ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА Дифференциальной геометрии и приложений

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

«ПРОБЛЕМА ШТЕЙНЕРА В ПРОСТРАНСТВАХ С ЕВКЛИДОВОЙ МЕТРИКОЙ ГРОМОВА–ХАУСДОРФА»

Выполнила студентка
607 группы
Малышева Ольга Сергеевна

подпись студента

Научный руководитель:
Профессор, д.ф-м.н. Тужилин Алексей Августинович

подпись научного руководителя

Москва
2019 г.

Содержание

1 Введение

Метрика Хаусдорфа — это функция расстояния Хаусдорфа на множестве всех ограниченных и замкнутых подмножеств метрического пространства. Впервые упоминания о ней появляются в книге «Теория множеств» Хаусдорфа. Дэвид Эдвардс опубликовал в 1975 году статью [1], где определил расстояние между метрическими пространствами. Он также обнаружил некоторые его свойства. А в 1981 году советский по происхождению, а позже французский математик, М.Л.Громов заново ввел специальное расстояние между произвольными метрическими пространствами, называемое расстоянием Громова–Хаусдорфа [2], дав определение, эквивалентное определению Эдвардса. Это обобщение метрики Хаусдорфа. Говоря неформально, метрика Громова–Хаусдорфа позволяет выяснить, насколько «хорошо» можно совместить два метрических пространства. Она имеет практическое применение и играет важную роль в теории распознавания образов.

Facundo Memoli, изучавший свойства этой метрики, посвятил ей несколько статей, в том числе в [3] рассматривается метрика Громова–Хаусдорфа в евклидовых пространствах, она сравнивается с метрикой Громова–Хаусдорфа в произвольных метрических пространствах, даются некоторые утверждения о связи двух метрик, оценки. Вообще, метрика Громова–Хаусдорфа определяется как инфимум расстояния по Хаусдорфу по результатам изометрического вложения в метрические пространства, а в случае евклидово инвариантной метрики Громова–Хаусдорфа ограничиваемся только изометрическими вложениями в конкретное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, или такими вложениями, которые отличаются на сохраняющее ориентацию движение $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что компакт находится в s-положении между двумя другими компактами, если он находится в положении «между» ними и удален на расстояние s от первого из них, см.ниже. В дипломной работе А.Кисловской рассматриваются псевдоконфигурации: такие пары компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$, что в s-положении количество компактов конечно. Также приведены примеры псевдоконфигураций в пространствах, наделенных этой метрикой, утверждения о связи количества компактов в s-положении относительно двух метрик [4], о связи конфигураций (впервые определены в работе [5]) и псевдоконфигураций.

В настоящей работе основное внимание уделяется евклидово инвариантной метрике Громова-Хаусдорфа. Это — метрика на множестве непустых компактов в евклидовом пространстве, рассматриваемых с точностью до сохраняющего ориентацию движения. Обозначим через $\mathcal{G} = \mathrm{Iso}_+(\mathbb{R}^n)$ группу таких движений, тогда эта группа естественным образом действует на пространстве $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ непустых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$, наделенном метрикой Хаусдорфа. Пространство $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ расслаивается на орбиты этого действия. На полученном пространстве орбит вводится стандартным образом функция расстояния как точная нижняя грань расстояний Хаусдорфа между точками орбит. Получаем факторпространство $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)/G$, свойства которого изучаются. Для нахождения минимального расстояния, о котором говорилось выше, необходимо понять, при каких условиях оно достигается. Поэтому также рассматриваются примеры положений различных пар компактов, в которых достигается минимум расстояния по Хаусдорфу.

В случаях, когда один из компактов — одноточечный, изучение оптимальных положений приводит к понятию чебышевского центра, так как размещение одноточечного компакта в чебышевском центре произвольного компакта и есть оптимальное положение этой пары. Вопрос существования и единственности чебышесвких центров поднимался в работах различных специалистов в области геометрии и функционального анализа. Так, в [6] обобщается понятие чебышевского центра и изучаются конечные сети для ограниченных подмножеств плоскости и сферы. Е.Н. Сосовым получены достаточные условия существования и единственности чебышевского центра непустых ограниченных множеств геодезических пространств [7]. Некоторые результаты помогли установить связь оптимальных положений гомотетичных компактов с чебышевскими центрами.

Задача поиска оптимальных положений для пары компактов привела к изучению проблемы Штейнера. Эта проблема берет свое начало от задачи поиска точки, сумма расстояний от которой до заданных трех точек была бы минимальной. Рассматриваются ограниченно-компактные пространства, в частности, пространства, наделенные евклидово инвариантной метрикой Громова–Хаусдорфа. В [12] показано, что в таких пространствах проблема Штейнера разрешима. В настоящей работе рассматриваются множество $\mathcal{X}$ компактов специального вида. Его элементами являются окрестности отрезков (длины отрезков или радиусы окрестностей могут принимать нулевые значения). Для указанного множества изучается проблема Штейнера в смысле евклидовой метрики Громова–Хаусдорфа.

Выражаю благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. профессору А.А. Тужилину, а также д.ф.-м.н. профессору А.О. Иванову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

2 Основные определения

Всюду ниже M обозначает метрическое пространство с функцией расстояния d, $\mathcal{P}(M)$ — семейство непустых подмножеств M, а $\mathcal{H}(M)$ — семейство непустых замкнутых ограниченных подмножеств M. Обозначим через $\mathcal{G}$ группу движений в $\mathbb{R}^n$, сохраняющих ориентацию. В частности, будем рассматривать $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ с введенной на нем эквивалентностью ν: два элемента будем считать эквивалентными, если один из другого получается некоторым движением $O \in \mathcal{G}$. Обозначим через $\mathcal{H}_o(\mathbb{R}^n)$ пространство таких классов эквивалентности. Для каждого $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ через $[A]$ будем обозначать класс $\mathcal{H}_o(\mathbb{R}^n)$, содержащий A.

Определение 2.1. *Замкнутой окрестностью радиуса r точки $x \in M$* называется множество $B_r(x) = \{y \in M : d(x, y) \le r\}$.

Определение 2.2. Определим *расстояние от точки y до произвольного множества $A \in \mathcal{P}(M)$*: $d(y, A) = \inf_{a\in A} \big\{d(y, a)\big\}$.

Определение 2.3. *Замкнутой окрестностью радиуса r множества $A \in \mathcal{P}(M)$* называется множество $B_r(A) = \big\{y \in M : d(y, A) \le r\big\}$.

Определение 2.4. Пусть A и B — элементы $\mathcal{P}(M)$. *Расстоянием по Хаусдорфу* между этими множествами называется величина

$$d_H(A, B) = \inf\Big\{r : \big(A \subseteq B_r(B)\big) \wedge \big(B \subseteq B_r(A)\big)\Big\}.$$

Замечание 2.5. Хорошо известно, что d_H является метрикой на множестве всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства [8].

Определение 2.6. Пусть A и B — элементы $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$. *Расстоянием в евклидово инвариантной метрике Громова–Хаусдорфа* между A и B называется величина

$$\mathrm{d}_{EGH}(A, B) = \inf_{O\in\mathcal{G}}\Big\{\mathrm{d}_H(A, OB)\Big\}.$$

Определение 2.7. Движение $O \in \mathcal{G}$, на котором достигается $d_{EGH}(A,B)$, будем называть *оптимальным*, а пару (A, OB) — *оптимальным взаимным расположением.*

Замечание 2.8. *Оптимальное движение всегда существует* [3]*, а d_{EGH} порождает метрику на $\mathcal{H}_o(\mathbb{R}^n)$, которую мы будем обозначать тем же образом.*

Определение 2.9. Пусть X и Y — произвольные непустые компактные метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X,Y). *Расстоянием* $d_{GH}(X,Y)$ *по Громову–Хаусдорфу между* X *и* Y назовем точную нижнюю грань чисел ρ, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X,Y) такая, что $d_H(X', Y') \le \rho$.

Определение 2.10. Величина $\sup\limits_{x,y \in A} d(x,y)$ называется *диаметром* множества $A \subset M$ и обозначается $\operatorname{diam} A$.

Определение 2.11. *Чебышевский центр* множества $A \in \mathcal{H}(M)$ — это центр шара в M с наименьшим возможным радиусом, которому принадлежит A; радиус этого шара называется *чебышевским радиусом.*

Предложение 2.12. *Для любого компактного подмножества $\mathbb{R}^n$ чебышевский центр существует и определен однозначно* [9].

Замечание 2.13. Для центрально-симметричных компактов в $\mathbb{R}^n$ чебышевский центр совпадает с центром симметрии. (Если бы это было не так, то его центрально-симметричная копия также являлась бы чебышевским центром, что противоречит единственности.)

Замечание 2.14. Чебышевский центр в общем случае не единственный. Например, рассмотрим в качестве M плоскость с манхеттенским расстоянием, заданным нормой $\big|\big|(\mathrm{x,y})\big|\big|=|\mathrm{x}|+|\mathrm{y}|$, возьмем в качестве A двухточечное множество $A=\big\{(0,0),(1,1)\big\}$, тогда множество чебышевских центров — это отрезок $\big[(1,0),(0,1)\big]$.

Определение 2.15. *Сегментом* с концами в точках A и B метрического пространства (M,d) называется множество всех его точек C, лежащих между A и B, то есть таких, что $d(A,B) = d(A,C) + d(B,C)$.

Определение 2.16. Точка C находится в *s-положении между точками A и B*, если она лежит между ними и $d(A,C) = s$, где $0 \le s \le d(A,B)$.

Определение 2.17. Пусть X — конечное множество, а $G = (V,E), V \subset M$, — некоторый связный граф. Будем говорить, что G *соединяет* X, если $X \subset V$. Для каждого такого графа определены длины его рёбер $e = \{u,v\} \in E$ как расстояния $d(u,v)$ между их вершинами, а также длина $d(G)$ самого графа G как сумма длин всех его рёбер.

Определение 2.18. Конечное множество X называется *границей* всех графов, соединяющих X. Вершины, лежащие в X, называются *граничными вершинами*, а вершины, лежащие в $V \setminus X$, названются *внутренними вершинами графа* G.

Определение 2.19. Граф G, соединяющий X, минимально возможной длины $d(G)$, является деревом, которое называется *минимальным деревом Штейнера на* X.

Замечание 2.20. Минимальное дерево Штейнера существует не всегда. Например, если рассмотреть евклидову плоскость без одной точки, то в полученном метрическом пространстве не существует минимального дерева Штейнера, соединяющего вершины правильного треугольника, центром которого является выколотая точка.

Определение 2.21. *Точками Штейнера* называются внутренние вершины минимального дерева Штейнера.

Определение 2.22. *Точкой Ферма* для трехточечной границы $\{A_1, A_2, A_3\} \subset M$ называется такая точка $S \in M$, что $\sum_{i=1}^{3} d(A_i, S)$ минимально.

Определение 2.23. Пусть (M, d) — конечное псевдометрическое пространство, $G = (V, E)$ — граф, соединяющий M, и $\omega\colon E \to \mathbb{R}_+$ — некоторое отображение, называемое *весовой функцией* и порождающее взвешенный граф (G, ω). Для произвольного подграфа H взвешенного графа (G, ω), сумму весов всех ребер из H назовем *весом* этого подграфа и будем обозначать через $\omega(H)$. В частности, мы определили вес $\omega(\gamma)$ каждого пути γ, а также вес $\omega(G)$ самого графа G.

Функция ω порождает псевдометрику d_ω на V: *расстоянием* $d_\omega(v, w)$ *между вершинами* $v, w \in V$ называется минимальный вес путей, соединяющих эти вершины.

Определение 2.24. Взвешенный граф $\mathcal{G}$ называется *заполнением пространства* (M, d), если для любых точек p, $q \in M$ имеем $d(p, q) \le d_\omega(p, q)$.

Определение 2.25. *Минимальным заполнением* называется заполнение $\mathcal{G}_0$ такое, что $\omega(\mathcal{G}_0) = \inf_{\mathcal{G}} \omega(\mathcal{G})$.

Замечание 2.26. Минимальное заполнение существует всегда [10].

3 Примеры оптимальных положений

Для начала приведем тривиальную лемму.

Лемма 3.1. *Пусть A и B — компакты некоторого метрического пространства. Тогда $d_H(A, B) = r$, если и только если $A \subseteq B_r(B)$, $B \subseteq B_r(A)$, и для любого $0 < s < r$ по крайней мере одно из условий $A \subseteq B_s(B)$ и $B \subseteq B_s(A)$ не выполняется.*

Рассмотрим несколько примеров оптимальных положений пар компактов в $\mathbb{R}^n$.

Предложение 3.2. *Пусть $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, $B = \{b\} \in \mathbb{R}^n$. Тогда компакты находятся в оптимальном положении, если и только если b совпадает с чебышевским центром компакта A.*

Доказательство. Поместим b в чебышевский центр компакта A. Положим $r = d_H(A, B)$, тогда r — радиус минимального замкнутого шара, содержащего компакт A, таким образом, r — чебышевский радиус. Покажем, что для любой $b' \neq b$ имеем $d_H\bigl(A, \{b'\}\bigr) > r$. Пусть это не так, то есть существует $b' \neq b$, для которой $d_H\bigl(A, \{b'\}\bigr) \le r$. Из предыдущей леммы вытекает, что $A \subseteq B_r(b')$, поэтому b' — чебышевский центр, что противоречит его единственности в $\mathbb{R}^n$ [2]. $\square$

Из предложения 3.2 вытекают следующие результаты.

Следствие 3.3. *Любое компактное подмножество отрезка, содержащее его граничные точки, в паре с одноточечным находится в оптимальном положении тогда и только тогда, когда одноточечный помещен в центр отрезка.*

Следствие 3.4. *В оптимальном положении трехточечного и одноточечного компактов одноточечный компакт есть центр описанной окружности треугольника, образованного трехточечным компактом, если треугольник остроугольный или прямоугольный, либо середина наибольшей стороны.*

Предложение 3.5. *Пусть $A = \{a_1, a_2\}, B = \{b_1, b_2\}$. Компакты A и B находятся в оптимальном положении, если и только если их центры совмещены и точки обоих компактов находятся на одной прямой.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $2R = d(a_1, a_2) \geq d(b_1, b_2) = 2r$. Совместим центры компактов так, чтобы точки a_1, b_1, b_2, a_2 оказались в таком порядке на одной прямой. Положим $\varepsilon = R - r$. В этом положении $d_H(A, B) = \varepsilon$.

Пусть существует другое положение $\{b'_1, b'_2\}$ компакта B относительно компакта A такое, что $d_H(A, B) \leq \varepsilon$. Покажем, что в этом случае выполнено:

$d(a_1, b'_1) \leq \varepsilon$ и $d(a_2, b'_2) \leq \varepsilon$, и тогда $b'_1 \in B_\varepsilon(a_1),\ b'_2 \in B_\varepsilon(a_2)$ $\bigl($или $b'_2 \in B_\varepsilon(a_1),\ b'_1 \in B_\varepsilon(a_2)$ — с точностью до переименования точек компакта $B\bigr)$.

Действительно, в противном случае, когда $d(a_1, b'_1) \leq \varepsilon$ и $d(a_1, b'_2) \leq \varepsilon$ или $d(a_2, b'_1) \leq \varepsilon$ и $d(a_2, b'_2) \leq \varepsilon$, компакт B полностью содержится в ε-окрестности одной из точек a_i компакта A, и тогда, так как $d_H(A, B) \leq \varepsilon$, то одна из точек b'_1 и b'_2 также принадлежит ε-окрестности второй точки a_j компакта A, но эти окрестности не пересекаются, так как $\varepsilon = R - r < d(a_1, a_2)/2$.

Итак, в ε-окрестности каждой точки компакта A лежит ровно одна точка компакта B. Тогда для любых $b'_1 \in B_\varepsilon(a_1)$ и $b'_2 \in B_\varepsilon(a_2)$ выполняется $d(b'_1, b'_2) \geq 2r$, причем равенство достигается, только когда точки b'_1 и b'_2 лежат на прямой, соединяющей a_1 и a_2.

Значит, точки компакта B — ближайшие точки границ ε-окрестностей точек a_1 и a_2, и расстояние по Хаусдорфу между компактами равно полуразности длин отрезков. Таким образом, оптимальное положение двух двухточеных компактов — это совмещение их центров, указанное выше. □

Следствие 3.6. *Отрезки $A = [A_1, A_2]$ и $B = [B_1, B_2]$ находятся в оптимальном положении тогда и только тогда, когда совмещены их середины и отрезки лежат на одной прямой. В частности, $d_{EGH}(A, B) = \frac{1}{2}\bigl|d(A_1, A_2) - d(B_1, B_2)\bigr|$.*

Для доказательства следствия будем пользоваться следующей леммой.

Лемма 3.7. *Пусть $I = [P, Q] \subset \mathbb{R}^n$ — произвольный отрезок и $B_r(I)$ — его замкнутая r-окрестность. Тогда множество $B_r(I)$ выпукло, и для любых $C, D \in B_r(I)$ выполняется $d(C, D) \leq d(P, Q) + 2r$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $[C, D]$ — отрезок длины $d(P, Q) + 2r$, лежащий на прямой PQ, а его середина совпадает с серединой I.*

Доказательство. Окрестность отрезка наименьшей длины — это цилиндр, к основаниям которого прикреплены полушары с центрами в концах отрезка. Так как все точки этой окрестности удалены от точек отрезка не более, чем на r, то для точки C существует точка $P' \in [PQ]$, такая что $d(C,P') \le r$, и для D существует $Q' \in [PQ]$ такая, что $d(D,Q') \le r$. Тогда

$$d(C,P') + d(P',Q') + d(Q',D) \le 2r + d(P',Q') \le 2r + d(P,Q).$$

В последнем неравенстве равенство достигается, когда $\{P',Q'\} = \{P,Q\}$; не ограничивая общности, $P = P'$ и $Q = Q'$. Тогда, в этом предположении, получаем $d(C,D) \le 2r + d(P,Q)$, где равенство достигается, когда $d(C,P) = d(D,Q) = r$. Осталось заметить, что величина $d(C,D)$ может принимать это максимальное значение, и это происходит в точности тогда, когда точки и D лежат на пересечении прямой, содержащей I, и граничных сфер окрестностей $B_r(P)$ и $B_r(Q)$. Это и означает, что отрезки $[P,Q]$ и $[C,D]$ лежат на одной прямой, и их середины совмещены. $\square$

Теперь обратимся к следствию 3.6.

Доказательство. Пусть $2R = d(A_1,A_2) \ge d(B_1,B_2) = 2r$. Покажем, что описанное в предложении положение оптимально. По лемме 3.7, отрезок наибольшей длины можно движениями поместить в окрестность второго отрезка, только когда ее радиус не меньше полуразности отрезков. В таком положении $d_H(A,B) \ge R - r$. Обратно, расстояние между любыми двумя точками A_1' и A_2' из $(R-r)$-окрестности компакта B не превосходит $2R$, опять же по лемме 3.7, и это расстояние достигается, только когда точки A_1' и A_2' лежат на прямой, содержащей $[B_1,B_2]$, и середины отрезков $[B_1,B_2]$ и $[A_1',A_2']$ совпадают. Значит, отрезок $[A_1',A_2']$ — это результат движения отрезка той же длины $[A_1,A_2]$, и других оптимальных взаимных расположений отрезков $[B_1,B_2]$ и $[A_1,A_2]$ не существует.

$\square$

Во всех вышеописанных примерах мы видим, что оптимальное положение компактов — это совмещение чебышевских центров. Возникает вопрос: всегда ли это так? Рассмотрим еще один пример оптимального положения, дающий отрицательный ответ на этот вопрос.

Предложение 3.8. *Рассмотрим трехточечный компакт $A = \{A_1,A_2,A_3\}$ и двухточечный компакт $B = \{B_1,B_2\}$, где $d(B_1,B_2) = d$. Пусть $a_3 = d(A_1,A_2)$, $a_1 = d(A_2,A_3)$, $a_2 = d(A_3,A_1)$ и $a_1 \le a_2 \le a_3$, точка M — середина $[A_2,A_3]$. Пусть $d(M,A_1) \in [d - \frac{a_1}{2}, d + \frac{a_1}{2}]$. Тогда оптимальное взаимное расположение компактов A и B описывается, с точностью до нумерации точек компакта B, следующим образом:*

1) *если $a_1 < a_2 \le a_3$, то B_1 необходимо поместить в середину $[A_2,A_3]$, а B_2 — в круг $B_{\frac{a_1}{2}}(A_1)$;*

2) *если $a_1 = a_2 < a_3$, то B_1 нужно поместить или в середину $[A_2,A_3]$, или в середину $[A_1,A_3]$, а B_2 нужно соответственно поместить в круг $B_{\frac{a_1}{2}}(A_1)$ или $B_{\frac{a_1}{2}}(A_2)$;*

3) *если $a_1 = a_2 = a_3$, то B_1 нужно поместить в середину любой стороны $[A_i,A_j]$, а B_2 — в "оставшийся круг" $B_{\frac{a_1}{2}}(A_k)$, $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$.*

Доказательство. Покажем, что расстояние по Хаусдорфу между компактами A и OB, где O — некоторое движение плоскости, сохраняющее ориентацию, не может быть меньше $a_1/2$.

Предположим противное, т.е. что $d_H(A,OB) < \frac{a_1}{2}$, и выберем произвольное ε такое, что $d_H(A,OB) < \varepsilon < \frac{a_1}{2}$. Тогда $B_\varepsilon(A) = \cup_{i=1}^3 B_\varepsilon(A_i) \supset OB$. Так как круги $B_\varepsilon(A_i)$ не пересекаются, один из них, скажем, $B_\varepsilon(A_k)$, не содержит точек из OB. Но тогда $A_k \notin B_\varepsilon(OB)$, противоречие. Таким образом, $d_{EGH}(A,B) \ge \frac{a_1}{2}$. С другой стороны, для каждого описанного в формулировке предложения взаимного расположения компактов A и B имеем $d_H(A, B) = \frac{a_1}{2}$, так что для всех таких компактов B выполняется $d_{EGH}(A, B) = \frac{a_1}{2}$, поэтому все эти взаимные расположения компактов A и B оптимальны.

Покажем теперь, что других оптимальных расположений нет. Заметим, что при оптимальном взаимном расположении компактов A и B, две точки B_1 и B_2 должны содержаться во всех трех шарах $B_{\frac{a_1}{2}}(A_i)$. Это означает, что одна из точек, скажем B_1, должна быть общей у двух шаров. Тогда она — точка касания этих шаров, а касание происходит только в середине стороны треугольника, длина которой равна a_1. Если такая сторона одна, то необходимо поместить B_1 в ее середину. Если таких сторон длины a_1 две или три, поместим B_1 в середину любой из них. Заметим, что при каждом выборе расположения точки B_1 вторая точка B_2 может быть помещена в оставшийся шар в силу условия на длину отрезка $[B_1, B_2]$. Вне оставшегося шара точку B_2 поместить нельзя, иначе расстояние по Хаусдорфу будет больше, чем $\frac{a_1}{2}$. Таким образом, всегда реализуется один из описанных случаев предложения.

□

Замечание 3.9. В указанной конструкции чебышевский центр компакта A не обязан лежать на отрезке $[M, A_1]$, где лежит чебышевский центр компакта B, поэтому, вообще говоря, чебышевские центры компактов A и B не совпадают.

Замечание 3.10. Приведенный только что пример оптимального положения также является примером, когда оптимальное положение не единственно, их даже континуум.

Приведем еще один пример, показывающий, что оптимальное положение компактов — не обязательно совмещение чебышевских центров.

Предложение 3.11. *Положение n-мерного шара B радиуса r и отрезка $A = [A_1, A_2]$, где $d(A_1, A_2) \le 2r$, оптимально, если и только если оно представляет собой совмещение центра шара с некоторой точкой отрезка.*

Доказательство. Окрестность отрезка в $\mathbb{R}^n$ — это цилиндр, к основаниям которого прикреплены полушары с центрами в концах отрезка. Следовательно, если поместить центр шара B на отрезок A, то шар B окажется в r-окрестности отрезка A. Кроме того, в силу предположения на соотношение между длиной отрезка A и диаметром шара B, при таком расположении отрезок A окажется в r-окрестности шара B, так что расстояние Хаусдорфа между такими A и B равно r. С другой стороны, если центр шара B не лежит на A, то шар B не попадает в r-окрестность отрезка A (рассмотрим точку пересечения прямой, содержащей A, с границей шара B, ту из двух, которая является дальней по отношению к отрезку A; расстояние от нее до ближайшего конца отрезка A превзойдет r), поэтому между такими A и B расстояние Хаусдорфа больше r.

□

При этом, совмещение чебышевских центров компактов в последнем примере также дает оптимальное положение.

Предложение 3.12. *Пусть даны компакты $A = [A_1, A_2]$ и B — n-мерный шар радиуса r. Тогда d_{EGH} зависит от длины отрезка: при $d(A_1, A_2) \le 4r$ имеем $d_{EGH}(A, B) = r$, при $d(A_1, A_2) \ge 4r$ выполняется $d_{EGH}(A, B) = \frac{1}{2}d(A_1, A_2) - r$. При этом, в первом случае положение компактов A и B оптимально, если и только если центр шара B находится на отрезке A так, что длина каждой связной компоненты множества $A \setminus B$ не превышает*

r. Во втором случае положение компактов A и B оптимально, если и только если центр шара B лежит в середине отрезка A.

Доказательство. Если $d(A_1, A_2) \geq 4r$, покажем, что $d_{EGH}(A, B) = \frac{1}{2}d(A_1, A_2) - r$. Предположим, существует движение плоскости O, сохраняющее ориентацию, такое, что $d_H(A, OB) = d < \frac{1}{2}d(A_1, A_2) - r$. Значит, $A \subset B_d(B)$. Так как d-окрестность шара — это шар с тем же центром радиуса $r+d$, то максимальная длина отрезка, который может содержаться в этом шаре, равна $2(r+d) < d(A_1, A_2)$ — противоречие. Значит, $d_H(A, OB) \geq \frac{1}{2}d(A_1, A_2) - r$, где равенство достигается, если поместить центр шара в середину отрезка, поэтому $d_{EGH}(A, B) = \frac{1}{2}d(A_1, A_2) - r$, и указанное расположение компактов оптимально. Оно единственно, так как если A и B находятся в оптимальном положении, и $d = d_H(A, B)$, то, как мы только что показали, длина отрезка $[A_1, A_2]$ равна диаметру шара $B_d(B)$, а такой отрезок содержится в этом шаре, если и только если его середина — центр шара.

Пусть $d(A_1, A_2) \leq 4r$. Предположим, существует движение плоскости O, сохраняющее ориентацию, такое, что $d_H(A, OB) = d < r$. Значит, $B \subset B_d(A)$. Так как d-окрестность отрезка — это цилиндр, к основаниям которого прикреплены полушары с центрами в A_1 и A_2 и радиуса d, то максимальный радиус шара, который можно поместить в эту окрестность, равен d, противоречие. Значит, $d_H(A, OB) \geq r$, где равенство достигается, если поместить центр шара в некоторую точку отрезка так, чтобы длины отрезков $[A_i, C_i]$, где C_i — соответственные точки пересечения A и граничной сферы шара B, не превышали r. Поэтому $d_{EGH}(A, B) = r$, и указанное расположение компактов оптимально. Других оптимальных положений нет, так как если центр шара B не лежит на прямой, содержащей отрезок $[A_1, A_2]$, то шар не попадает в r-окрестность отрезка. Иначе $d_{EGH}(A, B) = r$, если и только если A содержится в r-окрестности B, т.е. длины отрезков $[A_i, C_i]$ не превосходят r.

□

3.1 Реализация трехточечного метрического пространства в пространстве с евклидово инвариантной метрикой Громова-Хаусдорфа

В работе С. Илиадиса, А.О.Иванова и А.А.Тужилина [11] показано, как можно изометрично вложить конечное метрическое пространство в пространство Громова-Хаусдорфа. Тот же вопрос о счетных метрических пространствах остается открытым, как и вопрос реализации метрических пространств в евклидовых пространствах с метрикой Громова-Хаусдорфа. Мы покажем, как это сделать для трехточечного пространства.

Предложение 3.13. *Рассмотрим пространство $\{M_1, M_2, M_3\}$ с заданными расстояниями $d(M_2, M_3) = a$, $d(M_1, M_3) = b$, $d(M_1, M_2) = c$, $a \geq b \geq c$. Тогда в качестве реализации данного пространства в пространстве $\mathcal{H}_o(\mathbb{R}^n), n \geq 2$, наделенном метрикой d_{EGH}, можно взять отрезок $A = [A_1, A_2]$ длины $2(a+b)$, шар B радиуса b и отрезок $C = [C_1, C_2]$ длины $2(a+b-c)$. Множества A, B и C можно разместить в $\mathbb{R}^n$ так, чтобы для каждой пары из них это положение было оптимальным. Все такие положения описываются так*: *отрезки A и C лежат на одной прямой и их центры совпадают*; *наибольший из этих отрезков расположен так, как описано в предложении* 3.12.

Доказательство. Так как из неравенства треугольника $a - c \leq b$ следует $2(a + b - c) \leq 4b$, а из условия $a \geq b$ следует $2(a + b) \geq 4b$, то по предложению 3.12 имеем $d_{EGH}(A, B) = a$,

$d_{EGH}(B,C)=b$, а из следствия 3.6 вытекает, что $d_{EGH}(A,C)=c$. Если три компакта расположены так, что каждая пара из них находится в оптимальном положении, то отрезки должны быть совмещены так, чтобы они были на одной прямой и совпали их середины (следствие 3.6), шар и отрезок наибольшей длины — так, как описано в формулировке предложения 3.12. Таким образом, положения, которые описаны в формулировке текущего предложения, и только они — оптимальны.

$\square$

3.2 Об оптимальном положении ориентированно подобных компактов

Обращаясь к вопросу о совмещении чебышевских центров, хочется понять, в каких случаях это решает проблему поиска оптимального положения. В качестве примера разберем случай, когда компакты отличаются на подобие, сохраняющее ориентацию.

Приведем несколько вспомогательных результатов. Для каждого $X \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ через O_X и R_X будем обозначать его чебышевские центр и радиус.

Лемма 3.14. *Для произвольного $X \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon > 0$ имеем $B_\varepsilon(X) \subset B_{R_X+\varepsilon}(O_X)$.*

Доказательство. Так как все точки компакта X удалены от O_X не более, чем на R_X, то точки компакта $B_\varepsilon(X)$ удалены от O_X не более, чем на $R_X+\varepsilon$ в силу неравенства треугольника. Но это и означает, что $B_\varepsilon(X) \subset B_{R_X+\varepsilon}(O_X)$. $\square$

Лемма 3.15. *Пусть $X \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ и $\lambda > 0$. Тогда у компакта $Y = O_X + \lambda(X - O_X)$, гомотетичного X, чебышевские центр и радиус — это O_X и λR_X.*

Доказательство. Для каждой точки $y \in Y$ выполнено $y = O_X + \lambda(x - O_X)$ для некоторого $x \in X$. Так как $\lambda|x - O_X| \le \lambda R_X$, то и для любого $y \in Y$ верно, что $d(y, O_X) \le \lambda R_X$. Поэтому $R_Y \le \lambda R_X$. Применяя те же рассуждения для точек из X, заключаем, что $R_X \le \frac{1}{\lambda} R_Y$. Значит, $R_Y = \lambda R_X$. Отсюда, в силу единственности чебышевского центра у компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$, следует, что O_X является чебышевским центром компакта Y.

$\square$

Лемма 3.16. *Если для $X, Y \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ выполнено $R_Y = R_X + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, то для любого $0 < \delta < \varepsilon$ и для любого движения M имеем $M(Y) \not\subset B_\delta(X)$.*

Доказательство. По лемме 3.14, имеем $B_\delta(X) \subset B_{R_X+\delta}(O_X)$. Но так как $R_Y = R_X + \varepsilon$, то компакт Y ни в какой шар меньшего радиуса поместить нельзя, то есть $M(Y) \not\subset B_{R_X+\delta}(O_Y)$ ни для какого $0 < \delta < \varepsilon$ и движения M. Но тогда $M(Y) \not\subset B_\delta(X)$, что и требовалось доказать. $\square$

Лемма 3.17. *Для $X \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon > 0$ имеем $R_{B_\varepsilon(X)} = R_X + \varepsilon$ и $O_{B_\varepsilon(X)} = O_X$.*

Доказательство. Из леммы 3.14 следует, что $R_{B_\varepsilon(X)} \le R_X + \varepsilon$. Покажем, что $R_{B_\varepsilon(X)} \ge R_X + \varepsilon$. Пусть существует шар с центром в некоторой точке O радиуса $R_X + \delta$, где $0 < \delta < \varepsilon$, такой, что $B_\varepsilon(X) \subset B_{R_X+\delta}(O)$. Тогда для произвольной точки $x \in X$ выполнено $d(O,x) + \varepsilon \le R_X + \delta$, то есть $d(O,x) \le R_X + \delta - \varepsilon < R_X$. Это означает, что нашлась такая точка O, что все точки из X удалены от O на расстояние, меньшее R_X, то есть R_X — не чебышевский радиус. Противоречие. Итак, $R_{B_\varepsilon(X)} = R_X + \varepsilon$. Отсюда же следует, что $O_X = O_{B_\varepsilon(X)}$ (в силу единственности чебышевского центра у компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$). $\square$

Лемма 3.18. *Если для $X, Y \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ таких, что $R_Y = R_X + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, чебышевские центры не совпадают, то $Y \not\subset B_\varepsilon(X)$.*

Доказательство. Так как $O_X \neq O_Y$, то чебышевские шары $B_{R_X+\varepsilon}(O_X)$ и $B_{R_Y}(O_Y)$ для $B_\varepsilon(X)$ и для Y соответственно имеют одинаковые радиусы (лемма 3.17) и разные центры, то есть шары не совпадают. С другой стороны, если $Y \subset B_\varepsilon(X)$, то $Y \subset B_{R_X+\varepsilon}(O_X) \cap B_{R_Y}(O_Y)$, но правая часть последнего включения, являясь пересечением несовпадающих шаров одинакового радиуса R_Y, содержится в шаре меньшего чем R_Y радиуса. Последнее противоречит тому, что R_Y — чебышевский радиус для Y. Значит, $Y \not\subset B_\varepsilon(X)$. □

Лемма 3.19. *Пусть $X, Y \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ — ориентированно подобные компакты. Тогда*

$$d_{EGH}(X, Y) = |R_Y - R_X|.$$

Доказательство. Пусть $S = \Lambda \circ M$ — сохраняющее ориентацию подобие, для которого $Y = S(X)$, где Λ — растяжение в $\lambda > 0$ раз с центром в O, а $M \in G$. Отметим, что $R_Y = \lambda R_X$.

Если $\lambda = 1$, то $R_X = R_Y$ и $d_{EGH}(X, Y) = 0$, так что в этом случае утверждение леммы верно.

Пусть теперь $\lambda \neq 1$. Без ограничения общности, будем считать, что $\lambda > 1$, тогда $|R_Y - R_X| = R_Y - R_X = (\lambda - 1)R_X$. Кроме того, так как центр O соответствующего растяжения можно выбирать произвольным образом, поместим его в чебышевский центр O_X компакта X. Тогда для λ-гомотетичных компактов X и $M(Y)$ расстояние между точкой $x \in X$ и соответствующей точкой $y = O + \lambda(x - O) \in M(Y)$ равно $d(x, y) = (\lambda - 1)d(x, O)$, поэтому

$$d_H\big(X, M(Y)\big) \le (\lambda - 1)\sup\nolimits_{x \in X} d(x, O) \le (\lambda - 1)R_X = R_Y - R_X,$$

и, значит, $d_{EGH}(X, Y) \le R_Y - R_X$. Покажем, что на самом деле здесь имеется равенство. Предположим противное, т.е. что $d_{EGH}(X, Y) < R_Y - R_X$. Тогда существуют δ такое, что $0 < \delta < R_Y - R_X$, и движение M' такие, что $M'(Y) \subset B_\delta(X)$. Но, по лемме 3.16, $R_Y \le R_X + \delta$. Противоречие. □

Теорема 1. *Пусть X и Y — непустые ориентированно подобные компакты в $\mathbb{R}^n$. Тогда $d_{EGH}(X, Y) = |R_Y - R_X|$, и если эти компакты находятся в оптимальном положении, то их чебышевские центры совпадают. Более того, положение, в котором $O_X = O_Y$, а X и Y — гомотетичны с центром в O_X, является оптимальным.*

Доказательство. То, что $d_{EGH}(X, Y) = |R_Y - R_X|$, является утверждением леммы 3.19. Далее, предположим, что X и Y находятся в оптимальном положении. По лемме 3.18, если их чебышевские центры не совпадают, то $d_H(X, Y) > |R_Y - R_X|$, что противоречит оптимальности. Наконец, пусть $O_X = O_Y$ и рассматриваемые компакты гомотетичны с центром в O_X. Аналогично тому, что было сделано при доказательстве леммы 3.19, $d_H(X, Y) \le |R_Y - R_X|$, поэтому такие X и Y находятся в оптимальном положении.

□

Замечание 3.20. Совпадающие чебышевские центры ориентированно подобных компактов, находящихся в оптимальном положении, не обязаны совпадать с центром гомотетии: если X — это две окружности с одним центром O (граница кольца), соединенные отрезком, а Y — гомотетичное множество с центром в O, то указанное положение — оптимально. Но если вращать Y относительно O, то расстояние по Хаусдорфу не изменится.

Следствие 3.21. *Оптимальное положение шаров A и B одинаковой максимальной размерности — это совмещение их центров.*

3.3 Об оптимальном положении компактов, находящихся в положении "между"

Теорема 2. *Пусть непустые компакты A и B находятся в оптимальном положении. Тогда все компакты между A и B в смысле метрики Хаусдорфа, в паре с каждым из компактов A и B, — тоже в оптимальном положении в смысле евклидово инвариантной метрики Громова–Хаусдорфа.*

Доказательство. Так как A и B находятся в оптимальном положении, то, по определению, $d_H(A,B) = d_{EGH}(A,B)$. Так как расстояние d_{EGH} является метрикой, то из неравенства треугольника следует, что

$$d_{EGH}(A,B) \le d_{EGH}(A,C) + d_{EGH}(C,B);$$

опять же, из оптимальности положения, заключаем

$$d_{EGH}(A,C) \le d_H(A,C),\ d_{EGH}(C,B) \le d_H(C,B).$$

Если компакт C оказался не в оптимальном положении относительно A или B, то одно из двух предыдущих неравенств будет строгим, поэтому, в этом случае,

$$d_H(A,B) = d_{EGH}(A,B) \le d_{EGH}(A,C) + d_{EGH}(C,B) < d_H(A,C) + d_H(C,B),$$

следовательно, C не находится между A и B, противоречие. Значит, компакты A и C, B и C находятся в оптимальном положении. □

Замечание 3.22. Обратное не верно, как показывает предложение 3.13.

Замечание 3.23. Транзитивность не верна: если компакты A и B, B и C находятся в оптимальном положении, компакты A и C не обязаны находиться в оптимальном положении. Например, пусть $A = \{A_1, A_2\}$, $B = \{B_1\}$, $C = \{C_1, C_2\}$. Совместим середины компактов A и C, при условии, что точки A_1, A_2, C_1, C_2 не лежат на одной прямой, а компакт B поместим в их общую середину. Таким образом, одноточечный компакт в оптимальном положении с каждым из двухточечных, но между собой двухточечные не находятся в общем положении. Более того, не любые 3 компакта удается разместить так, чтобы любые два оказались в оптимальном положении. Возьмем пример, описанный в предложении 3.8.

Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^2$ состоит из трех точек, попарные расстояния между которыми равны 10, 13, 13; множество $B \subset \mathbb{R}^2$ — из двух точек на расстоянии 10; множество $C \subset \mathbb{R}^2$ — из одной точки. Предположим, что эти три множества расположены так, что из взаимные попарные расположения — оптимальны. По предложению 3.2, множество C совпадает с чебышевским центром множеств A и B, однако, для A чебышевский центр — это центр описанной окружности, так что если M обозначает середину основания равнобедренного треугольника с вершинами в A, то $d(C,M) = 119/24$. По предложению 3.8, одна из точек множества B совпадает с M, поэтому, снова в силу предложения 3.2, точка C попадает в середину отрезка с концами в B, следовательно, $d(C,M) = 5$, противоречие.

4 О проблеме Штейнера

Рассмотрение попарных расстояний в оптимальных положениях компактов привело к изучению проблемы Штейнера в смысле евклидова расстояния по Громову–Хаусдорфа. Существуют ли для заданной границы компактов точки Штейнера? В работе Иванова А.О., Николаевой Н.К., Тужилина А.А. [12] показано, что в ограниченно компактном пространстве разрешима указанная проблема.

Предложение 4.1. *Пространство всех компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа является ограниченно компактным.*

Доказательство. Напомним, что пространство является ограниченно компатным, если любой замкнутый шар в нем компактен. Расмотрим шар с центром в некотором компакте A:

$$B_r^{\mathcal{H}}(A) = \big\{C : d_H(A, C) \le r\big\}.$$

Тогда для любого $a \in A$ найдется такое $R > 0$, что для любого $C \in B_r^{\mathcal{H}}(A)$ верно $C \subset B_R^{R^n}(a)$. Так как $B_R^{\mathbb{R}^n}(a)$ — компакт, то и $\mathcal{H}\big(B_R^{\mathbb{R}^n}(a)\big)$ тоже компактно. Значит, $B_r^{\mathcal{H}}(A) \subset \mathcal{H}\big(B_R^{\mathbb{R}^n}(a)\big)$. Шар $B_r^{\mathcal{H}}(A)$ является замкнутым подмножеством $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, а так как является замкнутым подмножеством компакта, то и сам компактен [8]. $\square$

Далее, рассмотрим проекцию $\pi\colon \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{H}_o(\mathbb{R}^n)$. Так как проекция — непрерывное отображение, то образы компактных в $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ шаров также компактны. Тогда любой шар из $\mathcal{H}_o(\mathbb{R}^n)$ содержится в некотором таком образе и замкнут, то есть является змкнутым подмножеством компакта. Значит, любой шар из $\mathcal{H}_o(\mathbb{R}^n)$ является компактом. Имеем: любой замкнутый шар в пространстве с евклидово инвариантной метрикой Громова–Хаусдорфа является компактом, значит, данное пространство ограниченно компактно.

Лемма 4.2. *В ограниченно компактном пространстве сегмент компактен.*

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathcal{C} = \big\{C : d(A, C) + d(B, C) = d((A, B)\big\}$. Рассмотрим функцию $f(K) = d(A, K) + d(B, K)$. Из того, что C находится между A и B, следует, что $f(C) = d(A, B)$. Функция расстояния непрерывна, а прообраз замкнутого множества замкнут, значит, $f^{-1}\big(d(A, B)\big) = \mathcal{C}$ замкнуто.

Так как функция расстояния неотрицательна, то $d(A, C) \le d(A, B)$, значит, все точки C, лежащие между A и B, образуют шар с центром A радиуса $d(A, B)$.

В ограниченно компактном пространстве полученный шар замкнут, а значит, компактен. Что и требовалось доказать. $\square$

Покажем, как можно разрешить проблему Штейнера, на примере пространства с евклидовой метрикой Громова–Хаусдорфа.

Для начала приведем вспомогательную лемму.

Лемма 4.3. *Отрезки $[x_1, y_1]$ и $[x_2, y_2]$ на числовой прямой таковы, что $y_1 \ge x_1, y_2 \ge x_2$. Тогда*

$$\max\big\{|x_1 - y_2|, |y_1 - x_2|\big\} \ge \max\big\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\big\}$$

.

Доказательство. Положим $z_i = (x_i+y_i)/2, m_i = (y_i-x_i)/2 \geq 0$, тогда $x_i = z_i - m_i, y_i = z_i + m_i$. Без ограничения общности, будем считать, что $z_1 \leq z_2$, тогда $\Delta z := z_2 - z_1 \geq 0$. Имеем

$$x_1 = z_1 - m_1 \leq z_2 - m_1 \leq z_2 + m_2 = y_2,$$

так что $|x_1 - y_2| = \Delta z + m_1 + m_2$. С другой стороны,

$$|x_2 - y_1| = |\Delta z - m_1 - m_2| \leq \Delta z + |m_1 + m_2| = \Delta z + m_1 + m_2 = |x_1 - y_2|,$$

поэтому $\max\bigl\{|x_1 - y_2|, |x_2 - y_1|\bigr\} = \Delta z + m_1 + m_2$. Далее,

$$|x_1 - x_2| = |\Delta z + m_1 - m_2|$$

и

$$|y_1 - y_2| = |\Delta z + m_2 - m_1|,$$

так что обе эти величины не превосходят $\Delta z + m_1 + m_2$, что и завершает доказательство. $\square$

Пусть $Z(x, r_x)$ обозначает окрестность радиуса $r_x \geq 0$ отрезка длины $x \geq 0$. Отметим, что в случае $r_x > 0, x = 0$ компакт является шаром, в случае $r_x = 0, x > 0$ — отрезком, в случае $r_x = 0, x = 0$ — точкой, в случае $r_x > 0, x > 0$ — "цилиндром", к основаниям которого прикреплены полушары с центрами в концах отрезка. Будем обозначать через $\mathcal{X}$ подмножество в $\mathcal{H}_o(\mathbb{R}^n)$, составленное из классов эквивалентности всех окрестностей всех отрезков в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 3. *Пусть $A = Z(a, r_A), B = Z(b, r_B)$. Тогда*

$$d_{EGH}(A,B) = \max\bigl\{|r_A - r_B|, |\tfrac{b}{2} - \tfrac{a}{2} + r_B - r_A|\bigr\}.$$

Доказательство. Будем рассматривать такие A и B, у которых радиус и длина отрезка не равны нулю одновременно.

Заметим, что ε-окрестность каждого из компактов A и B — цилиндр того же вида, что и сам компакт. Для нахождения d_{EGH} также заметим, что цилиндр X можно поместить в цилиндр Y, если 1) радиус X не превосходит радиус Y; 2) сумма длины отрезка и удвоенного радиуса X не превосходит суммы удвоенного радиуса и длины отрезка Y.

Поэтому каждое $\varepsilon \geq 0$, для которого в ε-окрестность A можно поместить B, и в ε-окрестность B можно поместить A, должно удовлетворять следующей системе:

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + r_A + \varepsilon \geq \frac{b}{2} + r_B, \\ \frac{b}{2} + r_B + \varepsilon \geq \frac{a}{2} + r_A, \\ r_A + \varepsilon \geq r_B, \\ r_B + \varepsilon \geq r_A. \end{cases}$$

Кроме того, если такое ε найдено, то, поместив отрезки $[A_1, A_2]$ и $[B_1, B_2]$ на одну прямую и совместив их середины, получим положение, в котором выполняются оба условия. Решая систему, получаем неравенство на ε:

$$\varepsilon \geq \max\bigl\{|r_A - r_B|, |\tfrac{a}{2} - \tfrac{b}{2} + r_A - r_B|\bigr\}.$$

По определению евклидова расстояния Громова–Хаусдорфа, нам нужно найти наименьшее ε, удовлетворяющее системе, поэтому $\varepsilon = \max\left\{|r_A - r_B|, |\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + r_A - r_B|\right\}$ — искомый радиус окрестности. Значит, $d_{EGH}(A, B) = \max\left\{|r_A - r_B|, |\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + r_A - r_B|\right\}$. □

Обозначим через $\mathcal{A}$ подмножество плоскости $\mathbb{R}^2_\infty$, ограниченное лучом $x \geq 0$ и биссектрисой первого квадранта.

Предложение 4.4. *Для n-точечной границы, лежащей в $\mathcal{A}$, всегда существуют точки Штейнера, также лежащие в $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Пусть $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ...(x_n, y_n)$ — данная граница, $(X_1, Y_1), ...(X_s, Y_s)$ — координаты ее точек Штейнера. Пусть $\left\{(X_{i_1}, Y_{i_1}), ...(X_{i_m}, Y_{i_m})\right\} \subset \left\{(X_1, Y_1), ...(X_s, Y_s)\right\}$ — те точки Штейнера, которые не лежат в $\mathcal{A}$.

Заменим все отрицательные координаты точек $(X_{i_1}, Y_{i_1}), ...(X_{i_m}, Y_{i_m})$ на 0 и покажем, что длины ребер, выходящих из них, не увеличатся. Заметим, что если один из аргументов функции $g(x, y) = \max\{x, y\}$ уменьшится, то значение функции не увеличится. Рассмотрим две произвольные вершины дерева с координатами (x^1, y^1) и (x^2, y^2). Расстояние между ними равно $\max\left\{|x^1 - x^2|, |y^1 - y^2|\right\}$. Если $x^1 < 0, x^2 < 0$, то при замене x^1 и x^2 на 0 модуль их разности не увеличится. Если $x^1 < 0, x^2 > 0$, то модуль их разности — это длина отрезка $[x^1, x^2]$ числовой прямой, содержащего 0, поэтому при замене x^1 на 0 длина отрезка сократится, а, значит, модуль разности уменьшится. Аналогично для случая $x^2 < 0, x^1 > 0$. Для y-координат аналогично. Поэтому при замене в выражении $\max\left\{|x^1 - x^2|, |y^1 - y^2|\right\}$ отрицательных координат на нулевые значение выражения не увеличится, а, значит, и длина всего дерева не увеличится. Отметим, что теперь все полученные вершины дерева (в частности, точки с изменными координатами) окажутся или внутри первого квадранта, или на его границе.

Теперь покажем, что при замене каждой точки (x, y) первого квадранта, включая его границы, лежащей выше биссектрисы первого квадранта, на (y, x) длина дерева не увеличится. Для этого достаточно показать, что не увеличится каждое ребро. Если точки (x^1, y^1) и (x^2, y^2) таковы, что $y^1 > x^1$ и $y^2 > x^2$, то при замене этих точек на (y^1, x^1) и (y^2, x^2) соответственно расстояние между ними не изменится. Если же точки (x^1, y^1) и (x^2, y^2) таковы, что $y^1 > x^1$ и $y^2 < x^2$, то при замене точки (x^1, y^1) на (y^1, x^1) соответственно расстояние не увеличится по лемме 4.3.

Значит, для n точек подмножества $\mathcal{A}$ плоскости с макс-нормой всегда существует дерево Штейнера, лежащее в $\mathcal{A}$. □

Теперь пусть $A_1 = Z(a_1, r_{A_1}), ..., A_n = Z(a_n, r_{A_n})$ — элементы $\mathcal{X}$. Для данной n-точечной границы рассмотрим отображение $f\colon X \mapsto (r_X + x/2, r_X)$. Тогда f — изометричное отображение из $\mathcal{X}$ в $\mathbb{R}^2_\infty$, переводящее $\mathcal{X}$ в множество $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2_\infty$. По теореме Овсянникова [13], для любых $B_1, ..., B_n \in \mathbb{R}^2_\infty$ минимальное дерево Штейнера, соединяющее $B_1, ..., B_n$, является минимальным заполнением. Следовательно, если $A_1, ..., A_n \in \mathcal{X}$, то f-образы этих точек лежат в $\mathcal{A}$. Поэтому для этих f-образов существуют точки Штейнера, также лежащие в $\mathcal{A}$, значит, этим точкам соответствуют некоторые элементы из $\mathcal{X}$. Значит, дерево с границей $A_1, ..., A_n$ и полученными прообразами точек Штейнера является минимальным деревом Штейнера как в $\mathcal{X}$, так и во всем $\mathcal{H}_o(\mathbb{R}^n)$. Итак, доказана

Теорема 4. *Для границы $\mathcal{M} := \left\{[A_1], ..., [A_n]\right\} \subset \mathcal{X}$ существуют $[S_1], ..., [S_m] \in \mathcal{X}$, реализущие минимальное заполнение данной границы. В частности, $[S_1], ..., [S_m]$ являются ее точками Штейнера.*

Тот же вопрос для множества $\mathcal{X}$ в смысле расстояния по Громову–Хаусдорфу остается открытым. Мы дадим ответ для точки Ферма некоторого подсемейства компактов указанного множества. Воспользуемся оценками сверху и снизу для этого расстояния:

$$\frac{1}{2}|\operatorname{diam} A - \operatorname{diam} B| \le d_{GH}(A,B) \le d_{EGH}(A,B).$$

Так как $d_{EGH}(A,B) = \max\left\{|r_A - r_B|, |\frac{b}{2} - \frac{a}{2} + r_B - r_A|\right\}$ (заметим, $|\frac{b}{2} - \frac{a}{2} + r_B - r_A| = \frac{1}{2}|\operatorname{diam} A - \operatorname{diam} B|$ для нашего случая с окрестностями отрезков), и эта величина в оптимальном положении дает расстояние по Хаусдорфу, то для тех пар компактов A и B, для которых в оптимальном положении выполнено $\max\left\{|r_A - r_B|, |\frac{b}{2} - \frac{a}{2} + r_B - r_A|\right\} = |\frac{b}{2} - \frac{a}{2} + r_B - r_A|$, расстояние по Громову–Хаусдорфу совпадает с евклидовым расстоянием по Громову–Хаусдорфу.

Теорема 5. *Для трехточечных границ $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{X}$, где $X_1 = Z(x_1, r_1), X_2 = Z(x_2, r_2), X_3 = Z(x_3, r_3)$ таких, что $d_{EGH}(X_i, X_j) = |\frac{x_i}{2} - \frac{x_j}{2} + r_i - r_j|$, точка Ферма в смысле евклидова расстояния по Громову–Хаусдорфу является точкой Ферма в смысле расстояния по Громову–Хаусдорфу.*

Доказательство. Без ограничения общности, будем считать, что $x_1 \le x_2 \le x_3$. Обозначим $\varepsilon = \frac{x_2}{2} - \frac{x_1}{2} \ge 0, \delta = r_2 - r_1$. Так как максимум достигается на второй компоненте, то $|\delta| \le |\delta + \varepsilon|$, иными словами, δ находится ближе к нулю, чем $\delta + \varepsilon$ при любом сколь угодно малом ε. Но это означает, что $\delta \ge 0$. Применяя аналогичные рассуждения к парам X_1, X_3 и X_2, X_3, получим $r_1 \le r_2 \le r_3$. Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} d_{GH}(X_1, X_3) = d_{EGH}(X_1, X_3) = d_{EGH}(X_1, X_2) + d_{EGH}(X_2, X_3) = \\ = d_{GH}(X_1, X_2) + d_{GH}(X_2, X_3), \end{aligned}$$

поэтому X_2 лежит в пространстве Громова–Хаусдорфа между X_1 и X_3 (как и в пространстве $\mathcal{H}_o$). Отметим, что для трех точек A, B, C метрического пространства, одна из которых лежит между двумя другими, точка, находящаяся в положении «между», является точкой Ферма для указанной тройки. Действительно, пусть S — искомая точка Ферма, тогда

$$d(A,S) + d(B,S) + d(C,S) \ge d(A,B) + d(C,S) \ge d(A,B),$$

причем равенство достигается, если и только если $d(C,S) = 0$ и S лежит между A и B. Поэтому, так как X_2 лежит между X_1 и X_3 в смысле расстояний по Громову–Хаусдорфу и евклидову Громову–Хаусдорфу, то X_2 — точка Ферма в смысле обоих расстояний. $\square$

5 Заключение

Проблема поиска оптимальных положений в общем случае нетривиальная. В настоящей работе она решена для некоторых частных случаев. Так, показано, что в оптимальном положении пары компактов, один из которых —- одноточечный, последний находится в чебышевском центре первого. Для ориентированно подобных компактов вычислено евклидово расстояние Громова–Хаусдорфа между ними и доказано, что в оптимальном положении чебышевские центры этих компактов совпадают. Показано, что любое трехточечное метрическое пространство изометрично вкладывается в изучаемое пространство компактов. Доказано, что для пары оптимально расположенных компактов все компакты, промежуточные в смысле метрики Хаусдорфа, также являются промежуточными и в смысле евклидовой метрики Громова–Хаусодрфа. Для произвольной n-точечной границы, образованной компактами множества $\mathcal{X}$, являющимися окрестностями отрезков, точка Штейнера реализует минимальное заполнение и также принадлежит множеству $\mathcal{X}$.

6 Список литературы

Список литературы

[1] Edwards D. *The Structure of Superspace.* In «Studies in Topology». Academic Press, 1975.

[2] Gromov M. *Groups of Polynomial growth and Expanding Maps.* Publications mathematiques, 53, 1981.

[3] Facundo Memoli. *Gromov–Hausdorff distances in Euclidean spaces.* Computer Vision and Pattern Recognition Workshops, 2008. CVPR Workshops 2008. IEEE Computer Society Conference on, pages 1–8, June 2008.

[4] Кисловская А.Д. *Дипломная работа "Геометрия конфигураций в пространствах с евклидово инвариантной метрикой типа Громова–Хаусдорфа".* Москва, Московский Государственный Университет, 2013.

[5] Kristina Lund, Steven Schlicker, Patrick Sigmon *Fibonacci sequences and the space of compact sets.* Involve, 2008, Vol. 1, No. 2.

[6] Казаков А.Л., Лебедев П.Д. *Построение наилучших круговых аппроксимаций множеств на плоскости и на сфере.* XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014, Москва 16-19 июня 2014 г.

[7] Сосов Е.Н. *Геометрии выпуклых и конечных множеств геодезического пространства.* Казанский Государственный Университет, 2010.

[8] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[9] Гаркави А.Л. *О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества.* Успехи матем. наук, 1964, т. 19, вып. 6, с. 139-145.

[10] Иванов А. О., Тужилин А. А., *Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении*, Матем. сб., 2012, том 203, номер 5, 65–118

[11] Iliadis S., Ivanov A., Tuzhilin A. *Local Structure of Gromov–Hausdorff Space, and Isometric Embeddings of Finite Metric Spaces into this Space.* Topology and its Applications, Elsevier BV, Netherlands, 2017, v. 221, pp. 393-398, DOI: 10.1016/j.topol.2017.02.050 (см. также ArXiv e-prints, arXiv:1604.07615).

[12] Иванов А. О., Николаева Н. К., Тужилин А. А. *Проблема Штейнера в пространстве Громова–Хаусдорфа: случай конечных метрических пространств* //Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2017. — Т. 23, № 4. — С. 152–161.

[13] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Gromov–Hausdorff Distance, Irreducible Correspondences, Steiner Problem, and Minimal Fillings. 2016, ArXiv e-prints, arXiv:1604.06116