МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет
Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

Григорьев Дмитрий Сергеевич

Курсовая работа

РАССТОЯНИЯ ГРОМОВА-ХАУСДОРФА ДО СИМПЛЕКСОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ МОЩНОСТИ.
GROMOV-HAUSDORFF DISTANCES TO SIMPLEXES OF ARBITRARY CARDINALITY

Руководитель курсовой работы: профессор А. А. Тужилин

Москва, 2019 г.

Введение

Расстояние Громова–Хаусдорфа было определено Д. Эдвардсом [1], а затем переоткрыто и обобщено М. Громовым [2], [3]. Расстояние Громова–Хаусдорфа измеряет различие между двумя произвольными метрическими пространствами и является одним из красивейших понятий метрической геометрии. С момента своего появления оно использовалось математиками в изучении топологических свойств. Вычисление расстояний Громова–Хаусдорфа от компактных метрических пространств до конечных симплексов, то есть конечных метрических пространств, в которых все ненулевые расстояния равны между собой, было описано в [4]. Цель данной работы — обобщить результаты [4] на случай бесконечных симплексов и произвольных ограниченных пространств. Был найден способ вычисления искажения неприводимого соответствия с помощью разбиений, порожденных им; доказана теорема, позволяющая находить расстояние Громова–Хаусдорфа с помощью только тех соответствий, которые порождены разбиениями; также был рассмотрен конкретный пример, иллюстрирующий, как построенная теория позволяет получать конкретные результаты.

1 Основные определения и предварительные результаты

Пусть A — произвольное множество, через $\#A$ будем обозначать его мощность.

Пусть X — метрическое пространство. Расстояние между его точками x и y будем обозначать через $|xy|$. Через $\operatorname{diam} X$ будем обозначать диаметр X.

Если $A, B \subset X$ — непустые подмножества, определим расстояние между ними как $|AB| = \inf\bigl\{|ab| : a \in A, b \in B\bigr\}$, при этом, если $A = \{a\}$, то вместо $\bigl|\{a\}B\bigr|$ будем писать $|aB|$.

Для любой точки $x \in X$ и числа $r > 0$ через $U_r(x)$ будем обозначать открытый шар с центром в точке x и радиусом r; для каждого непустого $A \subset X$ и числа $r > 0$ положим $U_r(A) = \bigcup_{\alpha\in A} U_r(a)$.

Определение 1.1. Для непустых $A, B \subset X$ положим

$$d_H(A,B) = \inf\bigl\{r > 0 : A \subset U_r(B) \;\&\; B \subset U_r(A)\bigr\} = \max\bigl\{\sup_{a\in A}|aB|, \sup_{b\in B}|Ab|\bigr\}.$$

Полученная величина назвается *расстоянием Хаусдорфа между A и B*.

Определение 1.2. Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных X и Y соответственно, назовем *реализацией пары* (X, Y).

Определение 1.3. *Расстоянием* $d_{GH}(X,Y)$ *по Громову–Хаусдорфу между* X *и* Y назовем точную нижнюю грань чисел r, для которых существует реализация (X',Y',Z) пары (X,Y) такая, что $d_H(X',Y')\le r$.

Определение 1.4. Пусть X и Y — произвольные непустые множества. *Отношением между множествами* X *и* Y называется каждое подмножество декартова произведения $X\times Y$. Множество всех непустых отношений между X и Y обозначим через $\mathcal{P}(X,Y)$.

Будем смотреть на каждое отношение $\sigma\in\mathcal{P}(X,Y)$ как на многозначное отображение, которое может иметь область определения меньшую, чем X. Тогда, для каждого $x\in X$ и каждого $A\subset X$ определены их образы $\sigma(x)$ и $\sigma(A)$, а для каждого $y\in Y$ и каждого $B\subset Y$ — их прообразы $\sigma^{-1}(y)$ и $\sigma^{-1}(B)$.

Пусть $\sigma\in\mathcal{P}(X,Y)$ — произвольное отношение. Для каждого $x\in X$ определим его *кратность* $k_\sigma(x)$ в σ как мощность множества $\sigma(x)$. Аналогично определяется *кратность* $k_\sigma(y)$ в σ элемента $y\in Y$.

Определение 1.5. Пусть X и Y — произвольные метрические пространства. *Искажением* $\operatorname{dis}\sigma$ *отношения* $\sigma\in\mathcal{P}(X,Y)$ назовем число

$$\operatorname{dis}\sigma=\sup\Big\{\big||xx'|-|yy'|\big|,\,(x,y),\,(x',y')\in\sigma\Big\}.$$

Определение 1.6. Отношение $R\in\mathcal{P}(X,Y)$ называется *соответствием*, если ограничения на R канонических проекций $\pi_X:(x,y)\to x$ и $\pi_Y:(x,y)\to y$ сюръективны. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X,Y)$.

Введение соответствий приводит к эквивалентному определению расстояния Громова–Хаусдорфа, которое является более удобным для вычислений.

Утверждение 1.7 ([6]). *Для любых метрических пространств* X *и* Y *имеем*

$$d_{GH}(X,Y)=\frac12\inf\big\{\operatorname{dis}R:R\in\mathcal{R}(X,Y)\big\}.$$

Отношение включения задает на $\mathcal{R}(X,Y)$ частичный порядок: $R_1\le R_2$, если и только если $R_1\subset R_2$.

Определение 1.8. Минимальные в этом порядке соответствия назовем *неприводимыми*, а все остальные — *приводимыми*. Множество всех неприводимых соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}^0(X,Y)$.

Таким образом, соответствие приводимо тогда и только тогда, когда из него можно выкинуть некоторые пары (x,y), сохранив полученное в результате отношение соответствием.

Нам понадобится описание устройства неприводимого соответствия, которое содержится в [5].

Каждое неприводимое соответствие $R \in \mathcal{R}^0(X,Y)$ порождает разбиения D_X^R и D_Y^R множеств X и Y, а также биекцию $f_R : D_X^R \to D_Y^R$ такую, что $R = \bigcup_{Z \in D_X^R} Z \times f_R(Z)$.

Теорема 1 ([5]). *Для каждого $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ существует $R_0 \in \mathcal{R}^0(X,Y)$ такое, что $R_0 \subset R$.*

Следствие 1.9 ([5]). *Для любых метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2} \inf\left\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}^0(X,Y)\right\}.$$

Таким образом, для нахождения расстоятния Громова-Хаусдорфа, мы можем воспользоваться лишь неприводимыми соответствиями.

Теперь введем еще несколько конструкций, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Конструкция 1.10. Пусть k — кардинальное число. Тогда для множества M такого, что $k \le \#M$, через $\mathfrak{D}_k(M)$ обозначим семейство всевозможных разбиений множества M на k его непустых подмножеств. Пусть теперь M — метрическое пространство и $D = \{M_i\}_{i\in I} \in \mathfrak{D}_k(M)$. Положим $\alpha(D) = \inf\{|M_iM_j| : i \ne j\}$.

Определение 1.11. Пусть X — метрическое пространство, и $A, B \subset X$ — его непустые подмножества. Положим $|AB|' = \sup\{|ab| : a \in A, b \in B\}$.

Конструкция 1.12. Пусть k — кардинальное число, M — метрическое пространство, $k \le \#M$ и $D = \{M_i\}_{i\in I} \in \mathfrak{D}_k(M)$. Положим

$$\beta(D) = \sup\{|M_iM_j|' : i \ne j\}.$$

Определение 1.13. Метрическое пространство X назовем *симплексом*, если все его ненулевые расстояния одинаковы. Произвольный единичный симплекс обозначим через Δ.

Для произвольного метрического пространства X и числа $\lambda > 0$ через λX обозначим метрическое пространство, которое отличается из X умножением всех расстояний на λ.

Конструкция 1.14. Пусть X — произвольное метрическое пространство, Δ — единичный симпллекс, $k = \#\Delta \le \#X$ и $D = \{X_i\}_{i\in I} \in \mathfrak{D}_k(X)$. Положим $R_D = \sqcup_{i\in I}\{i\} \times X_i$.

Определение 1.15. Пусть m — кардинальное число, $D = \{X_i\}_{i\in I} \in \mathfrak{D}_m(X)$. Положим $\operatorname{diam} D = \max_{i\in I} \operatorname{diam} X_i$.

Определение 1.16. Для произвольного метрического пространства X положим $\varepsilon(X) = \inf\{|xy| : x, y \in X, x \ne y\}$.

Отметим, что $\varepsilon(X) \le \operatorname{diam} X$, причем равенство достигается, если и только если X является симплексом.

Утверждение 1.17 ([4]). *Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — непустое ограниченное подмножество вещественной прямой, и пусть $t \in R$. Тогда*

$$\sup_{a\in A}|t-a| = \max\{t-\inf A, \sup A - t\} = \left|t - \frac{\inf A + \sup A}{2}\right| + \frac{\sup A - \inf A}{2}.$$

Ранее были доказаны следующие два утверждения.

Предложение 1.18. *Пусть X — метрическое пространство, Δ — единичный симплекс. Тогда, если $\#X < \#\Delta$ и $\lambda > 0$, то*

$$d_{GH}(X, \lambda\Delta) = \frac{1}{2}\max\{\lambda, \mathrm{diam}X - \lambda\}.$$

Предложение 1.19. *Пусть X — метрическое пространство, содержащее конечное число точек $x_1, ..., x_n \in X$ таких, что для каждого $r > 0$ выполняется $\#U_r(x_k) = \infty$ для любого $k = 1, ..., n$. Тогда, если Δ — единичный симплекс, $\lambda > 0$, $\mathrm{diam}X \le 2\lambda$ и $\#X = \#\Delta$, то*

$$d_{GH}(X, \lambda\Delta) = \frac{1}{2}\lambda.$$

.

2 Основные результаты

Мы будем рассматривать только ограниченные метрические пространства.

Предложение 2.1. *Пусть X — метрическое пространство, Δ — единичный симплекс, $\lambda > 0$ и $R \in \mathcal{R}^0(X, Y)$. Тогда*

$$\mathrm{dis}\, R = \max\Big\{\mathrm{diam}D^R_{\lambda\Delta}, \mathrm{diam}D^R_X, \mathrm{diam}X - \lambda, \lambda - \alpha(D^R_X)\Big\}$$

Доказательство. Пусть $D^R_X = \{X_i\}_{i\in I}$. Из определения искажения можно заключить, что

$$\mathrm{dis}\, R = \sup\left\{\mathrm{diam}D^R_{\lambda\Delta}, \mathrm{diam}D^R_X, \big|\lambda - |x_1x_2|\big| : x_1 \in X_i, x_2 \in X_j, i \ne j\right\}.$$

Далее, используя утверждение 1.17, получим:

$$\sup\left\{\mathrm{diam}D^R_{\lambda\Delta}, \mathrm{diam}D^R_X, \big|\lambda - |x_1x_2|\big| : x_1 \in X_i, x_2 \in X_j, i \ne j\right\} =$$

$$= \max\{\mathrm{diam}D^R_{\lambda\Delta}, \mathrm{diam}D^R_X, \lambda - \alpha(D^R_X), \beta(D^R_X) - \lambda\}.$$

Теперь предположим, что X компактно, тогда существуют $x_1, x_2 \in X$ такие, что $|x_1x_2| = \mathrm{diam}X$. Далее возникают два случая:

(1) $x_1, x_2 \in X_i$ при некотором i, тогда $\mathrm{diam}D^R_X = \mathrm{diam}X$ и, если вместо $\beta(D^R_X) - \lambda$, написать $\mathrm{diam}X - \lambda$, максимум не изменится;

(2) $x_1, x_2 \notin X_i$ для любого i, тогда $\beta(D_X^R) = \mathrm{diam} X$.

Если же X — не компактно, то возникают два случая

(1) Существует последовательность $(x_j, y_j) \in X_i$ при некотором i такая, что $|x_j y_j| \to \mathrm{diam} X$, тогда $\mathrm{diam} D_X^R = \mathrm{diam} X$, и если вместо $\beta(D_X^R) - \lambda$ написать $\mathrm{diam} X - \lambda$, максимум не изменится;

(2) Такой последовательности не существует, то есть не существует последовательности пар элементов из одного X_i при некотором i, такой, что $|x_j y_j| \to \mathrm{diam} X$. Тогда $\beta(D_X^R) = \mathrm{diam} X$.

□

Теорема 2. *Пусть X — метрическое пространство, а Δ — единичный симплекс, причем $k = \#\Delta \le \#X$, $\lambda > 0$. Тогда*

$$d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \frac{1}{2} \inf\Big\{\mathrm{dis}\, R_D : D \in \mathfrak{D}_k(M)\Big\},$$

где R_D — соответствие, введенное в конструкции 1.18.

Доказательство. Согласно следствию 1.13, для нахождения расстояния Громова-Хаусдорфа мы можем использовать только неприводимые соответствия.

Если $k = 1$, то существует только одно соответствие, порожденное $D = \{X\}$, и условия теоремы выполняются.

Пусть теперь $k > 1$. Предположим, что утверждение теоремы не выполняется, то есть существует $\hat{R} \in \mathcal{R}^0(\lambda\Delta, X)$ такое, что $\mathrm{dis}\, \hat{R} < \mathrm{dis}\, R_D$ для любого $D \in \mathfrak{D}_k(M)$. Тогда покрытие $\{\hat{R}(y)\}_{y \in \lambda\Delta}$ не является разбиением и, следовательно, существует $x \in X$ такой, что $\#\hat{R}^{-1}(x) \ge 2$.

Значит $\mathrm{dis}\, \hat{R} = \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big|, (x, y), (x', y') \in \hat{R}\Big\} \ge \lambda$ и $\mathrm{dis}\, R_D > \lambda$ для любого $D \in \mathfrak{D}_k(M)$. Но, так как $\lambda - \alpha(D) \le \lambda$, воспользовавшись утверждением 2.1, мы получаем $\mathrm{dis}\, R_D = \max\{\mathrm{diam} D, \mathrm{diam} X - \lambda\}$.

Рассмотрим отношение эквивалентности на сиплексе $\lambda\Delta$, для которого выполняется: $y_1 \sim y_2$ если и только если существует точка $x \in X$ такая, что $y_1, y_2 \in \hat{R}^{-1}(x)$.

Теперь отфакторизуем $\Delta \to \Delta'$, $\hat{R} \to R'$, $R' \in \mathcal{R}^0(\lambda\Delta', X)$, по этому отношению эквивалентности. Тогда выполняется $\mathrm{dis}\, \hat{R} = \max\{\lambda, \mathrm{dis}\, R'\} \ge \mathrm{dis}\, R'$.

Если $\#\Delta' = \#\Delta$, то $R' = R_{D'}$, где $D' \in \mathfrak{D}_k(M)$. Получаем противоречие с нашим предположением.

Если же $k' = \#\Delta' < \#\Delta$, то $R' = R_{D'}$, где $D' \in \mathfrak{D}_{k'}(M)$. Но D' можно подразбить до некоторого $D \in \mathfrak{D}_k(M)$, значит $\mathrm{diam} D' \ge \mathrm{diam} D$ и $\mathrm{dis}\, \hat{R} \ge \mathrm{dis}\, R' = \max\{\mathrm{diam} D', \mathrm{diam} X - \lambda\} \ge \max\{\mathrm{diam} D, \mathrm{diam} X - \lambda\} = \mathrm{dis}\, R_D$. Опять получили противоречие.

□

Предложение 2.2. *Пусть X — метрическое пространство такое, что $\varepsilon(X) \geq \frac{1}{2}$ и $\operatorname{diam} X \leq \frac{3}{2}$, а Δ — единичный симплекс. Тогда, если $\#X = \#\Delta$, то*

$$d_{GH}(X, \Delta) = \frac{1}{2}\max\{1 - \varepsilon(X), \operatorname{diam} X - 1\}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное соответствие $R \in \mathcal{R}(\Delta, X)$.

В силу теоремы 3, $d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \frac{1}{2}\inf\{\operatorname{dis} R_D : D \in \mathfrak{D}_k(M)\}$. Рассмотрим произвольное соответствие $R_D, D \in \mathfrak{D}_k(M)$. Для него выполняется одно из двух условий.

(1) Соответствие R биективно. Тогда $\operatorname{diam} D = 0, \alpha(D) = \varepsilon(X) \geq \frac{1}{2}$, а $\beta(D) = \operatorname{diam} X \leq \frac{3}{2}$. И, воспользовавшись утверждением 2.1, можно заключить, что

$$\operatorname{dis} R = \max\{\operatorname{diam} D, 1 - \alpha(D), \operatorname{diam} X - 1\} = \\ = \max\{1 - \varepsilon(X), \operatorname{diam} X - 1\} \leq \frac{1}{2}.$$

(2) Соответствие R не биективно. В этом случае разбиение D, соответствующее R, будет не одноточечным, а значит $\operatorname{diam} D \geq \varepsilon(X) \geq \frac{1}{2}$ и, следовательно, $\operatorname{dis} R \geq \frac{1}{2}$.

Таким образом, для нахождения расстояния Громова–Хаусдорфа мы можем рассматривать искажения только биективных соответствий, причем искажения всех таких соответствий будет одинаково, поскольку Δ — это симплекс.

Как уже было отмечено, для любого биективного $R \in \mathcal{R}(X, \Delta)$ выполняется

$$\operatorname{dis} R = \max\{\operatorname{diam}(D), 1 - \alpha(D), \operatorname{diam} X - 1\} = \max\{1 - \varepsilon(X), \operatorname{diam} X - 1\}.$$

□

Список литературы

[1] Edwards D.A. *"The Structure of Superspace." In: Studies in Topology*, Academic Press, 1975.

[2] Gromov M.L. *Structures metriques pour les varietes riemanniennes*, Textes mathematiques. Recherche (v. 1), CEDIC/Fernand Nathan, 1981.

[3] Gromov M.L. *Groups of Polynomial growth and Expanding Maps*, Publications mathematiques I.H.E.S., v. 53, 1981.

[4] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Geometry of Compact Metric Space in Terms of Gromov-Hausdorff Distances to Regular Simplexes*, ArXiv e-prints, arXiv:1607.06655.

[5] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Gromov–Hausdorff Distance, Irreducible Correspondences, Steiner Problem, and Minimal Fillings*, ArXiv e-prints, 1604.06116, 2016.

[6] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.