МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

Курсовая работа

Проблема Штейнера в пространствах с евклидово инвариантной метрикой Громова–Хаусдорфа.

Steiner's problem in the spaces with Euclidean Gromov–Hausdorff metric.

Курсовая работа
студентки 5-го курса
Малышевой О.С.
Научный руководитель:
д.ф-м.н. Тужилин А.А.

Москва 2018

Проблема Штейнера в пространствах с евклидово инвариантной метрикой Громова–Хаусдорфа

Малышева О.С.

Введение

Проблема Штейнера берет свое начало от задачи поиска точки, сумма расстояний от которой до заданных трех точек была бы минимальной. В настоящей работе рассматриваются ограниченно-компактные пространства, в частности, пространства, наделенные евклидово инвариантной метрикой Громова–Хаусдорфа. В [3] показано, что в таких пространствах проблема Штейнера разрешима. Евклидово инвариантная метрика Громова–Хаусдорфа определена на множестве компактных подмножеств евклидова пространства, рассматриваемых с точностью до сохраняющего ориентацию движения. Говоря неформально, она позволяет выяснить, насколько "хорошо" можно совместить два компакта. Показано, что для трехточечной границы, образованной компактами множества $\mathcal{X}$, являющимися окрестностями отрезков, точка Штейнера реализует минимальное заполнения и также принадлежит множеству $\mathcal{X}$.

1 Основные определения

Пусть M обозначает метрическое пространство с метрикой d, $\mathcal{P}(M)$ — множество его непустых подмножеств, $\mathcal{H}(M)$ — множество непустых замкнутых и ограниченных подмножеств M. Обозначим через G группу сохраняющих ориентацию движений $\mathbb{R}^n$. В частности, будем рассматривать $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ с введенной на нем эквивалентностью ν: два элемента ν-эквивалентны, если один может быть получен из другого движением $O \in G$. Пространство классов эквивалентности обозначим $\mathcal{H}_o(\mathbb{R}^n)$.

Определение 1. Для каждого $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ через $[A]$ обозначим включающий A элемент из $\mathcal{H}_o(\mathbb{R}^n)$.

Определение 2. *Замкнутой окрестностью $B_r(x)$ точки $x \in M$ радиусом r* называется множество $\{y \in M : d(x, y) \le r\}$.

Определение 3. Определим *расстояние от точки y до произвольного множества $A \in \mathcal{P}(M)$: $d(y, A) = \inf_{a\in A}\{d(y, a)\}$.*

Определение 4. *Замкнутой окрестностью $B_r(A)$ радиусом r множества $A \in \mathcal{P}(M)$* называется множество $\{y \in M : d(y, A) \le r\}$.

Определение 5. Пусть A и B — элементы $\mathcal{P}(M)$. *Расстоянием по Хаусдорфу* между этими множествами называется величина

$$d_H(A,B)=\inf\Big\{r:\big(A\subseteq B_r(B)\big)\wedge\big(B\subseteq B_r(A)\big)\Big\}.$$

Замечание 1.1. Хорошо известно, что d_H является метрикой на множестве всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства [1].

Определение 6. Пусть A и B — элементы из $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$. *Расстоянием в евклидово инвариантной метрике Громова–Хаусдорфа* между A и B называется величина

$$\mathrm{d}_{EGH}(A,B)=\inf_{O\in G}\Big\{\mathrm{d}_H(A,OB)\Big\}.$$

Определение 7. Движение $O\in G$, на котором достигается $d_{EGH}(A,B)$, будем называть *оптимальным*, а пару (A,OB) — *оптимальным взаимным расположением.*

Замечание 1.2. Оптимальное движение всегда существует [2], а d_{EGH} порождает метрику на $\mathcal{H}_o(\mathbb{R}^n)$, которую мы будем обозначать тем же образом.

Определение 8. *Сегментом* с концами в точках A и B метрического пространства (M,d) называется множество всех его точек C, лежащих между A и B, то есть таких, что $d(A,B)=d(A,C)+d(B,C)$.

Определение 9. Пусть M — конечное множество, а $G=(V,E),V\subset X$ — некоторый связный граф. Будем говорить, что G *соединяет* M, если $M\subset V$.

Определение 10. M называется *границей* всех графов, соединяющих M.

Определение 11. *Точкой Штейнера* для трехточечной границы A_1,A_2,A_3 называется такая точка S, что $\sum_{i=1}^3 d(A_i,S)$ минимально.

Определение 12. Пусть $\mathcal{M}=(M,\rho)$ — конечное псевдометрическое пространство, $G=(V,E)$ — граф, соединяющий M, и $\omega\colon E\to\mathcal{R}_+$ — некоторое отображение, называемое *весовой функцией* и порождающее взвешенный граф $\mathcal{G}=(G,\omega)$. Функция ω порождает псевдометрику d_ω на V:

Определение 13. *Расстоянием между вершинами* $\mathcal{G}$ называется минимальный вес путей, соединяющих эти вершины.

Определение 14. Взвешенный граф $\mathcal{G}$ называется *заполнением пространства* $\mathcal{M}$, если для любых точек p, $q\in M$ имеем $\rho(p,q)\le d_\omega(p,q)$.

Определение 15. *Минимальным заполнением* называется заполнение $\mathcal{G}_0$ такое, что $\omega(\mathcal{G}_0)=\inf_{\mathcal{G}}\omega(\mathcal{G})$.

2 Основные результаты

Предложение 2.1. *Пространство всех компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа является ограниченно компактным.*

Доказательство. Напомним, что пространство является ограниченно компатным, если любой замкнутый шар в нем компактен. Расмотрим шар с центром в некотором компакте A: $B_r^{\mathcal{H}}(A)=\{C:d_H(A,C)\le r\}$. Тогда для любого $a\in A$ найдется такое $R>0$, что для любого $C\in B_r^{\mathcal{H}}(A)$ верно $C\subset B_R^{R^n}(a)$. Так как $B_R^{\mathbb{R}^n}(a)$ — компакт, то и $\mathcal{H}(B_R^{\mathbb{R}^n}(a))$ тоже компактно. Значит, $B_r^{\mathcal{H}}(A)\subset\mathcal{H}(B_R^{\mathbb{R}^n}(a))$. Шар $B_r^{\mathcal{H}}(A)$ является замкнутым подмножеством $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, а так как является замкнутым подмножеством компакта, то и сам компактен [1]. $\square$

Далее, рассмотрим проекцию $\pi\colon \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{H}_o(\mathbb{R}^n)$. Так как проекция — непрерывное отображение, то образы компактных в $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ шаров также компактны. Тогда любой шар из $\mathcal{H}_o(\mathbb{R}^n)$ содержится в некотором таком образе и замкнут, то есть является змкнутым подмножеством компакта. Значит, любой шар из $\mathcal{H}_o(\mathbb{R}^n)$ является компактом. Имеем: любой замкнутый шар в пространстве с евклидово инвариантной метрикой Громова–Хаусдорфа является компактом, значит, данное пространство ограниченно компактно.

Лемма 2.2. *В ограниченно компактном пространстве сегмент компактен.*

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathcal{C} = \{C : d(A,C) + d(B,C) = d((A,B)\}$. Рассмотрим функцию $f(K) = d(A,K) + d(B,K)$. Из того, что C находится между A и B, следует, что $f(C) = d(A,B)$. Функция расстояния непрерывна, а прообраз замкнутого множества замкнут, значит, $f^{-1}(d(A,B)) = \mathcal{C}$ замкнуто.

Так как функция расстояния неотрицательна, то $d(A,C) \le d(A,B)$, значит, все точки C, лежащие между A и B, образуют шар с центром A радиуса $d(A,B)$.

В ограниченно компактном пространстве полученный шар замкнут, а значит, компактен. Что и требовалось доказать. $\square$

Замечание 2.3. В работе Иванова А.О., Николаевой Н.К., Тужилина А.А. [3] показано, что в ограниченно компактном пространстве разрешима проблема Штейнера.

Покажем, как это можно сделать, на примере пространства с евклидово инвариантной метрикой Громова–Хаусдорфа.

Теорема 1. *Пусть A — это r_A-окрестность отрезка $[A_1, A_2]$ длины a, а B — это r_B-окрестность отрезка $[B_1, B_2]$ длины b. Тогда $d_{EGH}(A,B) = \max\left\{|r_A - r_B|, |\frac{b}{2} - \frac{a}{2} + r_B - r_A|\right\}$.*

Доказательство. При ненулевых длине отрезка и радиусе каждый из компактов A и B — это “цилиндр”, к основаниям которого прикреплены полушары с центрами в концах отрезка (при нулевой длине отрезка цилиндр вырождается в шар, а при нулевом радиусе — в отрезок). Будем рассматривать такие цилиндры, у которых радиус и длина отрезка не равны нулю одновременно.

Заметим, что ε-окрестность каждого из компактов A и B — цилиндр того же вида, что и сам компакт. Для нахождения d_{EGH} также заметим, что цилиндр X можно поместить в цилиндр Y, если 1) радиус X не превосходит радиус Y; 2) сумма длины отрезка и удвоенного радиуса X не превосходит суммы удвоенного радиуса и длины отрезка Y.

Поэтому каждое $\varepsilon \ge 0$, для которого в ε-окрестность A можно поместить B и в ε-окрестность B можно поместить A, должно удовлетворять следующей системе:

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + r_A + \varepsilon \ge \frac{b}{2} + r_B, \\ \frac{b}{2} + r_B + \varepsilon \ge \frac{a}{2} + r_A, \\ r_A + \varepsilon \ge r_B, \\ r_B + \varepsilon \ge r_A. \end{cases}$$

Кроме того, если такое ε найдено, то, поместив отрезки $[A_1, A_2]$ и $[B_1, B_2]$ на одну прямую и совместив их середины, получим положение, в котором выполняются оба условия. Решая систему, получаем неравенство на ε:

$$\varepsilon \geq \max\left\{|r_A - r_B|, |\tfrac{a}{2} - \tfrac{b}{2} + r_A - r_B|\right\}.$$

По определению евклидова расстояния Громова–Хаусдорфа, нам нужно найти наименьшее ε, удовлетворяющее системе, поэтому $\varepsilon = \max\left\{|r_A - r_B|, |\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + r_A - r_B|\right\}$ — искомый радиус окрестности. Значит, $d_{EGH}(A, B) = \max\left\{|r_A - r_B|, |\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + r_A - r_B|\right\}$. □

Предложение 2.4. *Пусть X^1, X^2, X^3 — точки манхеттенской плоскости. Тогда точка Штейнера S принадлежит $Conv\{X^1, X^2, X^3\}$.*

Доказательство. Пусть $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$— координаты данных точек, (x_s, y_s) — координаты точки Штейнера S.
Минимизируя суммарное расстояние от S до граничных точек в манхеттенском пространстве, мы независимо минимизируем суммарное евклидово расстояние от x_S до x_1, x_2, x_3 и от y_S до y_1, y_2, y_3 на прямой. Для такой задачи хорошо известен ответ: оптимальное положение координаты x_s — это средняя из трех точек x_1, x_2, x_3.

Тогда точка S имеет координаты средних проекций, поэтому если через нее провести оси манхеттенской плоскости, то одна из граничных точек будет лежать на одной оси, а другая — на другой. Пусть, без ограничения общности, эти две граничных точки лежат в первом квадранте, тогда из условия "координаты точки S — средние проекции"вытекает, что третья граничная точка лежит в противоположном, третьем квадранте, а, значит, точка S действительно содержится в выпуклой оболочке трех граничных точек.

□

Рассмотрим следующие компакты A, B, C; пусть даны отрезки длины $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ и рассматриваются их $r_A \geq 0, r_B \geq 0, r_C \geq 0$-окрестности соответственно.

Теорема 2. *Для описной выше границы $\mathcal{M} := \left\{[A], [B], [C]\right\} \subset \mathcal{H}_o(\mathbb{R}^n)$ существует такой $[S] \in \mathcal{H}_o(\mathbb{R}^n)$, что звезда с центром в S и граничными вершинами $[A], [B]$ и $[C]$ является минимальным заполнением. В частности, такие $[S]$ представляют собой точки Штейнера для границы $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{X}$ подмножество в $\mathcal{H}_o(\mathbb{R}^n)$, составленное из классов эквивалентности всех окрестностей всех отрезков в $\mathbb{R}^n$. Пусть X — это r_X окрестность отрезка длины x. Рассмотрим отображение $f\colon X \mapsto (r_X, x/2 + r_X)$. Тогда f — изометричное отображение из $\mathcal{X}$ в $\mathbb{R}^2_\infty$, переводящее $\mathcal{X}$ в первый квадрант K. По теореме Овсянникова [4], для любых $P, Q, R \in \mathbb{R}^2_\infty$ минимальное дерево Штейнера, соединяющее P, Q, R, является минимальным заполнением. Поскольку $\mathbb{R}^2_\infty$ изометрична манхеттенской плоскости, то по предложению 2.4 в $\mathbb{R}^2_\infty$ точка Штейнера лежит в выпуклой оболочке границы.

Следовательно, если $A, B, C \in \mathcal{X}$, то f-образы этих точек лежат в K, поэтому и точка Штейнера для этих f-образов также лежит в K, значит, этой точке соответствует некоторый элемент $S \in \mathcal{X}$. Так как f изометрично, звезда с вершиной в S и границей A, B, C является минимальным заполнением и, в частности, минимальным деревом Штейнера как в $\mathcal{X}$, так и во всем $\mathcal{H}_o(\mathbb{R}^n)$.

□

Список литературы

[1] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[2] Facundo Memoli. *Gromov–Hausdorff distances in Euclidean spaces* // Computer Vision and Pattern Recognition Workshops. 2008. IEEE Computer Society Conference on. June 2008. 1–8.

[3] Иванов А. О., Николаева Н. К., Тужилин А. А. *Проблема Штейнера в пространстве Громова–Хаусдорфа: случай конечных метрических пространств* //Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2017. — Т. 23, № 4. — С. 152–161.

[4] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Gromov–Hausdorff Distance, Irreducible Correspondences, Steiner Problem, and Minimal Fillings. 2016, ArXiv e-prints, arXiv:1604.06116