

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ И МЕХАТРОНИКИ
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ПРИЛОЖЕНИЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

**КЛАССИФИКАЦИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ БИЛЛИАРДОВ НА ПЛОСКОСТИ
МИНКОВСКОГО**

Выполнил студент
622 группы
Каргинова Екатерина Евгеньевна

подпись студента

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор Карапетян Александр Владиленович

подпись научного руководителя
академик, профессор Фоменко Анатолий Тимофеевич

подпись научного руководителя
к.ф.-м.н., ассистент Ведюшкина Виктория Викторовна

подпись научного руководителя

Москва
2020 г.

Содержание

1 Введение.	3
1.1 История вопроса	3
1.2 Необходимые сведения о плоскости Минковского	3
1.3 Семейство софокусных квадрик на плоскости Минковского	3
1.4 Биллиардный закон на плоскости Минковского	5
2 Простые биллиарды на плоскости Минковского.	5
2.1 Определение простого биллиарда. Первые интегралы движения.	5
2.2 Классификация простых биллиардов на плоскости Минковского.	7
3 Топологический биллиард на плоскости Минковского.	8
3.1 Определение топологического эллиптического биллиарда.	8
3.2 Обозначения и визуализация биллиардных столов.	9
3.3 Классификация топологических эллиптических биллиардов с выпуклыми склейками. . .	12
3.4 Классификация топологических биллиардов, допускающих прямые склейки	18
4 Подсчет инвариантов Фоменко-Цишанга для топологических биллиардов.	22
4.1 Особые и неособые уровни интеграла	22
4.2 Аналог теоремы Лиувилля: связные компоненты регулярного слоя являются торами. . .	24
4.3 Атомы-бифуркации	28
4.4 Поверхности уровней особых значений интеграла в топологических биллиардах с выпуклыми склейками: седловые значения	29
4.5 Поверхности уровней особых значений интеграла в топологических биллиардах, допускающих прямые склейки: седловые значения	33
5 Вычисление инвариантов Фоменко-Цишанга.	42
5.1 Молекула Фоменко-Цишанга - полный инвариант лиувиллевой эквивалентности	42
5.2 Подсчет меток.	43
6 Итоги исследования.	57
6.1 Классификация слоений Лиувилля для топологических биллиардов на плоскости Минковского.	57
6.2 Биллиарды на плоскости Минковского как модели некоторых случаев интегрируемости твердого тела	58
6.3 Таблица с инвариантами Фоменко-Цишанга для всех эллиптических биллиардов с выпуклыми склейками.	62
6.4 Таблица с инвариантами Фоменко-Цишанга для топологических биллиардов, допускающих прямые склейки и содержащих область e	64

1 Введение.

1.1 История вопроса

Математический бильярд — движение материальной точки (шара) в плоской области, ограниченной кусочно-гладкой кривой. Вопросам об интегрируемости такой системы в зависимости от вида границы посвящено множество работ. Интегрируемость бильярда в эллипсе на евклидовой плоскости была доказана в работе Дж. Д. Биркгофа [1]. В случае, когда граница бильярда является кусочно-гладкой и состоит из частей софокусных квадрик, таких, что углы излома не превышают $\frac{3\pi}{2}$ (то есть, равны $\frac{\pi}{2}$, поскольку софокусные квадрики всегда пересекаются под прямым углом), бильярдное движение также интегрируемо. В книге [4] В.В. Козлов, Д. В. Трещев отметили, что в этих системах существует дополнительный независимый первый интеграл, что значит, что они вполне интегрируемы по Лиувиллю.

В работах В. Драгович, М. Раднович [8, 9] и В. В. Фокичевой была проведена полная лиувиллева классификация плоских бильярдов, ограниченных дугами софокусных квадрик. Далее В. В. Фокичевой [5] была рассмотрена конструкция топологического бильярда на евклидовой плоскости — склеенного из плоских вдоль дуг границ.

Бильярд в эллипсе на плоскости Минковского был рассмотрен В. Драгович и М. Раднович в работе [3]. Были описаны траектории системы и построена меченая молекула - инвариант Фоменко-Цишанга слоения Лиувилля данного бильярда.

В данной работе исследуются топологические бильярды в областях, ограниченных дугами софокусных квадрик на плоскости Минковского.

Целью работы является классификация топологических бильярдов на плоскости Минковского и подсчет для каждого класса эквивалентности инварианта Фоменко-Цишанга - графа с целочисленными метками, полностью характеризующего топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности с точностью до Лиувиллевой эквивалентности.

Автор благодарит А. Т. Фоменко за постановку задачи и внимание к работе, В. В. Ведюшкину за многочисленные консультации и ценные замечания.

1.2 Необходимые сведения о плоскости Минковского

Определение 1.1. *Плоскостью Минковского называется плоскость \mathbb{R}^2 со скалярным произведением $\langle x, y \rangle = x_1y_1 - x_2y_2$.*

Расстояние между двумя точками определяется по формуле $dist(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$.

Поскольку скалярное произведение может принимать отрицательные значения, все векторы разделяются на 3 непересекающихся множества. Вектор v называется

- **пространственно-подобным**, если его длина вещественная, то есть $\langle v, v \rangle > 0$;
- **времени-подобным**, если его длина чисто мнимая, то есть $\langle v, v \rangle < 0$;
- **световым** или **изотропным**, если его длина нулевая, то есть $\langle v, v \rangle = 0$.

Два вектора называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю (в смысле Минковского). Отметим, что световые вектора ортогональны сами себе.

Покажем на примере точки 0, как располагаются векторы каждого из трех типов на плоскости Минковского (рис. 1). Световые векторы располагаются на двух прямых, и эти прямые, называемые изотропными, разбивают плоскость на четыре части. В верхней и нижней областях (см. рис. 1) расположены векторы мнимой длины, а в правой и левой областях - векторы вещественной длины.

1.3 Семейство софокусных квадрик на плоскости Минковского

Рассмотрим на плоскости Минковского эллипс \mathcal{E} , задаваемый следующим соотношением

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$$

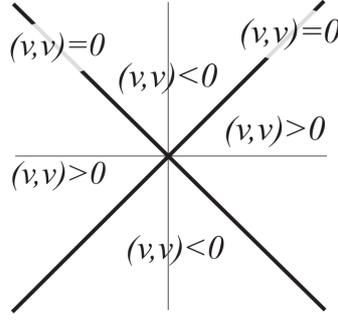


Рис. 1: Расположение векторов на плоскости Минковского в зависимости от их типа.

Здесь $a > b > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ - вещественные числа. Софокусное семейство квадрик \mathcal{C}_λ задается уравнением:

$$\mathcal{C}_\lambda: \frac{x^2}{a - \lambda} + \frac{y^2}{b + \lambda} = 1 \quad (1)$$

Данное семейство изображено на рис. 2.

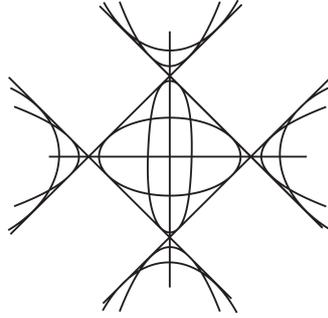


Рис. 2: Семейство софокусных квадрик \mathcal{C}_λ на плоскости Минковского.

В зависимости от значения λ квадрика может быть прямой, эллипсом или гиперболой, а именно:

- при $\lambda \in (-\infty, -b)$ квадрика является гиперболой с действительной осью x ;
- при $\lambda \in (a, \infty)$ квадрика является гиперболой с действительной осью y ;
- при $\lambda \in (-b, a)$ квадрика является эллипсом.

Значениям $\lambda = a, -b, \infty$ соответствуют вырожденные квадрики $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_{-b}$ и \mathcal{C}_∞ , являющиеся осью y , осью x и прямой на бесконечности, соответственно.

Предложение 1.1. Все невырожденные квадрики семейства (1) имеют четыре общих касательных, а именно - прямые $x \pm y = \pm\sqrt{a+b}$.

Предложение 1.2. Семейство (1) имеет четыре фокуса, а именно: $F_1 = (-\sqrt{a+b}, 0), F_2 = (\sqrt{a+b}, 0), G_1 = (0, -\sqrt{a+b}), G_2 = (0, \sqrt{a+b})$. Назовем вещественной частью эллипса (гиперболы) ту часть, касательные векторы к которой вещественны, мнимой - ту часть, касательные векторы к которой мнимые.

Для эллипса с параметром λ сумма расстояний от фокусов F_1, F_2 до любой точки вещественной части эллипса равно $2\sqrt{a-\lambda}$, а от G_1, G_2 до любой точки мнимой части эллипса сумма расстояний равна $2i\sqrt{b+\lambda}$. Кроме того, для гиперболы с параметром λ разность расстояний от фокусов F_1, F_2 до любой вещественной точки гиперболы равна $2\sqrt{a-\lambda}$, а от G_1, G_2 до любой точки мнимой части гиперболы равна $2i\sqrt{b+\lambda}$.

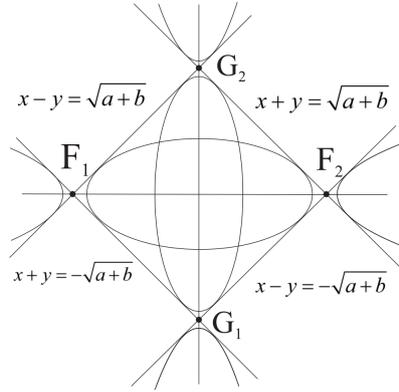


Рис. 3: Расположение общих касательных и фокусов относительно семейства квадрик.

На рис.3 отмечено, как расположены общие касательные и фокусы относительно семейства квадрик.

Нетрудно проверить, что если две квадрики семейства пересекаются в некоторой точке, то касательные векторы к этим квадрикам в точке пересечения ортогональны друг другу в смысле Минковского.

1.4 Биллиардный закон на плоскости Минковского

Определение 1.2. Пусть v - вектор, ℓ - некоторая прямая. Представим вектор v в виде $v = v_n + v_\ell$, где v_n нормальная составляющая вектора скорости, а v_ℓ принадлежит ℓ . Тогда **биллиардным отражением вектора v от прямой ℓ на плоскости Минковского** назовем вектор $v' = -v_n + v_\ell$.

В случае, когда v_ℓ световой, отражение, очевидно, не определено.

При таком определении отражения сохраняется скалярное произведение вектора на себя, откуда следует что тип вектора при отражении не меняется.

Определение 1.3. Прямую ℓ' назовем **биллиардным отражением прямой ℓ от гладкой кривой S на плоскости Минковского**, если:

- точка пересечения этих прямых A лежит на кривой S ;
- направляющие векторы этих прямых являются биллиардными отражениями друг друга относительно касательной e к кривой S в точке A .

Если направляющий вектор e световой, то биллиардное отражение вектора и прямой не определено.

Отметим, что такое определение обладает симметричностью: если прямая ℓ_1 является биллиардным отражением прямой ℓ_2 , то прямая ℓ_2 также является биллиардным отражением ℓ_1 .

2 Простые биллиарды на плоскости Минковского.

2.1 Определение простого биллиарда. Первые интегралы движения.

Определение 2.1. **Простым биллиардом Ψ** назовем связное и компактное подмножество плоскости Минковского, граница которого является кусочно-гладкой кривой и состоит из таких дуг квадрик семейства (1), которые попарно пересекаются под углами, равными $\pi/2$.

Отметим, что здесь и далее биллиардом называем и область, в котором происходит движение, и само движение.

Закон отражения в простых биллиардах на плоскости Минковского устроен следующим образом.

Обозначим за l прямую, вдоль которой в течение небольшого отрезка времени двигалась материальная точка до удара о границу, а за $v = (v_1, v_2)$ - вектор скорости этой материальной точки. После удара о границу точка продолжает движение вдоль прямой m , которая является биллиардным отражением прямой l . Вдоль прямой m точка движется со скоростью $u = (u_1, u_2)$, причем для векторов v и u

выполняется равенство $v_1^2 + v_2^2 = u_1^2 + u_2^2$, то есть при отражении сохраняется евклидова длина вектора скорости.

Акцентируем внимание на необычном законе отражения:

- при ударе точки о границу выполняется равенство углов падения и отражения, где «угол» рассматривается смысле Минковского;
- материальная точка имеет одинаковую евклидову длину вектора скорости до и после столкновения с границей.

В точках, где касательная к области Ψ световая, бильярдное отражение вектора можно доопределить по непрерывности, а именно - при попадании в такую точку вектор отражается в противоположный по направлению. Такие точки являются точками касания одной из прямых $x \pm y = \sqrt{a \pm b}$, которые являются общими для всего семейства. Кроме того, в точках излома границы, бильярдное отражение также доопределяем по непрерывности

Определим фазовое пространство M^4 бильярда Ω .

Это четырехмерное многообразие, такое что

$$M^4 = \{(x, y, v_1, v_2) | (x, y) \in \Omega, (v_1, v_2) \in T_x R^2\} / \sim$$

Отношение эквивалентности задается следующим образом:

$(x_1, y_1, v_1, v_2) \sim (x_2, y_2, u_1, u_2)$ если:

- $x_1 = x_2, y_1 = y_2$, точка (x_1, y_1) лежит на границе области Ω ;
- $(v_1, v_2) \in l_1, (u_1, u_2) \in l_2$, при этом l_1 является бильярдным отражением прямой l_2 ;
- $v_1^2 + v_2^2 = u_1^2 + u_2^2$ (то есть при отражении сохраняется евклидова длина вектора скорости).

Итак, интегралом в данной задаче является функция $v_E = v_1^2 + v_2^2$, поскольку при таком отношении эквивалентности сохраняется именно евклидова длина вектора скорости.

В качестве дополнительного интеграла возьмем λ - параметр каустики к траектории. Несложными арифметическими выкладками можно получить выражение λ через координаты точки фазового пространства.

$$\lambda = \frac{-v_1^2 b - a v_2^2 + (x v_2 - y v_1)^2}{v_1^2 - v_2^2}.$$

Как легко проверить, при отражении от точки границы параметр λ сохраняется.

Интегралы λ и v_e находятся в инволюции относительно стандартной скобки Пуассона и функционально независимы. Тогда на регулярной части многообразия M^4 можно условно считать, что простой бильярд интегрируем по Лиувиллю. Впрочем, мы не будем пользоваться этим обстоятельством. Доказательство того факта, что регулярные слои пары интегралов являются двумерными торами (ториами Лиувилля) мы проведем геометрически, без использования коммутирующих векторных полей.

Ограничивая систему на поверхность уровня интеграла $v_1^2 + v_2^2$, получим трёхмерное многообразие, называемое изоэнергетической поверхностью Q^3 . При изменении λ оно расслаивается на двумерные поверхности.

Определение 2.2. Пусть v - интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система на изоэнергетической поверхности Q^3 . Рассмотрим соответствующее ей слоение Лиувилля на Q^3 . Базой слоения Лиувилля называется пространство его слоев с обычной фактор-топологией, т.е. топологическое пространство, точками которого объявляются компоненты связности слоев слоения Лиувилля (каждая компонента связности слоя заменяется точкой).

Определение 2.3. Две интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы v_1 и v_2 на изоэнергетических многообразиях Q_1^3 и Q_2^3 называются грубо лиувиллево эквивалентными, если существует гомеоморфизм между базами соответствующих слоений Лиувилля, который локально (т. е. в окрестности каждой точки базы) поднимается до послойного гомеоморфизма слоений Лиувилля.

Определение 2.4. Пусть $(M_1^4, \omega_1, f_1, g_1)$ и $(M_2^4, \omega_2, f_2, g_2)$ - две интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы на симплектических многообразиях (M_1^4, ω_1) и (M_2^4, ω_2) и обладающие интегралами f_1, g_1 и f_2, g_2 . Рассмотрим их изоэнергетические многообразия $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$ и $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$. Интегрируемые системы называют лиувиллево эквивалентными, если существует послойный диффеоморфизм $Q_1^3 \rightarrow Q_2^3$, сохраняющий ориентацию 3-многообразий Q_1^3 и Q_2^3 и ориентацию всех критических окружностей.

Теорема 2.1. (А. Т. Фоменко, Х. Цишанг [2]) Две невырожденные интегрируемые гамильтоновы системы на компактных неособых изоэнергетических поверхностях $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$ и $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$ лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.

Эта теорема справедлива для гладких интегрируемых систем. В нашем случае многообразие Q^3 является кусочно-гладким, однако на нем, оказывается, существует слоение Лиувилля на двумерные торы и особые слои интеграла. Следовательно, инварианты Фоменко корректно определены и мы их вычислим.

2.2 Классификация простых билиардов на плоскости Минковского.

Определение простого билиарда дано в пункте 2.1

Общие касательные семейства софокусных квадрик делят плоскость на несколько частей, и в пяти из них могут располагаться софокусные эллипсы или гиперболы. Назовем их I, II, III, IV и V, как показано на рис. 4

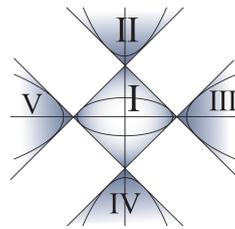


Рис. 4: Области I, II, III, IV и V на плоскости.

Определение 2.5. Назовем простой билиард **эллиптическим**, если его граница состоит из дуг софокусных эллипсов и, возможно, частей координатных осей, а **гиперболическим**, если его граница состоит из дуг софокусных гипербол и, возможно, частей координатных осей.

Отметим, что в данной ситуации не существует простого билиарда, граница которого состоит из дуг как эллипсов, так и гипербол, так как они расположены в различных частях плоскости (эллипсы располагаются только в I, а гиперболы - в II, III, IV, V)

На границе каждого простого билиарда есть 4 точки, называемые далее **особыми**, при попадании в которые материальная точка продолжает движение в противоположном направлении. Таких точек два вида: точки касания границы с общими касательными софокусного семейства квадрик и точки нарушения гладкости границы.

Определение 2.6. **Сегментом** называем часть границы, заключенную между двумя соседними особыми точками.

Определение 2.7. Два простых билиарда Ω и Ω' называем **эквивалентными друг другу**, если:

- они получаются друг из друга отражением евклидовым относительно оси x , оси y ;
- изменением параметра λ сегмента границы, (исключая λ , соответствующие значениям a или $-b$) так, чтобы в процессе их изменения λ не принимал значений a , $-b$ и ∞ .

Далее под «отражением» и «поворотом» подразумеваются отражения и повороты как евклидовы движения плоскости.

Определение 2.8. Граница простого бильярда содержит ровно четыре сегмента, которые будем называть **верхним, нижним, левым и правым** в зависимости от их расположения относительно внутренности бильярда.

Теорема 2.2. Любой простой эллиптический бильярд эквивалентен одному из бильярдов, представленных на рис. 5

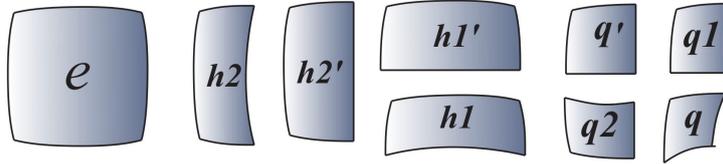


Рис. 5: Классификация простых эллиптических бильярдов в метрике Минковского.

3 Топологический бильярд на плоскости Минковского.

3.1 Определение топологического эллиптического бильярда.

Рассмотрим бильярды, не содержащие прямых сегментов, то есть любой из четырех сегментов либо выпуклый, либо невыпуклый. Напомним, что граница бильярда e содержит четыре выпуклых сегмента, граница бильярда h содержит три выпуклых сегмента и один невыпуклый сегмент, граница бильярда q содержит два невыпуклых сегмента и два выпуклых сегмента. Введем несколько определений

Определение 3.1. Пусть ℓ_1, ℓ_2 — два выпуклых или прямых сегмента двух простых бильярдов Ω_1 и Ω_2 , причем эти сегменты совпадают и принадлежат квадрике с параметром $\lambda_{\ell_1} = \lambda_{\ell_2}$ одного и того же софокусного семейства.

Склейка Ω_1 и Ω_2 вдоль сегментов ℓ_1, ℓ_2 (их образы после склейки назовем **ребром склейки** или **сегментом склейки**) есть тождественная изометрия между этими сегментами. Границы ребер склейки — **вершины склейки**.

В случае, когда сегменты ℓ_1, ℓ_2 являются выпуклыми, их склейку также назовем **выпуклой**. Если оба сегмента являются прямыми, то склейку вдоль этих сегментов назовем **прямой склейкой**.

Топологический эллиптический бильярд — двумерное связное кусочно-гладкое ориентируемое многообразие с краем, полученное в результате определенных выше склеек простых эллиптических бильярдов вдоль некоторых выпуклых сегментов, удовлетворяющих следующим требованиям: углы на границе могут быть равны лишь $\frac{\pi}{2}$ и π , а внутренние углы могут быть равны лишь 2π и π .

Граничная вершина склейки — вершина, в которой сходятся одно ребро склейки и два свободных ребра

Коническая точка — вершина, в которой сходятся два ребра склейки.

Внутренняя вершина склейки — вершина, в которой сходятся четыре ребра склейки.

Замечание 3.1. Далее для краткости будем опускать слово «эллиптические» в словосочетании «топологический эллиптический бильярд», поскольку в данной работе топологические гиперболические бильярды не рассматриваются. Мотивировано данное решение тем, что все гиперболические бильярды будут ливиллево эквивалентны некоторым эллиптическим.

Замечание 3.2. Отметим, что далее будем рассматривать лишь такие топологические бильярды, в которых ребро склейки является общим ровно для двух простых бильярдов, входящих в топологический бильярд, то есть мы не рассматриваем бильярдные книжки (подробнее о бильярдных книжках см. [10])

Отметим, что внутренний угол, равный π , соответствует конической точке. Опишем закон отражения в топологическом бильярде.

После операции склейки закон отражения для свободных ребер остается таким же, как и для простого бильярда, а на ребре склейки меняется следующим образом: точка продолжает движение по другому листу, прямая вдоль которой она движется является бильiardным отражением прямой, вдоль которой она двигалась до удара, квадрат евклидовой длины скорости остается неизменным.

Отдельно стоит отметить случай конических точек. Отражение в конических точках определим по непрерывности, а именно: при ударе о такую точку материальная точка продолжает движение в той же области в противоположном направлении.

Замечание 3.3. В топологическом бильярде при ударе материальной точки о границу выполняется равенство углов падения и отражения (здесь понятие «угол» рассматривается в смысле Минковского), а также сохраняется длина вектора скорости материальной точки, где длина вектора - евклидова, а именно корень из суммы квадратов компонент вектора. Это утверждение следует из введенного ранее закона отражения в простых бильiardах.

При таком законе отражения сохраняется интеграл $v_E = v_1^2 + v_2^2$ - квадрат евклидовой скорости, и, как и в случае простых бильiardов, параметр каустики λ . В самом деле, при определении склейки было отмечено, что все сегменты границ принадлежат одному и тому же семейству софокусных квадрик.

Поскольку данные интегралы функционально независимы и находятся в инволюции относительно стандартной скобки Пуассона, можем считать систему топологического бильiardа кусочно-интегрируемой по Лиувиллю. Более подробные определения см. в работе [5] В. В. Фокичевой.

Введем следующее отношение эквивалентности:

Определение 3.2. Рассмотрим два топологических бильiardа Δ и Δ' , которые получены склейкой простых бильiardов Ψ_i и Ψ'_i . Будем считать их эквивалентными, если:

- бильiardы Ψ'_i получены заменой простых бильiardов Ψ_i на им эквивалентные,
- бильiardы Δ и Δ' получены друг из друга поворотом на $\pi/2$ либо отражением относительно оси x или оси y (напомним, что под «отражением» и «поворотом» подразумеваем отражение и поворот как евклидовы движения плоскости).

Замечание 3.4. Обратим внимание на то, что отношение эквивалентности для топологических бильiardов несколько иное, чем для простых. Действительно, если считать эквивалентными простые бильiardы h_1 и h_2 , то при замене в бильiardе $\Delta_\alpha(e + 2h_2)$ (это топологический бильiard, склеенный из простого бильiardа e и из двух простых бильiardов h_2 , которые приклеены к e вдоль противоположных выпуклых сегментов) одного из экземпляров h_2 на ему эквивалентный h_1 , топологический бильiard в смысле определения 3.1 мы не получим, поскольку граница полученной области содержит угол $3\pi/2$ (см. рис. 6: граничный угол, равный $3\pi/2$, отмечен фиолетовой точкой) Данное наблюдение делает формулировку и доказательство теорем 3.1, 3.2, 4.2, 4.5 очень громоздкими, поэтому было принято решение считать простые бильiardы, полученные друг из друга евклидовым поворотом на $\pi/2$, различными, а топологические, полученные друг из друга поворотом на $\pi/2$, эквивалентными. Более того, как будет доказано далее, бильiardы на плоскости Минковского, полученные друг из друга евклидовым поворотом на $\pi/2$, оказываются лиувиллево эквивалентными.

3.2 Обозначения и визуализация бильiardных столов.

Рассмотрим простой бильiard, верхний и нижний сегменты которого являются выпуклыми или прямыми. Склеим k штук таких бильiardов последовательно по верхним и нижним сегментам (как на рис. 7). Такую конструкцию назовем **столбцом** из k бильiardов.

Аналогично определим **строку** из n бильiardов - это последовательно склеенные по правым и левым сегментам n простых бильiardов (рис. 7).

Далее, поскольку приближенное к реальности изображение топологического бильiardа, использованное, в частности, выше, крайне сложно «наглядно нарисовать» в трехмерном пространстве при

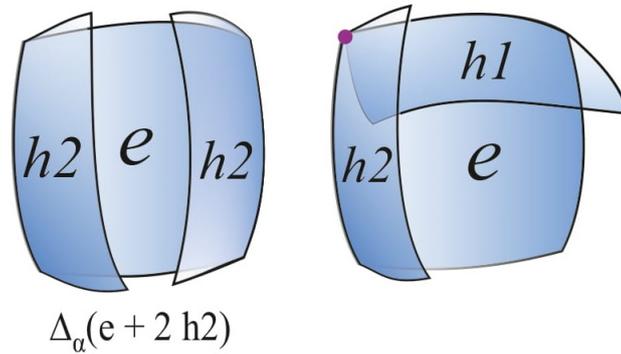


Рис. 6: Иллюстрация к замечанию 3.4.

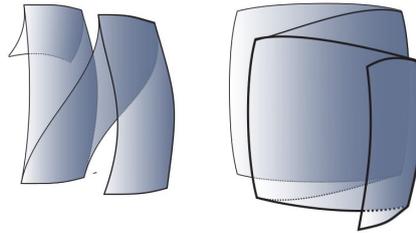


Рис. 7: Столбец билиардов (слева) и строка/ряд билиардов (справа).

даже небольшом количестве листов, то в дальнейшем будем использовать так называемое схематичное изображение билиарда (или его **схему**). Составляется она следующим образом.

Схема топологического билиарда - это его развертка, в которой простые билиарды, входящие в состав топологического, обозначены квадратом либо прямоугольником в зависимости от типа билиарда, а именно: билиард e (см. рис. 5) на схеме обозначается большим квадратом, билиарды $h1$, $h1'$ и $h2$, $h2'$ (см. рис. 5) - прямоугольниками (причем для билиардов $h1$ и $h1'$ ширина прямоугольника больше его высоты, а для $h2$ и $h2'$ - наоборот), и, наконец, билиарды q , $q1$, $q2$, q' (см. рис. 5) обозначаются маленьким квадратом.

Прямые склейки на схеме билиарда будем выделять красными отрезками.

Во многих случаях в топологическом билиарде содержатся сегменты различных простых билиардов, которые являются ребрами склейки, но при этом не совпадают на схеме (т. е. развертке). Тогда дополним схему следующим образом: на таких сегментах будем рисовать стрелочки. Направление стрелочки будем указывать таким, чтобы при склейке двух сегментов стрелочки на них имели одинаковое направление. Далее для наглядности для каждой пары склеенных сегментов (либо групп сегментов) будем использовать различные типы стрелочек. К примеру, рассмотрим на рис. 8 правый билиард. Его верхние сегменты склеены между собой и нижние сегменты склеены между собой, образуя две конические точки. Для того, чтобы его схема отличалась от схемы среднего билиарда (в нем конических точек нет), отметим на верхних сегментах стрелочки и на нижних сегментах стрелочки.

Примеры схемы билиарда показаны на рис. 8.

Поясним дальнейшие обозначения. Топологический билиард без конических точек будем обозначать Δ_α и в скобках указывать из каких билиардов он образован. Аналогично, топологический билиард с конической точкой обозначим Δ_β . Билиарды, гомеоморфные лентам, будем обозначать Δ_γ , причем если ребрами склейки являются верхние и нижние сегменты, то билиард обозначаем $\Delta_\gamma(\dots)_1$, а если ребрами склейки являются боковые сегменты, то билиард обозначаем $\Delta_\gamma(\dots)_2$. Подробнее о том, как выглядят различные билиарды-ленты, см. рис. 9

Различные типы конических точек также будем обозначать по-разному. Первый тип конических точек - точки, образованные двумя выпуклыми сегментами склейки, будем их обозначать индексом x . Второй тип конических точек - точки, в которых сходятся выпуклый и прямой сегменты склейки, будем обозначать их индексом y . Третий тип конических точек - точки, образованные склейкой прямых сегментов. Их будем обозначать индексом z .

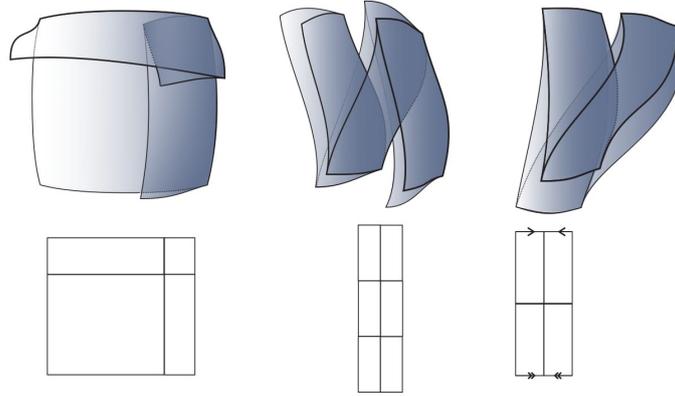


Рис. 8: Рисунок билиарда (верхний ряд) и соответствующие им схемы (нижний ряд).

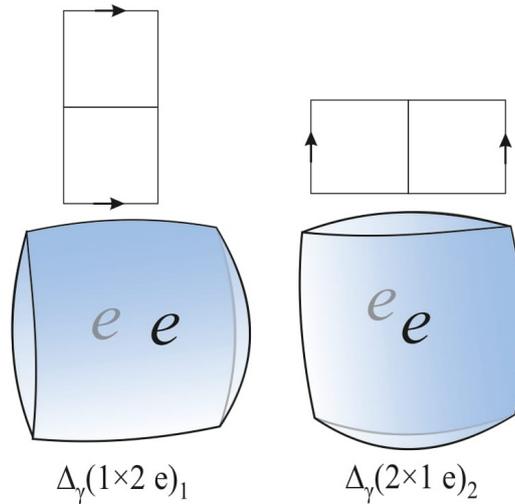


Рис. 9: Билиарды $\Delta_\gamma(1 \times 2e)_1$ и $\Delta_\gamma(2 \times 1e)_2$. Их схемы изображены в верхнем ряду.

Очевидно, в билиардах с выпуклыми склейками могут присутствовать лишь точки первого типа.

Если в билиарде присутствует несколько точек одного типа, лежащих на одном прямом сегменте, будем писать их число перед соответствующим индексом.

Отметим, где именно будем писать индексы. Будем брать в скобки те одинаковые области, что образовали коническую точку, и рядом со скобкой писать индекс ($\Delta_\beta((\dots)_x + \dots)$).

Если билиард содержит четыре конические точки, то обозначения будут зависеть от конкретного вида билиарда. Если билиард может быть получен склейкой всех одинаковых сегментов двух обобщенных эллипсов Ω , то обозначать такой билиард будем как $\Delta_\beta(\Omega)^2$, если же билиард получен склейкой четырех обобщенных эллипсов Ω , то обозначать такой билиард будем как $\Delta_\beta(\Omega)^4$ (частный случай, когда Ω это в точности билиард e , см. рис. 11).

Если в состав билиарда входят несколько неэквивалентных друг другу видов простых билиардов, то будем писать как сумму, где каждое слагаемое есть обозначение простого билиарда с некоторым коэффициентом - количество всех таких простых билиардов, входящих в состав топологического.

Если в топологический билиард входит k столбцов и n строк эквивалентных друг другу билиардов, то коэффициент при соответствующем обозначении будет иметь вид $k \times n$.

Если в коэффициент входят α и β (иногда с некоторыми индексами) - они могут принимать значение либо 0, либо 1.

К примеру, возвращаясь к рис. 8, на нем показаны билиарды $\Delta_\alpha(e + h1 + h2 + q)$, $\Delta_\alpha(2 \times 3h2)$, $\Delta_\beta((2 \times 2h2)_{x,x})$.

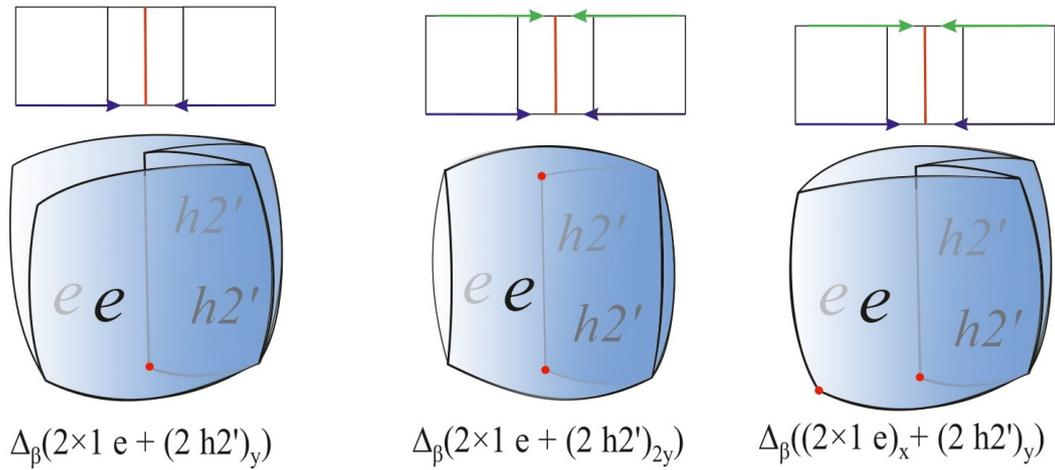


Рис. 10: Различные типы конических точек. На рисунке приведена схема, изображение и название соответствующего биллиарда. Конические точки отмечены красной точкой.

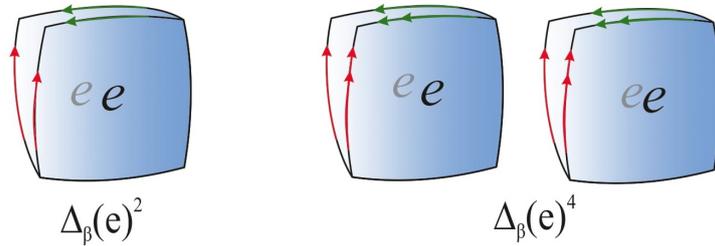


Рис. 11: Различные типы биллиардов с четырьмя коническими точками. Под изображением биллиарда указано его название

3.3 Классификация топологических эллиптических биллиардов с выпуклыми склейками.

Сначала рассмотрим топологические биллиарды, в которых допускаются лишь выпуклые склейки (то есть, как следует из определения, склейки вдоль выпуклых сегментов). Классифицируем такие биллиарды.

Теорема 3.1. *Любой топологический биллиард, в котором присутствуют лишь выпуклые склейки, эквивалентен одному из представленных на рисунках 12, 13, 14, 15, 18.*

Доказательство. В доказательстве будем учитывать лишь простые биллиарды, не имеющие на границе прямых сегментов, то есть биллиарды e , $h1$, $h2$ и q .

Шаг 1. Рассмотрим случай, когда конических точек в области нет.

Пусть топологический биллиард содержит область e . Тогда к каждому его сегменту можно приклеить лишь биллиард e или биллиард h . Пусть к правому сегменту приклеен биллиард $h2$. Тогда к правому сегменту $h2$, который является невыпуклым, уже нельзя приклеивать области. Таким образом после приклеивания биллиарда $h2$ к правому/левому (или $h1$ к верхнему/ нижнему) сегменту, мы запрещаем дальнейшее приклеивание чего либо к левому/правому (или нижнему/верхнему) сегменту полученного биллиарда соответственно.

Если к верхнему сегменту биллиарда e приклеить простой биллиард $h1$, то в полученном топологическом биллиарде образуется угол $3\pi/2$, таким образом, если осуществлять такую склейку, необходимо приклеить еще один простой биллиард (обозначим его временно за ψ и опишем далее, какой именно биллиард это может быть) так, чтобы угол $3\pi/2$ не образовывался. Сделать это можно лишь следующим образом: отождествить верхний сегмент биллиарда $h2$ с верхним сегментом ψ и правый сегмент биллиарда $h1$ с правым сегментом биллиарда ψ . Поскольку склейка может осуществляться лишь между

одинаковыми сегментами (по определению склейки), то два сегмента бильярда ψ полностью определены ранее склеенными простыми бильярдами. Таким образом, простой бильярд ψ это в точности q .

Отметим, что в полученном топологическом бильярде невозможно осуществить склейку с нижними сегментами $h1$ и q и левыми сегментами $h2$ и q (поскольку эти сегменты невыпуклые). Дальнейшую склейку можно осуществлять с нижним сегментом бильярдов e и $h2$ и левым сегментом бильярдов e и $h1$. Учтем, что при каждой такой склейке образовывается угол $3\pi/2$, то есть необходимо приклеить еще один простой бильярд (который, как выше было отмечено, полностью определен приклеенными ранее простыми бильярдами).

Приклеивание бильярдов вида $h1$ и $h2$ описано выше. Полученный бильярд изображен на рис. 8 в первом столбце.

Пусть к правому сегменту бильярда e приклеен бильярд e . Тогда, в отличие от предыдущего случая, нет запрещенных склеек (поскольку все сегменты полученного простого бильярда выпуклые). Таким образом, можно приклеить любое количество областей e поочередно к правому или левому сегментам полученного топологического бильярда.

Пусть топологический бильярд Δ содержит k простых бильярдов e , которые склеены друг с другом по правым и левым сегментам.

К верхнему сегменту одного из простых бильярдов e , составляющих Δ , приклеим еще один бильярд и обозначим его через ψ . Из правил склейки следует что ψ может быть либо e , либо $h1$. После осуществления склейки на границе получим один или два угла $3\pi/2$, то есть приклеивание одного экземпляра ψ осуществить нельзя. Чтобы избежать появления угла $3\pi/2$, необходимо приклеить еще $k - 1$ топологических бильярдов ψ к верхним сегментам топологического бильярда (нетрудно заметить что избежать появление такого угла на границе возможно лишь приклеиванием именно такого числа простых бильярдов ψ).

Получим бильярд, в котором две строки и k столбцов.

Отметим, что если ψ это $h1$, то к ряду бильярдов $h1$ можно приклеить лишь бильярды q по левому/правому сегментам (в таком случае во избежание появления на границе угла $3\pi/2$ необходимо приклеить столбец бильярдов $h2$ по левому/правому сегментам соответственно, причем в столбце число бильярдов должно совпадать с числом строк в топологическом бильярде Δ), а если ψ это e , то запрещенных склеек нет.

Таким образом, к топологическому бильярду, содержащему k столбцов и n строк бильярдов e , можно приклеивать либо столбец из n строк, либо строку из k бильярдов.

Итак, любой топологический бильярд, содержащий простой бильярд e , описывается следующим образом: - все содержащиеся в нем простые бильярды e приклеены друг к другу, причем их количество равно в точности $k \times n$ (см. рис. 12, а.) - если бильярд содержит области $h1$, то они приклеены так, что на схеме могут быть расположены лишь сверху и/или снизу - если бильярд содержит области $h2$, то они приклеены так, что на схеме могут быть расположены лишь слева и/или справа - если бильярд содержит области и $h1$, и $h2$, то тогда он обязательно содержит области q , причем они приклеены так, как показано на рис. 12, б.

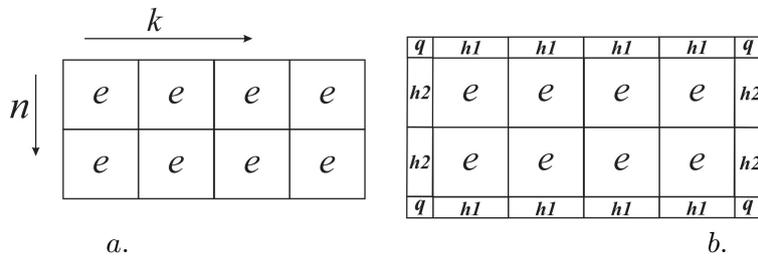


Рис. 12: Схема склейки $k \times n$ простых бильярдов e друг к другу (а.) и схема возможного расположения простых бильярдов $h1$, $h2$ и q в топологическом (б.)

Если в топологическом бильярде нет иных ребер склейки кроме описанных выше (то есть его

схема это в точности рис. 12, b.) то такой бильярд обозначается

$$\Delta_\alpha(k \times ne + (\alpha_1 + \alpha_2)kh1 + (\beta_1 + \beta_2)nh2 + (\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2)q)$$

. Назовем такой бильярд обобщенным эллипсом.

Отдельно опишем следующие случаи. Пусть число k кратно двум, и бильярд не содержит областей $h2$ и q . Тогда можно отождествить свободные боковые сегменты топологического бильярда (нетрудно заметить что они оказываются одинаковыми). Для упрощения дальнейших рассуждений обозначать полное число бильярдов e не $k \times n$, а $2k \times n$, где $2k$ - число бильярдов, приклеенных поочередно друг к другу по правым и левым сегментам. Полученный бильярд обозначим следующим образом $\Delta_\gamma(2k \times ne + (\beta_1 + \beta_2)2kh1)_2$. Его схема представлена на рис. 13, b.

Аналогично описывается бильярд, в котором в одном столбце ровно $2n$ бильярдов e , и бильярд не содержит $h1$ и q . Тогда, отождествляя свободные граничные верхние (или нижние) сегменты, получим бильярд, схема которого представлена на рис. 13, a. Обозначим такой бильярд $\Delta_\gamma(k \times 2ne + (\beta_1 + \beta_2)2nh2)_1$.

Два вышеописанных бильярда будем называть также бильярды-ленты или обобщенные ленты.

Отметим, что в силу отношения эквивалентности для топологических бильярдов мы считаем такие бильярды эквивалентными друг другу.

Если в каждом столбце и строчке четное число бильярдов e , а $\alpha_i = \beta_i = 0$, то можно отождествить все свободные сегменты следующим образом. В каждом столбце (и в каждой строчке) отождествляем между собой крайние сегменты (на рис. 13, c. показано, как именно осуществляется отождествление). Полученный бильярд не имеет свободных сегментов и обозначается $\Delta_\alpha^T(2k \times 2ne)$. Далее будем называть такой бильярд обобщенным тором.

Итак, выше описаны все топологические бильярды без конических точек, которые содержат простой бильярд e .

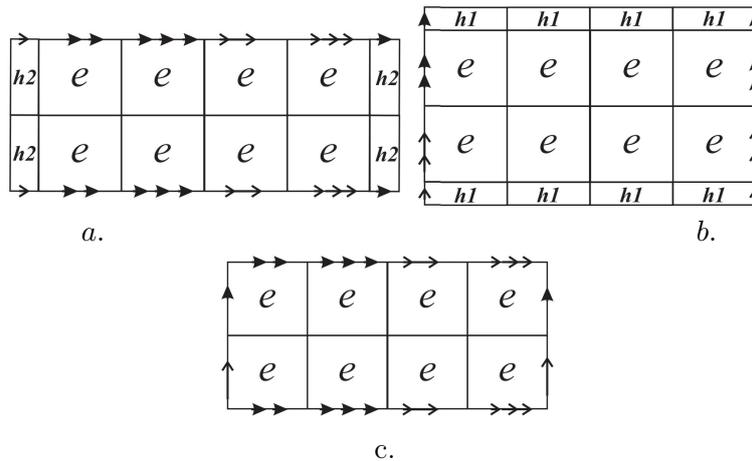


Рис. 13: Схемы топологических бильярдов, полученных применением операции склейки в обобщенном эллипсе

Шаг 2. Пусть область содержит бильярд $h2$. Тогда единственный сегмент, по которому нельзя осуществлять склейку - вогнутый (без ограничения общности читаем что он левый). Отметим, что все бильярды, включающие в себя e , описаны выше, таким образом можно рассматривать только приклеивание бильярдов $h2$ и q . Приклеивание бильярда $h1$ не может быть осуществлено, так как такая операция определена только между одинаковыми сегментами.

Очевидно, что можно приклеивать сколько угодно много бильярдов $h2$ по верхнему и нижнему сегментам поочередно. При этом отдельно выделим случай, когда в полученном топологическом бильярде четное число листов - тогда два свободных нижних сегмента можно отождествить между собой.

К двум свободным сегментам топологического бильярда, составленного из последовательно склеенных бильярдов $h2$, можно приклеить по простому бильярд q . Тогда дальнейшая склейка может осуществляться только по правым сегментам, а именно приклеив число простых бильярдов $h2$ и q , равное числу таких же простых бильярдов, входивших в изначальный топологический бильярд.

Итак, всевозможные топологические билиарды, содержащие только билиарды $h2$ и q , составляют четыре серии:

- $\Delta_\alpha(kh2 + \alpha q + \beta q)$ - его схема изображена на рис. 14, а;
- $\Delta_\alpha(2 \times kh2 + 2\alpha q + 2\beta q)$ - его схема изображена на рис. 14, б;
- $\Delta_\gamma(2kh2)_1$ - его схема изображена на рис. 14, с;
- $\Delta_\gamma(2 \times 2kh2)_1$ - его схема изображена на рис. 14, д.

Отметим, что топологические билиарды без конических точек, содержащие только простые билиарды $h1$ и q , описываются аналогичным образом и будут эквивалентны рассмотренным в этом шаге билиардам.

Шаг 3.

Теперь рассмотрим топологические билиарды, содержащие только q . Поскольку выпуклых сегментов, по которым можно осуществлять склейку, всего два, то таких топологических билиардов оказывается всего два, и все они представлены на рис. 14, е.

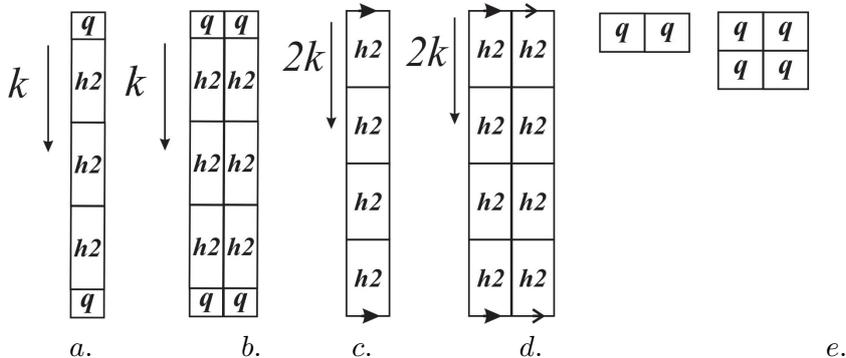


Рис. 14: Схемы топологических билиардов без конических точек, содержащих области $h2$ и q и не содержащих область e .

Шаг 4.

Теперь рассмотрим случай, когда топологический билиард содержит конические точки.

Рассмотрим коническую точку, образованную двумя билиардами e .

Рассуждениями, аналогичными проведенным выше (а именно, последовательно рассматривая все возможности приклеивания еще одного простого билиарда), получим, что все билиарды, содержащие такую коническую точку, перечислены ниже.

- $\Delta_\beta((2k \times ne)_x + \alpha_1 2nh1 + \beta_1 2kh2 + \alpha_1 \beta_1 q)$ - билиард с одной конической точкой;
- $\Delta_\beta((2k \times ne)_{x,x} + \alpha_1 nh1)$ - билиард с двумя коническими точками;
- $\Delta_\beta((k \times 2ne)_{x,x} + \beta_1 kh2)$ - билиард с двумя коническими точками, эквивалентный билиарду $\Delta_\beta((2k \times ne)_{x,x} + \alpha_1 nh1)$;
- $\Delta_\beta(k \times ne)^2$ - билиард с четырьмя коническими точками, образованный склейкой двух обобщенных эллипсов.

Отметим, что все билиарды, полученные в шаге 1 и 4, могут быть получены из обобщенного эллипса $\Delta_\alpha(2k \times 2ne)$ некоторым количеством двух следующих операций: либо отождествление его противоположных свободных сегментов (так, к примеру склейкой боковых граничных сегментов мы получим обобщенную ленту $\Delta_\gamma(2k \times 2ne)_1$), либо склейкой следующего типа (будем в данном шаге доказательства называть ее склейка второго типа): рассмотрим граничные сегменты одного типа (к примеру, верхние), и отождествим сегмент под номером 1 с сегментом под номером $2n$, сегмент под номером 2 с сегментом под номером $2n - 1$ и тд. На схеме билиарда это выглядит как склейка

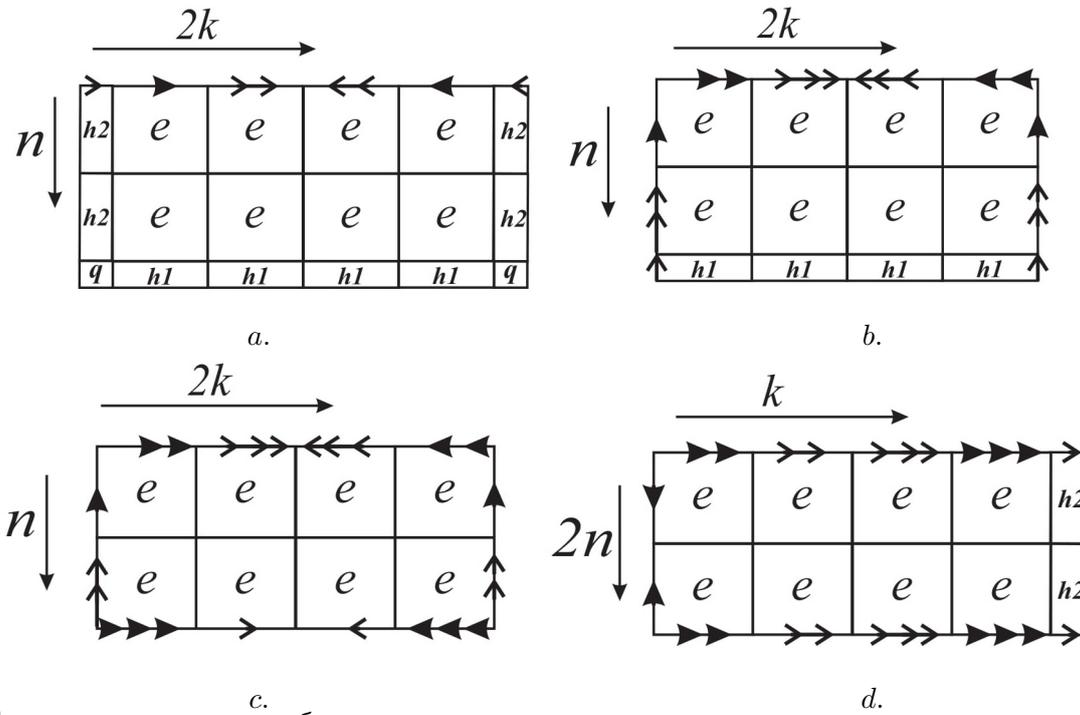


Рис. 15: Схемы топологических бильярдов с коническими точками, полученных применением операции склейки в обобщенном эллипсе

двух половин верхней части границы. К примеру, если осуществить такую склейку только с верхними свободными сегментами, то получим бильярд с одной конической точкой. Попробуем произвести подобные операции во всех возможных комбинациях с различными сторонами обобщенного эллипса $\Delta_\alpha(2k \times 2ne)$.

Пусть склеек второго типа в обобщенном эллипсе нет. Тогда отождествлением двух противоположных сторон получаем бильярд ленту $(\Delta_\gamma(2k \times 2ne))_1$ если отождествлять боковые сегменты либо $\Delta_\gamma(2k \times 2ne)_1$ если отождествлять верхние сегменты), отождествлением четырех противоположных сторон получаем обобщенный тор $\Delta_\alpha^T(2k \times 2ne)$.

Пусть склейка второго типа одна, без ограничения общности считаем, что проводим ее над верхними сегментами. Если остальные сегменты свободные, то, как было отмечено выше, имеем бильярд с одной конической точкой. Если же выбрать в бильярде свободные граничные противоположные сегменты (очевидно, это боковые сегменты) и отождествить их, то получим бильярд с двумя коническими точками.

Пусть склеек второго типа две, без ограничения общности считаем, что проводим ее над верхними сегментами и нижними сегментами. Оставляя боковые сегменты свободными, получим бильярд с двумя коническими точками. Если отождествить боковые сегменты друг с другом, то получим бильярд с четырьмя коническими точками.

Пусть склеек второго типа две, но они применены не к противоположным сторонам, а к смежным. Без ограничения общности считаем, что такую операцию осуществляем с верхними и с правыми сегментами. Если остальные сегменты оставить свободными, то на границе получим угол в $3\pi/2$, что противоречит определению топологического бильярда 3.1. Итак, такую операцию проводить нельзя.

Пусть склеек второго типа три. Без ограничения общности считаем, что такую операцию осуществляем с верхними и с боковыми сегментами. В полученной области граница содержит угол, равный 2π , что противоречит определению топологического бильярда 3.1. Значит, такую операцию проводить также нельзя.

Пусть склеек второго типа четыре. Получим новый бильярд, показанный на рис. 16 и будем называть его $\Delta_\beta(k \times ne)^4$

Зададимся вопросом, а можно ли границу бильярда разбить на четное количество частей и отождествлять каждую пару их друг с другом склейкой второго типа (как показано на рис. 17, а). Очевидно, что разбиение границы уже на шесть таких частей нарушит правило склейки, а именно: в одной точке будут сходиться более чем четыре ребра склейки.

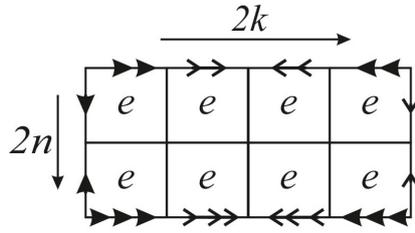


Рис. 16: Биллиард $\Delta_\beta(k \times ne)^4$

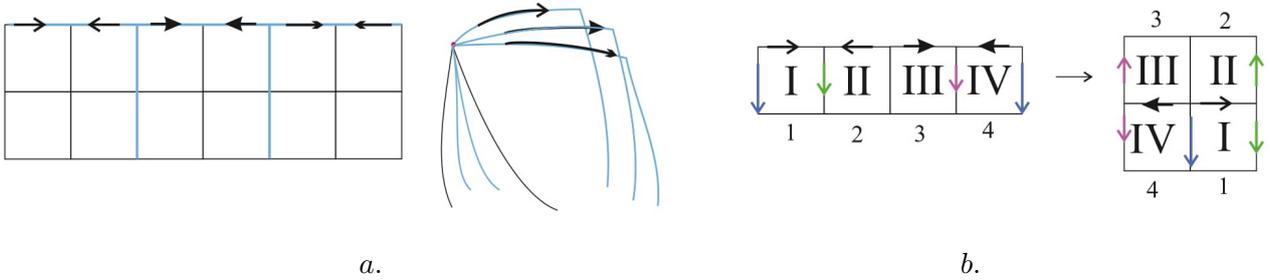


Рис. 17: Иллюстрация к теореме о классификации биллиардов с выпуклыми склейками

Рассмотрим случай разбиения границы на четыре части, без ограничения общности считаем что это граница верхняя. Тогда боковые сегменты можно лишь отождествить друг с другом. Тогда разрежем и вновь склеим области так, как показано на рис. 17, б. Такие области уже включены в классификацию. Таким образом, нет смысла рассматривать разбиение границы на четыре части и отождествление ее частей друг с другом склейкой второго типа.

В топологическом биллиарде, содержащем e , не может возникнуть конической точки, образованной сегментами биллиардов $h1, h2, q$ - это следует из определения конической точки и утверждения о том, что склейка производится лишь между одинаковыми сегментами.

Шаг 5.

Теперь рассмотрим коническую точку, образованную биллиардом $h2$.

Аналогично, последовательно рассматривая все возможные варианты склейки, получим следующие биллиарды

- $\Delta_\beta((2 \times nh2)_x + 2\alpha_1q)$ - биллиард с одной конической точкой;
- $\Delta_\beta((2 \times nh2)_{x,x})$ - биллиард с двумя коническими точками.

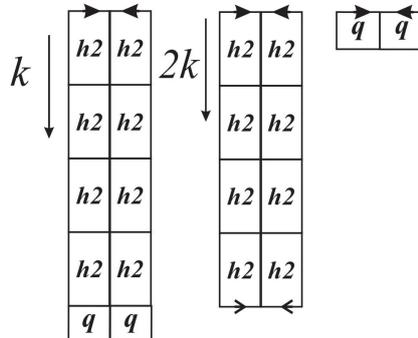


Рис. 18: Схемы топологических биллиардов с коническими точками, образованными биллиардами $h2$ и q

Очевидно, что биллиарды, в которых коническая точка образована биллиардами $h1$, описываются аналогично. Серия таких биллиардов будет эквивалентна серии биллиардов, описанной в выше в этом шаге.

Шаг 6. Рассмотрим коническую точку, образованную билиардом q . Все свободные сегменты вогнутые, значит, больше ничего приклеить нельзя. Обозначим такой топологической билиард как $\Delta_\beta(2q)$. \square

Замечание 3.5. Отметим, что заменой билиардов $h1$ на $h1'$, $h2$ на $h2'$, q на q' , $q1$, $q2$ будем получать билиарды, в которых также нет прямых склеек.

3.4 Классификация топологических билиардов, допускающих прямые склейки

Теперь рассмотрим множество топологических билиардов на плоскости Минковского, в которых присутствуют как склейки вдоль выпуклых сегментов, так и склейки вдоль прямых сегментов. Классифицируем такие билиарды.

Теорема 3.2. Любой топологический билиард, содержащий прямые склейки, эквивалентен одному из билиардов, представленных на рис. 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25.

Доказательство. Шаг 1.

Классифицируем билиарды с прямыми склейками, содержащие билиард e .

В шаге 1 доказательства теоремы 3.1 мы выяснили, что допустимыми склейками без образования конических точек из билиарда e можно получить обобщенный эллипс - билиард, склеенный из $k \times n$ билиардов e , и, возможно, одного или двух рядов по k штук билиардов $h1$, одного или двух столбцов по n билиардов $h2$, и, при выполнении необходимых условий, от одного до четырех билиардов q (подробнее см. доказательство теоремы 3.1).

Ранее было отмечено, что если в топологическом билиарде Δ непрерывным преобразованием некоторые невыпуклые сегменты преобразовать в прямые с сохранением корректности (отсутствие углов в $3\pi/2$ на границе билиарда и склеек между неодинаковыми сегментами), получим топологический билиард, вообще говоря, эквивалентный билиарду Δ . Таким образом, у обобщенного эллипса можем некоторую часть границы сделать прямой, а именно выбрав обобщенный эллипс, у которого некоторая часть границы невыпуклая - к примеру, все левые его сегменты границы невыпуклые, то есть слева к набору билиардов e приклеен столбец билиардов $h2$, и заменим этот столбец на столбец билиардов $h2'$. Все сегменты границы, кроме левых, остались неизменными.

Итак, рассмотрим для начала обобщенный эллипс $\Delta_\alpha(k \times ne + nh2')$, состоящий из $k \times n$ билиардов e и столбца из n билиардов $h2'$. Без ограничения общности считаем что все его правые сегменты границы - прямые. Прямые склейки в таком билиарде можно организовать, лишь склеивая его с другим таким же по прямым сегментам. Полученный билиард, вообще говоря, можно непрерывным образом преобразовать в обобщенный эллипс, состоящий из $(2k + 1) \times n$ экземпляров e , поэтому мы считаем их эквивалентными. Однако, у полученного билиарда есть 6 свободных частей границы (а именно, все верхние сегменты границы билиардов - две части, каждая из которых содержит k верхних сегментов билиардов e и 1 верхний сегмент билиарда $h2'$, все нижние сегменты границы билиардов - две части, каждая из которых содержит k нижних сегментов билиардов e и 1 нижний сегмент билиарда $h2'$, и все левые сегменты границы билиардов - две части по n левых сегментов билиардов e). Очевидно, что всего вариантов склейки таких сегментов - пять (так как склейка вдоль всех верхних сегментов эквивалентна склейке вдоль всех нижних сегментов). Все полученные билиарды перечислены ниже:

- билиард с одной конической точкой $\Delta_\beta(2k \times ne + (2nh2')_y)$;
- билиард с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2k \times ne + (2nh2')_{2y})$;
- билиард-лента $\Delta_\gamma(2k \times ne + 2nh2')_2$;
- билиард с двумя коническими точками $\Delta_\beta((2k \times ne)_x + (2nh2')_y)$;
- билиард с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times ne + nh2')^2$.

На примере данного билиарда сделаем важный комментарий.

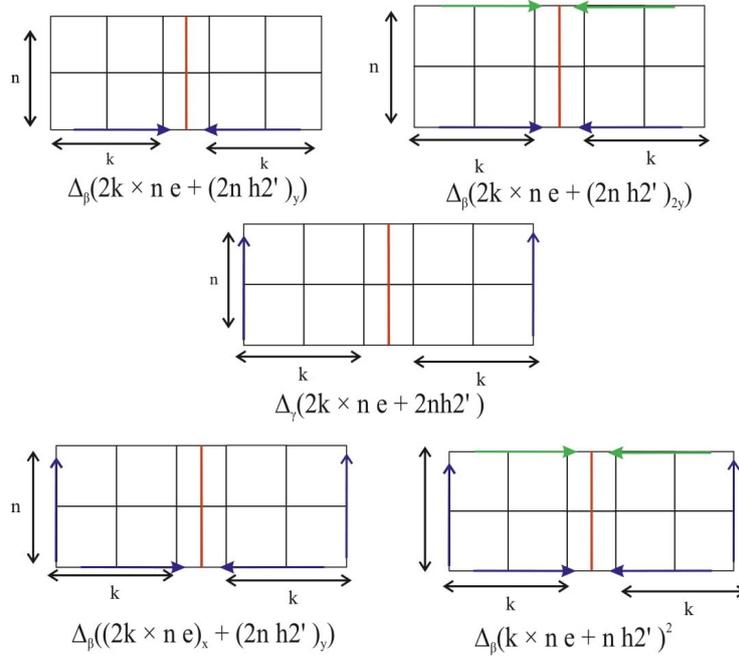


Рис. 19: Биллиарды, допускающие прямые склейки, полученные склейкой двух обобщенных эллипсов $\Delta_\alpha(k \times ne + nh2')$

Замечание 3.6. Рассмотрим биллиард, в котором рассматриваемые на данный момент обобщенные эллипсы $\Delta_\alpha(k \times ne + nh2')$ склеены по боковым сегментам - такой биллиард обозначаем $\Delta_\gamma(2k \times ne + 2nh2')_2$. Все его свободные сегменты объединены в две группы - верхние и нижние, каждая из этих групп состоит из $2k$ выпуклых сегментов биллиардов e и двух выпуклых сегментов биллиардов $h2'$. Приклеим к верхней свободной части границы кольцо биллиардов, состоящий из склеенных друг с другом по боковым сегментам $2k$ экземпляров $h1$ и двух биллиардов $q1$. Полученный биллиард имеет такую же нижнюю часть границы, а вся его верхняя граница состоит из невыпуклых сегментов. Будем считать такой биллиард эквивалентным биллиарду-ленте $\Delta_\gamma(2k \times ne + 2nh2')_2$. Приклеим такое же кольцо к нижней части границы, тем самым сделав всю границу биллиарда невыпуклой. Полученный биллиард также будем считать эквивалентным биллиарду-ленте $\Delta_\gamma(2k \times ne + 2nh2')_2$.

Теперь приклеим к верхней свободной части границы биллиарда-ленты $\Delta_\gamma(2k \times ne + 2nh2')_2$ кольцо биллиардов, состоящее из склеенных друг с другом по боковым сегментам $2k$ экземпляров $h1'$ и двух биллиардов q' . Полученный биллиард вновь имеет такую же нижнюю часть границы, а вся его верхняя граница состоит из прямых сегментов. Будем считать такой биллиард эквивалентным биллиарду-ленте $\Delta_\gamma(2k \times ne + 2nh2')_2$. Аналогично, приклеив такое же кольцо к нижней части границы, тем самым сделав всю границу биллиарда прямой. Полученный биллиард также будем считать эквивалентным биллиарду-ленте $\Delta_\gamma(2k \times ne + 2nh2')_2$.

Данное замечание мотивировано тем, что приклеивание биллиардов серии h по выпуклым сегментам не меняет грубую молекулу. Это утверждение будет доказано в предложении 4.2.

Это замечание в доказательстве теоремы играет следующую роль: при рассмотрении обобщенного эллипса, который имеет несколько прямых сегментов на границе, стоит рассматривать топологические биллиарды, в которых такие сегменты склеены. Иначе в силу комментария мы получим биллиард, рассмотренный ранее.

Теперь рассмотрим два экземпляра обобщенного эллипса $\Delta_\alpha(k \times ne + 2nh2')$, который состоит из $k \times n$ биллиардов e и двух столбцов по n штук биллиардов $h2'$, приклеенных так, чтобы прямыми были все правые и все левые сегменты обобщенного эллипса. Прделав с ними аналогичные действия, получим набор биллиардов, перечисленный ниже:

- биллиард с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2k \times ne + (4nh2')_{y,y})$;
- биллиард с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2')^2$.

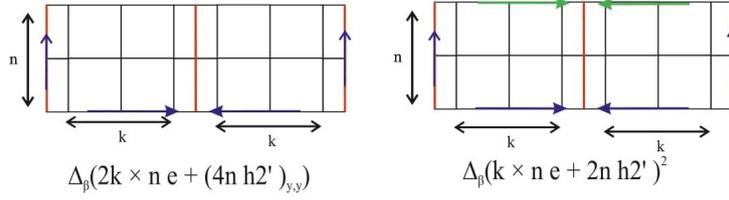


Рис. 20: Биллиарды, допускающие прямые склейки, полученные склейкой двух обобщенных эллипсов $\Delta_\alpha(k \times ne + 2nh2')$

Далее аналогичные действия проделаем с двумя экземплярами биллиардов $\Delta_\alpha(k \times ne + 2nh2' + kh1' + 2q')$, состоящих из $k \times n$ биллиардов e , двух столбцов биллиардов $h2'$, приклеенных вдоль правых и левых сегментов, строки биллиардов $h1'$, приклеенной вдоль нижних сегментов, и двух биллиардов q' , которые добавлены во избежание образования на границе углов в $3\pi/2$. Получим набор биллиардов, перечисленный ниже:

- биллиард с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2k \times ne + 4nh2' + 2nh1' + (4q')_{2z})$;
- биллиард с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2' + nh1' + 2q')^2$.

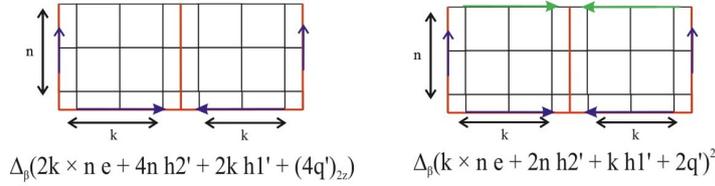


Рис. 21: Биллиарды, допускающие прямые склейки, полученные склейкой двух обобщенных эллипсов $\Delta_\alpha(k \times ne + 2nh2' + kh1' + 2q')$

Рассмотрим два экземпляра обобщенного эллипса $\Delta_\alpha(k \times ne + nh2' + kh1' + q')$, который состоит из $k \times n$ биллиардов e столбца из n штук биллиардов $h2'$, приклеенных вдоль правых сегментов, строки из k биллиардов $h1'$, приклеенной вдоль нижних сегментов, и биллиарда q' , который добавлены во избежание образования на границе углов в $3\pi/2$. Получим набор биллиардов, перечисленный ниже:

- биллиард с одной конической точкой $\Delta_\beta(2k \times ne + 2nh2' + 2kh1' + (2q')_z)$;
- биллиард с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2k \times ne + 2nh2' + (2kh1')_y + (2q')_z)$;
- биллиард с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2k \times ne + (2nh2')_y + 2kh1' + (2q')_z)$;
- биллиард с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times ne + nh2' + kh1' + q')^2$.

Наконец, рассмотрим два экземпляра биллиардов $\Delta_\alpha(k \times ne + 2nh2' + 2kh1' + 4q')$, состоящих из $k \times n$ биллиардов e , двух столбцов биллиардов $h2'$, приклеенных вдоль правых и левых сегментов, двух строк биллиардов $h2'$, приклеенных вдоль нижних сегментов, и четырех биллиардов q' , которые добавлены во избежание образования на границе углов в $3\pi/2$. Аналогично, отождествляя одинаковые свободные сегменты и принимая во внимание комментарий, получим биллиард с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2' + 2kh1' + 4q')^2$.

Шаг 2.

В классификации биллиардов, допускающих лишь выпуклые склейки, имеется обобщенный тор - биллиард, склеенный из $2k \times 2n$ экземпляров биллиарда e так, что биллиардный стол гомеоморфен двумерному тору.

Попробуем получить биллиардный стол, включающий в себя прямые склейки, гомеоморфный тору.

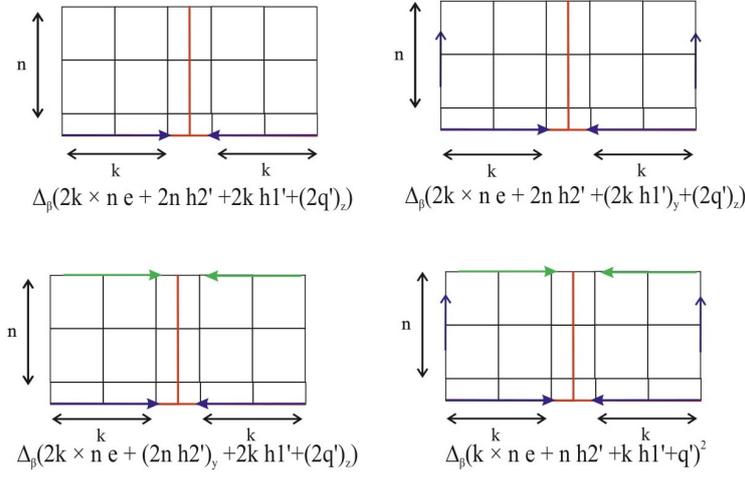


Рис. 22: Биллиарды, допускающие прямые склейки, полученные склейкой двух обобщенных эллипсов $\Delta_\alpha(k \times ne + nh2' + kh1' + q')$

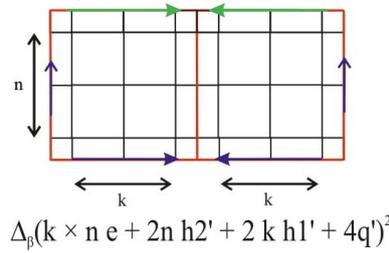


Рис. 23: Биллиарды, допускающие прямые склейки, полученные склейкой двух обобщенных эллипсов $\Delta_\alpha(k \times ne + 2nh2' + 2kh1' + 4q')$

Тогда, очевидно, верхние и нижние сегменты должны быть одинаковыми, а также правые и левые сегменты также должны быть одинаковыми.

Таким образом, имеем два случая - либо боковые граничные сегменты прямые (полученный биллиард будем называть $\Delta_\alpha^T(2k \times 2ne + 4nh2')$), эквивалентный ему случай, когда верхние и нижние граничные сегменты прямые (полученный биллиард будем называть $\Delta_\alpha^T(2k \times 2ne + 4kh1')$), и биллиард, склеенный из обобщенного эллипса, у которого все граничные сегменты прямые полученный биллиард будем называть $\Delta_\alpha^T(2k \times 2ne + 4kh1' + 4nh2' + 4q')$.

Шаг 3.

Рассмотрим обобщенный эллипс, состоящий из $2k \times 2n$ биллиардов (подчеркну, что здесь я не уточняю, какие именно биллиарды образуют обобщенный эллипс - это на данный момент не важно), необходимое число которых одинаковое.

Все предыдущие биллиарды были получены рассмотрением обобщенного эллипса и последующим отождествлением некоторых его противоположных границ, либо отождествлением двух частей одной и той же границы относительно ее середины (к примеру, нижняя граница биллиарда $\Delta_\beta(2k \times ne + (2nh2')_y)$).

Зададимся вопросом, а можно ли все четыре границы обобщенного эллипса отождествить таким образом - склейка одной половины с другой относительно середины. Оказывается, это возможно, и соответствует склейке четырех экземпляров биллиарда, состоящего из $k \times n$ частей следующим образом: сначала склеиваем по два экземпляра в одинаковые биллиарды с одной конической точкой, а потом отождествим одинаковые свободные сегменты.

Таким образом, рассмотрим по четыре экземпляра всех рассматриваемых обобщенных эллипсов из предыдущего примера (а именно, $\Delta_\alpha(k \times ne + nh2')$, $\Delta_\alpha(k \times ne + 2nh2')$, $\Delta_\alpha(k \times ne + 2nh2' + kh1' + 2q')$, $\Delta_\alpha(k \times ne + nh2' + kh1' + q')$ и $\Delta_\alpha(k \times ne + 2nh2' + 2kh1' + 4q')$) и отождествим их границы вышеописанным образом.

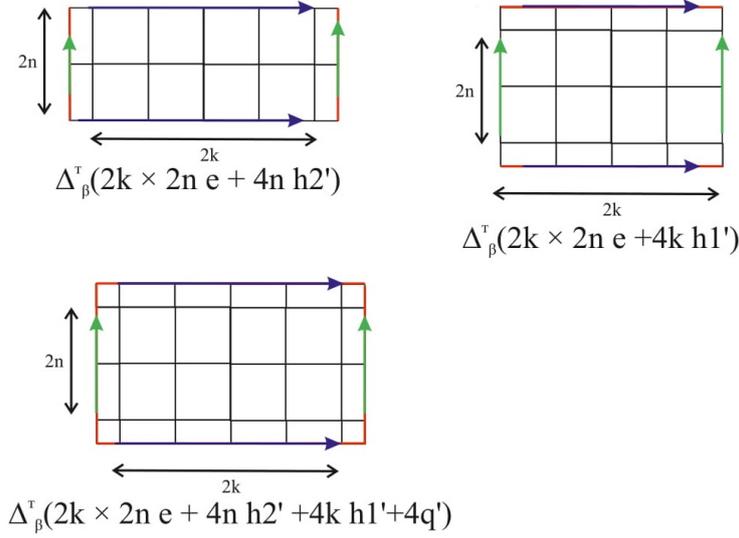


Рис. 24: Серия топологических билиардов, называемых обобщенными торами, допускающих прямые склейки.

Тогда получим билиарды с четырьмя коническими точками, перечисленные ниже:

- $\Delta_\beta(k \times ne + nh2')^4$;
- $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2')^4$;
- $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2' + kh1' + 2q')^4$;
- $\Delta_\beta(k \times ne + nh2' + kh1' + q')^4$;
- $\Delta_\alpha(k \times ne + 2nh2' + 2kh1' + 4q')^4$.

Доказательство того факта, что достаточно рассмотреть разбиение части границы на две части и отождествлять их друг с другом, то есть не нужно рассматривать дополнительно разбиение границы на четыре, шесть и т. д. частей, проведено в шаге 4 доказательства теоремы 3.1. □

4 Подсчет инвариантов Фоменко-Цишанга для топологических билиардов.

4.1 Особые и неособые уровни интеграла

Рассмотрим топологический билиард Δ , полученный склейкой простых билиардов Ψ_i .

Рассмотрим в фазовом пространстве M^4 поверхность уровня интеграла v_E - трехмерное многообразие Q^3 , называемое изоэнергетической поверхностью.

Меняя значения дополнительного интеграла λ , получим некоторое слоение изоэнергетического многообразия Q^3 .

Дадим определение особых и неособых уровней интеграла λ .

Определение 4.1. Назовем выпуклыми граничными значениями те значения интеграла λ , которые соответствуют выпуклым относительно внутренности какой либо области Ψ_i граничным сегментам. Если внутренность области Ψ_i пересекает вырожденную квадратку с параметром $\lambda = a$ или $-b$ (которая совпадает с координатной осью y или x соответственно), то соответствующее значение интеграла называем седловым. Если склейка определена на прямом сегменте, соответствующем параметру квадратки $\lambda = -b$ (или $\lambda = a$), то уровень интеграла $\lambda = -b$ (или $\lambda = a$) также называем седловым.

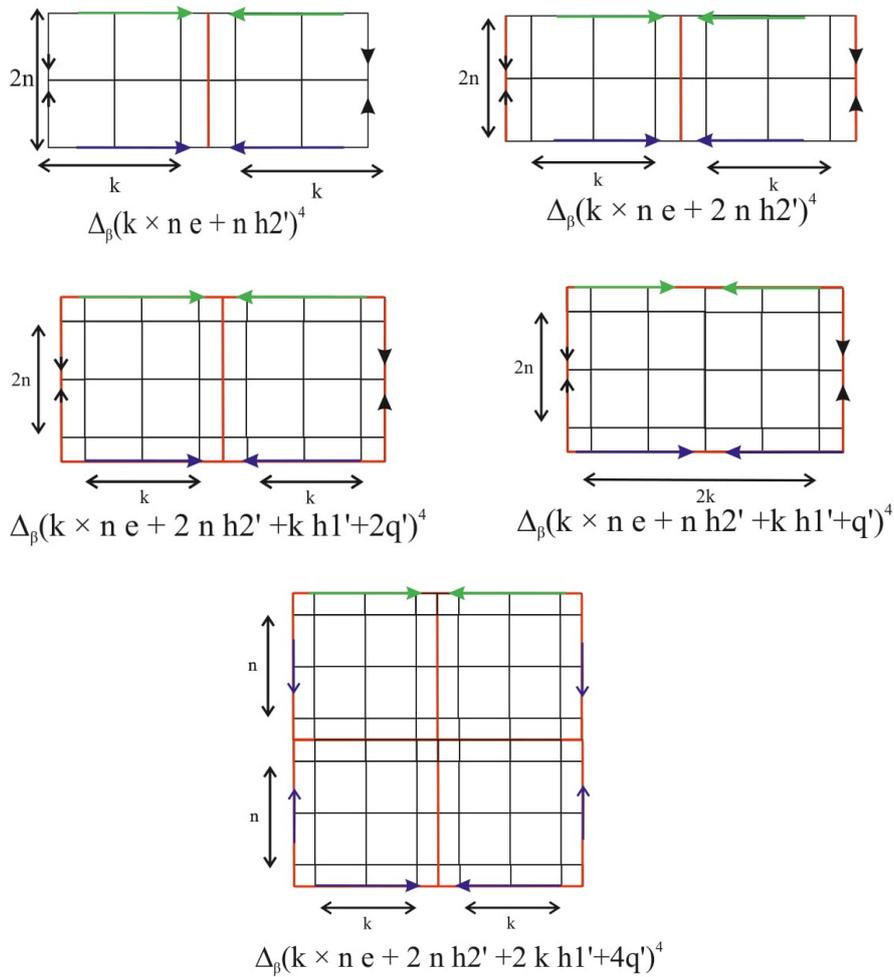


Рис. 25: Серия топологических бильярдов с прямыми склейками с четырьмя коническими точками, которые можно получить как склейку четырех обобщенных эллипсов

Особыми значениями интеграла λ назовем выпуклые граничные и седловые значения, а все остальные значения интеграла - неособыми.

Опишем траектории, лежащие на особых уровнях интеграла.

Предельные траектории, лежащие на выпуклых граничных значениях интеграла, являются периодическими движениями вдоль этого сегмента. На выпуклом граничном уровне интеграла могут лежать также и неособые траектории (в случае, когда бильярд несимметричен и образ граничного значения интеграла включает в себя движение внутри области, ограниченной границей и выпуклым граничным значением).

Отметим, что при попадании материальной точки в граничную точку граничного сегмента - точек нарушения гладкости или касания с одной из общих касательных - вектор скорости отождествляется с равным ему по евклидовой скорости и противоположным по направлению вектором.

Таким образом, при одном и том же граничном значении интеграла λ предельные траектории могут быть различными. Такая ситуация возможна, если несколько граничных сегментов принадлежат одной и той же квадрике софокусного семейства. Поэтому в дальнейшем используется обозначение $\lambda = \pm bord$, где знак $+$ указывает на то, что предельные траектории получены при стремлении значения интеграла λ к граничному значению $\lambda = bord$ справа (тогда предельные траектории будут времени-подобными), а знак $-$ указывает на стремление слева (предельные траектории будут пространственно-подобными).

Прообразы таких траекторий в изоэнергетической поверхности Q^3 - объединение окружностей.

Траектории, лежащие на седловом уровне интеграла λ , делятся на три непересекающихся семейства: периодическая траектория, касательная к которой совпадает с вырожденной квадратикой с параметром λ равным седловому значению интеграла, и два множества гомоклинических траекторий (т. е.

траекторий, которые стремятся к периодической траектории при $t \rightarrow \pm\infty$), расположенных по разные стороны от периодической траектории. Для таких траекторий выполнено фокальное свойство: в любой момент времени траектория лежит на прямой, проходящей через один из фокусов (в случае $\lambda = -b$ это фокусы, лежащие на оси x , и в случае $\lambda = a$ это фокусы, лежащие на оси y), причем при отражении траектории о границу происходит смена фокуса.

Прообразы седловых траекторий в изоэнергетическом многообразии подробно описаны в разделе 4.4.

4.2 Аналог теоремы Лиувилля: связные компоненты регулярного слоя являются торами.

Лемма 4.1. *Для топологических бильярдов, допускающих как выпуклые, так и прямые склейки, содержащих простой бильярд e , при $\lambda \in (-\infty, -b) \cup (a, +\infty) \cup \{\infty\}$ прообразы неособых уровней интеграла λ в изоэнергетическом многообразии Q^3 являются объединением двумерных торов, а именно:*

- один тор для обобщенного эллипса, а также для бильярдов с одной или двумя коническими точками;
- четыре тора для обобщенного тора;
- два тора, если бильярд содержит четыре конических точки или является бильярдом-лентой.

Доказательство. Фиксируем значение λ , принадлежащее указанному интервалу.

Рассмотрим часть бильярда, куда проектируются точки, лежащие на уровне интеграла λ . Поскольку квадрики, соответствующие значениям λ из указанного интервала, являются гиперболами или прямой на бесконечности, то на плоскости Минковского они не пересекаются с эллипсами. Поэтому проекция поверхности уровня таких значений интеграла будет в точности весь бильярдный стол.

Отметим, что в теореме классификации было доказано, что бильярдный стол любого топологического бильярда, принадлежащего рассматриваемому в данной работе классу бильярдов, гомеоморфен прямоугольнику, несколько границ которого могут быть склеены по некоторым правилам.

Таким образом задача сводится к рассмотрению ровно шести случаев - проекция есть бильярд e (соответствует обобщенным эллипсам), два бильярда e , с отождествленными противоположными ребрами (обобщенные ленты), с отождествленными смежными ребрами (соответствует бильярдам с одной конической точкой), с тремя отождествленными ребрами (соответствует бильярдам с двумя коническими точками), с четырьмя отождествленными ребрами (соответствует бильярдам с четырьмя коническими точками), и, наконец, четыре бильярда e с отождествленными противоположными ребрами так, что бильярдный стол гомеоморфен тору (обобщенный тор).

В случае, когда проекция есть бильярд e , доказательство дословно повторяет доказательство для простого бильярда e .

Рассмотрим случаи, когда проекция есть два бильярда e .

Каждой точке бильярдов (x, y) соответствуют 4 вектора скорости v_i так, что точка (x, y, v_i) лежит на соответствующем уровне интеграла. Вектора скорости будем различать по направлению (на рис. 26 показаны 4 вида различных векторов). Получим восемь экземпляров бильярдов e , отвечающие за верхний и нижний листы топологического бильярда, оснащенные одним из 4 векторов скорости. Обозначим их $(\Omega^j, v_i)_1$ и $(\Omega^j, v_i)_2$, где i принимает значения 1,2,3,4, а j принимает значения 1 и 2. Склеим эти 8 экземпляров бильярдных областей по границе по закону отражения в топологическом бильярде, и тем самым опишем слой интеграла λ в изоэнергетическом многообразии Q_3 .

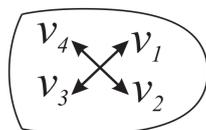


Рис. 26: Направление векторов скорости v_1, v_2, v_3, v_4 в бильярде Ω .

Посмотрим, как отождествляются вектора на границе биллиарда.

В произвольном простом биллиарде на нижних и верхних сегментах по закону отражения отождествляем v_1 с v_2 , а v_3 с v_4 . На левых и правых сегментах отождествляем v_1 с v_4 , а v_2 с v_3 .

После осуществления операции склейки на верхнем сегменте $v_1 \in \Omega^1$ будет отождествляться с $v_2 \in \Omega^2$ (и, соответственно, $v_1 \in \Omega^1$ отождествляем с $v_2 \in \Omega^2$), а $v_3 \in \Omega^1$ с $v_4 \in \Omega^2$ (и, соответственно, $v_3 \in \Omega^2$ с $v_4 \in \Omega^1$)

Поэтому экземпляры биллиардных областей (Ω^j, v_i) склеиваем друг с другом следующим образом: по нижним сегментам склеиваем (Ω^j, v_1) с (Ω^j, v_2) , а (Ω^j, v_3) с (Ω^j, v_4) (здесь j принимает значения 1, 2), по левым и правым сегментам склеиваем (Ω^j, v_1) с (Ω^j, v_4) , а (Ω^j, v_2) с (Ω^j, v_3) (здесь j принимает значения 1, 2).

По верхнему сегменту склеиваем (Ω^1, v_1) с (Ω^2, v_2) , (Ω^2, v_1) с (Ω^1, v_2) , а (Ω^1, v_3) с (Ω^2, v_4) , (Ω^2, v_3) с (Ω^1, v_4) .

Этот алгоритм показан на рис. 27, пунктиром соединены отождествленные векторы.

Тогда особый уровень интеграла гомеоморфен восьми четырехугольникам, склеенным между собой по вышеописанному правилу. Легко видеть, что он представляет собой тор, если отождествлены один сегмент, два смежных или три сегмента границы, и он представляет собой два тора, если отождествлены два противоположных сегмента границы или четыре сегмента границы.

Для последнего случая (проекция есть четыре биллиарда e , скленных в тор) доказательство аналогичное.

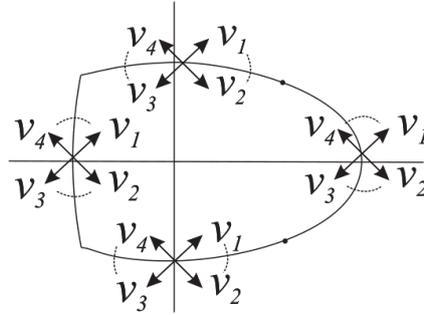


Рис. 27: Отождествление векторов v_1, v_2, v_3, v_4 на границе биллиарда Ω .

□

Замечание 4.1. Отметим, что при доказательстве важно лишь количество граничных сегментов, отождествленных между собой операцией склейки (и их расположение относительно друг друга, если таких сегментов два). Таким образом, пусть при рассмотрении топологического биллиарда в образе неособого значения интеграла λ биллиардное движение происходит в области с несколькими отождествленными между собой граничными сегментами. Тогда для каждой такой области можно провести аналогичное доказательство и заключить, что на соответствующем уровне интеграла в изоэнергетической поверхности Q^3 лежат двумерные торы. Количество торов будет таким же, как и в лемме 4.1, а именно: при склейке одного, двух смежных или трех сегментов тор будет один, при склейке двух противоположащих или четырех - два.

Предложение 4.1. Для топологического биллиарда Δ прообразы неособых уровней интеграла являются объединением двумерных торов.

Если биллиард содержит область e , тогда для значений интеграла $\lambda \in (-b, \lambda_2)$ имеем

- $n + 1$ тор для обобщенного эллипса $\Delta_\alpha(k \times ne + (\alpha_1 + \alpha_2)kh1 + (\beta_1 + \beta_2)nh2 + (\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2)q)$,
для биллиарда с одной конической точкой $\Delta_\beta((2k \times ne)_x + (\alpha_1 + \alpha_2)nh2 + \beta 2kh1 + (\beta\alpha_1 + \beta\alpha_2)q)$,

для биллиарда с одной конической точкой $\Delta_\beta(2k \times ne + (2nh2')_y)$,

для биллиарда с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2k \times ne + (2nh2')_{2y})$,

для биллиарда с одной конической точкой $\Delta_\beta(2k \times ne + 2nh2' + 2kh1' + (2q')_z)$,

для бильярда с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2k \times ne + (2nh2')_y + 2kh1' + (2q')_z)$;

- $2n$ торов для

бильярда с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times ne)^2$,

для бильярда-ленты $\Delta_\gamma(2k \times ne + 2nh2')_2$,

бильярда с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times ne + nh2')^2$,

для бильярда с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times ne + nh2')^4$,

для бильярда с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2')^2$,

для бильярда с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2')^4$;

- $4n$ торов для обобщенного тора $\Delta_\alpha^T(2k \times 2ne)$,

для обобщенного тора $\Delta_\alpha^T(2k \times 2ne + 4nh2')$;

- $2n + 1$ тор для бильярдов с двумя коническими точками $\Delta_\beta((2k \times ne)_{x,x} + \alpha 2kh1)$,

для бильярда с двумя коническими точками $\Delta_\beta((2k \times ne)_x + (2nh2')_y)$,

для бильярда с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2k \times ne + (4nh2')_{y,y})$,

для бильярда с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2' + kh1' + 2q')^2$,

для бильярда с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2' + kh1' + 2q')^4$,

для бильярда с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times ne + nh2' + kh1' + q')^2$,

для бильярда с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times ne + nh2' + kh1' + q')^4$;

- $2n + 2$ тора для бильярда-ленты $\Delta_\gamma(2k \times 2ne + (\alpha_1 + \alpha_2)2kh1)_2$,

для бильярда с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2k \times ne + 4nh2' + 2kh1' + (4q')_{2z})$,

для бильярда с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2k \times ne + 2nh2' + (2kh1')_y + (2q')_z)$,

для бильярда с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2' + 2kh1' + 4q')^2$,

для бильярда с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2' + 2kh1' + 4q')^4$;

- $4n + 4$ торов для обобщенного тора $\Delta_\alpha^T(2k \times 2ne + 4nh2' + 4kh1' + 4q')$;

Если бильярд содержит область e , тогда значений интеграла $\lambda \in (\lambda_1, a)$ имеем

- $k + 1$ тор для обобщенного эллипса $\Delta_\alpha(k \times ne + (\alpha_1 + \alpha_2)kh1 + (\beta_1 + \beta_2)nh2 + (\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2)q)$,

для бильярда с одной конической точкой $\Delta_\beta((2k \times ne)_x + (\alpha_1 + \alpha_2)nh2 + \beta 2kh1 + (\beta\alpha_1 + \beta\alpha_2)q)$,

для бильярда с двумя коническими точками $\Delta_\beta((2k \times ne)_{x,x} + \alpha 2kh1)$,

для бильярда с одной конической точкой $\Delta_\beta(2k \times ne + (2nh2')_y)$,

для бильярда с двумя коническими точками $\Delta_\beta((2k \times ne)_x + (2nh2')_y)$,

для бильярда с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2k \times ne + (4nh2')_{y,y})$,

бильярда с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2k \times ne + 4nh2' + 2kh1' + (4q')_{2z})$,

для бильярда с одной конической точкой $\Delta_\beta(2k \times ne + 2nh2' + 2kh1' + (2q')_z)$,

для бильярда с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2k \times ne + 2nh2' + (2kh1')_y + (2q')_z)$;

- $2k$ торов для обобщенной ленты $\Delta_\gamma(2k \times ne + (\alpha_1 + \alpha_2)2kh1)_2$,

для бильярда с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times ne)^2$;

- $4k$ торов для обобщенного тора $\Delta_\alpha^T(2k \times 2ne)$;

- $2k + 1$ торов для

бильярда-ленты $\Delta_\gamma(2k \times pe + 2nh2')_2$,

для бильярда с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times pe + nh2')^2$,

для бильярда с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times pe + nh2')^4$,

для бильярда с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times pe + nh2' + kh1' + q')^2$,

для бильярда с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times pe + nh2' + kh1' + q')^4$;

- $2k + 2$ тора для

бильярда с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2k \times pe + (2nh2')_{2y})$,

для бильярда с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times pe + 2nh2')^2$,

для бильярда с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times pe + 2nh2')^4$,

для бильярда с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times pe + 2nh2' + kh1' + 2q')^2$,

для бильярда с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times pe + 2nh2' + kh1' + 2q')^4$,

для бильярда с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2k \times pe + (2nh2')_y + 2kh1' + (2q')_z)$,

для бильярда с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times pe + 2nh2' + 2kh1' + 4q')^2$,

для бильярда с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times pe + 2nh2' + 2kh1' + 4q')^4$;

- $4k + 4$ тора для обобщенного тора $\Delta_\alpha^T(2k \times 2pe + 4nh2')$,

для обобщенного тора $\Delta_\alpha^T(2k \times 2pe + 4nh2' + 4kh1' + 4q')$;

Если бильярд содержит область $h2$, не содержит областей e и v в нем допустимы лишь выпуклые склейки, тогда для значений интеграла $\lambda \in (-b, \lambda_2)$ имеем

- $k + 1$ тор для бильярда $\Delta_\alpha(kh2 + (\alpha + \beta)q)$,

для бильярда $\Delta_\alpha(2 \times kh2 + (\alpha + \beta)2q)$,

для бильярда $\Delta_\beta(2 \times kh2)$,

для бильярда $\Delta_\beta(2 \times 2kh2)$;

- $2k$ торов для бильярда $\Delta_\gamma(2 \times kh2)_1$,

для бильярда $\Delta_\gamma(2 \times 2kh2)_1$;

Если бильярд содержит область $h2$, не содержит областей e , и v в нем допустимы лишь выпуклые склейки, тогда для значений интеграла $\lambda \in (-\infty, -b) \cup (a, \infty) \cup \{\infty\}$ имеем

- один тор для бильярда $\Delta_\alpha(kh2 + (\alpha + \beta)q)$,

для бильярда $\Delta_\alpha(2 \times kh2 + (\alpha + \beta)2q)$,

для бильярда $\Delta_\beta(2 \times kh2)$,

для бильярда $\Delta_\beta(2 \times 2kh2)$;

- два тора для бильярда $\Delta_\gamma(2 \times kh2)_1$,

для бильярда $\Delta_\gamma(2 \times 2kh2)$;

Если бильярд содержит лишь область q и допустимы лишь выпуклые склейки, тогда при всех значениях интеграла λ имеем один тор.

Доказательство. Рассмотрим некоторый топологический бильярд Δ . Для $\lambda \in (-\infty, -b) \cup (a, \infty) \cup \{\infty\}$ утверждение доказано в лемме, поэтому фиксируем некоторое значение интеграла $\lambda \in (-b, a)$, которое, по условию, является неособым (то есть не является граничным).

Рассмотрим проекцию уровня интеграла λ на плоскость бильярда, и вырежем из области Δ те части, в которые не проецируются точки уровня интеграла. Получим некоторый бильярдный стол Δ_1 , возможно, несвязный. По алгоритму, описанному в лемме 4.1, каждая связная компонента склеится в объединение нескольких торов. Количество этих торов зависит от количества связных компонент и склеенных сегментов. \square

4.3 Атомы-бифуркации

Будем описывать перестройки торов, лежащих на разных уровнях интеграла, используя терминологию трехмерных атомов (см. [2])

Для этого введем определения двумерного атома и трехмерного атома, а также приведем примеры наиболее часто встречающихся атомов.

Определение 4.2. Двумерным атомом (или 2-атомом) называется пара (P^2, K) , где P^2 - ориентированная связная компактная поверхность с краем, K - связный граф в ней, такой, что:

- либо K состоит из одной точки, либо все вершины графа K имеют степень 4;
- каждая компонента связности множества $P^2 \setminus K$ гомеоморфна кольцу $S^1 \times (0, 1]$, причем множество колец можно разбить на два класса: положительные и отрицательные кольца - так, чтобы к каждому ребру графа K примыкало ровно одно положительное кольцо и ровно одно отрицательное кольцо.

Мы рассматриваем 2-атомы с точностью до эквивалентности, а именно: считаем два атома (P^2, K) и (P_1^2, K_1) эквивалентными, если между ними существует гомеоморфизм, сохраняющий их ориентацию, переводящий P^2 в P_1^2 и K в K_1 .

Приведем несколько примеров 2-атомов.

Двумерный атом A гомеоморфен диску, расслоенному на концентрические окружности - неособые слои, которые стягиваются в центральную точку - особый слой.

Двумерный атом B представляет собой перестройку двух окружностей в одну через особый слой "восьмерку"

Двумерный атом C_2 представляет собой перестройку двух окружностей в две окружности.

Атомы B и C_2 входят в бесконечные серии атомов B_n и C_n , где B_n есть перестройка n окружностей в одну через особый слой - граф с n вершинами, а C_n есть перестройка n окружностей в две через особый слой - граф с n вершинами. На рис. 28 показан пример атома из серии B_n при $n = 3$ и пример атома из серии C_n при $n = 4$.

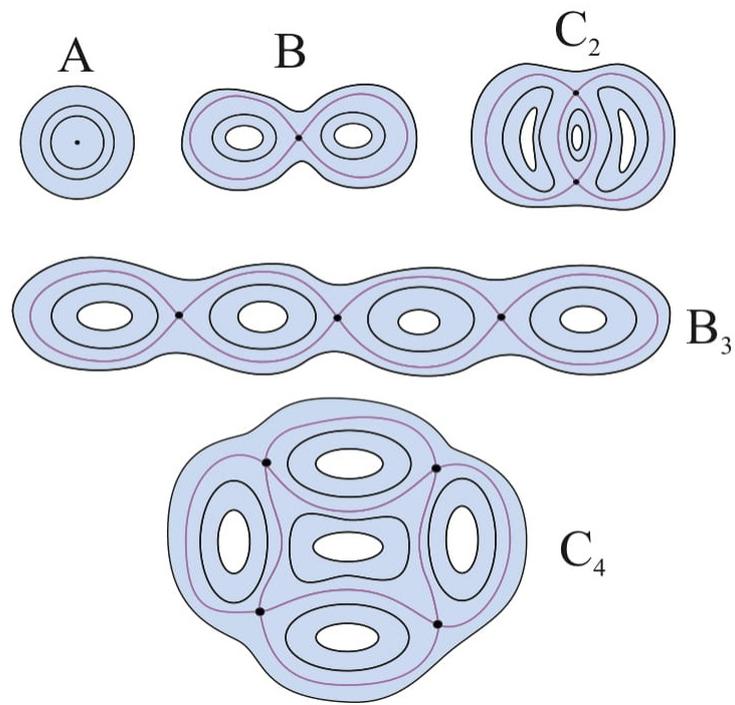


Рис. 28: Примеры часто встречающихся 2-атомов.

Добавим к уже описанным двумерным атомам новые атомы, которые будем называть атомы со звездочками.

Возьмем произвольный атом (P^2, K) и рассмотрим его граф K . При этом наряду с прежними атомами рассмотрим еще один простой атом, получающийся следующим образом. В качестве поверхности P мы возьмем кольцо и объявим графом K любую его осевую окружность. Изготовим теперь новые атомы со звездочками. Отметим на некоторых ребрах графа K произвольное число внутренних точек, объявим их новыми вершинами графа K и обозначим их звездочками.

Теперь построим отображение, которое сопоставит каждому двумерному атому некоторый трехмерный атом.

Рассмотрим двумерный атом (P^2, K) , и построим на P^2 функцию Морса f такую, что ее единственный критический уровень совпадает с графом K . Такая функция определена однозначно с точностью до послышной эквивалентности. Она естественным образом расслаивает P^2 своими линиями уровня. Из теоремы 3.11 [2] вытекает что по базе P^2 однозначно (с точностью до послышной эквивалентности) восстанавливается 3-многообразие $U(L)$ со структурой расслоения Зейферта. Так как неособые линии уровня функции f на P^2 представляют собой окружности, то их образ в 3-многообразии $U(L)$ представляют собой торы.

Если в атоме (P^2, K) нет звездочек, то особый слой - образ графа K будет представлять собой прямое произведение графа K на окружность.

Пусть атом (P^2, K) содержит звездочки. Для такого атома можно построить его дубль (\hat{P}^2, \hat{K}) - разветвленное двулистное накрытие над (P^2, K) так, чтобы точки ветвления были в точности точки-звездочки. Сделать это можно разрезав атом трансверсально графу K в точках-звездочках и склеив два экземпляра разрезанных атомов вдоль границы разреза.

Для построения трехмерного атома со звездочками рассмотрим инволюцию τ на дубле (\hat{P}^2, \hat{K}) , которая меняет местами две части дубля \hat{P}^2 . Такая инволюция обладает следующими свойствами:

- $\tau^2 = id$;
- τ сохраняет ориентацию.

Рассмотрим цилиндр $\hat{P}^2 \times [0, 2\pi]$ и склеим его основания, отождествляя точки $(x, 2\pi)$ с $(\tau(x), 0)$. В результате получим ориентируемое многообразие U с краем, которое и будем называть 3-атомом со звездочками.

В качестве дубля атома A^* будем рассматривать атом B (изображен на рис. 29, с.), в качестве дублей серий атомов B_n^* и B_n^{**} будут выступать атомы B_{2n+1} и C_{2n+1} соответственно.

Примеры трехмерных атомов представлены на рис. 29.

Атом A (рис. 29, а.), представляющий собой полноторие, расслоенное на концентрические торы, которые стягиваются на окружность - ось полнотория.

Далее изображен атом B (рис. 29, б.), представляющий собой полноторие, из которого вырезаны два тонких тора. Особый слой представляет собой произведение восьмерки на окружность.

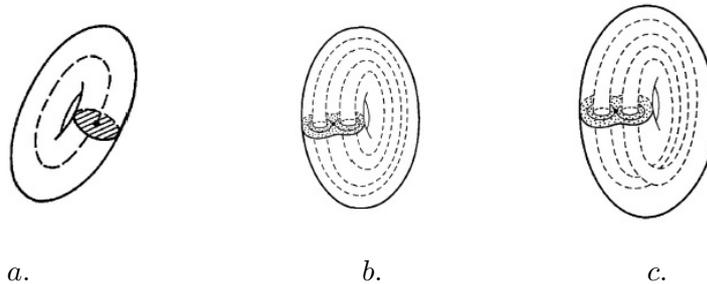


Рис. 29: Примеры часто встречающихся 3-атомов.

4.4 Поверхности уровней особых значений интеграла в топологических бильярдах с выпуклыми склейками: седловые значения

Предложение 4.2. Особыми уровнями для топологических бильярдов, допускающих только выпуклые склейки, содержащих e , будут уровни, соответствующие значениям интеграла $\lambda = -b, a$.

Тогда на поверхностях уровня седловых значений интеграла лежат особые слои следующих атомов

- B_n для $\lambda = -b$ в обобщенном эллипсе $\Delta_\alpha(k \times ne + (\alpha_1 + \alpha_2)kh1 + (\beta_1 + \beta_2)nh2 + (\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2)q)$,
в бильярде с одной конической точкой $\Delta_\beta((k \times ne)_x + \alpha_1nh1 + \beta_1kh2 + \alpha_1\beta_1q)$;
- B_k для $\lambda = a$ в обобщенном эллипсе $\Delta_\alpha(k \times ne + (\alpha_1 + \alpha_2)kh1 + (\beta_1 + \beta_2)nh2 + (\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2)q)$,
в бильярде с одной конической точкой $\Delta_\beta((k \times ne)_x + \alpha_1nh1 + \beta_1kh2 + \alpha_1\beta_1q)$
и в бильярде с двумя коническими точками $\Delta_\beta((2k \times ne)_{x,x} + \alpha_12kh1)$;
- два экземпляра B_n для $\lambda = -b$ в обобщенной ленте $\Delta_\gamma(2k \times ne + (\beta_1 + \beta_2)nh1)_2$;
- два экземпляра B_k для $\lambda = a$ в обобщенной ленте $\Delta_\gamma(k \times 2ne + (\beta_1 + \beta_2)nh2)_1$;
- B_{2n} для $\lambda = -b$ в бильярде с двумя коническими точками $\Delta_\beta((2k \times ne)_{x,x} + \alpha_12kh1)$;
- C_{2n} для $\lambda = -b$
в бильярде с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times ne)^2$;
- C_{2k} для $\lambda = a$ в обобщенной ленте $\Delta_\gamma(2k \times ne + (\beta_1 + \beta_2)nh1)_2$ и бильярде с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times ne)^2$;
- два экземпляра C_{2n} для $\lambda = -b$ в обобщенном торе $\Delta_\alpha^T(2k \times 2ne)$;
- два экземпляра C_{2k} для $\lambda = a$ в обобщенном торе $\Delta_\alpha^T(2k \times 2ne)$.

Доказательство. шаг 1.

Докажем следующее утверждение: приклеивание к бильярду e бильярда $h1$ $h2$ не меняет грубую молекулу.

Рассмотрим склейку бильярда e с бильярдом $h1$ по верхнему ребру. Поверхность уровня, соответствующая значению дополнительно интеграла $\lambda = -b$, в изоэнергетической поверхности бильярда e - атом B , а в изоэнергетической поверхности бильярда $h1$ - тор. При осуществлении операции склейки производится надрез особого уровня атома B и тора по кривым, состоящим из прообразов точек верхнего сегмента - такая кривая на особом слое атома B параллельна особой окружности, а для тора является его параллелью. Вдоль этих кривых склеивались векторы на верхних сегментах на $h1$ (верхний лист) и e (нижний лист): v_1 с v_2 и v_3 с v_4 . После разреза циклы склеятся в соответствии с законом отражения: точки $(x, v_1)_u$ отождествляются с $(x, v_2)_d$ и наоборот, $(x, v_3)_u$ с $(x, v_4)_d$ и наоборот. Таким образом, вновь имеем особый слой атома B .

Аналогично, поверхность уровня, соответствующая значению дополнительного интеграла $\lambda = a$, в изоэнергетической поверхности бильярда e и $h2$ - атом B . При осуществлении операции склейки разрезаем особые уровни атомов B по кривым, состоящим из прообразов точек верхнего сегмента - такие кривые трансверсальны особым окружностям. Вдоль этих кривых склеивались векторы на верхних сегментах на $h1$ (верхний лист) и e (нижний лист): v_1 с v_2 и v_3 с v_4 . После разреза циклы склеятся в соответствии с законом отражения. Таким образом, вновь имеем особый слой атома B .

Доказательство того, что при приклеивании $h1$, $h2$ и q к e особые уровни интеграла останутся торами аналогично вышеописанному.

шаг 2.

Рассмотрим склейку двух бильярдов e по правому сегменту. Поверхности уровня значений интеграла $\lambda = a$, $-b$ - особые уровни атомов B . Чтобы понять, как преобразуется уровень интеграла $\lambda = a$ при склейке, разрезаем особые уровни атомов B по кривым, состоящим из прообразов точек правого сегмента - такие кривые параллельны особым окружностям. Вдоль этих кривых склеивались векторы на правых сегментах на верхнем и нижнем листах: v_1 с v_4 и v_3 с v_2 . После разреза циклы склеятся в соответствии с законом отражения: точки $(x, v_1)_u$ отождествляются с $(x, v_4)_d$ и наоборот, $(x, v_3)_u$ с $(x, v_2)_d$ и наоборот. Таким образом, вновь имеем особый слой атома B_2 .

Для преобразования уровня интеграла $\lambda = -b$ разрезаем особые уровни атомов B по трансверсальным особым окружностям кривым - тем, которые являются прообразами точек правого сегмента. Вдоль них склеивались векторы на правых сегментах на верхнем и нижнем листах. Осуществляя переклейку в соответствии с законом отражения (описан в абзаце выше), получим особый слой атома B .

Склеив два простых бильярда e по нижней границе, аналогично доказывается, что поверхность уровня полученного топологического бильярда, соответствующая $\lambda = -b$ - особый слой атома B_2 , а соответствующая $\lambda = a$ - особый слой атома B . Разница будет в законе отражения - после разреза точки кривой $(x, v_1)_u$ отождествляются с точками $(x, v_4)_d$ и наоборот, точки $(x, v_3)_u$ с $(x, v_2)_d$ и наоборот.

Итак, приклеивая необходимое количество строк и столбцов бильярдов по различным сегментам, аналогичными рассуждениями доказывается, что для обобщенного эллипса, состоящего из k столбцов и n строк, поверхность уровня значения интеграла $\lambda = -b$ - особый уровень атома B_n , а поверхность уровня значения интеграла $\lambda = a$ - особый уровень атома B_k .

Аналогично шагу 1 доказывается, что на вид грубой молекулы не влияют приклеенные бильярды h_1 , h_2 и q .

Шаг 3.

Для того, чтобы понять, как выглядят особые уровни бильярдов с одной конической точкой, вновь рассмотрим частный случай такого бильярда - два бильярда e , склеенные по нижнему и правому сегментам. Он может быть получен отождествлением нижних сегментов в топологическом бильярде, являющимся склеенными по правому сегменту двум e (его поверхность уровня, соответствующая $\lambda = -b$ это особый слой атома B , а соответствующая $\lambda = a$ - особый слой атома B_2). Тогда кривая, состоящая из прообразов точек нижних сегментов, в атоме B параллельна особой окружности, а в атоме B_2 - трансверсальна особым окружностям. Вдоль этих кривых склеивались векторы v_1 с v_2 и v_3 с v_4 . После разреза кривые склеятся в соответствии с законом отражения: точки $(x, v_1)_u$ отождествляются с $(x, v_2)_d$ и наоборот, $(x, v_3)_u$ с $(x, v_4)_d$ и наоборот. При таком отождествлении наглядно показано, что особый слой атома B (лежащий на уровне интеграла $\lambda = -b$) снова станет особым слоем атома B . Для доказательства того, что в поверхности уровня значения интеграла $\lambda = a$ также лежит особый слой атома B . Заметим, что такой бильярд мог быть получен отождествлением правых сегментов топологического бильярда, состоящего из двух e , склеенных по нижнему сегменту. В таком случае из особого слоя атома B на поверхности уровня значения интеграла $\lambda = a$ аналогично получим особый слой атома B .

Отметим, что в дальнейшем доказательстве будем избегать склеивания вдоль кривых, трансверсальных особым окружностям.

Аналогично доказывается, что имея обобщенный эллипс с $2k$ столбцами и n строчками, после склейки вдоль нижних (или верхних) сегментов, получим, что особый слой атома B_n (которые лежал на поверхности уровня интеграла $\lambda = -b$) перейдет в особый слой атома B_n , а особый слой атома B_{2k} (которые лежал на поверхности уровня интеграла $\lambda = a$) перейдет в особый слой атома B_k

шаг 4.

Рассмотрим обобщенный эллипс, состоящий из n строк и $2k$ столбцов, и отождествим между собой свободные боковые сегменты - получим бильярд-ленту $\Delta_\gamma(2k \times ne)_2$. Посмотрим, как в обобщенном эллипсе изменятся при осуществлении описанной склейки поверхности уровня значений интеграла $\lambda = -b$ (особый слой атома B_n) и значений интеграла $\lambda = a$ (особый слой атома B_{2k}).

Для этого рассмотрим частный случай, когда $n = k = 1$. Разрежем поверхности уровня атомов B и B_2 вдоль кривых, состоящих из прообразов точек левых сегментов: в атоме B_2 она параллельна особым окружностям, а в атоме B - трансверсальна особой окружности. Вдоль этих кривых склеивались векторы v_1 с v_4 и v_3 с v_2 . После разреза кривые склеятся в соответствии с законом отражения: точки $(x, v_1)_u$ отождествляются с $(x, v_4)_d$ и наоборот, $(x, v_3)_u$ с $(x, v_2)_d$ и наоборот. Особый слой атома B преобразуется в два особых слоя атома B , а особый слой атома B_2 преобразуется в особый слой атома C_2 .

Аналогичными рассуждениями получим, что особый слой атома B_n (соответствующий уровню интеграла $\lambda = -b$) преобразуется в два особых слоя атома B_n , а особый слой атома B_{2k} (соответствующий уровню интеграла $\lambda = a$) преобразуется в особый слой атома C_{2k} .

Шаг 5

Рассмотрим обобщенный эллипс, образованный n строками и $2k$ столбцами билиардов e . В нем отождествим верхние и боковые сегменты так, чтобы получить билиард $\Delta_\beta((2k \times ne)_{x,x})$, имеющий две конических точки.

Чтобы сделать доказательство более наглядным, предположим, что билиард получаем соответствующей склейкой боковых сегментов в билиарде из $2n$ строк и k столбцов (для него поверхность уровня значений интеграла $\lambda = -b$ есть особый слой атома B_{2n} , а значений интеграла $\lambda = a$ - особый слой атома B_k). Для того, чтобы понять, как изменятся поверхности уровня особых значений, рассмотрим частный случай $n = k = 1$.

Посмотрим, как преобразуется особый слой атома B (поверхность уровня значений интеграла $\lambda = a$). Преобразы боковых сегментов, вдоль которых склеивались векторы v_1 с v_4 и v_3 с v_2 , есть два цикла, параллельных особой окружности для особого слоя атома B . После отождествления этих циклов в соответствии с правилами склейки точки $(x, v_1)_u$ отождествляются с $(x, v_4)_d$ и наоборот, $(x, v_3)_u$ с $(x, v_2)_d$ и наоборот. Тогда особый слой атома B перейдет в особый слой атома B (на рис. показана данная операция лишь для одного цикла, со вторым происходит аналогичная ситуация).

Чтобы понять, как преобразуется особый слой атома B_2 (поверхность уровня значений интеграла $\lambda = -b$), предположим, что билиард был получен отождествлением верхних сегментов в билиарде, состоящим из двух e со склеенными боковыми сегментами. В нем поверхность уровня значений интеграла $\lambda = -b$ это два атома B . Преобразы верхних сегментов в них есть циклы, параллельные особым окружностям, и вдоль них отождествлялись векторы v_1 с v_2 и v_3 с v_4 . Теперь в соответствии с правилами склейки точки $(x, v_1)_u$ отождествляются с $(x, v_2)_d$ и наоборот, $(x, v_3)_u$ с $(x, v_4)_d$ и наоборот. Тогда два особых слоя атома B преобразуются в особый слой атома B_2 .

Итак, аналогичными выкладками можно показать, что в таком топологическом билиарде (в котором $2k \times n$ билиардов e) поверхность уровня значений интеграла $\lambda = -b$ есть особый слой атома B_{2n} , а значений интеграла $\lambda = a$ - особый слой атома B_k .

Шаг 6.

Рассмотрим билиард, состоящий из n строк и $2k$ столбцов, все свободные сегменты которого отождествлены между собой так, что топологический билиард содержит четыре конических точки (такая склейка показана на рис. 18, с).

Пусть он образован из билиарда из пункта 5 отождествлением свободных верхних сегментов. Для того, чтобы понять, как преобразуются его поверхности уровня особых значений интеграла, рассмотрим частный случай $n = k = 1$.

Тогда имеем билиард, состоящий из двух экземпляров билиарда e , с отождествленными боковыми и нижними сегментами. Посмотрим, как преобразуется поверхность уровня значения интеграла $\lambda = -b$ - особый слой атома B_2 . На нем нужно сделать разрез вдоль цикла, параллельного особым окружностям, вдоль которого склеивались векторы v_1 с v_2 и v_3 с v_4 . После отождествления точек этих циклов в соответствии с законом отражения ($(x, v_1)_u$ отождествляются с $(x, v_2)_d$ и наоборот, $(x, v_3)_u$ с $(x, v_4)_d$ и наоборот), особый слой атома B_2 преобразуется в особый слой атома C_2 .

Поскольку данный билиард можно получить отождествлением правых сегментов в билиарде, состоящем из двух экземпляров билиарда e , с отождествленными нижними, верхними и левыми сегментами, доказательство того, что на поверхности уровня значения интеграла $\lambda = a$ - из особого слоя атома B_2 получается особый слой атома C_2 аналогично предыдущему.

Итак, аналогично доказывается, что в топологическом билиарде, состоящем из $2k \times n$ билиардов e , отождествленных по всем сегментам, уровню интеграла $\lambda = -b$ соответствует C_{2n} , а уровню интеграла $\lambda = a$ соответствует C_{2k} .

Шаг 7.

Рассмотрим билиард, состоящий из $2n$ строк и $2k$ столбцов, все свободные сегменты которого отождествлены между собой в соответствии с рис. 13, с (без образования конических точек). Напомним, что такой билиард мы называем обобщенным тором.

Пусть он образован из двух билиардов с отождествленными боковыми сегментами (и состоящими из $2k \times n$ билиардов e) путем склеивания свободных верхних и нижних сегментов. Для того, чтобы понять, как преобразуются его поверхности уровня особых значений интеграла, рассмотрим частный случай $n = k = 1$.

Тогда имеем два билиарда, каждый из которых состоит из двух экземпляров билиарда e с отожд-

дествленными боковыми сегментами. Посмотрим, как преобразуется поверхность уровня значения интеграла $\lambda = -b$ - особые слои атомов C_2 . На них нужно сделать разрез вдоль циклов, которые являются прообразами верхних и нижних сегментов (вдоль таких циклов склеивались векторы v_1 с v_2 и v_3 с v_4). Такие циклы параллельных особым окружностям атомов. Отождествим точки этих циклов в соответствии с законом отражения: точки $(x, v_1)_u$ с верхнего листа одного бильярда отождествляются с точками $(x, v_2)_u$ верхнего листа другого и наоборот, $(x, v_3)_u$ с $(x, v_4)_u$ и наоборот. Прообразы точек нижних листов обоих бильярдов отождествляем друг с другом аналогичным образом. Тогда два особых слоя атома C_2 преобразуются в два особых слоя атома C_2 .

Аналогично доказывается, что на поверхности уровня интеграла $\lambda = a$ тоже лежат два особых слоя атомов C_2 .

Итак, в обобщенному тору из $2k \times 2n$ бильярдов e , уровню интеграла $\lambda = -b$ соответствует два экземпляра особых слоев атома C_{2n} , а уровню интеграла $\lambda = a$ соответствует два экземпляра особых слоев атома C_{2k} . \square

Предложение 4.3. *Особым уровнем для бильярдов, допускающих только выпуклые склейки, содержащих $h2$, будет уровень, соответствующий значению интеграла $\lambda = -b$.*

Тогда на поверхности уровня седлового значения интеграла лежат особые слои следующих атомов:

- B_k для бильярда без конических точек $\Delta_\alpha(kh2 + \alpha q + \beta q)$ и его удвоенной версии $\Delta_\alpha(2 \times kh2 + 2\alpha q + 2\beta q)$, а также для бильярдов с одной конической точкой $\Delta_\beta((2 \times nh2)_x + 2\alpha_1 q)$ и с двумя коническими точками $\Delta_\beta((2 \times nh2)_{x,x})$;
- C_{2k} для бильярда-ленты $\Delta_\gamma(2kh2)_1$ и его удвоенной версии $\Delta_\gamma(2 \times 2kh2)_1$.

Предложение 4.4. *В топологических бильярдах, состоящих из склеенных между собой простых бильярдов q , нет седловых уровней интеграла.*

Доказательство вышеприведенных утверждений аналогично доказательству предложения 4.2. Рассмотрим поверхности уровня значений интеграла $\lambda = a, -b$ в простых бильярда $h2$ и q (это, соответственно, тор и особый слой атома B для бильярда $h2$ и по тору для обоих значений интеграла для бильярда q). Далее возьмем необходимое количество экземпляров такой поверхности (очевидно, равное количеству простых бильярдов, входящих в топологический) и сделаем разрезы на этих поверхностях вдоль циклов, являющихся прообразами склеиваемых ребер. Отождествим точки на краях этих разрезов в соответствии с законом отражения для каждого топологического бильярда. Таким образом получим требуемое утверждение.

4.5 Поверхности уровней особых значений интеграла в топологических бильярдах, допускающих прямые склейки: седловые значения

Предложение 4.5. *Особыми уровнями для топологических бильярдов, допускающих прямые склейки, содержащих e , будут уровни, соответствующие значениям интеграла $\lambda = -b, a$.*

Тогда на поверхностях уровня седловых значений интеграла лежат особые слои следующих атомов

- B_n на уровне $\lambda = -b$ для бильярдов $\Delta_\beta(k \times ne + (nh2')_y)$, $\Delta_\beta(k \times ne + (nh2')_{2y})$;
- B_{2n} на уровне $\lambda = -b$ для бильярдов $\Delta_\beta((2k \times ne)_x + (2nh2')_y)$, $\Delta_\beta(2k \times ne + (4nh2')_{y,y})$;
- два экземпляра B_n на уровне $\lambda = -b$ для обобщенных лент $\Delta_\gamma(2k \times ne + 2nh2')_2$;
- B_{2n+1} на уровне $\lambda = -b$ для $\Delta_\beta(2k \times ne + 4nh2' + 2nh1' + (4q')_{2z})$, $\Delta_\beta(2k \times ne + 2nh2' + (2kh1')_y + (2q')_z)$;
- C_{2n} на уровне $\lambda = -b$ для бильярдов $\Delta_\beta(k \times ne + nh2')^2$, $\Delta_\beta(k \times ne + nh2')^4$, $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2')^2$, $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2')^4$;

- C_{2n+1} на уровне $\lambda = -b$ для бильярдов $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2' + kh1' + 2q')^2$, $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2' + kh1' + 2q')^4$, $\Delta_\beta(k \times ne + nh2' + kh1' + q')^2$, $\Delta_\beta(k \times ne + nh2' + kh1' + q')^4$;
- C_{2n+2} на уровне $\lambda = -b$ для бильярдов $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2' + 2kh1' + 4q')^2$, $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2' + 2kh1' + 4q')^4$;
- два C_{2n} на уровне $\lambda = -b$ для обобщенного тора $\Delta_\alpha^T(2k \times 2ne + 4nh2')$;
- два C_{2n+1} на уровне $\lambda = -b$ для обобщенного тора $\Delta_\alpha^T(2k \times 2ne + 4nh2' + 4kh1' + 4q')$, обобщенного тора $\Delta_\alpha^T(2k \times 2ne + 4kh1')$;
- B_n^* на уровне $\lambda = -b$ для бильярдов $\Delta_\beta(2k \times ne + 2nh2' + 2kh1' + (2q')_z)$, $\Delta_\beta(2k \times ne + (2nh2')_y + 2kh1' + (2q')_z)$;
- B_{2k+1} на уровне $\lambda = a$ для бильярдов $\Delta_\beta(2k \times ne + (2nh2')_{2y})$, $\Delta_\beta(2k \times ne + (2nh2')_y + 2kh1' + (2q')_z)$;
- B_k^* на уровне $\lambda = a$ для бильярдов $\Delta_\beta(2k \times ne + (2nh2')_y)$, $\Delta_\beta((2k \times ne)_y + (2nh2')_y)$, $\Delta_\beta(2k \times ne + 2nh2' + 2kh1' + (2q')_z)$, $\Delta_\beta(2k \times ne + 2nh2' + (2kh1')_y + (2q')_z)$;
- B_k^{**} на уровне $\lambda = a$ для бильярдов $\Delta_\beta(2k \times ne + (4nh2')_{y,y})$, $\Delta_\beta(2k \times ne + 4nh2' + 2kh1' + (4q')_{2z})$;
- C_{2k+1} на уровне $\lambda = a$ для обобщенной ленты $\Delta_\gamma(2k \times ne + 2nh2')_2$, а также для бильярдов $\Delta_\beta(k \times ne + nh2')^2$, $\Delta_\beta(k \times ne + nh2')^4$, $\Delta_\beta(k \times ne + nh2' + kh1' + q')^2$, $\Delta_\beta(k \times ne + nh2' + kh1' + q')^4$;
- C_{2k+2} на уровне $\lambda = a$ для бильярдов $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2')^2$, $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2')^4$, $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2' + kh1' + 2q')^2$, $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2' + kh1' + 2q')^4$, $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2' + 2kh1' + 4q')^2$, $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2' + 2kh1' + 4q')^4$;
- два C_{2k} на уровне $\lambda = a$ для обобщенного тора $\Delta_\alpha^T(2k \times 2ne + 4kh1')$;
- два C_{2k+1} на уровне $\lambda = a$ для обобщенного тора $\Delta_\alpha^T(2k \times 2ne + 4nh2')$ и для обобщенного тора $\Delta_\alpha^T(2k \times 2ne + 4kh1' + 4q')$;

Доказательство. Шаг 1.

Рассмотрим области, образованные склейкой двух обобщенных эллипсов $\Delta_\alpha(k \times ne + nh2')$. Как уже известно, в изоэнергетической поверхности такого обобщенного эллипса на уровне интеграла $\lambda = -b$ лежит атом B_n , а на уровне $\lambda = a$ лежит атом B_k .

1. Бильярд с одной конической точкой $\Delta_\beta(2k \times ne + (2nh2')_y)$ получен отождествлением прямых сегментов и нижних выпуклых сегментов двух рассматриваемых обобщенных эллипсов. Отождествляя прямые сегменты, получим бильярд, эквивалентный бильярду $\Delta_\alpha((2k+1) \times ne)$. В его изоэнергетической поверхности на уровне интеграла $\lambda = -b$ лежит атом B_n , а на уровне $\lambda = a$ лежит атом B_{2k+1} .

Осуществляя склейку вдоль нижних сегментов, проследим, как преобразуются особые уровни интеграла.

Рассмотрим частный случай, когда $k = n = 1$.

Тогда на особом уровне интеграла $\lambda = -b$ лежит особый слой атома B . Необходимо осуществить его разрез вдоль кривой, параллельной особой окружности. Эта кривая является прообразом нижних сегментов. Вдоль этих сегментов до разреза отождествлялись векторы v_1 с v_2 и v_4 с v_3 на верхних и нижних листах. После разреза необходимо склеить края разреза в соответствии с новым бильярдным законом, а именно: точки, являющиеся прообразами нижнего сегмента нижнего листа e , оснащенные векторами v_1 и v_4 , необходимо склеить с точками, являющимися прообразами нижнего сегмента верхнего листа e , оснащенными векторами v_2 и v_3 соответственно. Нетрудно заметить, что получим вновь особый слой атома B .

На уровне интеграла $\lambda = a$ изначально лежит особый слой атома B_3 . Разрез необходимо осуществить вдоль кривой, трансверсальной особой окружности, которая является прообразом нижних

сегментов бильярда. После склейки краев разреза в соответствии с новым бильярдным законом, особый слой атома B_3 «перекручивается», и получаем особый слой атома B^* .

Таким образом, для произвольного числа листов в изоэнергетической поверхности бильярда $\Delta_\beta(2k \times ne + (2nh2')_y)$ на уровне интеграла $\lambda = -b$ лежит атом B_n , а на уровне $\lambda = a$ лежит атом B_k^* .

2. Область с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2k \times ne + (2nh2')_{2y})$ получена из области из предыдущего пункта отождествлением верхних сегментов.

Рассмотрим частный случай, когда $k = n = 1$.

Тогда на особом уровне интеграла $\lambda = -b$ лежит особый слой атома B . Необходимо осуществить его разрез вдоль кривой, параллельной особой окружности. Эта кривая является прообразом верхних сегментов. Аналогично предыдущему пункту вновь получим особый слой атома B .

На уровне интеграла $\lambda = a$ до осуществления склейки лежит особый слой атома B^* . Заметим, что в предыдущем пункте он был получен после разреза особого слоя атома B_3 вдоль кривой, трансверсальной особой окружности, и последующим отождествлением краев разреза с «перекруткой» одного из срезов. Теперь осуществим разрез особого слоя атома B^* вдоль кривой, трансверсальной особой окружности, которая является прообразом верхних сегментов бильярда. Тогда при склейке краев разреза с «перекруткой» одного из них, вновь получим особый слой атома B_3 .

Таким образом, для произвольного числа листов в изоэнергетической поверхности бильярда $\Delta_\beta(2k \times ne + (2nh2')_{2y})$ на уровне интеграла $\lambda = -b$ лежит атом B_n , а на уровне $\lambda = a$ лежит атом B_{2k+1} .

3. Бильярд-лента $\Delta_\gamma(2k \times ne + 2nh2')_2$ получен из двух обобщенных эллипсов $\Delta_\alpha(k \times ne + nh2')$ склейкой их прямых сегментов и склейкой противоположных им выпуклых сегментов (боковых свободных сегментов границы).

Чтобы понять, как преобразуется уровень интеграла $\lambda = a$ при склейке, рассмотрим частный случай, когда $k = n = 1$.

Тогда в изоэнергетической поверхности обобщенного эллипса $\Delta_\alpha(e + h2')$ на уровнях интеграла $\lambda = a, -b$ лежат атомы B .

Рассмотрим уровень интеграла $\lambda = -b$. До разреза на этом уровне в изоэнергетической поверхности лежали особые слои двух атомов B . Особый слой первого атома B полностью состоит из прообразов точек лишь одного из экземпляров обобщенного эллипса $\Delta_\alpha(e + h2')$, а особый слой второго атома B - из прообразов второго. При осуществлении склейки двух таких областей вдоль прямых сегментов и вдоль противоположных им боковых сегментов, необходимо разрезать особые уровни атомов B вдоль кривых, являющихся прообразами точек данных сегментов. Эти кривые трансверсальны особой окружности атома B , их две на каждом из особых слоев. Вдоль них до разреза отождествлялись векторы v_1 с v_4 и v_2 с v_3 . После осуществления операции склейки каждый из краев разрезов нужно будет склеить по следующему правилу: точки прообразов прямых сегментов одного экземпляра области, оснащенные векторами v_1 и v_2 , будут отождествляться с точками прообразов прямых сегментов второго экземпляра области, оснащенные векторами v_4 и v_3 соответственно, и наоборот. Таким образом, особые слои двух атома B после описанной склейки преобразуются в особые слои двух атомов B .

На уровне интеграла $\lambda = a$ до разреза также лежали особые уровни двух атомов B . Разрез осуществляется по кривым, параллельным особым окружностям, и таких кривых две на каждом атоме B . При склейке полученных после разреза частей в соответствии с бильярдным законом, учтем, что кривые, вдоль которых осуществлялся разрез (а именно, прообразы прямых сегментов) необходимо отождествить между собой, так как в новом бильярде прямой сегмент является образом еще одной особой окружности атома, лежащего на этом уровне интеграла. Итак, получим особый слой атома C_3 .

Итак, если число листов произвольное, то при склейке двух областей $\Delta_\alpha(k \times ne + nh2')$ в бильярд-ленту $\Delta_\gamma(2k \times ne + 2nh2')_2$ на уровне интеграла $\lambda = -b$ лежат особые слои двух атомов B_n , уровне интеграла $\lambda = a$ лежит особый слой атома C_{2k+1}

4. Чтобы получить из рассмотренного выше бильярда-ленты область с двумя коническими точками $\Delta_\beta((2k \times ne)_x + (2nh2')_y)$, необходимо склеить все нижние сегменты между собой. Посмотрим, как при такой операции преобразуются поверхности уровней интеграла $\lambda = -b, a$ в изоэнергетической поверхности.

Для наглядности, опять же, рассмотрим частный случай, когда $k = n = 1$.

На уровне интеграла $\lambda = -b$ лежат особые слои двух атомов B . На каждом особом слое делаем по разрезу вдоль прообразов нижних сегментов бильярда. Разрезы осуществляются по кривым, параллельным особой окружности. Вдоль образов этих кривых на нижних сегментах отождествлялись векторы v_1 с v_2 и v_3 с v_4 на каждом из листов. После разреза необходимо отождествить образы точек нижнего сегмента верхнего листа e , оснащенные векторами v_1 и v_3 , с образами точек нижнего сегмента нижнего листа e , оснащенными векторами v_2 и v_4 соответственно. Аналогично поступаем с точками нижних сегментов верхнего и нижнего листов бильярда $h2'$. Отметим, что отождествляемые точки лежат на особых уровнях различных атомов B . Таким образом особые слои двух атомов B перейдут в особый слой одного атома B_2 .

На особом уровне интеграла $\lambda = a$ лежит особый слой C_3 . Разрез осуществляется вдоль кривой, являющейся прообразом нижних сегментов - такая кривая трансверсальна особой окружности. Отождествляем точки по различным сторонам разреза в соответствии с вышеописанным правилом. При склейке один из краев разреза «перекручивается». Так особый слой атома C_3 переходит в особый слой атома B^* .

Таким образом, для произвольного числа листов получим, что в изоэнергетической поверхности бильярда $\Delta_\beta((2k \times ne)_x + (2nh2')_y)$ на уровне интеграла $\lambda = -b$ лежит особый слой атома B_{2n} , а на уровне интеграла $\lambda = a$ лежит особый слой атома B_k^* .

5. Чтобы получить область $\Delta_\beta(k \times ne + nh2')^2$ обобщенной ленты из пункта 3, необходимо склеить между собой все нижние сегменты и все верхние сегменты.

Вновь обратиться к частному случаю, когда $k = n = 1$.

На уровне интеграла $\lambda = -b$ осуществляем по два разреза на обоих особых слоях атомов B . Разрезы проходят вдоль кривых, являющихся прообразами верхних и нижних сегментов. До разреза на этих сегментах отождествлялись векторы v_1 с v_2 и v_3 с v_4 на каждом из листов, как и в предыдущем примере. После склеивания в соответствии с новым законом отражения мы отождествляем прообразы точек нижнего и верхнего сегментов с верхнего листа e , оснащенные векторами v_1 и v_3 , с прообразами точек нижнего и верхнего сегментов с нижнего листа e , оснащенные векторами v_2 и v_4 соответственно, и аналогично поступаем с образами точек сегментов $h2'$. Получим особый уровень атома C_2 .

На уровне интеграла $\lambda = a$ делаем два разреза вдоль кривых, трансверсальных особой окружности, и осуществляя склейку различных сторон разреза в соответствии с новым законом отражения будем вновь иметь особый слой атома C_2 : «перекрутка» одного края разреза давала атом B^* в предыдущем примере, осуществив «перекрутку» обоих краев срезов, получим тот же самый особый слой того же атома.

Таким образом для произвольного числа листов в изоэнергетической поверхности бильярда $\Delta_\beta(k \times ne + nh2')^2$ на уровне $\lambda = -b$ имеем особый слой атома C_{2n} , а на уровне $\lambda = a$ имеем особый слой атома C_{2k+1} .

Шаг 2.

Рассмотрим два экземпляра обобщенного эллипса $\Delta_\alpha(k \times ne + 2nh2')$. Рассматриваемая в данном шаге группа бильярдов с прямыми склейками будет получена осуществлением операции склейки различных сегментов этих обобщенных эллипсов.

В теореме 4.2 было доказано, что приклеивание к бильярду ряда $n h2'$ не изменит грубую молекулу. Таким образом, для того, чтобы получить новые слоения Лиувилля, неэквивалентные рассмотренным ранее, необходимо оба прямых ребра сделать ребрами склейки. Для начала, склейкой двух прямых ребер получим бильярд-ленту, эквивалентный бильярду $\Delta_\alpha((2k + 2) \times ne)$. В изоэнергетической

поверхности на уровне $\lambda = -b$ имеем два особых слоя атомов B_n , а на уровне $\lambda = a$ имеем особый слой атома C_{2k+2} .

1. Чтобы получить из вышеописанного бильярда-ленты топологический бильярд с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2k \times ne + (4nh2')_{y,y})$, необходимо склеить между собой все нижние сегменты.

Для наглядности рассмотрим случай $k = n = 1$. Тогда имеем бильярд, составленный из двух бильярдов e и четырех бильярдов $h2'$, эквивалентный бильярду-ленте $\Delta_\alpha(4e)$.

Склеим все его нижние сегменты, причем учтем что бильярд имеет два нижних сегмента бильярда e и две пары нижних сегментов бильярдов $h2'$.

На уровне $\lambda = -b$ имеем два особых слоя атомов B . Аналогично пункту 4 шага 1 доказывается, что два особых слоя атома B переходят в особый слой атома B_2 .

На уровне $\lambda = a$ имеем особый слой атома C_4 . Осуществим разрез вдоль кривой, трансверсальной особой окружности, являющейся прообразом точек нижних сегментов бильярда. Вдоль них до разреза отождествлялись векторы v_1 с v_2 и v_4 с v_3 на нижних и верхних листах. После разреза необходимо отождествить образы точек нижнего сегмента верхнего листа e , оснащенные векторами v_1 и v_3 , с образами точек нижнего сегмента нижнего листа e , оснащенными векторами v_2 и v_4 соответственно. Аналогично поступаем с точками нижних сегментов верхних и нижних листов бильярдов $h2'$. Таким образом происходит «перекрутка» особого слоя атома C_4 , в результате которой получим атом B^{**} .

Рассуждая аналогичным образом, для произвольного числа листов в бильярде $\Delta_\beta(2k \times ne + (4nh2')_{y,y})$ в изоэнергетической поверхности на уровне интеграла $\lambda = -b$ лежит особый слой атома B_{2n} , а на уровне интеграла $\lambda = a$ лежит особый слой атома B_k^{**} .

2. Чтобы получить из бильярда-ленты топологический бильярд с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2')^2$, необходимо осуществить склейку вдоль всех верхних сегментов и всех нижних сегментов.

Вновь обратимся к частному случаю $k = n = 1$. Таким образом, рассмотрим бильярд-ленту, эквивалентный бильярду $\Delta_\alpha(4e)$ и отождествим его верхние сегменты.

Тогда на уровне интеграла $\lambda = -b$ лежат два особых слоя атомов B . Аналогично пункту 5 шага 1 доказываем, что два особых слоя атомов B перейдут в особый слой атома C_2 .

На уровне интеграла $\lambda = a$ лежит особый слой атома C_4 . Аналогично пункту 5 шага 1 доказываем, что особый слой атома C_4 перейдет в особый слой атома C_4 .

Таким образом, для произвольного числа листов имеем, что в изоэнергетической поверхности бильярда $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2')^2$ на уровне интеграла $\lambda = -b$ имеем особый слой атома C_{2n} , а на уровне интеграла $\lambda = a$ имеем особый слой атома C_{2k+2} .

Шаг 3.

Рассмотрим два экземпляра обобщенного эллипса $\Delta_\alpha(k \times ne + 2nh2' + kh1' + 2q')$ и попробуем склейкой таких бильярдов получить все возможные бильярды из теоремы классификации (теорема 3.2).

Как и в шаге 2, будем рассматривать только те бильярды, в которых все прямые сегменты являются сегментами склейки.

1. Тогда первый возможный бильярд - область с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2k \times ne + 4nh2' + 2kh1' + (4q')_{2z})$. Удобнее всего его получить как склейку нижних прямых сегментов бильярда-ленты $\Delta_\gamma(2k \times ne + 4nh2' + 2kh1' + 4q')_2$ - в нем сегментами склейки являются прямые сегменты бильярдов $h2'$, и такой бильярд эквивалентен обобщенной ленте $\Delta_\gamma((2k + 2) \times ne)_2$. В изоэнергетической поверхности такого бильярда на уровне интеграла $\lambda = -b$ лежат два особых слоя атомов B_n , а на уровне интеграла $\lambda = a$ имеем особый слой атома C_{2k+2} .

Вновь для наглядности рассуждений обратимся к частному случаю $k = n = 1$.

Тогда на особом уровне интеграла $\lambda = -b$ в изоэнергетической поверхности бильярда-ленты лежат два особых уровня атомов B . Разрежем каждый экземпляр вдоль кривой, параллельной особой окружности, которая является прообразом нижних прямых сегментов. Вдоль таких сегментов отождествлялись векторы v_1 с v_2 и v_3 с v_4 на каждом из листов. После разреза необходимо отождествить точки по разным краям разреза в соответствии со следующим правилом: образы точек нижнего сегмента верхнего листа $h1'$, оснащенные векторами v_1 и v_3 , с образами точек нижнего сегмента нижнего листа $h1'$, оснащенными векторами v_2 и v_4 соответственно. Аналогично поступаем с точками нижних сегментов верхнего и нижнего листов бильярдов q' . Отметим что образы таких отождествляемых точек лежат на особом уровне различных атомов B . Таким образом два атома B перейдут в один атом B_2 . Далее необходимо отождествить кривые склейки между собой, так как сегменты склейки есть образ особой окружности. Таким образом особый слой атома B_2 перейдет в особый слой атома B_3 .

На уровне интеграла $\lambda = a$ имеем особый слой атома C_4 . Рассуждая аналогично пункту 1 шага 2, получим, что особый слой атома C_4 переходит в особый слой атома B^{**} .

Таким образом, для произвольного числа листов имеем: в изоэнергетической поверхности бильярда $\Delta_\beta(2k \times ne + 4nh2' + 2kh1' + (4q')_{2z})$ на уровне интеграла $\lambda = -b$ имеем особый слой атома B_{2n+1} , а на уровне интеграла $\lambda = a$ имеем особый слой атома B_k^{**} .

2. Бильярд с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2' + kh1' + 2q')^2$ получен из бильярда-ленты $\Delta_\gamma(2k \times ne + 4nh2' + 2kh1' + 4q')_2$, описанного в предыдущем пункте, отождествлением верхних сегментов между собой и нижних сегментов между собой.

Рассмотрим частный случай $n = k = 1$.

Тогда на уровне интеграла $\lambda = -b$ в изоэнергетической поверхности бильярда-ленты лежат два особых слоя атомов B . Сначала отождествим нижние сегменты между собой, и тем самым в изоэнергетической поверхности получим атом B_3 , рассуждая аналогично предыдущему пункту.

Теперь осуществим склейку верхних сегментов. Необходимо осуществить разрез вдоль кривой, параллельной особой окружности атома B_3 . Образ этой кривой есть верхние сегменты, вдоль них отождествлялись векторы v_1 с v_2 и v_3 с v_4 . Края разреза необходимо склеить в соответствии с новым бильярдным законом, а именно: точки, являющиеся прообразами верхнего сегмента нижнего листа e , оснащенные векторами v_1 и v_4 , необходимо склеить с точками, являющимися прообразами верхнего сегмента верхнего листа e , оснащенными векторами v_2 и v_3 соответственно. Аналогично поступим с точками, являющимися прообразами верхних сегментов листов $h2'$ и q' . Таким образом из особого слоя атома B_3 склейкой верхних сегментов бильярда получим особый слой атома C_3 .

Рассуждениями, аналогичными рассуждениям в пункте 5 шага 1, на уровне интеграла $\lambda = a$ из особого слоя атома C_4 получим особый слой атома C_4 .

Таким образом, в изоэнергетической поверхности бильярда $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2' + kh1' + 2q')^2$ на уровне интеграла $\lambda = -b$ имеем особый слой атома C_{2n+1} , а на уровне интеграла $\lambda = a$ имеем особый слой атома C_{2k+2} .

Шаг 4.

Рассмотрим два экземпляра обобщенного эллипса $\Delta_\alpha(k \times ne + 2nh2' + 2kh1' + 4q')$ и попробуем склейкой таких бильярдов получить все возможные бильярды из теоремы классификации (теорема 3.2).

Как и ранее, рассмотрим лишь те случаи, когда все прямые сегменты есть сегменты склейки. Тогда мы получим бильярд с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2' + 2kh1' + 4q')^2$. Его удобно получить из соответствующего бильярда-ленты $\Delta_\gamma(2k \times ne + 4nh2' + 4kh1' + 8q')_2$ (в нем сегментами склейки являются прямые боковые сегменты) отождествлением свободных верхних и нижних сегментов, являющихся, очевидно, прямыми.

Для наглядности вновь остановимся на частном случае $k = n = 1$.

Рассмотрим уровень интеграла $\lambda = -b$. Если бы верхний сегмент был выпуклым, то по аналогии с пунктом 4 шага 3 отождествлением нижних прямых сегментов из двух особых слоев атомов B мы

получили особый слой атома C_3 . Однако, теперь кривые, являющиеся прообразами верхних сегментов, которые в новом бильярде являются сегментами склейки, необходимо отождествить. Такие кривые параллельны особой окружности атома. Таким образом получим особый слой атома C_4 .

Рассуждениями, аналогичными рассуждениям в пункте 5 шага 1, на уровне интеграла $\lambda = a$ из особого слоя атома C_4 получим особый слой атома C_4 .

Таким образом, в изоэнергетической поверхности бильярда $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2' + 2kh1' + 4q')^2$ на уровне интеграла $\lambda = -b$ имеем особый слой атома C_{2n+2} , а на уровне интеграла $\lambda = a$ имеем особый слой атома C_{2k+2} .

Шаг 5.

Рассмотрим два экземпляра обобщенного эллипса $\Delta_\alpha(k \times ne + nh2' + kh1' + q')$ и попробуем их склейкой получить бильярды из теоремы классификации (теорема 3.2). Этот бильярд имеет на границе как прямые сегменты (без ограничения общности считаем что это нижние и левые сегменты) и выпуклые (в нашем предположении, это верхние и правые сегменты).

Как и в предыдущих шагах, обязательно будем отождествлять все прямые сегменты.

1. Именно отождествлением всех прямых сегментов получим первый возможный бильярд - область с одной конической точкой $\Delta_\beta(2k \times ne + 2nh2' + 2kh1' + (2q')_z)$.

Для того чтобы понять, какие особые слои лежат на уровнях интеграла $\lambda = -b, a$, рассмотрим частный случай $k = n = 1$.

Сначала отождествим между собой боковые сегменты двух экземпляров обобщенных эллипсов $\Delta_\alpha(k \times ne + nh2' + kh1' + q')$, получим бильярд, эквивалентный $\Delta_\alpha(3 \times 1e)$, тогда на уровне интеграла $\lambda = a$ будет лежать особый слой атома B_3 . Аналогично примеру, рассмотренному в пункте 1 шага 1, получим, что особый слой атома B_3 переходит в особый слой атома B^* .

Отождествляя сначала нижние сегменты, а потом боковые, аналогично получим, что на уровне интеграла $\lambda = -b$ лежит особый слой атома B^* .

Таким образом в случае произвольного числа листов имеем, что в изоэнергетической поверхности бильярда $\Delta_\beta(2k \times ne + 2nh2' + 2kh1' + (2q')_z)$ на уровне интеграла $\lambda = -b$ лежит особый слой атома B_n^* , а на уровне интеграла $\lambda = a$ лежит особый слой атома B_k^* .

2. Отождествлением прямых сегментов и верхних сегментов получим бильярд с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2k \times ne + (2nh2')_y + 2kh1' + (2q')_z)$.

Рассмотрим частный случай $k = n = 1$.

Рассматриваемый бильярд $\Delta_\beta(2k \times ne + (2nh2')_y + 2kh1' + (2q')_z)$ можно получить из бильярда из предыдущего пункта $\Delta_\beta(2k \times ne + 2nh2' + 2kh1' + (2q')_z)$ отождествлением верхних сегментов. Тогда на уровне интеграла $\lambda = a$ необходимо осуществить разрез вдоль кривой, трансверсальной особой окружности атома B^* . Образ этой кривой есть верхние сегменты, вдоль них отождествлялись векторы v_1 с v_2 и v_3 с v_4 . Края разреза необходимо склеить в соответствии с новым бильярдным законом, а именно: точки, являющиеся прообразами верхнего сегмента нижнего листа e , оснащенные векторами v_1 и v_4 , необходимо склеить с точками, являющимися прообразами верхнего сегмента верхнего листа e , оснащенными векторами v_2 и v_3 соответственно. Аналогично поступим с листами $h2'$.

Отметим, что в пункте 1 шага 5 и в пункте 1 шага 1 такой переклейкой особый слой атома B_3 «перекручивался» и переходил в особый слой атома B^* . Совершая «перекрутку» второй раз, из особого слоя атома B^* вновь получим особый слой атома B_3 .

На уровне интеграла $\lambda = -b$ до отождествления верхних сегментов лежит особый слой атома B^* . При отождествлении верхних сегментов необходимо осуществить разрез вдоль кривой, параллельной особой окружности. Эта кривая есть образ верхних сегментов бильярда, вдоль которых склеивались векторы v_1 с v_2 и v_4 с v_3 . После разреза необходимо отождествить образы точек верхнего сегмента верхнего листа e , оснащенные векторами v_1 и v_3 , с образами точек верхнего сегмента нижнего листа e , оснащенными векторами v_2 и v_4 соответственно. Аналогично поступаем с точками верхних сегментов верхних и нижних листов бильярдов $h2'$. Таким образом, особый слой атома B^* переходит в особый слой атома B^* .

Таким образом в случае произвольного числа листов имеем, что в изоэнергетической поверхности бильярда $\Delta_\beta(2k \times ne + (2nh2')_y + 2kh1' + (2q')_z)$ на уровне интеграла $\lambda = -b$ лежит особый слой атома B_n^* , а на уровне интеграла $\lambda = a$ лежит особый слой атома B_{2k+1} .

3. Бильярд с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2k \times ne + 2nh2' + (2kh1')_y + (2q')_z)$ может быть получен из бильярда из первого пункта $\Delta_\beta(2k \times ne + 2nh2' + 2kh1' + (2q')_z)$ отождествлением боковых выпуклых сегментов.

Рассмотрим частный случай $k = n = 1$.

Тогда на уровне интеграла $\lambda = -b$ лежал особый слой атома B^* . Отметим, что он был получен из особого слоя атома B_3 разрезом вдоль трансверсальной особой окружности атома кривой и отождествлением краев разреза с «перекруткой» одного из краев, причем образ кривой разреза - нижние сегменты бильярда. Аналогично, разрезая особый слой атом B^* вдоль кривой, являющейся прообразом верхних сегментов, и вновь отождествляя края разреза с «перекруткой» одного из краев, получим, что особый слой атома B^* вновь перейдет в особый слой атома B_3 .

Отметим, что в предыдущем пункте из особого слоя атома B^* отождествлением сегментов, прообразы которых параллельны особой окружности атома B^* , вновь получили атом B^* . Таким образом, на уровне $\lambda = a$ из особого слоя атома B^* разрезом вдоль кривой параллельной особой окружности атома B^* и аналогичной склейкой краев разреза вновь получим особый слой атома B^* .

Таким образом в случае произвольного числа листов имеем, что в изоэнергетической поверхности бильярда $\Delta_\beta(2k \times ne + (2nh2')_y + 2kh1' + (2q')_z)$ на уровне интеграла $\lambda = -b$ лежит особый слой атома B_{2n+1} , а на уровне интеграла $\lambda = a$ лежит особый слой атома B_k^* .

4. Наконец, бильярд с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(k \times ne + nh2' + kh1' + q')^2$ можем получить из бильярда из предыдущего пункта $\Delta_\beta(2k \times ne + (2nh2')_y + 2kh1' + (2q')_z)$ отождествлением верхних сегментов.

Рассмотрим частный случай $k = n = 1$.

На уровне интеграла $\lambda = -b$ лежит особый слой атома B_3 . Поступая аналогично пункту шага 3, склейкой вдоль верхнего сегмента получим особый слой атома C_3 .

Отметим, что бильярд $\Delta_\beta(k \times ne + nh2' + kh1' + q')^2$ также может быть получен из бильярда из пункта 2 $\Delta_\beta(2k \times ne + (2nh2')_y + 2kh1' + (2q')_z)$ отождествлением боковых выпуклых сегментов. Тогда, вновь обращаясь к частному случаю $k = n = 1$, аналогичным методом на уровне интеграла $\lambda = a$ из особого слоя атома B_3 получим особый слой атома C_3 .

Таким образом в случае произвольного числа листов имеем, что в изоэнергетической поверхности бильярда $\Delta_\beta(k \times ne + nh2' + kh1' + q')^2$ на уровне интеграла $\lambda = -b$ лежит особый слой атома C_{2n+1} , а на уровне интеграла $\lambda = a$ лежит особый слой атома C_{2k+1} .

Шаг 6.

Следующая часть доказательства будет полностью посвящена областям, полученным склеиванием всех свободных сегментов бильярдов, имеющих на границе два угла $\pi/2$. Удобнее всего такие бильярды представить как склеиванием четырех экземпляров обобщенных эллипсов

1. Для начала рассмотрим четыре экземпляра обобщенного эллипса $\Delta_\alpha(k \times ne + nh2')$, две пары которых образуют два обобщенных бильярда с одной конической точкой $\Delta_\beta(2k \times ne + (2nh2')_y)$, для удобства будем называть их бильярд I и II .

Чтобы склеить из двух бильярдов $\Delta_\beta(2k \times ne + (2nh2')_y)$ первый бильярд из рассматриваемой в этом шаге серии, необходимо отождествить все свободные сегменты между собой - верхние выпуклые и боковые выпуклые.

Для того чтобы проследить как изменятся особые слои интеграла $\lambda = -b, a$ в изоэнергетической поверхности, рассмотрим частный случай $k = n = 1$.

Итак, для начала склеим боковые выпуклые сегменты и получим бильярд, вообще говоря эквивалентный бильярду $\Delta_\beta(4 \times 1e + (4h2')_{2y})$.

На уровне интеграла $\lambda = -b$ лежит B_3 . При осуществлении склейки вдоль верхних сегментов, мы делаем два разреза особого слоя вдоль кривых, параллельных особым окружностям. Вдоль образов этих кривых до разреза склеивались векторы v_1 с v_2 и v_3 с v_4 . Отождествим края разреза по следующему правилу - прообразы точек верхнего сегмента на верхнем листе e биллиарда I , оснащенные векторами v_1 и v_3 , отождествим с прообразами точек верхнего сегмента на верхнем листе e биллиарда II , оснащенными векторами v_2 и v_4 . Аналогично поступим с прообразами точек верхних сегментов нижних листов e , а также верхних сегментов верхних и нижних листов левого и правого $h2'$. Таким образом особый слой атома B_2 переходит в особый слой атома C_2 .

Чтобы понять, как преобразуется особый слой атома на уровне интеграла $\lambda = a$, гораздо удобнее будет сначала отождествить верхние сегменты экземпляров I и II , а потом уже и боковые.

После отождествления верхних сегментов получим биллиард, эквивалентный $\Delta_\beta(1 \times 4e + (4h2')_{2y})$. На уровне $\lambda = a$ лежит особый слой атома B_3 . Аналогичными рассуждениями получим, что такой особый слой переходит в особый слой атома C_3 .

Итак, для произвольного числа листов имеем, что в изоэнергетической поверхности $\Delta_\beta(k \times ne + nh2')^4$ на уровне интеграла $\lambda = -b$ лежит особый слой атома C_{2n} , на уровне интеграла $\lambda = a$ лежит особый слой атома C_{2k+1} .

2. Теперь рассмотрим обобщенный эллипс $\Delta_\alpha(k \times ne + 2nh2')$. Возьмем четыре таких эллипса, и склеим из них пару обобщенных биллиардов с одной конической точкой $\Delta_\beta(2k \times ne + (2nh2')_y + 2nh2')$, для удобства будем называть их биллиард I и II .

Следующий биллиард из этой серии будет получен отождествлением всех свободных сегментов между собой, а именно верхних выпуклых и боковых прямых.

Вновь обратимся к частному случаю $k = n = 1$.

Отождествив сначала прямые боковые сегменты, а потом верхние выпуклые, на уровне интеграла $\lambda = -b$ аналогично разобранным примерам сначала получим особый слой атома B_2 , а потом разрежем и склеим его в особый слой атома C_2 .

Отождествляя сначала верхние выпуклые сегменты, а потом боковые прямые, как и в примере выше уровне интеграла $\lambda = a$ сначала получим особый слой атома B_3 . При разрезе и последующей склейке его особого слоя вдоль кривых, являющихся образами боковых сегментов, учтем, что теперь вдоль бокового сегмента проходит особая окружность нового атома. Таким образом, из особого слоя атома B_3 получим особый слой атома C_4 .

Таким образом, для произвольного числа листов имеем, что в изоэнергетической поверхности $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2')^4$ на уровне интеграла $\lambda = -b$ лежит особый слой атома C_{2n} , на уровне интеграла $\lambda = a$ лежит особый слой атома C_{2k+2} .

3. Аналогичными рассуждениями из четырех экземпляров $\Delta_\alpha(k \times ne + nh2' + kh1' + q')$ получим биллиард $\Delta_\beta(k \times ne + nh2' + kh1' + q')^4$, на уровне интеграла $\lambda = -b$ лежит особый слой атома C_{2n+1} , на уровне интеграла $\lambda = a$ лежит особый слой атома C_{2k+1} .
4. Аналогичными рассуждениями из четырех экземпляров $\Delta_\alpha(k \times ne + 2nh2' + kh1' + 2q')$ получим биллиард $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2' + kh1' + 2q')^4$, на уровне интеграла $\lambda = -b$ лежит особый слой атома C_{2n+1} , на уровне интеграла $\lambda = a$ лежит особый слой атома C_{2k+2} .
5. Аналогичными рассуждениями из четырех экземпляров $\Delta_\alpha(k \times ne + 2nh2' + 2kh1' + 4q')$ получим биллиард $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2' + 2kh1' + 4q')^4$, на уровне интеграла $\lambda = -b$ лежит особый слой атома C_{2n+2} , на уровне интеграла $\lambda = a$ лежит особый слой атома C_{2k+2} .

Шаг 7.

Рассмотрим области, гомеоморфные торам: $\Delta_\alpha^T(2k \times 2ne + 4nh2')$, эквивалентный ему $\Delta_\alpha^T(2k \times 2ne + 4kh1')$, и $\Delta_\alpha^T(2k \times 2ne + 4kh1' + 4nh2' + 4q')$.

1. Биллиард $\Delta_\alpha^T(2k \times 2ne + 4nh2')$ получим склейкой верхних и нижних сегментов биллиарда-ленты $\Delta_\gamma(2k \times 2ne + 4nh2')_2$. В изоэнергетической поверхности такого биллиарда-ленты на уровне интеграла $\lambda = -b$ лежат особые слои двух атомов B_{2n} , а на уровне интеграла $\lambda = a$ лежит особый слой атома C_{2k+1} .

Рассмотрим частный случай $k = n = 1$.

Тогда в изоэнергетической поверхности биллиарда-ленты $\Delta_\gamma(2 \times 2e + 4h2')_2$ на уровне $\lambda = a$ лежит особый слой атома C_3 . Осуществим разрез особого слоя по кривым, являющихся прообразами верхних и нижних сегментов. Таких кривых ровно две, они трансверсальны особым окружностям. Вдоль них отождествлялись векторы v_1 с v_2 и v_4 с v_3 на верхних и нижних сегментах. Осуществим склейку краев разреза в соответствии с биллиардным законом: прообразы точек верхних сегментов биллиардов e , оснащенные векторами v_1 и v_4 , склеим с прообразами точек нижних сегментов биллиардов e , оснащенных векторами v_1 и v_4 . Аналогично поступим с прообразами точек сегментов биллиардов $h2'$. Отметим, что отождествляемые точки принадлежат одной компоненте связности разрезанного особого слоя. Тогда один особый слой атома C_3 перейдет в два особых слоя атома C_3 .

Отметим, что такой обобщенный тор можно также получить из биллиарда-ленты $\Delta_\gamma(2k \times 2ne + 4nh2')_1$ отождествлением боковых прямых сегментов. Рассматривая вновь частный случай $k = n = 1$, на уровне интеграла $\lambda = -b$ в изоэнергетической поверхности биллиарда-ленты $\Delta_\gamma(2 \times 2e + 4h2')_1$ имеем особый слой атома C_2 . Аналогично предыдущему пункту доказываем, что склейкой боковых сегментов биллиардного стола особый слой атома C_2 перейдет в два особых слоя атома C_2 .

Таким образом, для произвольного числа листов имеем, что в изоэнергетической поверхности биллиарда $\Delta_\alpha^T(2k \times 2ne + 4nh2')$ на уровне интеграла $\lambda = -b$ лежат особые слои двух атомов C_{2n} , а на уровне интеграла $\lambda = a$ лежат особые слои двух атомов C_{2k+1} .

2. Аналогично предыдущему пункту доказывается следующее утверждение: в изоэнергетической поверхности биллиарда $\Delta_\alpha^T(2k \times 2ne + 4kh1')$ на уровне интеграла $\lambda = -b$ лежат особые слои двух атомов C_{2n+1} , а на уровне интеграла $\lambda = a$ лежат особые слои двух атомов C_{2k} .
3. Аналогично пункту 1 доказывается следующее утверждение: в изоэнергетической поверхности биллиарда $\Delta_\alpha^T(2k \times 2ne + 4kh1' + 4nh2' + 4q')$ на уровне интеграла $\lambda = -b$ лежат особые слои двух атомов C_{2n+1} , а на уровне интеграла $\lambda = a$ лежат особые слои двух атомов C_{2k+1} .

□

5 Вычисление инвариантов Фоменко-Цишанга.

5.1 Молекула Фоменко-Цишанга - полный инвариант лиувиллевой эквивалентности

Итак, выше для каждого из топологических биллиардов было дано описание каждого слоя слоения Лиувилля, а именно была доказано, что неособые слои являются торами, а особые слои описываются 3-атомами. Однако, для полного описания топологии строения Лиувилля необходима дополнительная информация о том, как склеены между собой регулярные окрестности особых слоев. На каждом граничном торе выберем допустимые базисы и укажем матрицу перехода от одного базиса к другому. Структура атома задает правило выбора допустимых базисов.

Напомним, на граничном торе атома A в качестве цикла λ выбираем меридиан полнотория, то есть цикл, стягивающийся в точку внутри полнотория, а цикл μ должен дополнять его до базиса. В этот случае удобно считать цикл μ слоем расслоения Зейферта. Слои расслоения Зейферта имеют естественную ориентацию, задаваемую гамильтоновым векторным полем. Более точно, один из этих слоев является траекторией рассматриваемого векторного поля, а именно - критическая окружность дополнительного интеграла λ , ось полнотория. Ориентация этого слоя позволяет точно определить ориентацию на цикле μ

Трехмерный атом B имеет структуру тривиального S^1 -расслоения на двумерным атомом B , а именно прямое произведение 2-атома B (утолщенной восьмерки) на окружность. В качестве цикла λ_i на каждом из граничных торов T_i возьмем слой этого расслоения. Дополнительные циклы μ_i выберем следующим образом. Рассмотрим произвольное сечение P 3-атома B . Оно высекает на каждом граничном торе T_i некоторый цикл μ_i , который и берем в качестве второго базисного цикла на T_i . Ориентация, как и в предыдущем случае, выбирается однозначно.

На других седловых атомах без звездочек выбор циклов осуществляется аналогичным образом, а именно цикл λ есть слой расслоения Зейферта, а циклы μ высекаются на граничных торах сечением трехмерного атома плоским атомом.

На торах седловых атомов со звездочками выбор меток осуществляется по следующему правилу: цикл λ вновь выбираем как слой расслоения Зейферта. Теперь подробно опишем, исходя из каких соображений будем выбирать цикл μ . В случае атома со звездочками сечение расслоения Зейферта имеет следующую особенность: дубль базы расслоения Зейферта \hat{P} можно вложить в сечение так, чтобы любой неособый слой пересекал этот дубль два раза, а особый слой - один раз.

Обозначим за U небольшую окрестность особого слоя атома

Рассмотрим вложенный в атом дубль \hat{P} , его границу обозначим $\partial\hat{P} = \hat{P} \cap U$.

Пусть $\hat{\mu}_i$ это та часть границы дубля \hat{P} , которая лежит на рассматриваемом торе T_i . Возможны два нижеперечисленных случая.

Если $\hat{\mu}_i$ есть объединение двух циклов, каждый из которых пересекает ранее выбранный λ_i ровно один раз, то в качестве цикла μ_i выберем компоненту связности $\hat{\mu}_i$ - поскольку $\hat{\mu}_i$ есть сечение расслоения Зейферта на граничном торе T_i

Если $\hat{\mu}_i$ пересекает ранее выбранный цикл λ_i дважды (напомним, что λ_i есть слой расслоения Зейферта), то в качестве μ выберем $\frac{\hat{\mu} + \lambda_i}{2}$. Отметим, что в этом случае локально выбранный μ и есть настоящее сечение расслоения Зейферта на граничном торе T_i .

Для согласования различных способов задания циклов необходимо к одному из циклов μ , выбранных вышеописанным способом, добавить цикл, кратный слою λ , причем кратность выбирается так, чтобы было выполнено следующее соотношение

$$\sum_i \mu_i = \frac{1}{2}(\sum \hat{\mu}_i + s\lambda) = \frac{\partial\hat{P} + s\lambda}{2}$$

В данной формуле s есть число звездочек в атоме.

Итак, каждое ребро молекулы мы разрезаем по тору и на берегах разреза задаем системы координат (базисы в фундаментальной группе), которые определяются согласованно с граничными атомами ребра. Матрица перехода от одного базиса к другому называется матрицей склейки. Поскольку допустимые базисы выбираются неоднозначно, матрица склейки может быть различной при различном выборе базисов. Однако, по одной матрице склейки можно вычислить числовые метки r, ε, n , которые инвариантны относительно допустимых замен базисов на граничных торах (см. леммы 4.5 и 4.6 книги [2]). Правила подсчета этих чисел подробно описаны в [2].

Определение 5.1. *Молекула, снабженная метками r, ε, n , называется меченой молекулой или инвариантом Фоменко-Цишанга.*

5.2 Подсчет меток.

При доказательстве следующей теоремы введем обозначение. Для простых бильярдов $e, h1, h2, q$ (а также топологических бильярдов, полученных склейкой из этих бильярдов) параметр верхнего (и нижнего, если он выпуклый) сегмента обозначим λ_2 , а параметр правого (и левого, если он выпуклый) сегмента обозначим λ_1 .

Определение 5.2. *Назовем ориентацию цикла согласованной, если его ориентация совпадает с ориентацией векторов скорости, и несогласованной, если ориентация цикла противоположна ориентации векторов скорости.*

Предложение 5.1. Все неэквивалентные друг другу топологические эллиптические бильярды, допускающие лишь выпуклые склейки, представлены таблице в пункте 6.3. В левом столбце - их схематичное обозначение, далее следует частный случай для конкретных значений n, k, α_-, β_i , и последний столбец - меченые молекулы, соответствующие каждому классу бильярдов.

Отметим, что все классы содержат счетное количество бильярдов, кроме класса, включающего в себя бильярды, содержащие лишь q , таких бильярдов ровно четыре.

Все неэквивалентные друг другу топологические эллиптические бильярды, допускающие лишь прямые склейки и содержащие бильярд e , представлены таблице в пункте 6.4.

В левом столбце - их схематичное обозначение, в правом столбце - меченые молекулы, соответствующие каждому классу бильярдов.

В тех случаях, когда можно удобно изобразить частный случай бильярда, его изображение представлено слева от схемы.

Доказательство. Опишем, как выглядит грубая молекула для различных типов топологических бильярдов, основываясь на результатах предложений 4.1, 4.2, 4.5.

Грубые молекулы топологических бильярдов, содержащих область e , устроены следующим образом: Поскольку такие бильярды имеют два особых уровня интеграла $\lambda = -b, a$ - на таких уровнях в изоэнергетической поверхности лежат особые слои седловых атомов. Кроме того, имеем два граничных значения интеграла $\lambda = \lambda_2, \lambda_1$ - на таких уровнях лежат атомы A . Все остальные слои в изоэнергетической поверхности - торы. Таким образом, грубые молекулы имеют три вида ребер - ребра, соединяющие граничные атомы A , соответствующие значению интеграла $\lambda = -\lambda_2$ с первым седловым атомом, соответствующим значению интеграла $\lambda = -b$. Такие ребра соответствуют значениям интеграла $\lambda \in (-b, -\lambda_2)$. Следующий тип ребер соединяет седловые атомы (таких ребер одно, два или четыре), и эти ребра соответствуют значениям интеграла $\lambda \in (-\infty, -b) \cup (a, \infty) \cup \{\pm\infty\}$. Последний тип ребер соединяет седловой атом, соответствующий значению интеграла $\lambda = a$, с граничными атомами A , соответствующими значениям интеграла $\lambda = \lambda_1$. Такие ребра соответствуют значениям интеграла $\lambda \in (+\lambda_1, a)$.

Отметим, что для всех таких молекул каждому световому тору (их может быть один, два или четыре в зависимости от области, как следует из теоремы 4.1) соответствует точка на одном из средних ребер молекулы (которых также один, два или четыре в зависимости от области). Такие точки лежат на уровне $\lambda = \pm\infty$. Тогда вся левая часть молекулы соответствует вещественным торам и атомам, а правая - мнимым торам и атомам.

Грубые молекулы бильярдов с выпуклыми склейками, не содержащих область e , но содержащих область h_2 , устроены следующим образом:

Такие бильярды имеют особый уровень интеграла $\lambda = -b$ - на его поверхности уровня в изоэнергетической поверхности лежит седловой атом. Все ребра молекулы делятся на два типа. Первый тип соединяет граничные атомы A , соответствующие значению интеграла $\lambda = -\lambda_2$ седловым атомом. Такие ребра соответствуют значениям интеграла $\lambda \in (-b, -\lambda_2)$. Второй тип ребер соединяет седловой атом с граничными атомами A , соответствующими значениям интеграла $\lambda = \lambda_1$. Отметим, что таких ребер либо одно, либо два, и они соответствуют значениям интеграла $\lambda \in (-\infty, -b) \cup (+\lambda_1, \infty) \cup \{\pm\infty\}$.

Подчеркнем, что значение интеграла $\lambda = a$ не является особым для таких бильярдов.

В данных молекулах точки, соответствующие световым торам, могут принадлежать лишь правым ребрам молекулы. Тогда вся часть молекулы, лежащая по левую сторону от такой точки, соответствует вещественным торам и атомам, а правая часть - мнимым торам и атомам.

Наконец, грубые молекулы бильярдов с выпуклыми склейками, содержащими лишь область q , устроены совсем просто, поскольку в их изоэнергетической поверхности нет седловых атомов. Таким образом, имеем два атома A , соответствующих граничным значениям интеграла $\lambda = -\lambda_2, +\lambda_1$, которые соединены ребром, соответствующим значениям интеграла $\lambda \in (-\infty, -\lambda_2) \cup (+\lambda_1, \infty) \cup \{\pm\infty\}$.

В данных молекулах точка ребра, соответствующая световому тору (то есть уровень интеграла $\lambda = \pm\infty$), лежит на единственном ребре, по левую сторону от такого уровня энергии в молекуле обозначены вещественные торы и атомы, по правую - мнимые торы и атомы.

Шаг 1. Подсчет меток для бильярдов, не содержащих конические точки.

1. Рассмотрим топологические бильярды без конических точек, содержащие e .

Посчитаем метки для ребер, соответствующих значениям интеграла $\lambda \in (-b, -\lambda_2)$ (то есть правые ребра молекулы). Фиксируем некоторое значение интеграла и обозначим его $-\Lambda$. Поверхность уровня для этого значения в изоэнергетической поверхности есть несколько торов. Рассмотрим один из этих торов (и подсчет метки осуществим именно для того ребра, к которому относится выбранный тор). Очевидно, что для остальных ребер нижеописанные действия аналогичны, а значит и подсчитанная метка будет такой же.

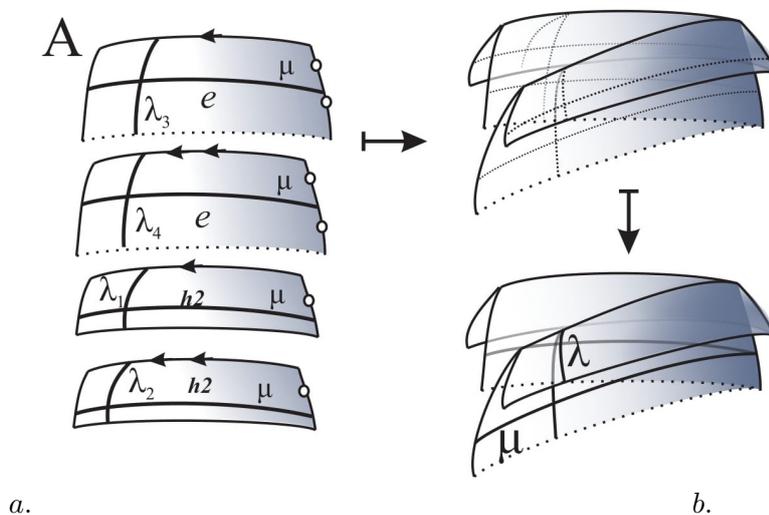


Рис. 30: Выбор обобщенных циклов μ и λ для граничных торов, соответствующих левым ребрам молекулы. Показан частный случай, когда листов четыре (два простых билиярда e и два $h1$).

Выберем циклы на граничном торе A . Рассмотрим проекцию уровня интеграла на билиардный стол. Эта проекция есть несколько склеенных между собой частей простых билиярдов e и, возможно, частей простых билиярдов $h1$, $h2$, q , и данные части отсекаются от соответствующих билиардных столов квадратикой с параметром $\lambda = -\Lambda$. Обозначим эти части за Ψ_i .

Вспомним, как осуществлялся выбор циклов λ и μ в простых билиярдах e , $h1$, $h2$ и q для этого же значения Λ на граничном торе атоме A . А именно, в качестве цикла λ выбираем прообраз дуги эллипса с параметром $\lambda \in (a, \lambda_1)$, а в качестве цикла μ - прообраз дуги эллипса с параметром $\lambda \in (-\Lambda, -\lambda_2)$.

Вернемся к выбору циклов в топологическом билиярде. Теперь на каждом Ψ_i выберем циклы λ_i и μ_i , которые совпадают с выбранными ранее циклами на соответствующем простом билиярде (рис.30, а.) Отметим, что эллипсы, дуги которых являются образами циклов λ_i , должны иметь один и тот же параметр, а также все эллипсы, дуги которых являются образами циклов μ_i , тоже должны иметь один и тот же параметр.

Далее, на границе склейки склеим циклы λ_i и μ_i между собой по правилу отождествления векторов: тогда все множество λ_i и μ_i разбивается на несколько связных компонент. В качестве λ (а также μ) возьмем некоторую связную компоненту объединения всех λ_i (и, соответственно, μ_i). На рис. 30, б. показано, как конструировать такие циклы для частного случая. Ориентацию μ выберем согласованной с ориентацией критической окружности атома A .

Определение 5.3. *Итак, циклы, выбранные вышеописанным образом будем называть обобщенными циклами λ и μ .*

Теперь выберем циклы на граничном торе седлового атома.

Аналогично, будем конструировать обобщенные циклы λ и μ . Для этого вспомним, как выбирались циклы λ , μ на граничных торах седловых атомов (имеются в виду конечно же атомы, соответствующие значению интеграла $\lambda = -b$). На простых билиярдах e и $h2$ (лишь для этих билиярдов значение интеграла $\lambda = -b$ является особым) в качестве λ брали прообраз дуги эллипса с параметром $\lambda \in (-\Lambda, -\lambda_2)$, а в качестве цикла μ - прообраз дуги эллипса с параметром $\lambda \in (\lambda_1, a)$.

Далее, вернемся к выбору циклов в топологическом бильярде. На всех входящих в топологический бильярд областях e и $h2$ выберем в качестве λ_i прообраз дуги эллипса с параметром $\lambda \in (-\Lambda, -\lambda_2)$ (причем для всех областей параметр дуги должен быть одинаков, и должен лежать в указанном интервале), а в качестве цикла μ_i - прообраз дуги эллипса с параметром $\lambda \in (\lambda_1, a)$ (аналогично, параметр дуги для всех областей должен быть одинаков и лежать в указанном интервале). Рассмотрим объединение всех λ_i между собой и объединение всех μ_i между собой в соответствии с бильярдным законом.

Отметим, может возникнуть ситуация, когда кривая, являющаяся объединением λ_i или μ_i , имеет край не на границе топологического бильярда, а на одном из его сегментов склейки. Такая ситуация возникает, если в состав бильярда входят области $h1$ или q , так как для этих бильярдов значение $\lambda = -b$ неособое. В таком случае необходимо дополнить объединение циклов дугами на областях $h1$ или q , причем эти дуги - части квадратики с тем же самым параметром $\lambda \in (-\Lambda, -\lambda_2)$, который мы ранее выбирали в качестве параметра для всех дуг λ_i (или, соответственно, с параметром $\lambda \in (\lambda_1, a)$, который мы ранее выбирали в качестве параметра для всех дуг μ_i , если речь идет о выборе цикла μ . Необходимо добавлять такие часть на всех необходимых листах бильярда, пока наконец края кривой, которая получена объединением образов λ_i и μ_i , будут лежать на границе бильярда

В качестве обобщенных λ берем компоненту связности объединения всех λ_i , а в качестве обобщенного μ берем компоненту связности объединения всех μ_i (причем эта компонента, если это необходимо, должна быть продолжена так, как описано в предыдущем абзаце).

Определение 5.4. *Обобщенные циклы λ и μ на граничном торе седлового атома выбираются вышеописанным способом.*

Ориентацию λ выберем согласованной с ориентацией критической окружности, а ориентацию μ выберем согласованной.

Ориентируем ребро к седловому атому, базисные циклы λ и μ на торе атома A будут иметь индекс $-$, а на торе седлового атома - индекс $+$.

Очевидно, что как и в случае простых бильярдов, при таком выборе циклов λ и μ будет выполняться следующее соотношение $\lambda_+ = \mu_-$, $\mu_+ = \pm\lambda_-$.

Тогда матрица склейки будет иметь вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, причем именно на этапе выписывания матрицы склейки выбирается ориентация цикла λ_- на граничном торе атома A , а именно она выбирается из условия на определитель матрицы склейки. Итак, метки на всех таких ребрах будут $r = 0, \varepsilon = 1$. Каждое такое ребро, если оно является выходящим из семьи или входящим в семью, дает нулевой вклад в метку n .

Очевидно, что для всех бильярдов, рассматриваемых в этом шаге доказательства, верно следующее утверждение: когда на граничных торах для поверхности уровня некоего значения интеграла выбирать именно обобщенные циклы, то метки на соответствующем ребре в молекуле метки будут такими же, как и на ребре молекулы простого бильярда e , отвечающих таким же значениям интеграла.

Далее, рассмотрим ребра молекулы, соответствующие значениям интеграла $\lambda \in (-\infty, -b) \cup (a, \infty) \cup \{\pm\infty\}$ - средние ребра в молекуле. Ориентируем ребра к атому, соответствующему $\lambda = a$. Выберем некоторое значение интеграла $\lambda = \Lambda$, лежащее в указанном интервале. В изоэнергетической поверхности на этом уровне интеграла лежат несколько торов. Выберем один из них и рассмотрим проекцию его на бильярдный стол. Проекция такого уровня интеграла будет весь бильярдный стол.

Отметим что таким образом мы посчитаем метку лишь для одного ребра, однако метки на остальных центральных ребрах считается аналогичным образом и будут совпадать с подсчитанными ниже.

Циклы λ и μ на торах седлового атома, соответствующего значению интеграла $\lambda = -b$ будем писать с индексом $-$, а циклы λ и μ на торах седлового атома, соответствующего значению интеграла $\lambda = a$ будем писать с индексом $+$.

Выберем на торах обоих седловых атомов обобщенные циклы λ и μ вышеописанным способом.

Отметим, что на торе, соответствующем $\lambda = -b$, ориентация цикла μ_- должна удовлетворять условию существования глобального сечения, поэтому она будет несогласована с ориентацией критической окружности. Ориентацию λ_+ и λ_- на торах обоих седловых атомов выберем согласованной с их критическими окружностями.

Таким образом, имеем следующее соотношение: $\lambda_+ = -\mu_-$, $\mu_+ = \mp\lambda_-$.

Тогда из условия на определитель матрицы склейки выбираем ориентацию цикла μ_+ несогласованной, и матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Метки на всех центральных ребрах будут иметь вид $r = 0, \varepsilon = -1$. Каждое такое ребро дает нулевой вклад в метку n , если оно является входящим или выходящим ребром для семьи.

Циклы на ребрах, соответствующих значениям $\lambda \in (+\lambda_1, a)$ (то есть на правых ребрах молекул) выбираются так же, как и на левых ребрах, соответствующих значениям интеграла $\lambda \in (-b, -\lambda_2)$. Таким образом, метки на всех центральных ребрах будут $r = 0, \varepsilon = 1$, и каждое из них даст нулевой вклад в метку n .

Таким образом каждая молекула имеем две семьи, и обе метки $n = 0$

- Теперь рассмотрим топологические бильярды без конических точек, допускающие лишь выпуклые склейки, содержащие простые бильярды $h2$ и не содержащие простых бильярдов e . Все такие бильярды перечислены далее: $\Delta_\alpha(kh2 + \alpha q + \beta q)$, $\Delta_\alpha(2 \times kh2 + 2\alpha q + 2\beta q)$, $\Delta_\gamma(2 \times kh2)_1$, $\Delta_\gamma(2 \times 2kh2)_1$.

Рассмотрим ребра, соответствующие значениям интеграла $\lambda \in (-b, -\lambda_2)$. Зафиксируем некоторое значение интеграла λ из этого промежутка и обозначим его за $-\Lambda$. Поверхность уровня этого значения интеграла в изоэнергетической поверхности есть несколько торов, соответствующих различным ребрам. Выберем один из этих торов и рассмотрим проекцию поверхности уровня этого интеграла на бильярдный стол - эта проекция есть объединение частей простых бильярдов $h2$ и, возможно, бильярдов q или их частей. Обозначим каждую из частей как Ψ_i . Далее опишем подсчет метки для того ребра, что соответствует выбранному тору. Очевидно, что для остальных ребер подсчет меток происходит аналогичным образом.

Ориентируем ребро к седловому атому. Циклы на торе атома A будем обозначать λ_- и μ_- а циклы на торе седлового атома будем обозначать λ_+ и μ_+

Перед выбором обобщенных циклов λ и μ на граничных торах атомов A вновь вспомним, как выбирались циклы на граничных торах атома A , который соответствовал тому же значению интеграла, в простых бильярдах $h2$ и q . В качестве λ выберем прообраз дуги эллипса с параметром $\lambda \in (\lambda_1, a)$, а в качестве μ - прообраз дуги эллипса с параметром $\lambda \in (-\Lambda, -b)$.

Далее, на каждой части Ψ_i выберем в точности вышеописанные циклы λ_i и μ_i (отметим, что их образ - дуга эллипса - должен соответствовать одинаковому значению параметра для всех λ_i и одинаковому значению параметра для всех μ_i). Конструируем из этих циклов обобщенные циклы λ_- и μ_- так же, как и в предыдущем шаге. Ориентацию μ_- согласуем с ориентацией критической окружности атома A , ориентацию λ_- выберем позднее.

Теперь опишем выбор циклов на граничных торах седлового атома. Вспомним, как в простых бильярдах $h2$ и q осуществлялся выбор циклов на граничных торах седлового атома, соответствующего такому же значению интеграла.

В качестве λ выбираем прообраз дуги эллипса с параметром $\lambda \in (-\Lambda, -\lambda_2)$, а в качестве μ выбираем прообраз дуги эллипса с параметром $\lambda \in (\lambda_1, a)$.

Далее на каждом Ψ_i выбираем λ_i и μ_i , в точности те, что описаны параграфом выше. Отметим, что образы всех λ_i должны лежать на эллипсе с одним и тем же параметром, а также образы всех μ_i тоже лежат на эллипсе с одним и тем же параметром.

Конструируем из них обобщенные циклы λ_+ и μ_+ .

Ориентируем λ_+ так же, как ориентирована критическая окружность в седловом атоме, а ориентацию μ_+ выберем согласованной с ориентацией особой окружности.

Итак, $\lambda_+ = \mu_-$, $\mu_+ = \pm\lambda_-$.

Теперь выпишем матрицу склейки и зафиксируем ориентацию цикла λ на граничном торе атома A так, чтобы определитель матрицы склейки был равен -1 .

Матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Тогда метки $r = 0$, $\varepsilon = 1$.

Итак, как нетрудно видеть из вышеописанного алгоритма, вновь выбирая на всех ребрах молекулы обобщенные циклы, метки для каждого ребра будут такими же, как и метки для ребер молекулы для простого билиярда $h2$. Конечно, в молекулах разное количество ребер, однако в данном случае все ребра, которые соответствуют одним и тем же значениям интеграла, имеют одни и те же метки.

Теперь рассмотрим ребра, соответствующие значениям интеграла $\lambda \in (-\infty, -b) \cup (+\lambda_1, \infty) \cup \{\pm\infty\}$. Вновь зафиксируем значение интеграла, лежащее в указанном промежутке, и обозначим его Λ . Поверхность уровня этого значения интеграла в изоэнергетической поверхности есть несколько торов, соответствующих различным ребрам. Выберем один из этих торов и рассмотрим проекцию поверхности уровня этого интеграла на билиардный стол - эта проекция есть объединение частей простых билиардов $h2$ и, возможно, билиардов q или их частей. Обозначим каждую из частей как Ψ_i . Далее опишем подсчет метки для того ребра, что соответствует выбранному тору. Очевидно, что для остальных ребер подсчет меток происходит аналогичным образом.

Ориентируем ребро к седловому атому.

Циклы на торе атома A будем обозначать λ_- и μ_- а циклы на торе седлового атома будем обозначать λ_+ и μ_+

Выберем циклы λ и μ на граничном торе седлового атома так же, как и на предыдущем ребре. Однако теперь ориентацию λ_+ согласуем с ориентацией критической окружности, а ориентацию μ_+ выберем не согласованной с ориентацией критической окружности (в самом деле, ориентации циклов μ по разные стороны от седлового атома должны быть связаны условием существования глобального сечения).

Вспомним, как выбирались циклы на граничных торах атомов A для таких значений интеграла для простых билиардов $h2$ и q : в качестве λ выбирали прообраз дуги эллипс параметром $\lambda \in (-\Lambda, -\lambda_2)$, а в качестве μ выбираем прообраз дуги эллипса с параметром $\lambda \in (\lambda_1, a)$.

Далее вновь на каждом Ψ_i выбираем в качестве λ_i и μ_i дуги квадрик так, как описано выше, причем образы всех λ_i должны лежать на эллипсе с одним и тем же параметром, а также образы всех μ_i лежат на эллипсе с одним и тем же параметром. Сконструируем из частей λ_i и μ_i обобщенные циклы λ_- и μ_- .

Ориентацию μ_- выберем несогласованной. Таким образом $\lambda_+ = \pm\lambda_-$, $\mu_+ = \mu_-$.

Выпишем матрицу склейки и зафиксируем ориентацию цикла λ_- так, чтобы определитель матрицы склейки был равен -1 .

Матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда метки $r = \infty$, $\varepsilon = -1$.

Семей, очевидно, в таких молекулах нет.

3. Рассмотрим, наконец, топологические билиарды без конических точек, допускающие лишь выпуклые склейки, содержащие только простые билиарды q . Таких лишь три.

Ребро в их молекулах всего одно, ориентируем его к атому A , соответствующему значению $\lambda = +\lambda_1$. Это ребро соответствует значениям интеграла $\lambda \in (-\infty, -\lambda_2) \cup (+\lambda_1, \infty) \cup \{\pm\infty\}$. Зафиксируем некоторое значение интеграла λ из этого промежутка и обозначим его за Λ . Поверхность уровня этого значения интеграла в изоэнергетической поверхности есть один тор. Рассмотрим проекцию этого тора на бильярдный стол - проекция включает в себя весь бильярдный стол либо его часть (отметим, что эта часть - связная), и состоит из двух простых бильярдов q (либо их частей) - обозначим эти части Ψ_1 .

Циклы на торе атома A , соответствующем значению интеграла $\lambda = -\lambda_2$ (левый атом) будем обозначать λ_- и μ_- , а циклы на торе атома A , соответствующем значению интеграла $\lambda = \lambda_1$ (правый атом) будем обозначать λ_+ и μ_+

Вспомним, как выбирались циклы на граничных торах левых атомов A для таких значений интеграла для простых бильярдов q : в качестве λ выбирали прообраз дуги эллипс параметром $\lambda \in (-\Lambda, -\lambda_2)$, а в качестве μ выбираем прообраз дуги эллипса с параметром $\lambda \in (\lambda_1, a)$.

Далее на обоих Ψ_i выбираем в качестве λ_i и μ_i дуги квадрик так, как описано выше, причем образы всех λ_i должны лежать на эллипсе с одним и тем же параметром, а также образы всех μ_i лежат на эллипсе с одним и тем же параметром. Сконструируем из частей λ_i и μ_i обобщенные циклы λ_- и μ_- .

Циклы на граничных торах правых атомов A для таких значений интеграла в простых бильярдах q выбирались несколько иначе: в качестве λ выбирали прообраз дуги квадрики $\lambda \in (\lambda_1, a)$, в качестве μ выбираем прообраз дуги квадрики с параметром $\lambda \in (-\Lambda, -\lambda_2)$.

Аналогично - на обоих Ψ_i выбираем в качестве λ_i и μ_i дуги квадрик так, как описано выше, причем образы всех λ_i должны лежать на эллипсе с одним и тем же параметром, а также образы всех μ_i лежат на эллипсе с одним и тем же параметром. Сконструируем из частей λ_i и μ_i обобщенные циклы λ_+ и μ_+ .

Выберем ориентации μ_- и μ_+ согласованными с ориентацией критических окружностей их атомов, а ориентации λ_- и λ_+ также выберем согласованными. Таким образом $\lambda_+ = \mu_-$, $\mu_+ = \lambda_-$, и матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Метки на ребре $r = 0, \varepsilon = -1$.

Шаг 2. Подсчет меток для случаев, когда топологический бильярд содержит конические точки, а его молекула не содержит атомов со звездочками.

1. Рассмотрим топологические бильярды с коническими точками, содержащие простой бильярд e , причем выделим среди них те, грубые молекулы которых не содержат атомов со звездочками.

Рассмотрим значения интеграла $\lambda \in (-b, -\lambda_2)$. Им соответствуют левые ребра молекул, посчитаем метки для этих ребер. Зафиксируем некое значение интеграла $\lambda = \Lambda$, лежащее в указанном выше промежутке. Поверхностью уровня этого значения интеграла являются несколько торов в изоэнергетическом многообразии Q^3 . Рассмотрим естественные проекции торов на бильярдный стол, которые разделим на три вида: не содержащие конических точек, содержащие одну коническую точку и содержащие две конические точки.

Для проекций, не содержащих конических точек, на обоих граничных торах циклы λ и μ выбираются обобщенными (так же, как и для аналогичных проекций в предыдущего пункта доказательства теоремы). Отметим, что ориентация на циклах μ на граничных торах седлового атома является согласованной. Таким образом, на ребрах, которые в графе соответствуют торах, чьи проекции на бильярдный стол не содержат конических точек, метки $r = 0, \varepsilon = 1$, и такие ребра дают нулевой вклад в метку n

Рассмотрим проекции, содержащие одну коническую точку. Цикл λ_- и λ_+ выбираются аналогично предыдущему пункту - а именно, λ_- конструируется как обобщенный цикл из λ_i , являющихся дугами эллипсов с параметром $\lambda \in (\lambda_1, a)$, а λ_+ конструируется из λ_i , являющихся дугами эллипсов с параметром $\lambda \in (\Lambda, -\lambda_2)$, и ориентация на нем выбирается согласованной с ориентацией критической окружности седлового атома.

На рис.31, а. показано, как выбираются циклы μ для проекций, содержащих коническую точку. Ориентацию μ_- выберем согласованной критической окружностью атома A . Ориентация μ_+ выбирается согласованной с критической окружностью седлового атома. Тогда $\mu_- = \mu_+ = \frac{\lambda_+ + \lambda_-}{2}$.

Таким образом, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Определитель матрицы равен -1. Метки на ребре $r = \frac{1}{2}, \varepsilon = 1$. Если ребро с такой матрицей склейки является входящим в семью, то оно дает вклад в метку n равный -1 (как в данном случае), а если ребро с такой матрицей склейки является выходящим из семьи, то его вклад в метку n также равен -1 .

Рассмотрим проекции, содержащие две конические точки. Циклы λ_- и λ_+ выбираются аналогично предыдущему пункту. Циклы μ_- и μ_+ представлены на рис.31, b. Ориентация μ_- согласована с ориентацией критической окружности атома A , и ориентация μ_+ также должна быть согласована с ориентацией критической окружности атома - уже седлового. Далее, поскольку $\mu_+ = \lambda_-$, $\lambda_+ = \mu_-$, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Определитель матрицы равен -1. Таким образом метки имеют вид $r = 0, \varepsilon = 1$. Если ребро с такой матрицей склейки является входящим в семью или выходящим из нее, то оно дает вклад в метку n равный 0.

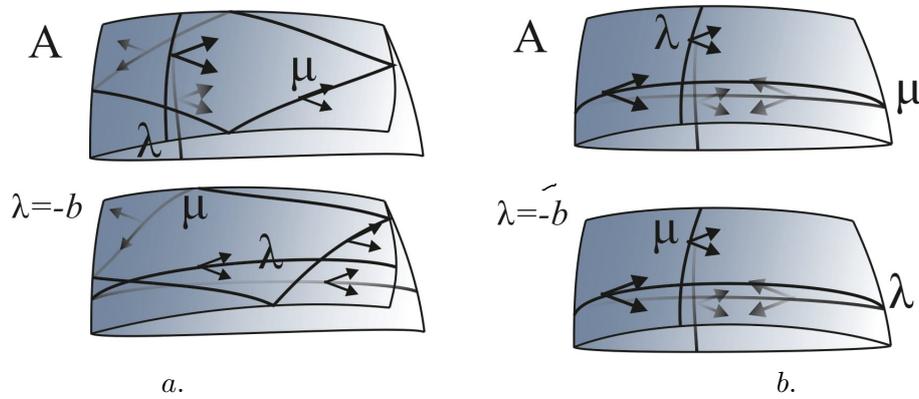


Рис. 31: Циклы μ и λ для граничных торов правых ребер в молекулах. Показан частный случай, когда листа всего 2 (то есть $k = n = 1$).

Теперь рассмотрим значения интеграла $\lambda \in (-\infty, -b) \cup (a, \infty) \cup \{\pm\infty\}$. Таким значениям соответствует средние ребра молекул рассматриваемых бильярдов. Зафиксируем некоторое значение интеграла λ , лежащее в этом промежутке, и обозначим его Λ . Рассмотрим естественную проекцию поверхности уровня интеграла Λ в изоэнергетическом многообразии на бильярдный стол. Отметим, что теперь проекция включает в себя весь топологический бильярд, и может содержать либо одну, либо две конических точки.

Рассмотрим случай одной конической точки. Базисные циклы выбираются так же, как в случае проекции с одной конической точкой в предыдущем пункте. Циклы λ_+ и λ_- являются обобщенными циклами, конструируемыми из дуг эллипсов с параметрами $\lambda \in (\lambda_1, a)$ и $\lambda \in (-b, -\lambda_2)$ соответственно, а их ориентации согласованы с ориентациями критических окружностей седловых атомов. Циклы μ_- и μ_+ представлены на рис.32, а. Далее, поскольку ориентации μ граничных торов седлового атома связаны условием существования глобального сечения, то ориентация μ_- несогласована. Ориентация μ_+ также выбирается несогласованной.

Таким образом $\mu_+ = \mu_- = -\frac{\lambda_- + \lambda_+}{2}$. Тогда $\lambda_+ = -\lambda_- - \mu_-$, $\mu_+ = \mu_-$. Матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Метки на ребре $r = \frac{1}{2}, \varepsilon = -1$. Ребра с такой матрицей склейки дают нулевой вклад в метку n в случае, когда они являются входящими или выходящими из семьи.

Рассмотрим случай двух конических точек. Базисные циклы λ_- и λ_+ и их ориентации выбираются так как, как и в предыдущем случае. Циклы μ_- и μ_+ представлены на рис.32, b. Аналогично, ориентация μ_- несогласована, тогда ориентация μ_+ также несогласована, $\mu_+ = -(\lambda_+ + \lambda_-)$. Поскольку $\lambda_+ = -\mu_-$, тогда можем выразить $\mu_+ = -\lambda_+ \mu_-$ и записать матрицу склейки. Матрица

склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Метки на ребре $r = 0, \varepsilon = -1$. Если ребро является входящим, тогда оно дает вклад в метку n равный 1, если же такое ребро выходит из семьи, то вклад в метку n нулевой.

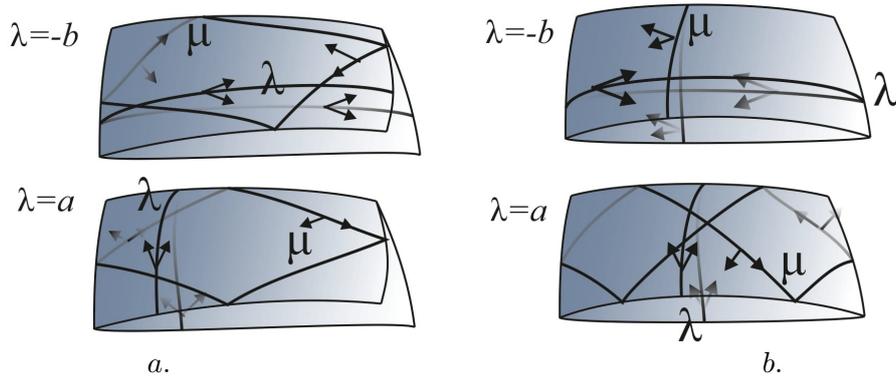


Рис. 32: Циклы μ и λ для граничных торов средних ребер в молекулах. Показан частный случай, когда листа всего 2 (то есть $k = n = 1$).

Метки на ребрах, соответствующих значениям интеграла $\lambda \in (\lambda_1, a)$ подсчитываются аналогично случаю $\lambda \in (-b, -\lambda_2)$, а именно: Если проекция поверхности уровня фиксированного значения интеграла λ , лежащего в указанном промежутке, не содержит конических точек, то матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а метки на ребре $r = 0, \varepsilon = 1$, вклад в метку n нулевой, если ребро входящее или выходящее.

Если проекция содержит одну коническую точку, то матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, следовательно, метки на ребре $r = \frac{1}{2}, \varepsilon = 1$, вклад в метку n равен -1 , если ребро входящее или выходящее

Если проекция содержит две конических точки, то матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а метки на ребре $r = 0, \varepsilon = 1$, вклад в метку n также нулевой.

2. Рассмотрим топологические билиарды с коническими точками, не содержащие e , но содержащие $h2$ и допускающие лишь выпуклые склейки.

Таких билиардов всего два: $\Delta_\beta((2 \times kh2)_x + 2\alpha q)$ и $\Delta_\beta((2 \times kh2)_{x,x})$.

Начнем с подсчета меток для ребер, отвечающих значениям интеграла $\lambda \in (-b, -\lambda_2)$. Зафиксируем некоторое значение интеграла, лежащее в этом промежутке, и обозначим его как $\lambda = \Lambda$. Далее рассмотрим проекцию поверхности уровня этого значения интеграла в изоэнергетической поверхности на плоскость билиарда. Проекция распадается на несколько компонент связности, каждая из которых может либо содержать одну коническую точку, либо не содержать их вовсе.

Сначала рассмотрим те проекции, что не содержат конических точек.

Выбор циклов на граничных торах атомов A и седловых атомов такой же, как и в пункте 2 доказательства для областей без конических точек, а именно циклы λ и μ конструируются из циклов λ_i и μ_i , которые мы выбираем на простых билиардах, входящих в состав топологического.

Тогда, как и в предыдущем пункте, метки на таких ребрах будут $r = 0, \varepsilon = 1$.

Далее, рассмотрим проекцию, содержащую коническую точку. Очевидно, что таких проекций будет одна для билиарда $\Delta_\beta((2 \times kh2)_x + 2\alpha q)$ и две для билиарда $\Delta_\beta((2 \times kh2)_{x,x})$.

Выбор циклов на таких билиардах показан на рис.33, а. Цикл μ_A совпадает с выбранным μ_B (с точностью до знака). Ориентация на μ_A задается критической окружностью атома A (а именно,

совпадает с ней), и $\mu_A = \frac{\lambda_A + \lambda_B}{2} = \pm\mu_B$. Ориентацию μ_B выберем согласованной (то есть $\mu_A = \mu_B$).

Тогда матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а метки на ребре $r = \frac{1}{2}, \varepsilon = 1$.

Теперь рассмотрим значения интеграла $\lambda \in (-\infty, -b) \cup (\lambda_1, \infty) \cup \{\pm\infty\}$. Этим значениям соответствует правые ребра в молекулах для топологических билиардов $\Delta_\beta((2 \times kh2)_x + 2\alpha q)$ и $\Delta_\beta((2 \times kh2)_{x,x})$. Зафиксируем значение интеграла λ , лежащее в указанном промежутке, и обозначим его как Λ . Рассмотрим проекцию поверхности уровня интеграла $\lambda = \Lambda$ на билиардный стол. Имеем два случая - проекция может содержать либо одну, либо две конических точки.

Рассмотрим случай одной конической точки.

Выбор циклов показан на рисунке.33, b. Циклы μ_+ (на граничном торе седлового атома) и μ_- (на граничном торе атома A) выбирается так же, как и для проекций, содержащих одну коническую точку. Ориентация μ_- согласована с ориентацией критической окружности атома A , а ориентация μ_+ уже задана ориентацией μ на предыдущем ребре - несогласована.

Циклы λ_+ и λ_- выбираются как дуги эллипса с параметром $\lambda \in (-b, -\lambda_2)$, ориентация на λ_+ согласована с ориентацией критической окружности седлового атома. Тогда матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (отметим что ориентация цикла λ_- выбирается так чтобы определитель матрицы был -1). Тогда метки на ребре $r = \infty, \varepsilon = 1$.

Рассмотрим случай двух конических точек.

Выбор циклов λ_+ и λ_- аналогичен описанному выше, а циклы μ_+ и μ_- показаны на рис.33, с. Ориентация μ_- такая же как и ориентация критической окружности атома A , а ориентация цикла μ_+ выбирается несогласованной по тем же соображениям, что описаны выше.

Тогда матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, и метки на ребре $r = \infty, \varepsilon = 1$.

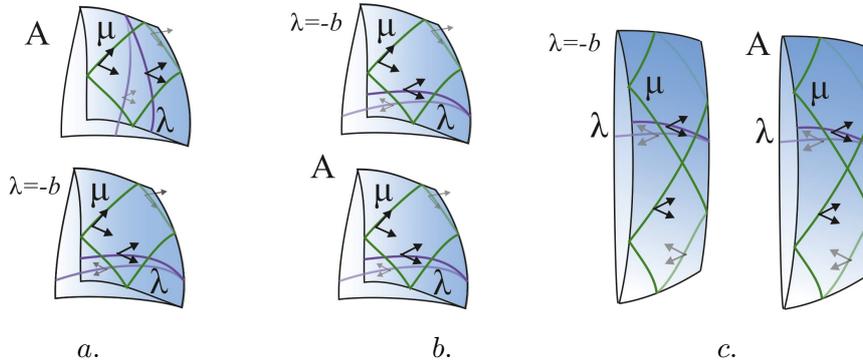


Рис. 33: Циклы μ и λ для граничных торов, соответствующих левым ребрам молекулы (a.) и правым ребрам молекулы (b, c.) Показан частный случай, когда листа всего 2 (то есть $k = 1$).

3. Рассмотрим четыре топологических билиарда, которые образованы склейками простых билиардов q . Молекулы для них имеют всего одно ребро, соединяющее два атома A , которые лежат на уровнях интеграла $\lambda = \lambda_1, -\lambda_2$. Подсчет меток происходит аналогично вышеописанным шагам - рассматривается проекция поверхности уровня некоторого фиксированного значения интеграла λ на билиардный стол и в зависимости от вида проекции выбираются обобщенные циклы λ и μ для граничных торов атомов A .

Итак, если проекция не содержит конических точек, то матрица склейки на ребре имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, и метки на ребре $r = 0, \varepsilon = 1$.

Если проекция содержит коническую точку, то матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, и метки на ребре $r = \frac{1}{2}, \varepsilon = 1$.

Шаг 3. Подсчет меток для случаев, когда топологический бильярд содержит конические точки, и его молекула содержит атомы со звездочками.

Итак, в завершение подсчитаем метки для топологических бильярдов, допускающих прямые склейки, имеют конические точки и их молекула содержит атомы со звездочками

1. Рассмотрим бильярды, допускающие прямые склейки и содержащие e , и выберем из них те, что включают атомы со звездочками. Отметим, что такие атомы появляются лишь при наличии одной или двух конических точек.

Без ограничения общности считаем, что атом со звездочкой лежит на уровне интеграла $\lambda = a$.

Тогда выбор циклов на ребрах, соответствующих значениям интеграла $\lambda \in (-b, -\lambda_2)$ (правых ребрах молекулы) выбираются так же, как описано в шаге 2.

Рассмотрим ребра, соответствующие значениям интеграла $\lambda \in (-\infty, -b) \cup (+\lambda_1, \infty) \cup \{\pm\infty\}$ (средние ребра молекулы). Выберем значение интеграла λ , лежащее в указанном промежутке, и обозначим его Λ . На уровне интеграла $\lambda = \Lambda$ в изоэнергетической поверхности лежит тор. Рассмотрим его проекцию на бильярдный стол - это будет в точности весь бильярдный стол. Таким образом, проекция может либо содержать одну коническую точку, либо две конических точки.

Ориентируем ребро молекулы к атому, лежащему на уровне интеграла $\lambda = a$. Циклы на торе седлового атома, соответствующего значению $\lambda = -b$, будем обозначать λ_- и μ_- а циклы на торе седлового атома, соответствующего значению $\lambda = a$, будем обозначать λ_+ и μ_+

Если проекция содержит одну коническую точку, то выбор циклов на торе седлового атома, лежащего на уровне интеграла $\lambda = -b$ происходит так же, как в шаге 2, а именно - в качестве λ_- выберем обобщенный цикл, конструируемый из дуг эллипсов с параметром $\lambda \in (-b, -\lambda_2)$ и ориентацию на нем выберем согласованной, а цикл μ_- имеет несогласованную ориентацию и показан на рис. 34, а.

На торе атома, соответствующему значению $\lambda = a$, цикл λ_+ также выберем как обобщенный цикл, конструируемый из дуг эллипсов с параметром $\lambda \in (\lambda_1, a)$ и ориентацию на нем выберем согласованной. Чтобы выбрать цикл μ_+ необходимо для начала выбрать цикл $\hat{\mu}$ - он показан на рис. 34, b.

Поскольку $\hat{\mu}$ пересекает λ_+ в двух точках, выделенных красным на рисунке, значит к циклу $\hat{\mu}$ необходимо добавить цикл λ_+ нужное количество раз и полученный цикл и выбрать в качестве цикла μ_+ . Итак, в данном случае $\mu_+ = \pm \frac{\lambda_+ + \hat{\mu}}{2} = \pm \frac{\lambda_+ + \lambda_-}{2}$. Таким образом, ориентацию μ_+ выберем несогласованной, получим что $\mu_- = \mu_+ = -\frac{\lambda_+ + \lambda_-}{2}$. Матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, и метки на ребре $r = \frac{1}{2}, \varepsilon = 1$. Такое ребро, будь оно входящим или выходящим, дает нулевой вклад в метку n .

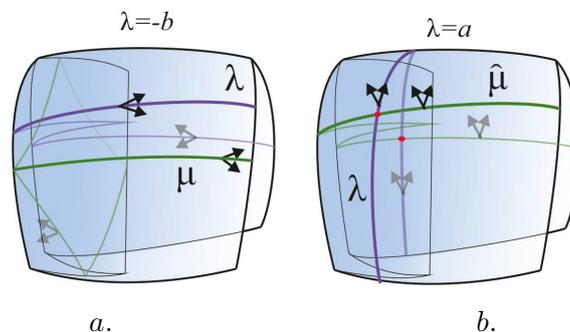


Рис. 34: Циклы μ и λ для граничных торов седлового атома со звездочками для средних ребер в молекулах в случае одной конической точки. Показан частный случай, когда листов 4.

Если проекция содержит две конических точки, то выбор циклов на торе седлового атома, лежащего на уровне интеграла $\lambda = -b$ происходит так же, как в шаге 2, а именно - в качестве λ_-

выберем обобщенный цикл, конструируемый из дуг эллипсов с параметром $\lambda \in (-b, -\lambda_2)$ и ориентацию на нем выберем согласованной, а цикл μ_- имеет несогласованную ориентацию и показан на рис. 35,а.

На торе атома, соответствующему значению $\lambda = a$, цикл λ_+ также выберем как обобщенный цикл, конструируемый из дуг эллипсов с параметром $\lambda \in (\lambda_1, a)$ и ориентацию на нем выберем согласованной. Выберем цикл $\hat{\mu}$ так, как показано на рис. 35, b.

Отметим, что и в данном случае $\hat{\mu}$ пересекает λ_+ в двух точках, выделенных красным на рисунке. Добавить к циклу $\hat{\mu}$ цикл λ_+ нужное количество раз: в данном случае $\mu_+ = \pm(\lambda_+ + \hat{\mu}) = \pm(\lambda_+ + \lambda_-)$. Вновь ориентацию μ_+ выбираем несогласованной, получим что $\mu_+ = -(\lambda_+ + \lambda_-)$, и при этом $\mu_- = -\lambda_+$. Матрицы склейки имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, и метки на ребре $r = 0, \varepsilon = 1$. Такое ребро, будь оно входящим, даст вклад в метку n равный -1 , а если оно выходящее, то вклад в метку n равен 1.

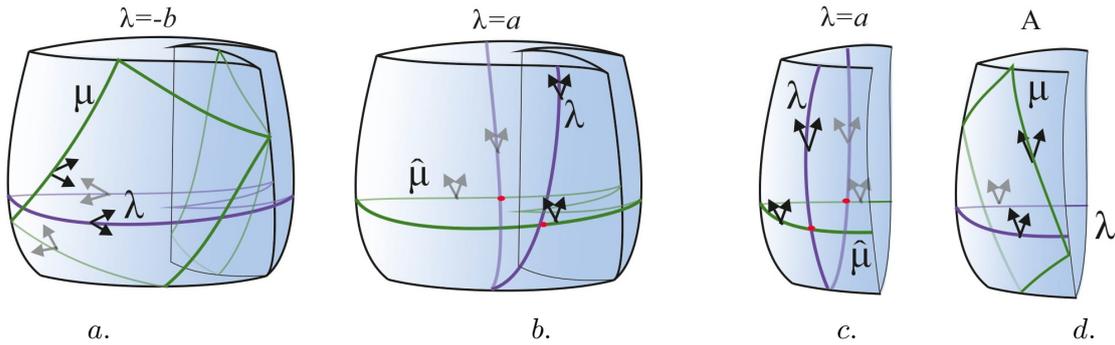


Рис. 35: а, б. Циклы μ и λ для граничных торов седловых атомов для средних ребер в молекулах в случае двух конических точек. Показан частный случай, когда листов 4. с, d. Циклы μ и λ для граничных торов на правых ребрах в молекулах в случае одной конической точки. Показан частный случай, когда листов 4.

Теперь рассмотрим ребра, соответствующие значениям интеграла $\lambda \in (\lambda_1, a)$. Выберем некоторое значение интеграла в указанном промежутке и обозначим его Λ . В изоэнергетической поверхности на уровне этого интеграла лежат торы, выберем один из них и рассмотрим его проекцию на бильярдный стол. Эта проекция - часть бильярдного стола, ограниченная дугой эллипса с параметром $\lambda = \Lambda$, и состоит из склеенных простых бильярдов, каждый из которых мы обозначим за Ψ_i . Проекция может содержать одну коническую точку либо не содержать их вообще. Отсутствие случая двух конических точек проекции следует из теоремы классификации областей с прямыми склейками.

Ориентируем ребро к седловому атому. Будем обозначать циклы на атоме A как λ_- и μ_- , а циклы на седловом атоме как λ_+ и μ_+ .

Рассмотрим случай, когда проекция не содержит конических точек. На торе атома A циклы выбираются так же, как и в шаге 1 доказательства, а именно λ_- конструируется как обобщенный цикл из λ_i на каждом простом бильярде Ψ_i , которые являются дугами эллипса с одинаковым параметром $\lambda \in (-b, -\lambda_2)$ (причем для всех областей параметр дуги должен быть одинаков, и должен лежать в указанном интервале), а цикл μ_- конструируется из циклов μ_i - дуг эллипса с параметром $\lambda \in (-\Lambda, a)$.

Циклы на торе седлового атома выбираются следующим образом: в качестве λ_+ выберем обобщенный цикл, состоящий из дуг эллипса, выбранных на областях Ψ_i , с одинаковым параметром, лежащим в промежутке $\lambda \in (-\Lambda, a)$, а $\hat{\mu}$ - обобщенный цикл, состоящий из дуг эллипса с одинаковым параметром $\lambda \in (-b, -\lambda_2)$. Поскольку λ_+ и $\hat{\mu}$ пересекаются в одной точке, то $\mu_+ = \hat{\mu}$.

Ориентацию на всех циклах выберем согласованной (на μ_+ она задается условием существования глобального сечения), тогда $\lambda_+ = \mu_-$, $\lambda_- = \mu_+$ и матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а метки на

ребре $r = 0, \varepsilon = 1$. Такое ребро, будь оно входящим или выходящим, дает нулевой вклад в метку n .

Теперь рассмотрим случай одной конической точки.

Циклы на торе атома A выбираются так же, как и в шаге 2 доказательства теоремы, а именно λ_- конструируется как обобщенный цикл из λ_i на каждом простом бильярде Ψ_i , которые являются дугами эллипса с одинаковым параметром $\lambda \in (-b, -\lambda_2)$ (причем для всех областей параметр дуги должен быть одинаков, и должен лежать в указанном интервале), а $\mu_- = \pm \frac{\lambda_+ + \lambda_-}{2}$. Выбор циклов показан на рис. 35, с.

Циклы на торе седлового атома выбираются следующим образом: в качестве λ_+ выберем обобщенный цикл, состоящий из дуг эллипса, выбранных на областях Ψ_i , с одинаковым параметром, лежащим в промежутке $\lambda \in (-\Lambda, a)$, а $\hat{\mu}$ - обобщенный цикл, состоящий из дуг эллипса с одинаковым параметром $\lambda \in (-b, -\lambda_2)$. Выбор циклов показан на рис. 35, d. Поскольку λ_+ и $\hat{\mu}$ пересекаются в двух точках, то $\mu_+ = \pm \frac{\hat{\mu} + \lambda_+}{2} = \pm \frac{\lambda_- + \lambda_+}{2}$. Отметим, что ориентация на μ_+ задается условием существования глобального сечения, поэтому является согласованной. Таким образом, $\mu_- = \mu_+ = \frac{\lambda_- + \lambda_+}{2}$. Матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а метки на ребре $r = \frac{1}{2}, \varepsilon = 1$. Такое ребро, будь оно входящим или выходящим, дает вклад в метку n равный -1 .

Выбор циклов в случае, когда атом со звездочкой лежит на уровне $\lambda = -b$ осуществляется аналогичным образом.

Шаг 4. Подсчет меток для случаев, когда топологический бильярд содержит четыре конические точки.

Итак, рассмотрим бильярды, имеющие четыре конические точки. Множество таких бильярдов делится две группы, как следует из теорем классификации 3.1, 3.2.

1. Первая из таких групп - группа бильярдов, полученная склейкой двух обобщенных эллипсов, а именно, $\Delta_\beta(k \times ne)^2$, $\Delta_\beta(k \times ne + nh2')^2$, $\Delta_\beta(k \times ne + nh2' + kh1' + q)^2$, $\Delta_\beta(k \times ne + nh2' + 2nh2')^2$, $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2' + kh1' + 2q)^2$, $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2' + 2kh1' + 4q)^2$.

Рассмотрим значения интеграла $\lambda \in (-b, -\lambda_2)$. Им соответствуют левые ребра молекул. Зафиксируем некое значение интеграла $\lambda = \Lambda$, лежащее в указанном выше промежутке. Поверхностью уровня этого значения интеграла являются несколько торов в изоэнергетическом многообразии Q^3 . Рассмотрим естественную проекцию одного из этих торов на бильярдный стол. Эта проекция либо не содержит конических точек, либо содержит ровно две конические точки.

Таким образом, в случае двух конических точек выбор циклов λ и μ для граничных торах, лежащих на уровне интеграла $\lambda \in (-b, -\lambda_2)$, рассмотрен в пункте 1 шага 2, а в случае отсутствия конических точек - рассмотрен в пункте 1 шага 1. В обоих случаях матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Метки на ребрах, соответствующих таким значениям интеграла, имеют вид $r = 0, \varepsilon = 1$. Если ребро с такой матрицей склейки является входящим в семью или выходящим из нее, то оно дает вклад в метку n равный 0.

Очевидно, что аналогично считаются метки для значений интеграла $\lambda \in (\lambda_1, a)$, так как проекция любого тора, лежащего на таких уровнях интеграла, также либо не содержит конических точек, либо содержит две конические точки. Таким образом, метки на всех правых ребрах молекулы также будут $r = 0, \varepsilon = 1$, и такие ребра дают нулевой вклад в метку n , если они являются входящим в семью или выходящим из нее.

Рассмотрим значения интеграла $\lambda \in (-\infty, -b) \cup (a, \infty) \cup \{\pm\infty\}$ - им соответствуют два средних ребра в молекуле. Зафиксируем некое значение интеграла $\lambda = \Lambda$, лежащее в указанном выше промежутке. Поверхностью уровня этого значения интеграла являются два тора в изоэнергетическом многообразии Q^3 . Рассмотрим естественную проекцию одного из этих торов на бильярдный стол. Эта проекция будет в точности весь бильярдный стол, то есть будет содержать четыре конические точки. Обозначим простые бильярды, входящие в состав топологического бильярда, как Ψ_i .

Ориентируем оба ребра к атому, лежащему на уровне интеграла $\lambda = a$. Циклы λ и μ на торах седлового атома, соответствующего значению интеграла $\lambda = -b$ будем писать с индексом $-$, а циклы λ и μ на торах седлового атома, соответствующего значению интеграла $\lambda = a$ будем писать с индексом $+$.

В данном случае выбор циклов на граничных торах седловых атомов осуществляется также, как и в пункте 1 шага 1, а именно: на граничном торе седлового атома, лежащего на уровне интеграла $\lambda = -b$ конструируем обобщенный цикл λ_- из дуг λ_i , прообразов дуг эллипса с параметром $\lambda \in (-\Lambda, -\lambda_2)$, выбранных на простых областях Ψ_i (причем для всех областей параметр дуги должен быть одинаков, и должен лежать в указанном интервале), а цикл μ_- конструируется как обобщенный цикл из μ_i - прообразов дуги эллипса с параметром $\lambda \in (\lambda_1, a)$, выбранных на каждом простом биллиарде Ψ_i (аналогично, параметр дуги для всех областей должен быть одинаков и лежать в указанном интервале). На граничном торе седлового атома, лежащего на уровне интеграла $\lambda = a$, цикл λ_+ конструируем как обобщенный цикл из λ_i , дуг эллипса с параметром $\lambda \in (\lambda_1, a)$, а цикл μ_+ - как обобщенный цикл из μ_i , дуг эллипса с параметром $\lambda \in (-b, -\lambda_2)$.

Тогда, как это было отмечено в пункте 1 шага 1, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Метки на ребрах имеют вид $r = 0, \varepsilon = 1$, и такие ребра дают нулевой вклад в метку n , если они являются входящими в семью или выходящими из семьи.

2. Вторая группа биллиардов с четырьмя коническими точками образована склейкой четырех обобщенных эллипсов, а именно $\Delta_\beta(k \times ne)^4$, $\Delta_\beta(k \times ne + nh2')^4$, $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2')^4$, $\Delta_\beta(k \times ne + nh2' + kh1' + q')^4$, $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2' + kh1' + 2q')^4$ и $\Delta_\beta(k \times ne + 2nh2' + 2kh1' + 4q')^4$.

Рассмотрим значения интеграла $\lambda \in (-b, -\lambda_2)$. Им соответствуют левые ребра молекул. Зафиксируем некоторое значение интеграла $\lambda = \Lambda$, лежащее в указанном выше промежутке. Поверхностью уровня этого значения интеграла являются несколько торов в изоэнергетическом многообразии Q^3 . Рассмотрим естественную проекцию одного из этих торов на биллиардный стол. Эта проекция либо не содержит конических точек, либо содержит две конические точки. Для таких проекций циклы граничных торов атомов выбираются также, как и в пункте 1 шага 1 (в случае отсутствия конических точек), либо выбор таких циклов описан в пункте 1 шага 2 и показан на рис. 31, б. (в случае, когда проекция содержит две конические точки). В обоих случаях матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, метки на ребрах $r = 0, \varepsilon = 1$, и такие ребра дают нулевой вклад в метку n , если они являются входящими в семью или выходящими из семьи.

Отметим, что метки на ребрах, соответствующих значениям интеграла $\lambda \in (\lambda_1, a)$ (правые ребра молекулы), вычисляются аналогичным образом и также равны $r = 0, \varepsilon = 1$. Такие ребра тоже дают нулевой вклад в метку n , если они являются входящими в семью или выходящими из семьи.

Рассмотрим значения интеграла $\lambda \in (-\infty, -b) \cup (a, \infty) \cup \{\pm\infty\}$ - им соответствуют два средних ребра в молекуле. Зафиксируем некоторое значение интеграла $\lambda = \Lambda$, лежащее в указанном выше промежутке. Поверхностью уровня этого значения интеграла являются два тора в изоэнергетическом многообразии Q^3 . Рассмотрим естественную проекцию одного из этих торов на биллиардный стол. Эта проекция будет в точности весь биллиардный стол, то есть будет содержать четыре конические точки. Обозначим простые биллиарды, входящие в состав топологического биллиарда, как Ψ_i .

Ориентируем оба ребра к атому, лежащему на уровне интеграла $\lambda = a$. Циклы λ и μ на торах седлового атома, соответствующего значению интеграла $\lambda = -b$ будем писать с индексом $-$, а циклы λ и μ на торах седлового атома, соответствующего значению интеграла $\lambda = a$ будем писать с индексом $+$.

Выбор циклов λ_- , μ_- и λ_+ , μ_+ на граничных торах седловых атомов показан на рис. 36 под буквами а. и б. соответственно. Ориентацию λ_- выберем согласованной с ориентацией критической окружности атома, а ориентация μ_- задается условием существования глобального сечения, и, поскольку ориентация циклов μ на левых ребрах молекулы уже выбрана согласованной, значит, ориентация μ_- должна быть несогласованной. Ориентацию λ_+ также выберем согласованной с

ориентацией критической окружности атома. Тогда ориентация μ_+ должна быть несогласованной. Поскольку $\mu_+ = \mu_- = -\frac{\lambda_+ + \lambda_-}{2}$, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, метки на ребрах $r = \frac{1}{2}, \varepsilon = -1$, и такие ребра дают нулевой вклад в метку n , если они являются входящими в семью или выходящими из семьи.

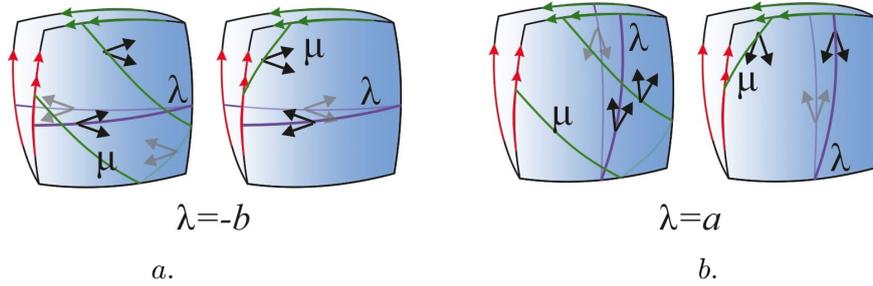


Рис. 36: Циклы μ и λ для граничных торов седловых атомов для средних ребер в молекулах в случае четырех конических точек. Показан частный случай, когда листов 4.

□

6 Итоги исследования.

6.1 Классификация слоений Лиувилля для топологических билиардов на плоскости Минковского.

В работе полностью классифицированы следующие группы топологических билиардов на плоскости Минковского: эллиптические билиарды с выпуклыми склейками, а также билиарды, допускающие прямые склейки и включающие в себя простой билиард e (то есть билиард, эквивалентный эллипсу). Для каждого класса эквивалентности подсчитана меченая молекула Фоменко-Цишанга - инвариант гамильтоновой системы, полностью определяющий тип слоения Лиувилля ее изоэнергетической поверхности.

Список топологических билиардов с выпуклыми склейками представлен в таблице в пункте 6.3. Список топологических билиардов, допускающих также прямые склейки, и включающих простой билиард, эквивалентный эллипсу, представлен в таблице в пункте 6.4.

В каждом топологическом билиарде на плоскости Минковского уровень интеграла $\lambda = \pm\infty$ делит изоэнергетическую поверхность на две связные части. На уровне интеграла $\lambda = \pm\infty$ в изоэнергетической поверхности лежат световые торы. Их может быть один, два или четыре. Часть изоэнергетической поверхности, соответствующая значениям интеграла $\lambda \in (-\infty, -\lambda_2)$ содержит вещественные торы и атомы. Этим значениям интеграла соответствует часть молекулы, лежащая по левую сторону от уровня интеграла $\lambda = \pm\infty$ и именно в этой части изоэнергетического многообразия лежит слой $\lambda = -b$. Часть изоэнергетической поверхности, соответствующая значениям интеграла $\lambda \in (\lambda_1, \infty)$ содержит мнимые торы и атомы. Таким значениям интеграла соответствует часть молекулы, лежащая справа от значения интеграла $\lambda = \pm\infty$, и в этой части лежит слой, соответствующий $\lambda = a$.

Итак, любую молекулу можем разбить на три части: световая часть, состоящая из одной, двух или четырех точек ребер, лежащих на уровне интеграла $\lambda = \pm\infty$, вещественная часть, которая находится по левую сторону от уровня интеграла $\lambda = \pm\infty$, и мнимая часть, которая лежит справа от уровня интеграла $\lambda = \pm\infty$ соответственно.

Для каждого класса эквивалентности указана схема билиарда и инвариант Фоменко-Цишанга.

Выделим в данной классификации некоторые билиарды, обладающие интересным свойством, а именно следующую группа билиардов:

- обобщенная лента $\Delta_\gamma(2k \times ne + 4kh1)_2$,
- билиард с двумя коническими точками $\Delta_\beta((2k \times ne)_{x,x} + 2kh1)$,

- бильярд с одной конической точкой $\Delta_\beta(2k \times ne + (2nh2')_y)$,
- бильярд с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2k \times ne + (2nh2')_{2y})$,
- бильярд-лента $\Delta_\gamma(2k \times ne + 2nh2')_2$
- бильярд с двумя коническими точками $\Delta_\beta((2k \times ne)_x + (2nh2')_y)$,
- бильярд с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2k \times ne + (4nh2')_{y,y})$,
- бильярд с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2k \times ne + 4nh2' + 2nh1' + (4q')_{2z})$,
- бильярд с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2k \times ne + 2nh2' + (2kh1')_y + (2q')_z)$,
- бильярд с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2k \times ne + (2nh2')_y + 2kh1' + (2q')_z)$.

Все эти бильярды несимметричны относительно одной из координатных осей.

Ранее было отмечено что два бильярда, полученные друг из друга евклидовым поворотом на $\pi/2$ мы будем считать эквивалентными. Оказывается, если для каждого бильярда Δ из списка выше рассмотреть ему эквивалентный бильярд Δ' , полученный евклидовым поворотом на $\pi/2$, изоэнергетическая поверхность Q^3 преобразуется следующим образом: те торы и атомы, что были времениподобными в Q^3 , станут пространственноподобными в изоэнергетической поверхности Q'^3 бильярда Δ' и наоборот. Итак, полученный бильярд Δ' будет лиувиллево эквивалентен исходному, однако диффеоморфизм между изоэнергетическими поверхностями Q^3 и Q'^3 переводит пространственноподобные слои во времениподобные и наоборот, а световой слой в Q^3 он переводит в световой слой в Q'^3 . Меченая молекула бильярда Δ при преобразовании его в бильярд Δ' отразится относительно прямой, трансверсально пересекающей центральные ребра, лежащей на уровне интеграла $\lambda = \pm\infty$.

6.2 Бильярды на плоскости Минковского как модели некоторых случаев интегрируемости твердого тела

Движение твердого тела с закрепленной точкой в поле силы тяжести описывается системой уравнений Эйлера-Пуассона (см. [17], [18]):

$$\begin{aligned} A\dot{\omega} &= A\omega \times \omega - Pr \times \nu, \\ \dot{\nu} &= \nu \times \omega \end{aligned} \quad (6.1)$$

Выберем систему координат такой, что ее оси будут направлены вдоль главных осей инерции тела.

Фазовые переменные здесь таковы: ω - вектор угловой скорости тела, ν - вектор восходящей вертикали. Параметрами системы являются: диагональная матрица $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$, задающая тензор инерции твердого тела, P - вес тела, r - радиус-вектор центра масс тела. Запись $a \times b$ означает векторное произведение в \mathbb{R}^3 .

Существуют многочисленные обобщения данной задачи.

Н. Е. Жуковский исследовал задачу о движении твердого тела, имеющего полости, полностью заполненные идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей безвихревое движение [19]. Кинетический момент тела в таком случае равен $A\omega + \lambda$, где λ - постоянный вектор (в системе координат, жестко связанной с телом), характеризующий циклическое движение жидкости в полостях. Аналогичный вид кинетический момент тела имеет в случае, когда в теле закреплен маховик, ось которого направлена вдоль вектора λ . Такую механическую систему называют гиростатом. Движение гиростата в поле силы тяжести, а также некоторые другие задачи (см. например, [21]) описываются системой уравнений

$$\begin{aligned} A\dot{\omega} &= (A\omega + \lambda) \times \omega - Pr \times \nu, \\ \dot{\nu} &= \nu \times \omega \end{aligned} \quad (6.2)$$

Другое обобщение этой задачи связано с заменой внешнего однородного поля, т. е. силы тяжести, на более сложное. Уравнения движения твердого тела с закрепленной точкой в произвольном потенциальном силовом поле были получены Лагранжем. Если это поле имеет ось симметрии, то ее можно считать вертикальной. Тогда уравнения движения тела имеют вид

$$A\dot{\omega} = A\omega \times \omega + \nu \times \frac{\partial U}{\partial \nu},$$

$$\dot{\nu} = \nu \times \omega \quad (6.3)$$

Здесь $U(\nu)$ - потенциальная функция, а через $\frac{\partial U(\nu)}{\partial \nu}$ обозначен вектор с компонентами $(\frac{\partial U}{\partial \nu_1}, \frac{\partial U}{\partial \nu_2}, \frac{\partial U}{\partial \nu_3})$. Отметим, что если поле сил есть поле силы тяжести, т. е. $P(r, \nu) = U$, получаем систему уравнений 6.2. Здесь через $\langle a, b \rangle$ обозначено стандартное евклидово скалярное произведение векторов в \mathbb{R}^3 .

Наиболее общие уравнения, описывающие различные задачи динамики твердого тела, имеют вид (см., например, книгу М. П. Харламова [20]):

$$A\dot{\omega} = (A\omega \times \omega + \kappa) + \nu \times \frac{\partial U}{\partial \nu},$$

$$\dot{\nu} = \nu \times \omega \quad (6.4)$$

где $\kappa(\nu)$ - вектор-функция, компоненты которой являются коэффициентами некоторой замкнутой 2-формы на группе вращений $SO(3)$, т. е. формой гироскопических сил. Вектор-функция $\kappa(\nu)$ имеет вид:

$$\kappa = \lambda + (\Lambda - \text{div} \lambda \cdot E)\nu, \quad (6.5)$$

где $\lambda(\nu)$ - произвольная вектор-функция, $\text{div} \lambda = \frac{\partial \lambda_1}{\nu_1} + \frac{\partial \lambda_2}{\nu_2} + \frac{\partial \lambda_3}{\nu_3}$, а $\Lambda = (\frac{\partial \lambda_i}{\nu_j})^T$ - транспонированная матрица Якоби. Очевидно, системы (6.2)-(6.2) являются частными случаями общей системы (6.2)

У системы (6.2) всегда существует геометрический интеграл $F = \langle \nu, \nu \rangle = 1$ и интеграл энергии $E = \frac{1}{2} \langle A\omega, \omega \rangle + U(\nu)$.

Если $\kappa(\nu)$ имеет вид (6.2), то существует интеграл площадей $G = \langle A\omega + \lambda, \nu \rangle$.

Можно показать (см. например [20]) что уравнения (6.2),(6.2) являются гамильтоновыми на совместных 4-поверхностях уровня геометрического интеграла и интеграла площадей. Более того, уравнения (6.2),(6.2) можно представить в виде уравнений Эйлера для шестимерной алгебры Ли $e(3)$ группы движений трехмерного евклидового пространства.

На линейном пространстве $e(3)^*$ определена скобка Ли-Пуассона двух произвольных гладких функций f и g :

$$\{f, g\}(x) = x([d_x f, d_x g]),$$

где $x \in e(3)^*$, через $[,]$ обозначен коммутатор в алгебре Ли $e(3)$, а $d_x f$ и $d_x g$ - это дифференциалы функций f и g в точке x . Эти дифференциалы принадлежат в действительности алгебре Ли $e(3)$ как ковекторы на $e(3)^*$, при стандартном отождествлении пространства $e(3)^{**}$ с алгеброй $e(3)$. В естественных координатах $S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3$ на пространстве $e(3)^*$ эта скобка записывается следующим образом

$$\{S_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} S_k, \{R_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} R_k, \{R_i, R_j\} = 0, \quad (6.6)$$

где $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, $\varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$.

Гамильтонова система на пространстве $e(3)^*$ со скобкой (6.2), т.е. уравнения Эйлера, по определению имеют вид:

$$\dot{S}_i = \{S_i, H\}, \dot{R}_i = \{R_i, H\}$$

, где H - функция на $e(3)^*$, называемая гамильтонианом. Вводя векторы $S = (S_1, S_2, S_3), R = (R_1, R_2, R_3)$, эти уравнения можно переписать в виде обобщенных уравнений Кирхгофа

$$\dot{S} = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right) \times S + \left(\frac{\partial H}{\partial R} \right) \times R, \dot{R} = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right) \times R \quad (6.7)$$

Предложение 6.1. *Отображение $\phi: \mathbb{R}^6(\omega, \nu) \rightarrow \mathbb{R}^6(S, R)$, заданное формулами*

$$S = -(A\omega + \lambda), R = \nu \quad (6.8)$$

устанавливает изоморфизм системы (6.2), (6.2) и системы (6.2) с гамильтонианом

$$H = \frac{(S_1 + \lambda_1)^2}{2A_1} + \frac{(S_2 + \lambda_2)^2}{2A_2} + \frac{(S_3 + \lambda_3)^2}{2A_3} + U \quad (6.9)$$

, где параметры системы A_1, A_2, A_3 и функции $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, U$ берутся из системы (6.2), (6.2), но функции заданы не на пространстве $\mathbb{R}^3(\nu)$, а на пространстве $\mathbb{R}^3(R)$

Следствие 6.1. Условие (6.2), налагаемое на вектор-функцию $\kappa(\nu)$, равносильно тому, что система уравнений (6.2) эквивалентна системе, задаваемой уравнениями Эйлера на пространстве $e(3)^*$, т.е. уравнениями (6.2), с гамильтонианом, квадратичным по переменным S , то есть гамильтонианом вида

$$H = \langle CS, S \rangle + \langle W, S \rangle + V \quad (6.10)$$

, где C - постоянная симметричная матрица 3×3 , $W(R)$ - произвольная вектор-функция, $V(R)$ - произвольная гладкая функция.

При построении отображения (6.1) интегралы $F = \langle \nu, \nu \rangle$ и $G = \langle A\omega + \lambda, \nu \rangle$ переходят в инварианты алгебры Ли $e(3)$:

$$f_1 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2, f_2 = S_1 R_1 + S_2 R_2 + S_3 R_3$$

, а интеграл энергии $E = \frac{1}{2} \langle A\omega, \omega \rangle + U(\nu)$ переходит в гамильтониан (6.1). Система (6.2) является гамильтоновой на совместных четырехмерных поверхностях уровня двух гладких функций, т.е. интегралов f_1 и f_2 :

$$M_{c,g}^4 = \{f_1 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = c, f_2 = S_1 R_1 + S_2 R_2 + S_3 R_3 = g\} \quad (6.11)$$

. Для почти всех значений c и g эти совместные уровни являются неособыми гладкими подмногообразиями в $e(3)^*$. В дальнейшем будем считать, что c и g являются именно такими регулярными значениями.

Легко видеть, что эти симплектические 4-многообразия $M_{c,g}^4$ диффеоморфны, при $c > 0$, касательному расслоению TS^2 к двумерной сфере S^2 . Симплектическая структура задается здесь ограничением скобки Ли-Пуассона на TS^2 из объемлющего шестимерного пространства $e(3)^*$. Поскольку линейное преобразование $S' = S, R' = \gamma R$, где $\gamma = const$, очевидно, сохраняет скобку (6.2), мы будем считать в дальнейшем, что всегда $c = 1$.

Как уже отмечалось, система уравнений (6.2) с гамильтонианом (6.1) (или эквивалентная система уравнений (6.2), (6.2)) описывает различные задачи динамики твердого тела и некоторые близкие к ней системы.

Начиная с этого момента мы будем рассматривать систему уравнений (6.2) с гамильтонианом (6.1) на симплектическом многообразии $M_{1,g}^4 = \{f_1 = 1, f_2 = g\}$ в шестимерном пространстве $e(3)^*$.

Приведем список некоторых известных сегодня интегрируемых случаев для уравнений (6.2), (6.1) с указанием: кем, когда и для какой задачи этот случай интегрируемости был впервые обнаружен. Для каждого случая указаны Гамильтониан H и дополнительный интеграл K , функционально независимый с H . При этом дополнительный интеграл K может существовать не на всех 4-поверхностях уровня функций f_1 и f_2 , а лишь для некоторых постоянных значений постоянной g .

Случай Эйлера (1750 год). Движение тяжелого твердого тела с закрепленной точкой, совпадающей с центром масс твердого тела.

$$H = \frac{S_1^2}{2A_1} + \frac{S_2^2}{2A_2} + \frac{S_3^2}{2A_3}, K = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (6.12)$$

. Здесь интеграл K - квадратичный.

Случай Лагранжа (1788 год). Движение тяжелого твердого тела с закрепленной точкой и указанным ниже условием симметрии твердого тела.

$$H = \frac{S_1^2}{2A} + \frac{S_2^2}{2A} + \frac{S_3^2}{2B} + aR_3, K = S_3 \quad (6.13)$$

. Здесь интеграл K - линейный. В этом случае твердое тело имеет ось симметрии, поскольку $A_1 = A_2 = A$. При этом закрепленная точка твердого тела располагается именно на этой оси.

$$H = \frac{(S_1 + \lambda_1)^2}{2A_1} + \frac{(S_2 + \lambda_2)^2}{2A_2} + \frac{(S_3 + \lambda_3)^2}{2A_3}, K = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (6.14)$$

. Здесь интеграл K - квадратичный. Этот случай является обобщением случая Эйлера. Случай Эйлера получается отсюда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Грубые молекулы для основных случаев интегрируемости были первоначально вычислены А. А. Ошемковым [7], [11], [12]. Затем разными авторами были определены числовые метки на этих молекулах, что позволило в итоге вычислить меченые молекулы. См. А.В. Болсинов [13], П. Й. Топалов [14], А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко [15], [16].

Отметим, что для различных значений параметров системы, а также для различных уровней энергии, слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности для одной и той же задачи оказывались различными. Таким образом, каждый случай интегрируемости имеет несколько меченых молекул.

Лиувиллево неэквивалентные системы, возникающие в рамках одного случая, принято обозначать различными цифрами после названия (так, например, случай Эйлера (1), случай Эйлера(2) и случай Эйлера (3) имеют принципиально различные слоения изоэнергетической поверхности).

Теорема 6.1. Среди меченых молекул для вышеперечисленных случаев динамики твердого тела встречались некоторые вычисленные мной молекулы. Ниже приведен список топологических бильярдов на плоскости Минковского, которые моделирует следующие случаи динамики твердого тела:

1. топологические бильярды, составленные из простых бильярдов q и допускающих лишь выпуклые склейки (см. рис.37, а), моделируют (т.е. Лиувиллево эквивалентны) случаи Эйлера (1) (см. [2]), Лагранжа(1) (см. [2]) и Жуковского(7) (см. [7]) динамики твердого тела;
2. топологический бильярд с конической точкой, составленный из простых бильярдов q и допускающий лишь выпуклые склейки (см. рис.37, b), моделирует (т.е. Лиувиллево эквивалентен) случаи Лагранжа(3) (см. [2]) и Жуковского(11) (см. [7]) динамики твердого тела;
3. обобщенные ленты $\Delta_\gamma(2 \times 2h2)_1$ и $\Delta_\gamma(2h2)_1$ (см. рис.37, c) моделируют (т.е. Лиувиллево эквивалентны) случаи Эйлера(2) (см. [2]) динамики твердого тела;
4. топологические бильярды $\Delta_\alpha(2 \times 1h2 + 2(\alpha + \beta)q)$ и $\Delta_\alpha(h2 + (\alpha + \beta)q)$ (см. рис.37, d) моделируют (т.е. Лиувиллево эквивалентны) случаи Жуковского(8) (см. [7]) динамики твердого тела.

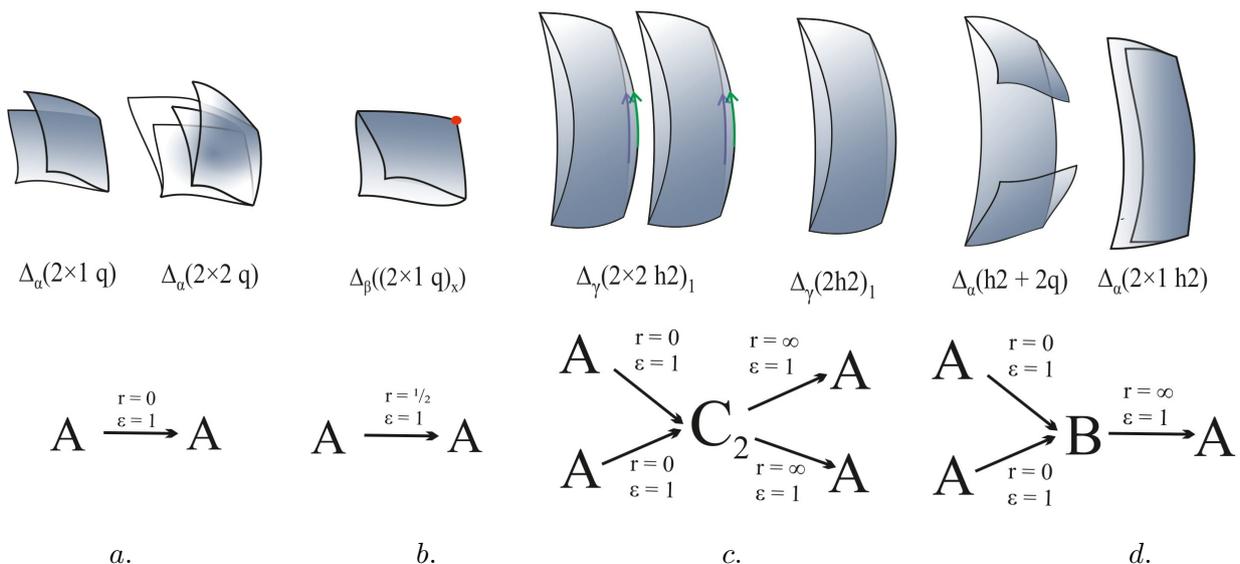


Рис. 37: Бильярды на плоскости Минковского как модели динамики твердого тела

6.3 Таблица с инвариантами Фоменко-Цишанга для всех эллиптических биллиардов с выпуклыми склейками.

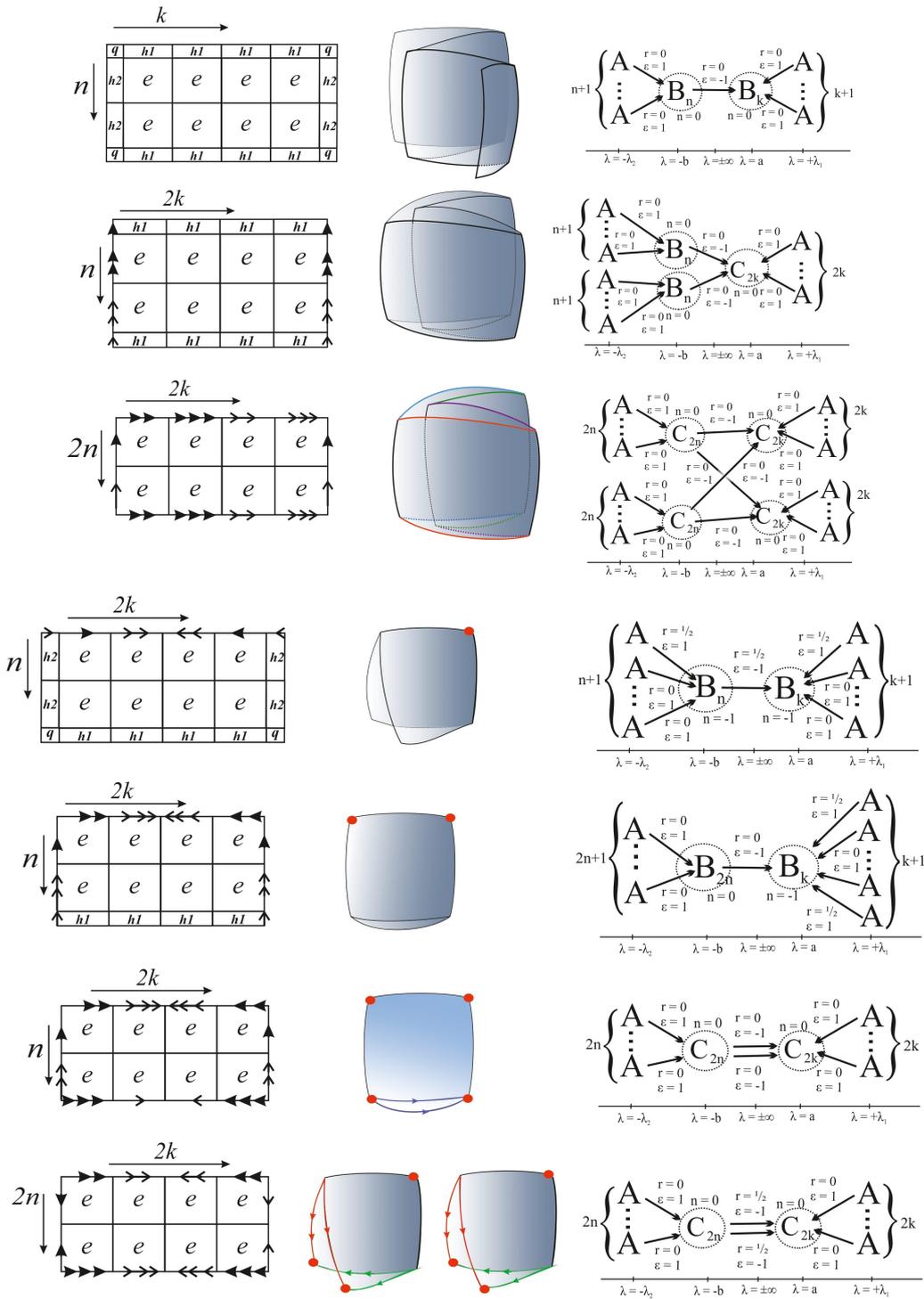


Рис. 38: Меченые молекулы для топологических биллиардов, допускающих только выпуклые склейки, содержащих e

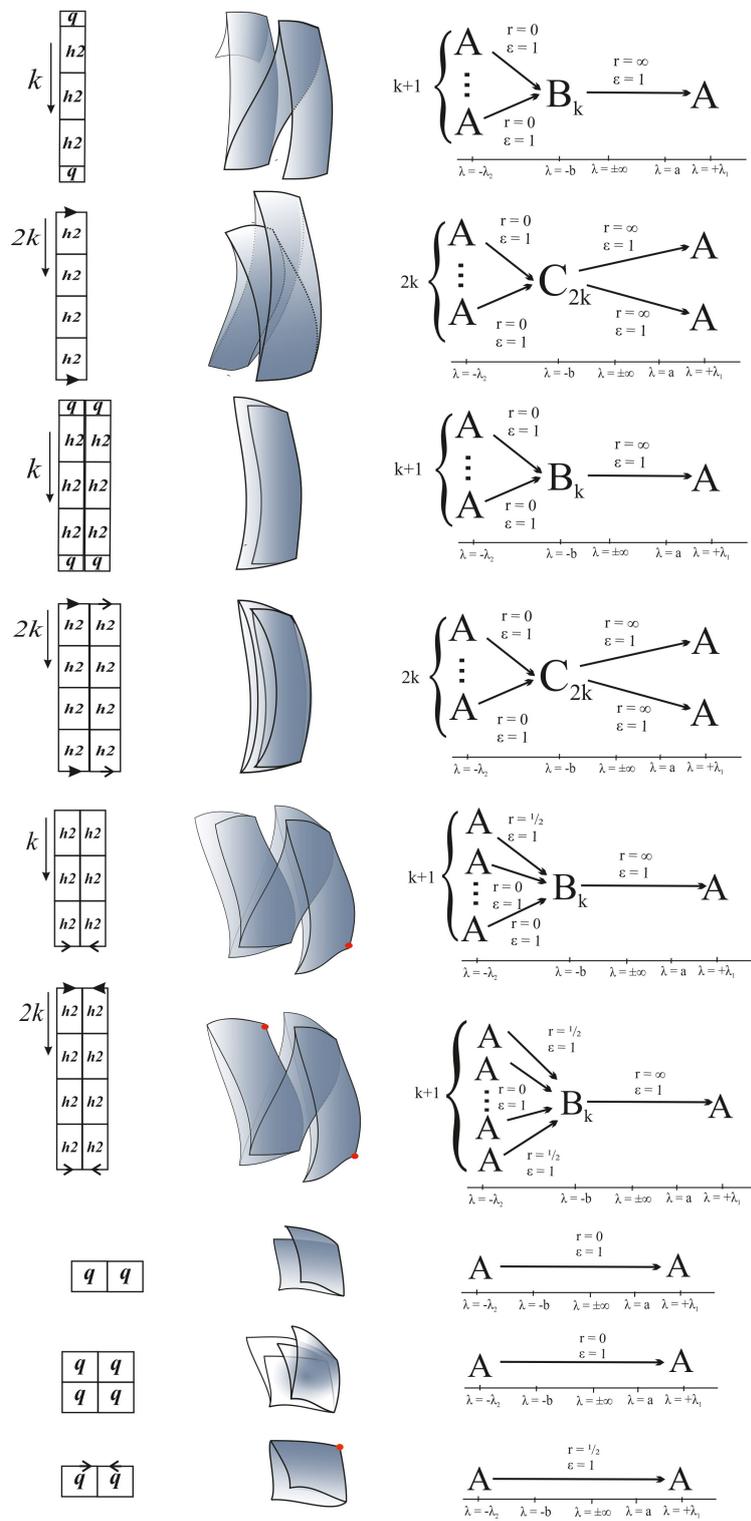


Рис. 39: Меченые молекулы для топологических биллиардов, допускающих только выпуклые склейки, содержащих h_2, q

6.4 Таблица с инвариантами Фоменко-Цишанга для топологических бильярдов, допускающих прямые склейки и содержащих область e .

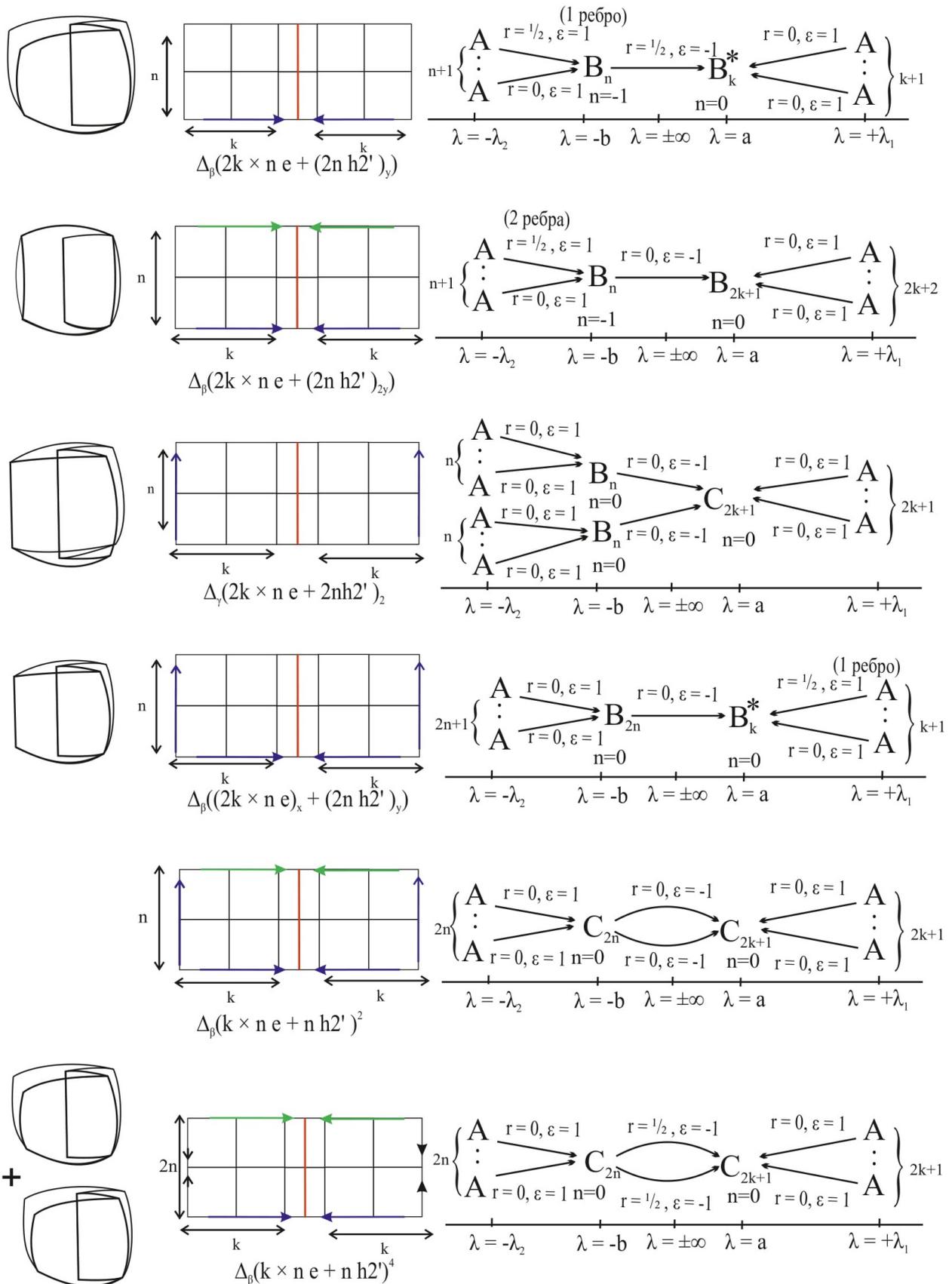


Рис. 40: Меченые молекулы для топологических бильярдов, допускающих прямые склейки, содержащие область e

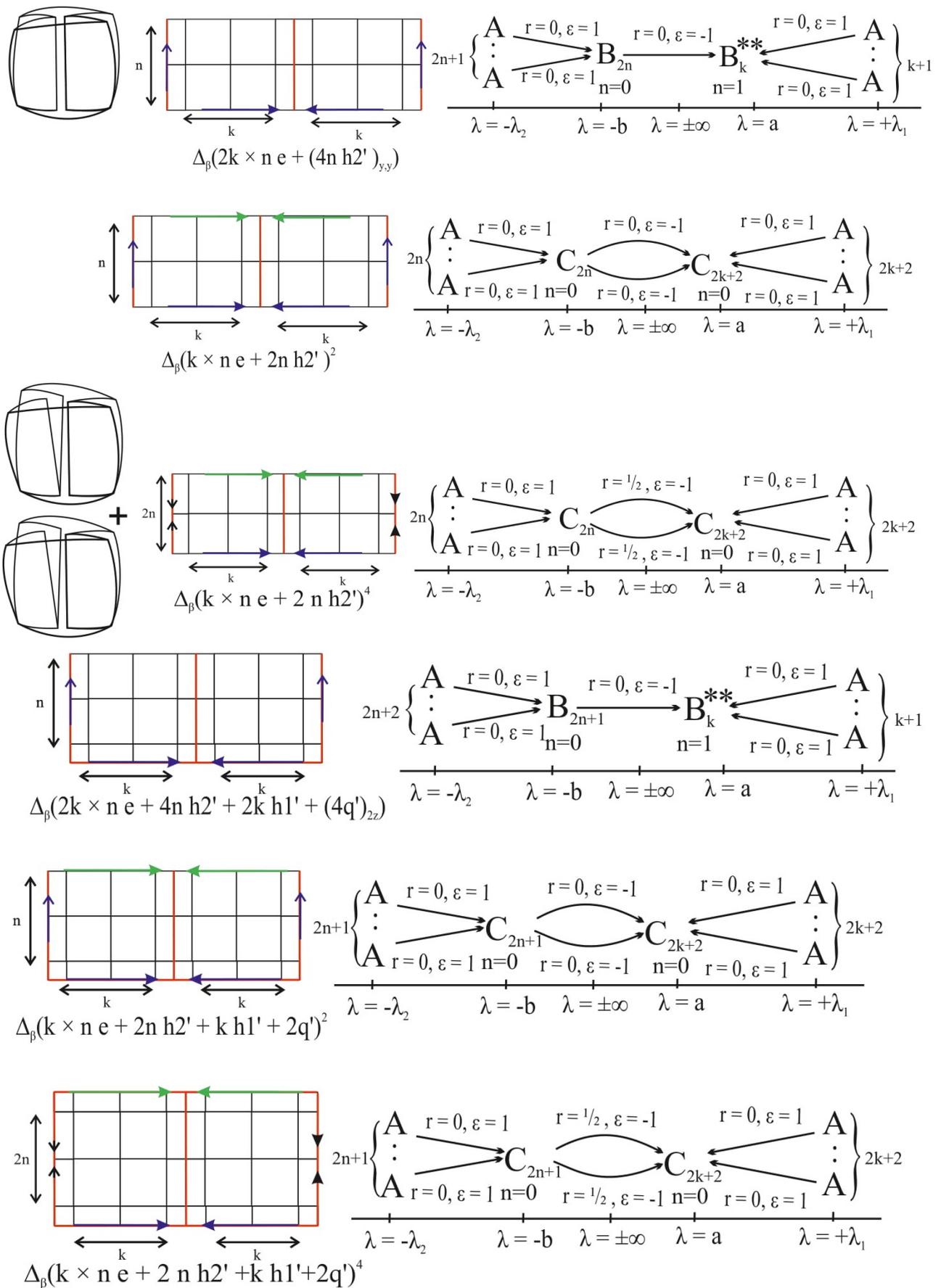


Рис. 41: Меченые молекулы для топологических билиардов, допускающих прямые склейки, содержащие область e

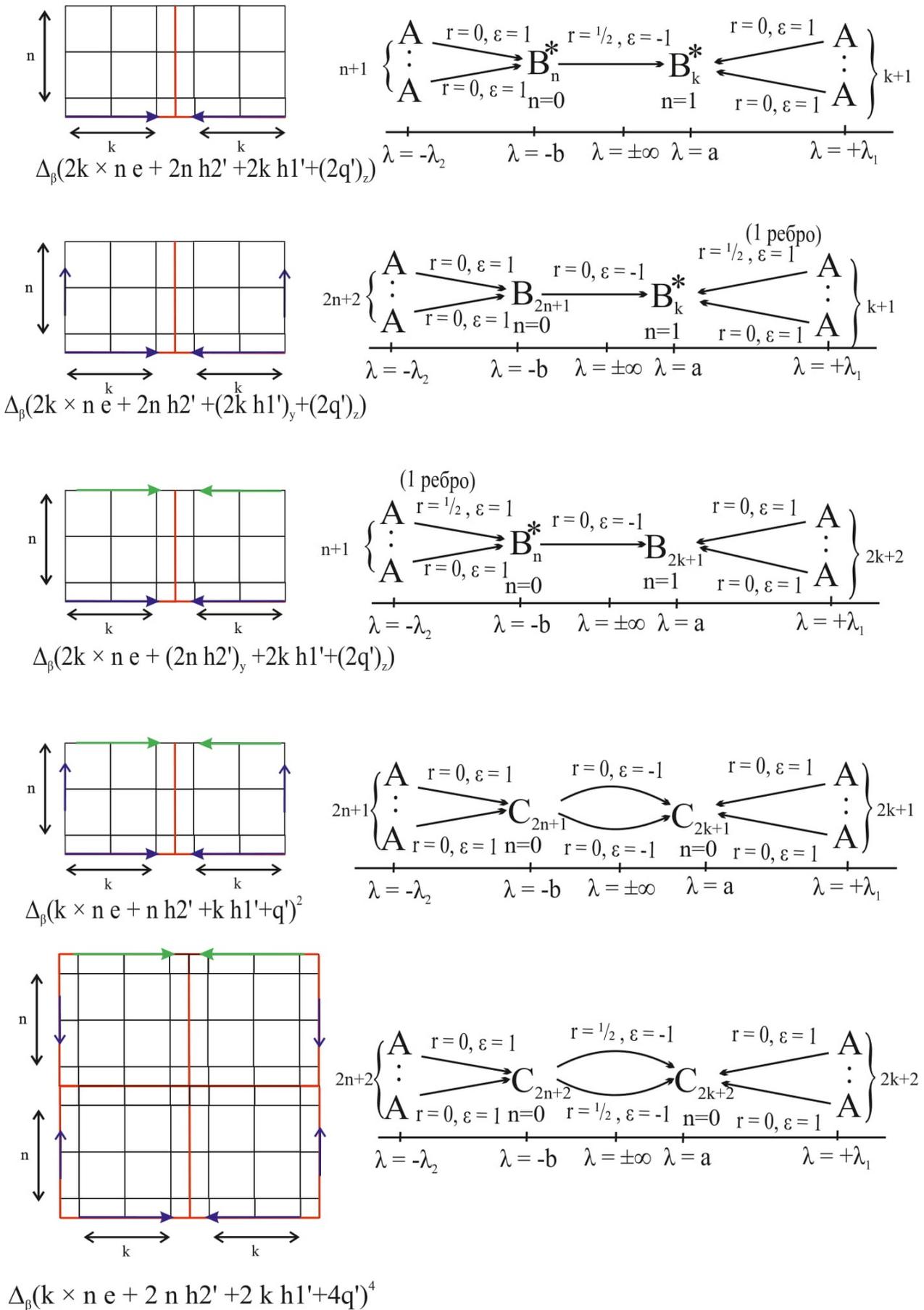


Рис. 42: Меченые молекулы для топологических бильярдов, допускающих прямые склейки, содержащие область e

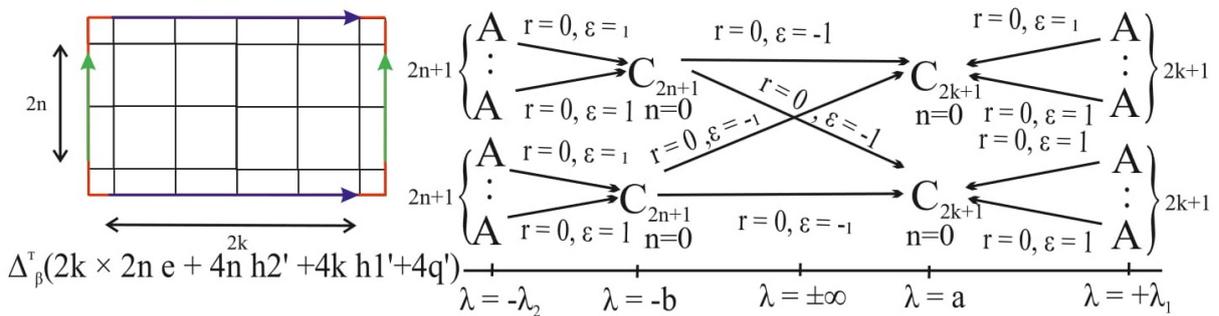
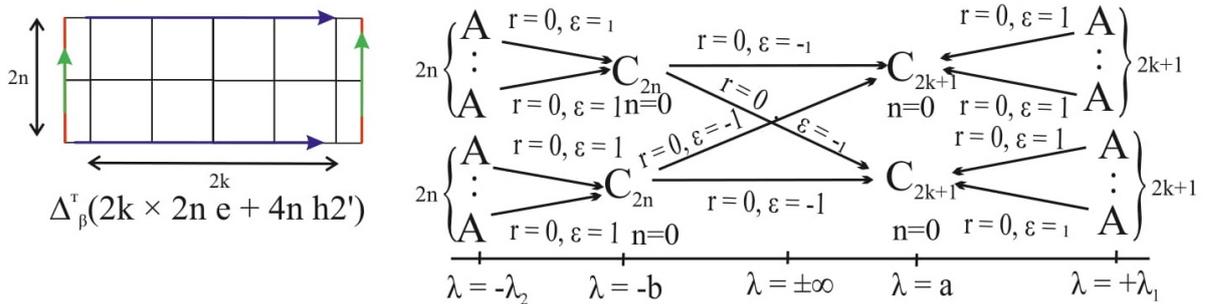
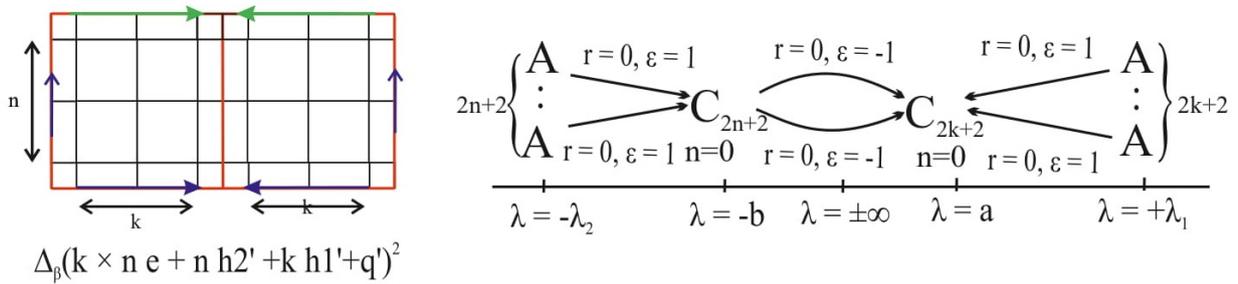
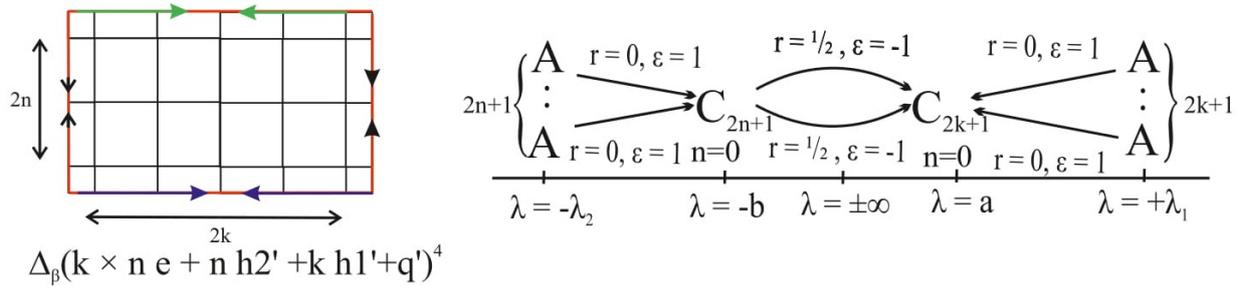


Рис. 43: Меченые молекулы для топологических бильярдов, допускающих прямые склейки, содержащие область ε

Список литературы

- [1] Биркгоф Дж. Д., Динамические системы, Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.
- [2] Болсинов А. В., Фоменко А. Т., Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 1999, Т.1
- [3] Драгович В., Раднович М., Топологические инварианты эллиптических бильярдов и геодезических потоков на эллипсоиде в пространстве Минковского, *Фундаментальная и прикладная математика*, 2015, Т. 20(2), С. 51-64.
- [4] Козлов В. В., Трещев Д. В., Генетическое введение в динамику систем с ударами, М.: Издательство МГУ, 1991
- [5] Фокичева В. В., Топологическая классификация бильярдов в локально-плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик // *Математический сборник*. — 2015. — Т. 206, № 10. С. 127–176.
- [6] Gutkin E., Billiard dynamics: a survey with the emphasis on open problems. // *Regul. and Chaotic Dyn.*, 8:1(2003), 1-13.
- [7] Oshemkov A. A., Fomenko Invariants for the Main Integrable Cases of the Rigid Body Motion Equations. // *Advances in Soviet Mathematics*, AMS, v. 6, 1991, 67-146.
- [8] V. Dragovic, M. Radnovic, «Bifrucations of Liouville tori in elliptical billiards», *Regul. Chaotic Dyn.*, 14:4-5 (2009), 479–494
- [9] В. Драгович, М. Раднович, Интегрируемые бильярды, квадрики и многомерные поризмы Понселе, *Нелинейная динам.*, 6:2 (2010), 449–450
- [10] Ведюшкина В. В., Харчева И. С. Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем // *Математический сборник*. — 2018. — Т. 209, № 12.
- [11] А. А. Ошемков, Топология изоэнергетических поверхностей и бифуркационные диаграммы интегрируемых случаев динамики твердого тела на $SO(4)$, *УМН*, 42:6(258) (1987), 199–200.
- [12] Ошемков А.А. Описание изоэнергетических поверхностей для некоторых интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // *Труды семинара по вект. и тенз. анализу*, Т.23, М.: МГУ, 1988, С.122–131.
- [13] Bolsinov A.V. Methods of calculation of Fomenko–Zieschang topological invariant», *Adv. in Soviet Math.*, 6, с. 147–183 (1991).
- [14] П. Й. Топалов, Вычисление тонкого инварианта Фоменко–Цишанга для основных интегрируемых случаев движения твердого тела, *Матем. сб.*, 187:3 (1996), 143–160.
- [15] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Геодезический поток эллипсоида траекторно эквивалентен интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела // *Доклады РАН*, 1994, т. 339, вып. 3, с. 293-296.
- [16] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, Траекторная классификация геодезических потоков двумерных эллипсоидов. Задача Якоби траекторно эквивалентна интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела, *Функц. анализ и его прил.*, 29:3 (1995), 1–15;
- [17] В. В. Козлов, Методы качественного анализа в динамике твердого тела, Изд-во МГУ, 1980.
- [18] Ю. А. Архангельский, Аналитическая динамика твердого тела, М.: Наука, 1977.
- [19] Я. Е. Жуковский, О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. В томе 1 «Собрания сочинений», Т. 1,2. Москва, 1949.

- [20] М. П. Харламов, Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1988.
- [21] М. П. Харламов, Лекции по динамике твердого тела. Л.: Изд-во НГУ, 1965.