Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

КУРСОВАЯ РАБОТА

Свойства расстояния Громова-Хаусдорфа до симплексов
Properties of Gromov-Hausdorff distance to simplexes

Выполнила студентка 3 курса
Е. А. Лычагина
Научный руководитель
д. ф. м. н., проф. А. А. Тужилин

Москва 2019

Введение

В данной работе исследуется вопрос, можно ли отличить конечное метрическое пространство от компактного бесконечного метрического пространства с помощью измерения расстояний от них до симплексов, т. е. конечных метрических пространств, в которых все ненулевые расстояния равны между собой. Этот результат доказан в случае, когда количество точек в конечном метрическом пространстве не совпадает с числом компонент компактного бесконечного метрического пространства. В противном случае найден контрпример, который опровергает выдвинутую гипотезу.

1. Основные определения и предварительные результаты

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между точками $x, y \in X$ будем обозначать через $|xy|$.

Определение 1.1. *Расстоянием Хаусдорфа между подмножествами A и B пространства X* называется величина

$$d_H(A,\, B) = \max\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}|ab|,\, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}|ab|\}.$$

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку $(X',\, Y',\, Z)$, состоящую из метрического пространства Z и его двух подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовём *реализацией пары* $(X,\, Y)$.

Определение 1.2. *Расстоянием Громова-Хаусдорфа между метрическими пространствами X и Y* называется величина

$$d_{GH}(X,\, Y) = \inf\{r : \exists(X',\, Y',\, Z), d_H(X',\, Y') \le r\}.$$

Утверждение 1.3 ([3])**.** *Пусть X и Y — метрические пространства. Тогда, если* $\operatorname{diam} X <$ $< \infty$*, то*

$$2d_{GH}(X,\, Y) \ge |\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y\,|.$$

Определение 1.4. Пусть X и Y — произвольные непустые множества. *Отношением между X и Y* называется любое подмножество декартова произведения $X \times Y$. Обозначим через $\mathcal{P}(X,\, Y)$ множество всех непустых отношений между X и Y.

Для непустых $X' \subset X$, $Y' \subset Y$ и произвольного $\sigma \in \mathcal{P}(X,\, Y)$ положим

$$\sigma\,|_{X'\times Y'} = \big\{(x,\, y) \in \sigma : x \in X',\, y \in Y'\big\}.$$

Определение 1.5. Пусть $\pi_X : (x,\, y) \mapsto x$ и $\pi_Y : (x,\, y) \mapsto y$ — канонические проекции. Отношение $\sigma \in \mathcal{P}(X,\, Y)$ называется *соответствием*, если ограничения π_X и π_Y на σ сюръективны. Обозначим множество всех соответствий между X и Y через $\mathcal{R}(X,\, Y)$.

Определение 1.6. Пусть X и Y — произвольные метрические пространства. *Искажением отношения* $\sigma \in \mathcal{P}(X,\, Y)$ называется величина

$$\operatorname{dis}\sigma = \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big| : (x,\, y), (x',\, y') \in \sigma\Big\}.$$

Утверждение 1.7 ([3])**.** *Для любых метрических пространств X и Y верно равенство*

$$2d_{GH}(X,\, Y) = \inf\big\{\operatorname{dis} R :\, R \in \mathcal{R}(X,\, Y)\big\}.$$

Определение 1.8. Назовём *симплексом* метрическое пространство, в котором все ненулевые расстояния равны между собой. Обозначим через $\lambda\Delta_m$ симплекс, имеющий m точек, попарные расстояние между которыми равны λ.

Утверждение 1.9 ([1]). *Пусть M — конечное метрическое пространство, $n = \#M$. Тогда для каждого $m \in \mathbb{N}$, $m > n$, и $\lambda > 0$ имеем*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m,\, M) = \max\{\lambda,\, \operatorname{diam} M - \lambda\}.$$

Пусть X — произвольное метрическое пространство, и A, $B \subset X$ — его непустые подмножества. Положим

$$|AB| = \inf\bigl\{|ab| : a \in A,\, b \in B\bigr\};$$

$$|AB|' = \sup\bigl\{|ab| : a \in A,\, b \in B\bigr\}.$$

Конструкция 1.10. Обозначим через $\mathcal{D}_k(M)$ семейство всевозможных разбиений множества M на k непустых подмножеств. Пусть теперь M — это метрическое пространство и $D = \{M_1, \cdots, M_k\} \in \mathcal{D}_k(M)$. Положим $\operatorname{diam} D = \max\{\operatorname{diam} M_1, \cdots, \operatorname{diam} M_k\}$, $\alpha(D) = \inf\bigl\{|M_iM_j| : i \neq j\bigr\}$, $\beta(D) = \sup\bigl\{|M_iM_j|' : i \neq j\bigr\}$. Отметим, что при $k = 1$ имеем $\alpha(D) = \infty$ и $\beta(D) = 0$.

Утверждение 1.11 ([1]). *Пусть X — компактное метрическое пространство и $m \in \mathbb{N}$, $m \le \#X$. Тогда для любого $\lambda > 0$ имеем*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m,\, X) = \inf\Bigl\{\max\bigl\{\operatorname{diam} D,\, \lambda - \alpha(D),\, \beta(D) - \lambda\bigr\} : D \in \mathcal{D}_m(X)\Bigr\}.$$

Для произвольного метрического пространства X положим

$$\varepsilon(X) = \inf\bigl\{|xy| : x,\, y \in X,\, x \neq y\bigr\}.$$

Утверждение 1.12 ([1]). *Пусть M — конечное метрическое пространство, $n = \#M$. Тогда для каждого $\lambda > 0$ имеем*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_n,\, M) = \max\bigl\{\lambda - \varepsilon(M),\, \operatorname{diam} M - \lambda\bigr\}.$$

Утверждение 1.13 ([2]). *Рассмотрим два трёхточечных пространства $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Пусть расстояния в первом пространстве равны $a_1 \le b_1 \le c_1$, а во втором равны $a_2 \le b_2 \le c_2$. Тогда*

$$2d_{GH}(X,\, Y) = \max\bigl\{|a_1 - a_2|,\, |b_1 - b_2|,\, |c_1 - c_2|\bigr\}.$$

2. Основные результаты

Гипотеза 2.1. Пусть M — конечное метрическое пространство, X — бесконечное компактное метрическое пространство. Тогда существуют такие $\lambda > 0$ и $m \in \mathbb{N}$, что $d_{GH}(\lambda\Delta_m,\, M) \neq$ $\neq d_{GH}(\lambda\Delta_m,\, X)$.

Предложение 2.2. *Пусть M — конечное метрическое пространство, X — бесконечное компактное метрическое пространство. Предположим, что нашлось натуральное число $m > \#M$ и $D_0 \in \mathcal{D}_m(X)$, для которого $\alpha(D_0) > 0$. Тогда существует такое $\lambda > 0$, что $d_{GH}(\lambda\Delta_m,\, M) \neq d_{GH}(\lambda\Delta_m,\, X)$.*

Доказательство. Положим $n = \#M$. Возьмём $\lambda > \frac{\operatorname{diam} M}{2}$. Тогда для любого $m > n$ по утверждению 1.9 имеем $d_{GH}(\lambda\Delta_m,\, M) = \frac{\lambda}{2}$.

Пусть выбранное λ удовлетворяет также следующим неравенствам:

$$\lambda > \operatorname{diam} D_0\,;$$

$$\lambda > \frac{\beta(D_0)}{2}.$$

Тогда $\max\big\{\operatorname{diam} D_0,\ \lambda-\alpha(D_0),\ \beta(D_0)-\lambda\big\} < \lambda$. Отсюда

$$\inf\Big\{\max\big\{\operatorname{diam} D,\ \lambda-\alpha(D),\ \beta(D)-\lambda\big\} : D \in \mathcal{D}_m\,(X)\Big\} < \lambda.$$

Из утверждения 1.11 следует, что

$$d_{GH}(\lambda\Delta_m,\ X) < \frac{\lambda}{2} = d_{GH}(\lambda\Delta_m,\ M).$$

□

Замечание 2.3. Заметим, что если количество компонент связности пространства X больше, чем $\#M$, то можно взять m равное числу компонент X. Тогда в качестве $D_0 \in \mathcal{D}_m(X)$ берём разбиение X на компоненты. В этом случае $\alpha(D_0) > 0$, так как расстояние между компактами всегда положительно. Но тогда применимо предложение 2.2 , и в этом случае гипотеза 2.1 подтверждена.

Предложение 2.4. *Пусть M — конечное метрическое пространство, X — бесконечное компактное метрическое пространство такое, что число его компонент меньше, чем $\#M$. Тогда существуют такие $\lambda > 0$ и $m \in \mathbb{N}$, что $d_{GH}(\lambda\Delta_m,\ M) \neq d_{GH}(\lambda\Delta_m,\ X)$.*

Доказательство. Возьмём $m = \#M$. По принципу Дирихле хотя бы одна из компонент X распадётся на два или более элементов разбиения и тогда для любого $D \in \mathcal{D}_m(X)$ верно равенство $\alpha(D) = 0$.

Заметим, что при достаточно большом λ по утверждению 1.11 $2d_{GH}(\lambda\Delta_m,\ X) = \lambda$. А по утверждению 1.12 $2d_{GH}(\lambda\Delta_m,\ M) = \lambda - \varepsilon(M) > \lambda$, что и требовалось доказать. □

Замечание 2.5. Заметим, что мы доказали гипотезу в том случае, когда число компонент X не совпадает $\#M$, что даёт нам довольно широкий класс пространств, который мы умеем различать с помощью расстояний до симплексов. Однако, в случае равенства этих чисел существует контрпример, опровергающий утверждение гипотезы 2.1 .

Контрпример 2.6. Пусть M — трёхточечное пространство с расстояниями $a < b < c$, а X — дизъюнктное объединение связных компактных подмножеств X_1, X_2, X_3 таких, что диаметры всех трёх равны $d < \frac{1}{2}\min\{c,\, c-a\}$, и расстояния между любыми точками из X_1 и X_2, X_1 и X_3, X_2 и X_3 равны соответственно a, b, c. Тогда

$$d_{GH}(\lambda\Delta_m, M) = d_{GH}(\lambda\Delta_m, X)$$

для произвольных $\lambda > 0$ и всех натуральных $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Заметим, что формулу из утверждения 1.11 можно записать в виде

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m,\ X) = \inf\Big\{\max\big\{\operatorname{diam} D,\ \lambda-\alpha(D),\ \operatorname{diam} X-\lambda\big\} : D \in \mathcal{D}_m\,(X)\Big\} = \\ = \inf\big\{f(D) : D \in \mathcal{D}_m\,(X)\big\}, \quad (1)$$

где $f(D) = \max\big\{\operatorname{diam} D,\ \lambda-\alpha(D),\ \operatorname{diam} X-\lambda\big\}$. Действительно, если диаметрально противоположные точки попали в один элемент разбиения, то $\operatorname{diam} D = \operatorname{diam} X > \operatorname{diam} X - \lambda \geq$

$\geq \beta(D) - \lambda$. Если же никакие две диаметрально противоположные точки не попали в один элемент разбиения, то $\beta(D) = \operatorname{diam} X$.

Пусть $m > 3$. Тогда $\alpha(D) = 0$ и $f(D) = \max\{\operatorname{diam} D, \lambda, \operatorname{diam} X - \lambda\}$. По условию $\operatorname{diam} M = \operatorname{diam} X = c$. По утверждению 1.9

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m, M) = \max\{\lambda, c-\lambda\} = \begin{cases} \lambda, & \text{если } \lambda \geq c/2; \\ c-\lambda, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажем, что это совпадает с $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X)$.

Пусть $\lambda \geq c/2$, тогда $f(D) = \max\{\operatorname{diam} D, \lambda\}$. Возьмём D_0 такое, что никакие две точки из разных X_i не лежат в одном элементе разбиения D_0. Тогда $\operatorname{diam} D_0 \leq d < c/2$ и $f(D_0) = \lambda$. Если нашлось такое D, что $\operatorname{diam} D > \lambda$, то в окончательной формуле для $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X)$ за счёт inf останется только λ. Следовательно, $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \lambda$.

Теперь пусть $\lambda < c/2$. Здесь $f(D) = \max\{\operatorname{diam} D, c-\lambda\}$. Возьмём то же самое D_0, что и в предыдущем случае, тогда $f(D_0) = c - \lambda$. Следуя аналогичным рассуждениям, получаем $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = c - \lambda$, что и требовалось доказать.

Пусть $m = 3$. По утверждению 1.12

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_3, M) = \max\{\lambda - \varepsilon(M), \operatorname{diam} M - \lambda\} = \max\{\lambda - a, c - \lambda\} = \begin{cases} \lambda - a, & \text{если } \lambda \geq \frac{c+a}{2}; \\ c-\lambda, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Рассмотрим разбиение D_0 пространства X на компакты X_1, X_2, X_3. Тогда $\alpha(D_0) = a$, $\operatorname{diam} D_0 = d < \frac{c-a}{2}$. Следовательно,

$$f(D_0) = \max\{\operatorname{diam} D_0, \lambda - a, c - \lambda\} = \begin{cases} \lambda - a, & \text{если } \lambda \geq \frac{c+a}{2}; \\ c-\lambda, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следуя рассуждениям, аналогичным тем, что приведены выше, получаем

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_3, X) = \inf\{f(D) : D \in \mathcal{D}_3(X)\} = \begin{cases} \lambda - a, & \text{если } \lambda \geq \frac{c+a}{2}; \\ c-\lambda, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть $m = 2$. Заметим, что двухточечный симплекс $\lambda\Delta_2$ можно считать трёхточечным пространством с одной раздвоенной точкой и расстояниями $0, \lambda, \lambda$. Тогда применимо утверждение 1.13 и $2d_{GH}(\lambda\Delta_2, M) = \max\{a, |\lambda - b|, |c - \lambda|\} = \max\{a, \lambda - b, c - \lambda\}$.

Теперь покажем, что $2d_{GH}(\lambda\Delta_2, X) = \max\{a, \lambda - b, c - \lambda\}$. Заметим, что для любого $D \in \mathcal{D}_2(X)$ верно $\operatorname{diam} D \geq a$ и $\alpha(D) \leq b$, так как по принципу Дирихле в одном элементе разбиения окажутся точки хотя бы из двух компактов, из которых состоит X. Следовательно, $2d_{GH}(\lambda\Delta_2, X) \geq \max\{a, \lambda - b, c - \lambda\}$. Заметим, что эта оценка достигается при разбиении X на $X_1 \cup X_2$ и X_3, что и требовалось доказать.

$\square$

Список литературы

[1] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Geometry of Compact Metric Space in Terms of Gromov-Hausdorff Distances to Regular Simplexes, ArXiv e-prints, arXiv:1607.06655.

[2] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Gromov-Hausdorff Distance, Irreducible Correspondences, Steiner Problem, and Minimal Fillings, ArXiv e-prints, arXiv:1604.06116.

[3] Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.