

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра дифференциальной геометрии
и приложений

И. Ф. Кобцев
5 курс

Топологический анализ движений материальной точки по
параболоиду в поле силы тяжести.

Научный руководитель:
академик РАН А. Т. Фоменко

Москва, 2018

Постановка задачи, история вопроса. В настоящей работе исследуется механическая система, описывающая движение тяжелой материальной точки по эллиптическому параболоиду в трехмерном пространстве под действием силы тяжести. Анализ этой системы будет проведен с точки зрения ее топологических свойств, а именно, будет изучаться слоение Лиувилля. Теория классификации слоения Лиувилля интегрируемых систем построена в работах А. Т. Фоменко и его школы (см. [7]–[12]). Стоит отметить, что сама рассматриваемая система не нова: впервые она возникла в статье С. А. Чаплыгина [1]. В ней были исследованы движения системы, классифицированы особые случаи траекторий и вычислены их периоды. Однако, на тот момент еще не существовало топологической теории динамических систем, поэтому лиувиллева классификация движений параболоидного маятника стала возможной только сегодня. Результат топологического анализа удобнее представлять в виде инвариантов Фоменко-Цишанга (так называемых меченых молекул) [2], поиск которых и является целью настоящей работы. На данный момент мы вычислили грубые молекулы, т.е. инварианты Фоменко.

В процессе решения задачи выяснилось, что уравнения движения тяжелой частицы по параболоиду в гравитационном поле после подходящей замены переменных разделяются, то есть приводятся к виду $\frac{dx}{d\tau} = \sqrt{P(x)}$, где $P(x)$ — многочлен, τ — приведенное время. Для систем такого вида М. П. Харламовым в [3] описан эффективный алгоритм, с помощью которого можно провести топологический анализ, не опираясь на классические результаты теории динамических систем, и сразу получить описание фазовой топологии. Применение этого метода неоднократно демонстрировалось С. С. Николаенко в [4],[5] и привело ко многим замечательным результатам.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. Пусть в пространстве \mathbb{R}^3 по параболоиду

$$P = \left\{ (x, y, z) : \frac{y^2}{a+b} + \frac{z^2}{b} = 2x + b \right\}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad (1)$$

движется материальная точка массы m , на которую действует сила mg . Тогда изоэнергетические молекулы Фоменко этой динамической системы, соответствующие значению энергии h , имеют вид, приведенный на рис. 1. А именно:

- при $h < -\frac{a+b}{2}gm$ и $h > \frac{a-b}{2}gm$ — на рис. 1,а;
- при $-\frac{a+b}{2}gm < h < -\frac{b}{2}gm$ и $-\frac{b}{2}gm < h < \frac{a-b}{2}gm$ — на рис. 1,б.

На схеме применено обозначение трехмерной некомпактной бифуркации $\bar{V} = V \times \mathbb{R}$, где V — плоский 2-атом.



Рис. 1. Грубые молекулы задачи при $g < 0$

Уравнения движения. Как уже упоминалось, точка массы m движется по поверхности, задаваемой уравнением (1), под действием силы тяжести mg . В дальнейшем будем различать случаи $g > 0$ и $g < 0$, так как они приведут к качественно различным результатам.

Введем в задаче лагранжевы координаты следующим образом.

Параболоид P входит в однопараметрическое семейство квадрик вида $\frac{y^2}{a+s} + \frac{z^2}{s} = 2x + s$; относительно параметра s это уравнение имеет 3 корня. Это означает, что через каждую точку пространства проходит 3 поверхности этого семейства: два эллиптических параболоида и один гиперболический.

Эти корни находятся из тождества $\frac{y^2}{a+s} + \frac{z^2}{s} - 2x - s = \frac{(u-s)(s+v)(s+w)}{s(a+s)}$, откуда

$$x = \frac{v+w-u-a}{2}, \quad y^2 = \frac{(a+u)(a-v)(w-a)}{a}, \quad z^2 = \frac{uvw}{a} \quad (2)$$

Здесь $w \geq a$ соответствует параболическим координатным линиям, а $0 \leq v \leq a$ - эллиптическим. Параметр u фиксирован и равен b : тем самым он задает эллиптический параболоид, по которому происходит движение. Следовательно, (u, v) можно рассматривать как лагранжевы координаты в задаче.

Поскольку полная механическая энергия при движении сохраняется, то гамильтониан задачи $H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgx$ является первым интегралом. Для полной интегрируемости задачи нужно 2 интеграла; второй будем искать, перейдя к лагранжевым переменным. Обозначим также m — масса частицы, g — ускорение свободного падения, $a+b$ и b — квадраты "полуосей" параболоида. После замены координат имеем следующее выражение для гамильтониана в переменных (u, v) :

$$H = \frac{2}{m(w-v)} \left(\frac{(a-v)v}{v+b} p_v^2 - \frac{(a-w)w}{w+b} p_w^2 \right) + \frac{mg}{2}(v+w-a-b), \quad (3)$$

где p_u, p_v — сопряженные импульсы. Согласно А. М. Переломову ([6]) выделяется второй интеграл:

$$F = \frac{1}{2} \frac{(a-v)v}{v+b} p_v^2 - \frac{m^2 g}{8} (v^2 - (a+b)v) + \frac{mh}{4} v. \quad (4)$$

Итак, рассматриваемая система — гамильтонова на (T^*P, ω) , где $T^*P = T^*P(u, v, p_u, p_v)$, $\dim T^*P = 4$; $\omega = dv \wedge dp_v + dw \wedge dp_w$ — каноническая симплектическая структура. Прямым вычислением проверяется, что относительно скобки Пуассона, порожденной формой ω , интегралы H и F находятся в инволюции.

Далее через (h, f) будем обозначать фиксированную пару значений интегралов H, F соответственно.

Находим уравнения движения:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \pm \frac{4}{m(w-v)} \sqrt{2 \frac{(a-v)v}{(v+b)} \left(f + \frac{m^2 g}{8} (v^2 - (a+b)v) - \frac{mh}{4} v \right)}, \\ \dot{w} &= \pm \frac{4}{m(w-v)} \sqrt{2 \frac{(a-w)w}{(w+b)} \left(f + \frac{m^2 g}{8} (w^2 - (a+b)w) - \frac{mh}{4} v \right)} \end{aligned}$$

Их можно упростить:

$$\dot{v} = \pm \frac{4}{w-v} \sqrt{P(v)}, \quad \dot{w} = \pm \frac{4}{w-v} \sqrt{P(w)}, \quad (5)$$

где $P(z) = 2 \frac{(a-z)z}{(z+b)} (\alpha z^2 - \beta z + f)$, $\alpha = \frac{m^2 g}{8}$, $\beta = \frac{m^2 g}{8} (a+b) + \frac{mh}{4}$.

Решения этих дифференциальных уравнений зависят от параметров h, f . При анализе слоения Лиувилля интегрируемых систем важно знать топологию поверхности $Q_h^3 = \{H = h\}$ (изоэнергетической поверхности); в силу закона сохранения энергии решения не покидают эту поверхность.

Достижимые области. Движения системы на T^*P , задаваемые уравнениями (5), возможны лишь при тех (v, w) , где подкоренные многочлены неотрицательны. Чтобы найти их, применим описанную М. П. Харламовым в [3] процедуру. Кратко опишем её.

Рассмотрим *отображение момента*

$$\mathcal{F}: H \times F \rightarrow \mathbb{R}^2(h, f)$$

$\text{Im } \mathcal{F}$ называется *допустимой областью*.

Обозначим $x = (h, f)$; тогда $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}^{-1}(x)$ — интегральное многообразие.

Рассмотрим проекцию \mathcal{F}_x на плоскость переменных (u, v) ; образ этой проекции $\text{Ass}(x)$ называется *достижимой областью*.

Очевидно, что $\text{Ass}(x) \in \{(v, w) : P(v) \geq 0, P(w) \geq 0\}$.

Установим области в переменных (v, w) , в которых есть траектории системы.

Исходные переменные задачи выражаются через произведения восьми радикалов, для которых примем следующие обозначения:

$$r_{11} = \sqrt{a-v}, \quad r_{21} = \sqrt{v}, \quad r_{31} = \sqrt{\frac{1}{v+b}}, \quad r_{41} = \sqrt{\alpha v^2 - \beta v + f},$$

$$r_{12} = \sqrt{w-a}, \quad r_{22} = \sqrt{w}, \quad r_{32} = \sqrt{\frac{1}{w+b}}, \quad r_{42} = \sqrt{-\alpha w^2 + \beta w - f}.$$

Тогда выражения для фазовых переменных $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ примут вид

$$x = \frac{v+w-a-b}{2} \tag{6}$$

$$y = \sqrt{\frac{a+b}{b}} r_{11} r_{12} \tag{7}$$

$$z = \sqrt{\frac{b}{a}} r_{21} r_{22} \tag{8}$$

$$\dot{x} = \frac{\dot{v} + \dot{w}}{2} \tag{9}$$

$$\dot{y} = -\frac{1}{2(w-v)} \sqrt{\frac{a+b}{b}} (r_{12} r_{21} r_{31} r_{41} + r_{11} r_{22} r_{32} r_{42}) \tag{10}$$

$$\dot{z} = \frac{1}{2(w-v)} \sqrt{\frac{b}{a}} (r_{11} r_{22} r_{31} r_{41} + r_{12} r_{21} r_{32} r_{42}) \tag{11}$$

Далее, введём функцию "булев знак"

$$\text{bsgn } \theta = \begin{cases} 0, & \theta \geq 0 \\ 1, & \theta < 0 \end{cases}$$

и обозначим $z_s = \text{bsgn } r_{s1}^2, z_{4+s} = \text{bsgn } r_{s2}^2, s = 1, \dots, 4$.

Тогда условия вещественности выражений (6)–(11) примут вид

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 \oplus z_5 = 0 \\ z_2 \oplus z_6 = 0 \\ z_2 \oplus z_3 \oplus z_4 \oplus z_5 = 0 \\ z_1 \oplus z_6 \oplus z_7 \oplus z_8 = 0 \\ z_1 \oplus z_3 \oplus z_4 \oplus z_6 = 0 \\ z_2 \oplus z_5 \oplus z_7 \oplus z_8 = 0 \end{array} \right. , \tag{12}$$

где знаком \oplus обозначена операция суммы по модулю 2. Исключив лишние уравнений и добавив

условия-импликации, вытекающие из ограничений $w \geq v$, $a > 0$ и $b > 0$, получаем систему

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 \oplus z_2 \oplus z_3 \oplus z_4 = 0, \quad z_1 \oplus z_5 = 0, \\ z_5 \oplus z_6 \oplus z_7 \oplus z_8 = 0, \quad z_2 \oplus z_6 = 0; \\ z_5 \rightarrow z_1 = 1, \quad z_6 \rightarrow z_1 = 1, \\ z_2 \rightarrow z_1 = 1, \quad z_6 \rightarrow z_4 = 1, \\ z_3 \rightarrow z_1 = 1, \quad z_3 \rightarrow z_2 = 1, \\ z_7 \rightarrow z_6 = 1, \quad z_7 \rightarrow z_5 = 1, \end{array} \right.$$

Её решением является вектор $\mathbf{z} = (z_j) = (00000000)$.

Следовательно, достижимая область задаётся неравенствами

$$\begin{aligned} v - a \leq 0, \quad v \geq 0, \quad v + b \geq 0, \quad \alpha v^2 - \beta v + f \geq 0, \\ w - a \geq 0, \quad w \geq 0, \quad w + b \geq 0, \quad \alpha w^2 - \beta w + f \leq 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Топологический анализ теперь сведен к исследованию прообразов точек достижимой области $\text{Im } \mathcal{F}$. В дальнейшем мы покажем, что она состоит из нескольких компонент связности (называемых областями возможности движения), разделенных набором кривых. Это наблюдение имеет наглядный топологический смысл: если (h, f) — внутренняя точка компоненты, то $\mathcal{F}^{-1}(h, f)$ есть регулярное интегральное многообразие (возможно, состоящее из нескольких компонент связности), а в прообразе точек этих кривых окажутся бифуркации регулярных интегральных многообразий (особые поверхности). Анализ этой задачи классическими методами затруднен в силу негладкости системы в новых координатах (например, уравнения (5) не определены при $v = w = a$). Вследствие этого нельзя пользоваться классической теоремой Ливилля. Но тип интегральных многообразий и их перестройки мы установим явно, опираясь на алгоритм, изложенный в [3]. Отметим, что количество областей возможности движения будет зависеть от параметров задачи m, g, a, b . Определяющую роль играет знак g — "ускорения свободного падения как уже отмечалось ранее.

Согласно [3], особые поверхности, соответствуют тем значениям параметров (h, f) , при которых алгебраическая кривая $v' = \sqrt{P(v)}$ в пространстве (v', v) имеет особые точки. Можно показать, что в условиях исследуемой задачи наличие особой точки у такой кривой эквивалентно наличию кратного корня у многочлена, стоящего в числителе $P(v)$.

Совокупность таких пар (h, f) на плоскости \mathbb{R}^2 называется разделяющим множеством. Выполнив вычисления, находим, что разделяющее множество состоит из трех кривых, задаваемых уравнениями $f = \frac{1}{32g}(2h + (a + b)gm)^2$, $f = \frac{am}{8}(2h + bgm)$.

Топологический анализ: $g < 0$. В этом случае условия (13) определяют четыре типа достижимых областей. Они перечислены в таблице 1. Так, можно заметить, что каждый тип области определяется взаимным расположением корней. Каждому способу расположения корней друг относительно друга соответствует определенная область параметров (h, f) . Обозначим на координатной плоскости $\mathbb{R}^2(h, f)$ эти области и разделяющие кривые; получим изображенную на рис. 2 диаграмму. В прообразе каждой её точки будет некоторая интегральная поверхность — регулярная или особая. Явно установим топологию этих интегральных поверхностей.

Сначала установим количество связных компонент в прообразе точек каждой достижимой области. Этот процесс осуществляется с помощью техники булевых функций (см. [3]) в применении к функции, задаваемой системой (12). Результаты анализа сведены в таблицу 2.

Все достижимые области, возникшие в задаче, имеют вид прямого произведения. Поэтому будем исследовать прообраз отображения момента, фиксируя один из сомножителей и рассматривая получившиеся сечения.

В доказательствах будем придерживаться следующих обозначений для некомпактных интегральных поверхностей: $\bar{V} = V \times \mathbb{R}$, где V — плоский 2-атом, $Cyl = S^1 \times \mathbb{R}$ — цилиндр.

Таблица 1:

Номер области	Корни	Область изменения v	Область изменения w
I_-	$\eta < 0 < \xi < a$	$[0, \xi]$	$[a, +\infty)$
II_-	$\eta < 0 < a < \xi$	$[0, a]$	$[\xi, +\infty)$
III_-	$0 < \eta < \xi < a$	$[\eta, \xi]$	$[a, +\infty)$
IV_-	$0 < \eta < a < \xi$	$[\eta, a]$	$[\xi, +\infty)$

Таблица 2:

Номер области	Область изменения (v, w)	Радикалы второй группы	Кол-во классов эквивалентности	Различающие компоненты АБВФ
I_-	$[0, \xi] \times [a, +\infty)$	r_{21}, r_{41}, r_{12}	2	$z_1 \oplus z_6 \oplus z_7 \oplus z_8$
II_-	$[0, a] \times [\xi, +\infty)$	r_{11}, r_{21}, r_{42}	2	$z_3 \oplus z_4 \oplus z_5 \oplus z_6$
III_-	$[\eta, \xi] \times [a, +\infty)$	r_{41}, r_{12}	4	$z_1 \oplus z_6 \oplus z_7 \oplus z_8, z_2 \oplus z_6$
IV_-	$[\eta, a] \times [\xi, +\infty)$	r_{11}, r_{41}, r_{42}	2	$z_2 \oplus z_6$

Утверждение 1. Переходу через границу областей I_- и II_- отвечает бифуркации типа \overline{C}_2 .

Доказательство. Связные компоненты \mathcal{F}^{-1} в области I_- отличаются значением $z_1 \oplus z_6 \oplus z_7 \oplus z_8$.

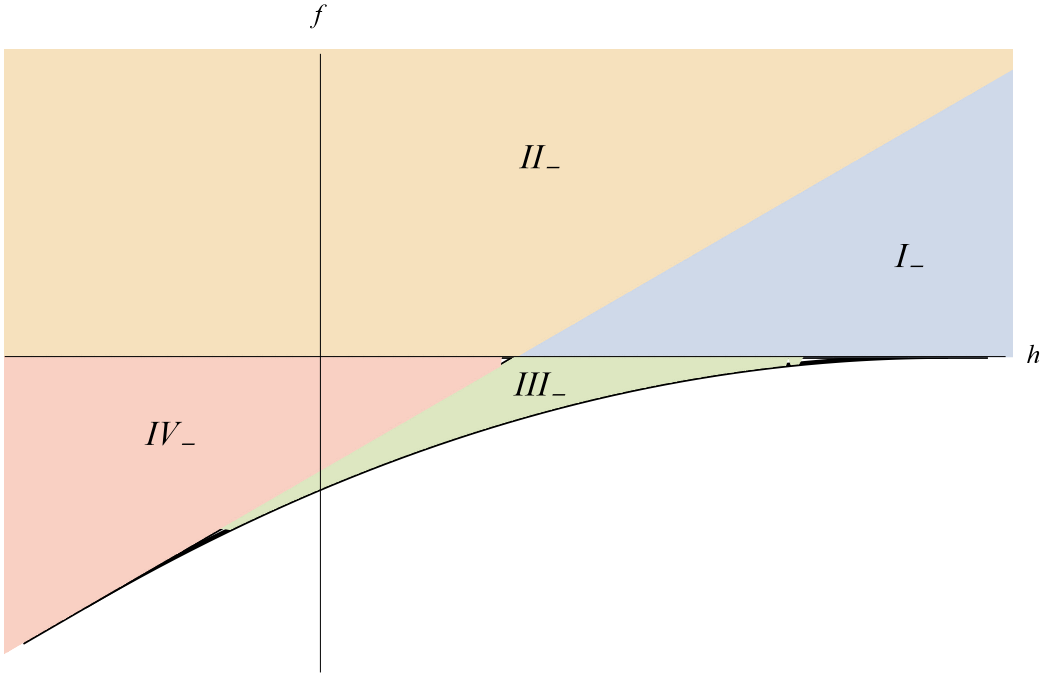


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма при $g < 0$

Фиксируя w , мы вместе с тем фиксируем знаки всех радикалов, зависящих от переменной w . Таким образом, прообразом отрезка $\{0 \leq v \leq \xi, w = \text{const}\}$ являются две окружности, отличающиеся значением переменной z_1 ; обозначим эти окружности γ_1 и γ_2 . Положив $v = \xi \sin^2 \varphi$, $\varphi \bmod 2\pi$, получим явную параметризацию этих окружностей.

Вдоль каждой из окружностей γ_1, γ_2 периодически меняет знак радикал r_{41} . В соответствии со значением $z_4 = \text{bsgn } r_{41}$ разделим γ_i на дуги $\gamma_i^+ = \gamma_i \cap \{z_4 = 0\}$, $\gamma_i^- = \gamma_i \cap \{z_4 = 1\}$, $i = 1, 2$ (рис. 3, *a*).

Аналогично, связанные компоненты \mathcal{F}^{-1} в области II_- отличаются значением $z_3 \oplus z_4 \oplus z_5 \oplus z_6$. Прообразом отрезка $\{0 \leq v \leq a, w = \text{const}\}$ снова являются две окружности, отличающиеся знаками суммы $z_3 \oplus z_4$ (без ограничения общности можно считать, что отличие только в знаке z_4 , так как z_3 принадлежит к первой группе и, следовательно, не меняет знак). Вдоль каждой из этих окружностей периодически меняет знак переменная z_1 .

Рассмотрим переход через границу областей I_- и II_- . В области I_- дуги объединяются в окружности по схеме $\gamma_1^+ \cup \gamma_1^-$ и $\gamma_2^+ \cup \gamma_2^-$; при проходе в область II_- дуги перегруппировываются по схеме $\gamma_1^+ \cup \gamma_2^+$ и $\gamma_1^- \cup \gamma_2^-$ (рис. 3, *a*). На границе областей дуги γ_i^\pm имеют общие концы в точках $u = a = \xi$. Именно так устроен плоский атом-бифуркация C_2 .

Сечение $\{v = \text{const}, w \geq \xi\}$ есть прямая; параметром на ней является значение радикала r_{42} , изменяющееся от $-\infty$ до $+\infty$. Переход через границу не меняет топологического типа этого сечения.

Следовательно, трехмерная окрестность особого слоя есть некомпактный 3-атом $\overline{C_2} = C_2 \times \mathbb{R}$, $2Cyl \rightarrow 2Cyl$. Одновременно установлено, что при $(h, f) \in I_- \mathcal{F}^{-1}(h, f) = 2Cyl$; два цилиндра будет и в прообразе точек из области II_- . \square

Утверждение 2. Переходу через границу областей II_- и IV_- отвечает бифуркации типа $\overline{C_2}$.

Доказательство. Практически полностью повторяет доказательство утверждения 1, только разбиение на окружности будет происходить уже по знакам других радикалов.

Фиксируем сечение $\{0 \leq v \leq \xi, w = const\}$ в области II_- . Его прообраз — две окружности γ_1, γ_2 , отличающиеся значением z_4 ; положим $\gamma_i^+ = \gamma_i \cap \{z_2 = 0\}$, $\gamma_i^- = \gamma_i \cap \{z_2 = 1\}$, $i = 1, 2$.

В области IV_- прообразом отрезка $\{\eta \leq v \leq \xi, w = const\}$ также являются две окружности, отличающиеся значением z_2 , а знак z_4 циклически меняется вдоль каждой из них.

Переход через границу областей II_- и IV_- перегруппировывает дуги γ_i^\pm следующим образом:

$\gamma_1^+ \cup \gamma_1^-$ и $\gamma_2^+ \cup \gamma_2^-$ в области II_- ,

γ_i^\pm склеиваются концами в точках $u = 0 = \eta$,

$\gamma_1^+ \cup \gamma_2^+$ и $\gamma_1^- \cup \gamma_2^-$ в области IV_- .

описанная таким образом перестройка есть плоский атом C_2 .

Сечение $\{v = const, w \geq \xi\}$ есть прямая; параметром на ней является значение радикала r_{42} , изменяющееся от $-\infty$ до $+\infty$. Переход через границу не меняет топологического типа этого сечения.

Следовательно, трехмерная окрестность особого слоя также является 3-атомом $\overline{C_2}$, и при $(h, f) \in IV_- \mathcal{F}^{-1}(h, f) = 2Cyl$. \square

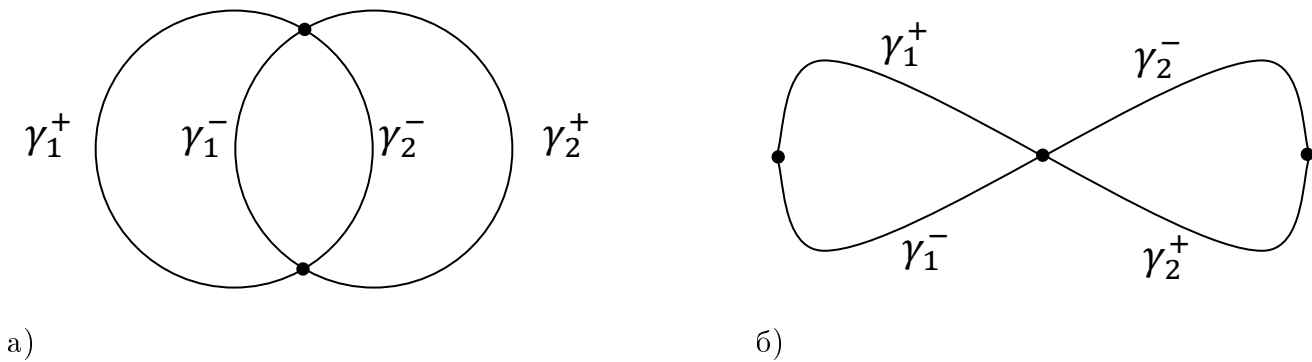


Рис. 3. К доказательству утверждений 1,3

Утверждение 3. Переходу через границу областей III_- и IV_- отвечает бифуркации типа $2\overline{B}$.

Доказательство. Фиксируем сечение $\{\eta \leq v \leq \xi, w = const\}$ в области III_- ; его прообраз — четыре окружности $\gamma_1, \dots, \gamma_4$, отличающиеся значениями z_1, z_2 . Так как критический уровень

состоит из двух компонент связности, то можно проводить все последующие действия для каждой компоненты по отдельности, зафиксировав знак z_2 (считаем, что γ_1, γ_2 принадлежат одной компоненте, γ_3, γ_4 — другой.) Считаем, что на γ_1 $z_1 = 0$, на γ_2 $z_1 = 1$, В пределах одной компоненты связности рассмотрим разбиение окружностей на дуги следующим образом:

$$\gamma_i^+ = \gamma_i \cup \{z_4 = 0\}, \gamma_i^- = \gamma_i \cup \{z_4 = 1\} \text{ (рис. 3, б).}$$

Вдоль окружности, являющейся прообразом сечения $\{\eta \leq v \leq \xi, w = const\}$ в области IV_- , циклически меняют знак радикалы r_{11}, r_{41} . Им отвечают булевы знаки z_1, z_4 . С учетом ориентации, задаваемой направлением возрастания переменной φ , получаем, что окружности γ_1 и γ_2 при переходе через кривую разделяющего множества объединяются в одну окружность $\gamma_1^+ \cup \gamma_1^- \cup \gamma_2^- \cup \gamma_2^+$ (рис. 3, б). т.е. происходит бифуркация типа "восьмерка" с точкой самопересечения в $u = a = \xi$. В терминах атомов такая перестройка задается плоским атомом B .

Сечение $\{v = const, w \geq \xi\}$ есть прямая; параметром на ней является значение радикала r_{42} , изменяющееся от $-\infty$ до $+\infty$. Переход через границу не меняет топологического типа этого сечения. Получаем, что бифуркация на границе областей III_- и IV_- соответствует двум некомпактным 3-атомам $\bar{B} = B \times \mathbb{R}$, и при $(h, f) \in III_-$ $\mathcal{F}^{-1}(h, f) = 4Cyl$. \square

Утверждение 4. Переходу через границу областей I_- и III_- отвечает бифуркации типа $2\bar{B}$.

Доказательство. Фиксируем сечение $\{0 \leq v \leq \xi, w = const\}$ в области III_- ; его прообраз — четыре окружности $\gamma_1, \dots, \gamma_4$, отличающиеся значениями z_1, z_2 . Так как критический уровень состоит из двух компонент связности, то можно проводить все последующие действия для каждой компоненты по отдельности, зафиксировав знак z_1 (считаем, что γ_1, γ_2 принадлежат одной компоненте, γ_3, γ_4 — другой.)

Считаем, что на γ_1 $z_2 = 0$, на γ_2 $z_2 = 1$, В пределах одной компоненты связности рассмотрим разбиение окружностей на дуги следующим образом:

$$\gamma_i^+ = \gamma_i \cup \{z_4 = 0\}, \gamma_i^- = \gamma_i \cup \{z_4 = 1\}$$

Вдоль окружности, являющейся прообразом сечения $\{0 \leq v \leq \xi, w = const\}$ в области I_- , циклически меняют знак радикалы r_{21}, r_{41} . Им отвечают булевы знаки z_2, z_4 . С учетом ориентации, задаваемой направлением возрастания переменной φ , получаем, что окружности γ_1 и γ_2 при переходе через кривую разделяющего множества объединяются в одну окружность $\gamma_1^+ \cup \gamma_1^- \cup \gamma_2^- \cup \gamma_2^+$, т.е. происходит бифуркация типа "восьмерка" с точкой самопересечения в $u = 0 = \xi$. В терминах атомов такая перестройка задается плоским атомом B .

Сечение $\{v = const, w \geq a\}$ есть прямая; параметром на ней является значение радикала r_{42} , изменяющееся от $-\infty$ до $+\infty$. Переход через границу не меняет топологического типа этого сечения.

Такая бифуркация на границе областей III_- и IV_- соответствует двум некомпактным 3-атомам \overline{B} . \square

В результате доказательства этих утверждений вычислены регулярные интегральные многообразия и определены их бифуркации.

Грубые молекулы. Зафиксируем величину $H = h$ и будем рассматривать изоэнергетическое многообразие $Q_h^3 = \{H = h\}$. Для него изоэнергетическая молекула Фоменко определяется как последовательность перестроек поверхностей $\mathcal{F}^{-1}(h, f)$ при фиксированной величине энергии h и изменяющемся значении f .

После проведенного в предыдущем пункте топологического анализа можно сделать следующие выводы:

- прообраз точки из внутренней достижимой области регулярен и гомеоморфен объединению цилиндров,
- на границах достижимых областей (т.е. на разделяющих кривых) происходят перестройки этих цилиндров.

Следовательно, часть разделяющего множества, лежащая внутри допустимой области, действительно является бифуркационной диаграммой.

На диаграмме выделяется четыре зоны энергии, в которых грубые молекулы одинаковы. Список результатов, приведенный в таблице 1, завершает доказательство теоремы.

\square

Топологический анализ в случае $g > 0$ более сложен, так как в этом случае регулярные интегральные поверхности компактны (гомеоморфны несвязному объединению торов). Это потребует вычисления меток на ребрах грубой молекулы и, как следствие, явного определения базисных циклов на граничных торах атомов.

Литература

- [1] Чаплыгин С. А. О параболоидном маятнике. Полн. собр. соч. Т. 1. Л., 1933, 194—200.
- [2] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. 1,2. Ижевск:РХД, 1999.
- [3] Харламов М.П. Топологический анализ и булевы функции: I. Методы и приложения к классическим системам // Нелинейная динамика, 2010, Т.6, №4, с.769–805.
- [4] Николаенко С. С. Число связных компонент в прообразе регулярного значения отображения момента для геодезического потока эллипсоида // Вестн. моск. ун-та. сер. 1, математика. механика. 2000. № 1.
- [5] Николаенко С. С. Топологическая классификация интегрируемого случая Горячева в динамике твердого тела // Математический сборник, том 207, № 1.
- [6] Переломов А. М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 240 с.
- [7] Фоменко А.Т. "Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем". — Доклады АН СССР, 1986, т.287, No.5, с.1071-1075.
- [8] Фоменко А.Т. "Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости". — Известия АН СССР. Серия матем. 1986, т.50, No.6, с.1276-1307.
- [9] Фоменко А.Т., Цишанг Х. "О топологии трехмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике". — Доклады АН СССР, 1987, т.294, No.2, с.283-287.
- [10] Фоменко А.Т., Цишанг Х. "О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем". - Известия АН СССР, 1988, т.52, No.2, с.378-407.
- [11] Fomenko A.T. "Integrability and Nonintegrability in Geometry and Mechanics". (Монография). - Kluwer Academic Publishers. 1988.

- [12] Фоменко А.Т. "Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем". - Успехи математических наук, 1989, т.44, вып.1 (265), с.145-173.