МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

КУРСОВАЯ РАБОТА

Непрерывность множеств соответствий в пространстве Громова-Хаусдорфа

Continuity of correspondence sets in the Gromov-Hausdorff space

Выполнила студентка 4 курса
Борисова О.Б.
Научный руководитель
д.ф.-м.н., проф. А.А.Тужилин

Москва 2019

Введение

Изучая пространство всех метрических пространств с метрикой Громова-Хаусдорфа, приходится часто сталкиваться с понятием соответствия — подмножеством декартового произведением двух множеств с сюръективными каноническими проекциями. Прежде всего с помощью него считается расстояние по Громову-Хаусдорфу, а также, если задать на соответствии специального вида необходимую метрику, найдем геодезическую в пространстве Громова-Хаусдорфа (см. [2]). В данной работе доказывается, что множество всех соответствий и множество всех замкнутых соответствий непрерывно зависит от метрических пространств, образовавших его.

1 Основные определения и предварительные результаты

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между точками $x, y \in X$ будем обозначать через $|xy|$. Для $x \in X$ и непустого $A \subset X$ положим $|xA| = \inf\{|xa| : a \in A\}$. Пусть $\mathcal{P}(X)$ — семейство всех непустых подмножеств X. Для $A, B \in \mathcal{P}(X)$ положим

$$d_H(A,B) = \max\{\sup_{a\in A}|aB|, \sup_{b\in B}|Ab|\}.$$

Величина $d_H(A,B)$ называется *расстоянием Хаусдорфа между A и B*. Пусть $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ — множество всех ограниченных подмножеств X.

Предложение 1 ([1]). *Ограничение $d_H(A,B)$ на $\mathcal{B}(X)$ является псевдометрикой.*

Обозначим через $\mathcal{H}(X) \subset \mathcal{B}(X)$ множество всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств X.

Предложение 2 ([1]). *Ограничение $d_H(A,B)$ на $\mathcal{H}(X)$ является метрикой.*

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z'), состоящую из метрического пространства Z' и его двух подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X, Y). Положим

$$d_{GH}(X,Y) = \inf\{r : \exists\,(X',Y',Z'),\ d_H(X',Y') \le r\}.$$

Величина $d_{GH}(X,Y)$ называется *расстоянием Громова-Хаусдорфа между X и Y*.

Пусть M — некоторое множество ограниченных метрических пространства, рассматриваемых с точностью до изометрии.

Предложение 3 ([1]). *Ограничение $d_{GH}(A,B)$ на M является псевдометрикой.*

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии.

Предложение 4 ([1])**.** *Ограничение $d_{GH}(A,B)$ на $\mathcal{M}$ является метрикой.*

Расстояние Громова-Хаусдорфа удобно изучать в терминах соответствий. Пусть X и Y — произвольные непустые множества. Положим $\mathcal{P}(X,Y) = \mathcal{P}(X\times Y)$. Элементы из $\mathcal{P}(X,Y)$ называются *отношениями между X и Y*. Если $X'\subset X$ и $Y'\subset Y$ — непустые множества, а $\sigma\in\mathcal{P}(X,Y)$, то положим

$$\sigma|_{X'\times Y'} = \big\{(x,y)\in\sigma : x\in X',\, y\in Y'\big\}.$$

Отметим, что $\sigma|_{X'\times Y'}$ может оказаться пустым и, тем самым, не принадлежащим $\mathcal{P}(X',Y')$. Пусть $\pi_X : (x,y)\mapsto x$ и $\pi_Y : (x,y)\mapsto y$ — канонические проекции. Отношение $\sigma\in\mathcal{P}(X,Y)$ называется *соответствием*, если ограничения π_X и π_Y на σ сюръективны. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X,Y)$.

Если X и Y — метрические пространства, то для каждого отношения $\sigma\in\mathcal{P}(X,Y)$ определено *искажение*

$$\operatorname{dis}\sigma = \sup\Big\{\big||xx'|-|yy'|\big| : (x,y),\ (x',y')\in\sigma\Big\}.$$

Предложение 5 ([1])**.** *Пусть X и Y — метрические пространства. Тогда*

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis}R : R\in\mathcal{R}(X,Y)\big\}.$$

Соответствие $R\in\mathcal{R}(X,Y)$ назовем *оптимальным*, если $d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\operatorname{dis}R$. Множество всех оптимальных соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y)$. Пусть $\mathcal{R}_c(A,B)$ — множество всех замкнутых соответствий.

Предложение 6 ([2])**.** *Для $X,Y\in\mathcal{M}$ имеем $\mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y)\cap\mathcal{R}_c(A,B)\ne\emptyset$.*

2 Основные результаты

Пусть A,B — метрические пространства. Зададим метрику на $A\times B$ формулой

$$\big|(a_1,b_1)(a_2,b_2)\big| = \Big\|\big(|a_1a_2|,|b_1b_2|\big)\Big\|,$$

где $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in A\times B$, а $\|\cdot\|$ — произвольная норма на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Определённая только что метрика индуцирует метрики на всех соответствиях $R\in\mathcal{R}(A,B)$.

Теорема 1. *Пусть $R\in\mathcal{R}(A,B)$, $R_1\in\mathcal{R}(A',A)$, $R_2\in\mathcal{R}(B,B')$, $R' = R_1\circ R\circ R_2$. Тогда $R'\in\mathcal{R}(A',B')$ и*

$$d_{GH}(R,R') \le \frac{1}{2}\Big(\operatorname{dis}R_1\big\|(1,0)\big\| + \operatorname{dis}R_2\big\|(0,1)\big\|\Big).$$

Доказательство. Зададим $Q \in \mathcal{P}(R \times R')$, сопоставив точке $(a,b) \in R$ множество $R_1^{-1}(a) \times R_2(b)$, которое является подмножеством R', для каждого $a' \in R_1^{-1}(a)$ имеем $\big(a', R_2(b)\big) \subset \big(a', R_2R(a)\big) \subset \big(a', R_2RR_1(a')\big) \subset R'$. Покажем, что $\pi_{R'}(Q) = R'$. Действительно, для любого $(a', b') \in R'$ существуют a, b такие, что $a' \in R_1^{-1}(a)$ и $b \in R(a)$, для которого $b' \in R_2(b)$. Отсюда получаем, что Q является соответствием между R и R'.

Для произвольной пары $\big((a_1,b_1),(a_1',b_1')\big), \big((a_2,b_2),(a_2',b_2')\big) \in Q$ для краткости положим $\Delta a = |a_1a_2|$, $\Delta b = |b_1b_2|$, $\Delta a' = |a_1'a_2'|$ и $\Delta b' = |b_1'b_2'|$. Отметим, что, в силу определения соответствия Q, имеем $(a_1', a_1), (a_2', a_2) \in R_1$ и $(b_1, b_1'), (b_2, b_2') \in R_2$. Так как

$$(\Delta a, \Delta b) = (\Delta a - \Delta a', 0) + (\Delta a', \Delta b') + (0, \Delta b - \Delta b'),$$

то, вследствие неравенства треугольника для нормы, получаем

$$\begin{aligned}\big\|(\Delta a, \Delta b)\big\| - \big\|(\Delta a', \Delta b')\big\| &\le \big\|(\Delta a - \Delta a', 0)\big\| + \big\|(0, \Delta b - \Delta b')\big\| = \\ = |\Delta a - \Delta a'|\big\|(1,0)\big\| + |\Delta b - \Delta b'|\big\|(0,1)\big\| &\le \operatorname{dis} R_1\big\|(1,0)\big\| + \operatorname{dis} R_2\big\|(0,1)\big\|.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\big\|(\Delta a', \Delta b')\big\| - \big\|(\Delta a, \Delta b)\big\| \le \operatorname{dis} R_1\big\|(1,0)\big\| + \operatorname{dis} R_2\big\|(0,1)\big\|.$$

Теперь посчитаем искажение соответствия Q:

$$\operatorname{dis} Q = \sup\Big\{\Big|\big\|(\Delta a', \Delta b')\big\| - \big\|(\Delta a, \Delta b)\big\|\Big| : \big((a_i,b_i),(a_i',b_i')\big) \in Q,\ i = 1,2\Big\}.$$

Из приведённых оценок получаем $\operatorname{dis} Q \le \operatorname{dis} R_1\big\|(1,0)\big\| + \operatorname{dis} R_2\big\|(0,1)\big\|$. Ввиду того, что Q — соответствие из $\mathcal{R}(R, R')$, по предложению 5 имеем

$$d_{GH}(R, R') \le \frac{1}{2}\Big(\operatorname{dis} R_1\big\|(1,0)\big\| + \operatorname{dis} R_2\big\|(0,1)\big\|\Big).$$

$\square$

Пусть на множествах X и Y заданы расстояния $|x_1x_2|_X$ и $|y_1y_2|_Y$ соответственно, где $x_i \in X, y_i \in Y$, $i = 1,2$. Напомним, что *расстояние Чебышева* на $X \times Y$ называется функция $\big|(x_1,y_1)(x_2,y_2)\big| = \max\big\{|x_1x_2|_X, |y_1y_2|_Y\big\}$, где $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in X \times Y$. Далее класс M будем рассматривать с расстоянием Громова–Хаусдорфа, которое по предложению 3 является псевдометрикой на M. Тогда расстояние Чебышева на $M \times M$ соответственно будет задано функцией $\big|(A_1,B_1)(A_2,B_2)\big| = \max\big\{d_{GH}(A_1,A_2), d_{GH}(B_1,B_2)\big\}$, где $A_1, A_2, B_1, B_2 \in M$.

Теорема 2. *Отображение $M \times M \to \mathcal{B}(M)$ с расстоянием Чебышева на $M \times M$ такое, что $(A,B) \mapsto \mathcal{R}(A,B)$, является липшицевым с константой Липшица равной $\big\|(1,0)\big\| + \big\|(0,1)\big\|$.*

Доказательство. Пусть A', B' — произвольные метрические пространства из M, тогда

$$d_H\big(\mathcal{R}(A,B),\mathcal{R}(A',B')\big) = \\ = \max\Big\{\sup_{R\in\mathcal{R}(A,B)} |R\,\mathcal{R}(A',B')|,\ \sup_{R'\in\mathcal{R}(A',B')} |\mathcal{R}(A,B)\,R'|\Big\}.$$

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Найдем соответствия $R_1 \in \mathcal{R}(A,A')$ и $R_2 \in \mathcal{R}(B,B')$ такие, что

$$\frac{1}{2}\operatorname{dis} R_1 \le \varepsilon + d_{GH}(A,A')$$

и

$$\frac{1}{2}\operatorname{dis} R_2 \le \varepsilon + d_{GH}(B,B').$$

Положим $P'(R) = R_1^{-1}\circ R\circ R_2 \in \mathcal{R}(A',B')$ и $P(R') = R_1\circ R'\circ R_2^{-1} \in \mathcal{R}(A,B)$. Тогда

$$d_H\big(\mathcal{R}(A,B),\mathcal{R}(A',B')\big) \le \\ \le \max\Big\{\sup_{R\in\mathcal{R}(A,B)} d_{GH}\big(R,P'(R)\big),\ \sup_{R'\in\mathcal{R}(A',B')} d_{GH}\big(P(R'),R'\big)\Big\}.$$

Но, по теореме 1, имеем

$$d_{GH}\big(R,P'(R)\big) \le \frac{1}{2}\Big(\operatorname{dis} R_1\big\|(1,0)\big\| + \operatorname{dis} R_2\big\|(0,1)\big\|\Big)$$

и

$$d_{GH}\big(P(R'),R'\big) \le \frac{1}{2}\Big(\operatorname{dis} R_1\big\|(1,0)\big\| + \operatorname{dis} R_2\big\|(0,1)\big\|\Big).$$

Отсюда следует, что

$$d_H\big(\mathcal{R}(A,B),\mathcal{R}(A',B')\big) \le \frac{1}{2}\Big(\operatorname{dis} R_1\big\|(1,0)\big\| + \operatorname{dis} R_2\big\|(0,1)\big\|\Big) \le \\ \le \bigg(\max\Big\{d_{GH}(A,A'), d_{GH}(B,B')\Big\} + \varepsilon\bigg)\cdot\Big(\big\|(1,0)\big\| + \big\|(0,1)\big\|\Big) = \\ = \Big(\big|(A,B)(A',B')\big| + \varepsilon\Big)\cdot\Big(\big\|(1,0)\big\| + \big\|(0,1)\big\|\Big).$$

Устремим ε к нулю, получим неравенство

$$d_H\big(\mathcal{R}(A,B),\mathcal{R}(A',B')\big) \le \big|(A,B)(A',B')\big|\cdot\Big(\big\|(1,0)\big\| + \big\|(0,1)\big\|\Big),$$

что и требовалось. □

Следствие 7. *Отображение $M\times M \to \mathcal{B}(M)$ с расстоянием Чебышева на $M\times M$ такое, что $(A,B)\mapsto \mathcal{R}(A,B)$, является непрерывным.*

Теорема 3. *Отображение $\mathcal{M}\times\mathcal{M}\to\mathcal{H}(\mathcal{M})$ с метрикой Чебышева на $\mathcal{M}\times\mathcal{M}$ такое, что $(A,B)\mapsto\mathcal{R}_c(A,B)$, является липшицевым с константой Липшица равной $\big\|(1,0)\big\|+\big\|(0,1)\big\|$.*

Доказательство. Пусть A',B' — произвольные метрические пространства, тогда

$$d_H\big(\mathcal{R}_c(A,B),\mathcal{R}_c(A',B')\big)= \\ =\max\Big\{\sup_{R\in\mathcal{R}_c(A,B)}|R\,\mathcal{R}_c(A',B')|,\ \sup_{R'\in\mathcal{R}_c(A',B')}|\mathcal{R}_c(A,B)\,R'|\Big\}.$$

Возьмем произвольные соответствия $R_1\in\mathcal{R}_c(A,A')\cap\mathcal{R}_{\rm opt}(A,A')$ и $R_2\in\mathcal{R}_c(B,B')\cap\mathcal{R}_{\rm opt}(B,B')$, которые существуют в силу предложения 6. Положим $P'(R)=R_1^{-1}\circ R\circ R_2\in\mathcal{R}(A',B')$, и $P(R')=R_1\circ R'\circ R_2^{-1}\in\mathcal{R}(A,B)$. Тогда

$$d_H\big(\mathcal{R}_c(A,B),\mathcal{R}_c(A',B')\big)\le \\ \le\max\Big\{\sup_{R\in\mathcal{R}_c(A,B)}d_{GH}\big(R,\overline{P'(R)}\big),\ \sup_{R'\in\mathcal{R}_c(A',B')}d_{GH}\big(\overline{P(R')},R'\big)\Big\}.$$

Но, по теореме 1, имеем

$$d_{GH}\big(R,\overline{P'(R)}\big)=\frac{1}{2}d_{GH}\big(RP'(R)\big)\le\operatorname{dis}R_1\big\|(1,0)\big\|+\operatorname{dis}R_2\big\|(0,1)\big\|$$

и

$$d_{GH}\big(\overline{P(R')},R'\big)=\frac{1}{2}d_{GH}\big(P(R')R'\big)\le\operatorname{dis}R_1\big\|(1,0)\big\|+\operatorname{dis}R_2\big\|(0,1)\big\|.$$

Отсюда следует, что

$$d_H\big(\mathcal{R}_c(A,B),\mathcal{R}_c(A',B')\big)\le\frac{1}{2}\Big(\operatorname{dis}R_1\big\|(1,0)\big\|+\operatorname{dis}R_2\big\|(0,1)\big\|\Big)\le \\ \le\max\Big\{d_{GH}(A,A'),d_{GH}(B,B')\Big\}\cdot\Big(\big\|(1,0)\big\|+\big\|(0,1)\big\|\Big)= \\ =\big|(A,B)(A',B')\big|\cdot\Big(\big\|(1,0)\big\|+\big\|(0,1)\big\|\Big),$$

что и требовалось. □

Следствие 8. *Отображение $\mathcal{M}\times\mathcal{M}\to\mathcal{H}(\mathcal{M})$ с метрикой Чебышева на $\mathcal{M}\times\mathcal{M}$ такое, что $(A,B)\mapsto\mathcal{R}_c(A,B)$, является непрерывным.*

Список литературы

[1] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[2] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A., *Realizations of Gromov-Hausdorff Distance*, ArXiv eprints, arXiv:1603.08850 (2016).