особыми. Для построения особого слоя  $G$  атома  $U$  сначала разрежем биллиард  $\Omega$  по фокальной прямой и, следуя алгоритму, рассмотрим биллиарды  $\Omega^{top}$  и  $\Omega^{bot}$ . Данные биллиарды не пересекаются с фокальной прямой внутри области, а потому его можно разбить на элементарные биллиарды вида  $\Sigma_1 \cap \Omega^{top}, \dots, \Sigma_N \cap \Omega^{top}$  и  $\Sigma_1 \cap \Omega^{bot}, \dots, \Sigma_N \cap \Omega^{bot}$  и любой элементарный биллиард  $\Sigma_j \cap \Omega^{top}$  или  $\Sigma_j \cap \Omega^{bot}$  будет биллиардом без особенности на уровне  $\Lambda = b$  (иначе говоря, 3-атом гомеоморфен произведению тора на отрезок). Способ приклейки таких биллиардов к графам  $Gr_i^>$ ,  $Gr_i^=$  или  $Gr_i^<$  опять же аналогичен теореме 3. Дополнительно в Алгоритме 4 помечаются ребра, по которым производился разрез 2-атомов: именно склейка по ним отвечает склейки по фокальной прямой на уровне атомов.

□

**Замечание 7.** Из доказательства теоремы 5 следует, что если бильярд  $\Omega$  не содержит сегментов форкальной прямой внутри или на границе области, то в таком бильярде  $U \cong G_2^k \times I$ , где  $G_2^k$  — 2-поверхность рода  $k$ , где  $k$  — сложность бильярда. Так как в таком случае Алгоритм 3 и Алгоритм 5 в точности повторяют Алгоритмы 1 и 2 для не седловых слоев.

**Замечание 8.** Из теоремы 5 следует, что особый слой невыпуклого бильярда  $U$  склеивается из особых слоев выпуклых бильярдов  $\Sigma_j$ , входящих в его разбиение. Однако, если выбрать разбиение бильярда  $\Omega$  каким-либо другим способом (например, разрезать по всем квадратам на которых лежат особые точки), то это разбиение поднимется до другого разбиения комплекса  $U$  на клетки. Например, бильярд, изображенный на рисунке 20 разбивался на 2 элементарных бильярда типа  $A_0$ , однако, его можно разбить на 3 элементарных бильярда: 2 типа  $A_0$  и на один элементарный бильярд типа  $B_0$ , проведя эллипс, на котором лежит особая точка. Это приводит к невозможности описания топологии атома  $U$  только через описание двумерных клеток этого комплекса.

## 8 Заключение.

Предметом анализа данной работы были невыпуклые плоские бильярды, а именно, исследовалась топология слоения Лиувилля для многообразия  $Q^3$  в таких бильярдах. В ходе работы невыпуклый бильярд был сначала разбит на элементарные бильярды (без углов  $3\pi/2$ ), а потом полученное разбиение было «поднято» на уровень  $Q^3$ . В теоремах 4 и 5 было представлено полное алгоритмическое описание топологии окрестности особого слоя критических значений дополнительного интеграла. Теорема 3 описывает окрестности особых слоев  $A = \lambda_i$ , а Теорема 5 — топологию окрестности особого слоя  $A = b$ . Отметим, что ранее описание окрестностей критических значений не встречалось в других работах по данной тематике.

Результаты, полученные в данной работе, докладывались на международных конференциях (Ломоносов 2019, Ломоносов 2020, Воронежская Зимняя математическая школа С.Г. Крейна, Equadiff-2019, GDIS 2018, CIS 2018) и научно-исследовательском семинаре «Современные геометрические методы» под руководством акад. А. Т. Фоменко, проф. А. С. Мищенко, проф. А. В. Болсинова, проф. А. А. Ошемкова, проф. Е. А. Кудрявцевой, доц. И. М. Никонова, доц. А.Ю. Коняева, асс. В. В. Ведюшкиной (механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова).

## 9 Список литературы.

1. Табачников С. Л. Геометрия и бильярды. М.; Ижевск: НИЦ «РХД», 2011.
2. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т. 1. Ижевск: НИЦ «РХД», 1999.
3. Козлов В. В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде // Прикладная математика и механика, том 59, вып. 1, 1995.
4. Фокичева В. В. Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик // Матем. сб. 2015. **206**, №10. 127–176.
5. Фокичева В.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые бильярды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твердого тела // Докл. РАН. Сер. матем. 2015. **465**, №2. 150–153. (Integrable Billiards Model Important Integrable Cases of Rigid Body Dynamics // Doklady Mathematics. 2015. **92**, N 3. 1–3. Pleiades Publishing, Ltd., 2015).

6. Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые топологические бильярды и эквивалентные динамические системы //Изв. РАН. Сер. матем. 2017. **81**, №4. 20—67.
7. Fokicheva V., Fomenko T. Billiard Systems as the Models for the Rigid Body Dynamics // Studies in Systems, Decision and Control. Advances in Dynamical Systems and Control. Vol.69. Ed. by V. Sadovnichiy, M. Zgurovsky. Springer; International Publishing Switzerland, 2016. 13—32.
8. Dragovic V., Radnovic M. Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards// Regular Chaotic Dyn. РАН. 2009. **14**. 479—494.
9. Драгович В., Раднович М. Интегрируемые бильярды, квадрики и многомерные поризмы Понселе. М.; Ижевск: НИЦ “РХД”, 2010.
10. Dragovic V., Radnovic M. Pseudo-integrable billiards and arithmetic dynamics // Modern Dynamics. 2014. **8**, N1, 109—132.
11. Dragovic V., Radnovic M. Pseudo-integrable billiards and double-reflection nets // Russ. Math. Surveys. 2015. **70**, N1, 1—31.
12. Dragovic V., Radnovic M. Periods of pseudo-integrable billiards // Arnold Math. 2015. **1**, N1. 69—73.
13. Bolsinov A.V., Fomenko A.T., Oshemkov A.A. Topological Methods in the Theory of Integrable Hamiltonian. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2006.
14. Кудрявцева Е.А., Никонов И.М., Фоменко А.Т. Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия //Матем. сб. 2008. **199**, №9. 3—96.
15. Кудрявцева Е.А., Никонов И.М., Фоменко А.Т. Симметричные и неприводимые абстрактные многогранники // Современные проблемы математики и механики. Т. 3. Математика. Вып. 2. Геометрия и топология // Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, 2009. 58—97.
16. Кудрявцева Е.А., Фоменко А.Т. Группы симметрий правильных функций Морса на поверхностях // Докл. РАН. Сер. матем. 2012. **446**, №6. 615—617.
17. Кудрявцева Е.А., Фоменко А.Т. Любая конечная группа является группой симметрий некоторой карты (“атома”- бифуркации) // Вестн. Моск.ун-та. Матем. Механ. 2013. №3. 21—29.
18. Кудрявцева Е.А. Аналог теоремы Лиувилля для интегрируемых гамильтоновых систем с неполными потоками// Докл. РАН. 2012. **445**, №4. 383—385.
19. Москвин В.А. Топология слоений Лиувилля интегрируемого бильярда в невыпуклых областях// Вестник МГУ, 2018, **3**. 21 — 29.
20. Москвин В.А. Алгоритмическое построение двумерных особых слоев атомов бильярдов в невыпуклых областях// Вестник МГУ, 2020, **3**, 3 — 12.