МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

Курсовая работа

Компактная выпуклость шаров в пространстве Громова-Хаусдорфа.

Курсовая работа
студентки 5-го курса
Клибус Д.
Научный руководитель:
профессор, д.ф-м.н. Тужилин А.А.

Москва 2018

Содержание

1 Введение

Расстояние Громова–Хаусдорфа было определено в 1975 году в статье Д. Эдвардса "The Structure of Superspace" [1], потом в 1981 переоткрыто М. Громовым [2].

Будем исследовать геометрию пространства $\mathcal{M}$ всех метрических компактов (рассматриваемых с точностью до изометрии) с расстоянием Громова–Хаусдорфа. Хорошо известно, что расстояние Громова–Хаусдорфа является метрикой в $\mathcal{M}$ [3]. Пространство Громова–Хаусдорфа — польское (полное сепарабельное) и линейно связное. Также А.О. Иванов, Н.К. Николаева и А.А. Тужилин показали, что метрика Громова–Хаусдорфа является строго внутренней [4].

Настоящая статья посвящена следующему вопросу: являются ли шары в пространстве Громова–Хаусдорфа выпуклыми. Существует два понятия выпуклости: в сильном смысле (каждая кратчайшая кривая, соединяющая любую пару точек множества, принадлежит этому множеству) и в слабом смысле (для любой пары точек множества найдется кратчайшая кривая, которая соединяет эти точки и принадлежит этому множеству). Мы рассмотрим новое понятие компактной выпуклости: объединение кратчайших кривых, определенных, как в [6], соединяющих любую пару точек множества, принадлежит этому множеству. Мы покажем, что шар ненулевого радиуса с центром в одноточечном пространстве и шар достаточно малого радиуса с центром в пространстве общего положения компактно-выпуклые.

Выражаю благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. профессору А.А. Тужилину за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также д.ф.-м.н. профессору А.О.Иванову за полезные обсуждения.

2 Основные определения и предварительные результаты

Пусть X — метрическое пространство, а $x \in X$ — произвольная его точка. Расстояния между точками x и y будем обозначать через $|xy|$, а одноточечное пространство — через Δ_1. Для каждого $\varepsilon > 0$ определим *ε-окрестность* $U_\varepsilon(x)$ точки x, положив $U_\varepsilon(x) = \{y \in X : |xy| < \varepsilon\}$. Множество $U_\varepsilon(x)$ называют *открытым шаром радиуса ε с центром в точке x*. Кроме того, если A — непустое подмножество пространства X, то *ε-окрестность множества A* определяется как $U_\varepsilon(A) = \cup_{a\in A} U_\varepsilon(a)$. *Замкнутым шаром радиуса ε с центром в точке x* называют множество $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : |xy| \le \varepsilon\}$. Для $x \in X$ и непустого $A \subset X$ положим $|xA| = \inf\{|xa| : a \in A\}$. Для непустого $A \subset X$ и неотрицательного r (возможно, равного ∞) *замкнутой r-окрестностью множества A* или *замкнутым шаром радиуса r с центром в A* назовем множество $B_r(A) = \{x \in X : |xA| \le r\}$.

Определение 2.1. Пусть X и Y — два непустых подмножества метрического пространства. Определим *расстояние по Хаусдорфу*: $d_H(X,Y) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid (\mathrm{U}_\varepsilon(X) \supset Y) \ \&\ (\mathrm{U}_\varepsilon(Y) \supset X)\}$.

Для произвольного метрического пространства X, обозначим через $\mathcal{H}(X)$ семейство всех его непустых замкнутых ограниченных подмножеств.

Предложение 2.2 ([3])**.** *Пусть X — метрическое пространство, тогда d_H является метрикой на $\mathcal{H}(X)$.*

Определение 2.3. Пусть X и Y — произвольные непустые компактные метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X,Y). *Расстоянием $d_{GH}(X,Y)$ по Громову–Хаусдорфу между X и Y* назовем точную нижнюю грань чисел ρ, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X,Y) такая, что $d_H(X', Y') \le \rho$.

Пусть $\mathcal{M}$ — пространство всех непустых метрических компактнов, рассматриваемых с точностью до изометрии, наделенное расстоянием Громова–Хаусдорфа. Хорошо известно [3], что на $\mathcal{M}$ расстояние Громова–Хаусдорфа является метрикой. Метрика на множестве X называется *строго внутренней*, если любые две точки x, $y \in X$ соединяются кривой, длина которой равна расстоянию между x и y (такая кривая является *кратчайшей*).

Отношением между множествами X и Y называется каждое подмножество декартова произведения $X \times Y$. Множество всех непустых отношений между X и Y обозначим через $\mathcal{P}(X,Y)$. Если $\pi_X : (X,Y) \to X$ и $\pi_Y : (X,Y) \to Y$ — канонические проекции, т.е. $\pi_X\ (x,y) = x$ и $\pi_Y\ (x,y) = y$, то теми же символами будем обозначать ограничения этих отображений на каждое отношение $\sigma \in \mathcal{P}(X,Y)$.

Будем смотреть на каждое отношение $\sigma \in \mathcal{P}(X,Y)$ как на многозначное отображение, которое может иметь область определения меньшую, чем X. Тогда, по аналогии с тем, как это принято для отображений, для каждого $x \in X$ определен его образ $\sigma(x) = \{y \in Y | (x,y) \in \sigma\}$; для каждого $A \subset X$ определено $\sigma(A)$ как объединение образов всех элементов из A; для каждого $y \in Y$ определен его прообраз $\sigma^{-1}(y) = \{x \in X | (x,y) \in \sigma\}$; для каждого $B \subset Y$ определен его прообраз как объединение прообразов всех его элементов.

Определение 2.4. Отношение $R \subset X \times Y$ между множествами X и Y называется *соответствием*, если ограничения на R канонических проекций π_X и π_Y сюръективны. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X,Y)$.

Определение 2.5. *Искажением* $\operatorname{dis}\sigma$ *отношения* $\sigma \in \mathcal{P}(X,Y)$ назовем следующее число:

$$\operatorname{dis}\sigma = \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big| : (x,y),\,(x',y') \in \sigma\Big\}.$$

Предложение 2.6 ([3])**.** *Для любых метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\left\{\operatorname{dis}R : R \in \mathcal{R}(X,Y)\right\}.$$

Определение 2.7. Соответствие $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ назовем *оптимальным*, если $d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\operatorname{dis}\,R$. Множество всех оптимальных соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y)$.

Предложение 2.8 ([6])**.** *Для любых $X,Y \in \mathcal{M}$ имеем $\mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y) \neq \emptyset$.*

Предложение 2.9 ([6])**.** *Для любых $X,\,Y \in \mathcal{M}$ и каждого $R \in \mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y)$ семейство R_t, $t \in [0,1]$, компактных метрических пространств такое, что $R_0 = X$, $R_1 = Y$, а при $t \in (0,1)$ пространство R_t — это (R,ρ_t), где $\rho_t\big((x,y),(x',y')\big) = (1-t)\big|xx'\big| + t\big|yy'\big|$, является кратчайшей кривой в $\mathcal{M}$, соединяющей X и Y.*

Определим *диаметр метрического пространства X* следующим образом:

$$\operatorname{diam}(X) = \sup_{x,x' \in X}|xx'|.$$

Утверждение 2.10 ([3])**.** *Пусть Δ_1 — одноточечное пространство, тогда для любого метрического пространства X имеем $d_{GH}(X,\Delta_1) = \operatorname{diam}(X)/2$.*

Определение 2.11. Будем говорить, что конечное метрическое пространство M *находится в общем положении* или *является пространством общего положения*, если все ненулевые расстояния в M различны и все неравенства треугольника для троек, состоящих из различных точек, — строгие.

Для произвольного метрического пространства X определим величины:

$$s(X) = \inf\{|xy| : x \neq y\},\;\; e(X) = \inf\Big\{\big||xy| - |zw|\big| \colon x \neq y, z \neq w, \{x,y\} \neq \{z,w\}\Big\}.$$

Говоря про метрическое пространство $X \times Y$, мы всегда будем считать, что на нем задано расстояние $|(x,y)(x',y')| = \max\{|xx'|,|yy'|\}$, которое, в частности, порождает расстояние Хаусдорфа на $\mathcal{P}(X,Y)$. Тем самым, пространство $\mathcal{P}(X,Y)$ и все его подпространства, например $\mathcal{R}(X,Y)$, будут рассматриваться с функциями расстояния из $\mathcal{P}(X,Y)$.

Множество всех замкнутых непустых отношений между X и Y обозначим через $\mathcal{P}_c(X,Y)$; аналогично, через $\mathcal{R}_c(X,Y)$ будем обозначать множество всех замкнутых соответствий между X и Y.

Следствие 2.12 ([6])**.** *Для любых метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\left\{\operatorname{dis}R : R \in \mathcal{R}_c(X,Y)\right\}.$$

Замечание 2.13 ([6])**.** Если $X,Y \in \mathcal{M}$, то $X \times Y \in \mathcal{M}$ и выполняется $\mathcal{P}_c(X,Y) = \mathcal{H}(X \times Y) \in \mathcal{M}$.

Предложение 2.14 ([6]). *Для $X, Y \in \mathcal{M}$ множество $\mathcal{R}_c(X,Y)$ замкнуто в $\mathcal{P}_c(X,Y)$ и, значит, $\mathcal{R}_c(X,Y) \in \mathcal{M}$.*

Предложение 2.15 ([6]). *Если $X, Y \in \mathcal{M}$, то функция* $\operatorname{dis}\colon \mathcal{P}_c(X,Y) \to \mathbb{R}$ *непрерывна.*

Следствие 2.16 ([6]). *Для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ имеем $\mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y) \cap \mathcal{R}_c(X,Y) \neq \emptyset$, т.е. между любыми метрическими компактами существует замкнутое оптимальное соответствие.*

Теорема 1. *Шар с центром в одноточечном метрическом пространстве — выпуклый в слабом смысле.*

Теорема 2. *Шар радиуса $0 < r \le \frac{1}{4}\min\{s(M), e(M)\}$ с центром в пространстве общего положения M выпуклый в слабом смысле.*

3 Основные результаты

Введем обозначение. Пусть $\mathcal{R}^c_{\rm opt}(X,Y) = \mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y) \cap \mathcal{R}_c(X,Y)$.

Предложение 3.1. *Для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ множество $\mathcal{R}^c_{\rm opt}(X,Y)$ компактно.*

Доказательство. Пусть $X, Y \in \mathcal{M}$, из предложения 2.14 выпекает, что $\mathcal{R}_c(X,Y)$ — компакт. Значит, достаточно показать, что $\mathcal{R}^c_{\rm opt}(X,Y)$ замкнуто в $\mathcal{R}_c(X,Y)$. По предложению 2.15, функция $\operatorname{dis}\colon \mathcal{R}^c_{\rm opt}(X,Y) \to \mathbb{R}$ непрерывна. Так как $\mathcal{R}^c_{\rm opt}(X,Y)$ состоит из оптимальных соответствий, то для всякого $\sigma \in \mathcal{R}^c_{\rm opt}(X,Y)$ имеем $\operatorname{dis}(\sigma) = 2d_{GH}(X,Y) = c \in \mathbb{R}$. Точка c в $\mathbb{R}$ замкнута. Следовательно, прообраз $\operatorname{dis}^{-1}(c)$ есть замкнутое подмножество в $\mathcal{R}_c(X,Y)$, а, значит, $\mathcal{R}^c_{\rm opt}(X,Y)$ — компакт. □

Определение 3.2. Для $X, Y \in \mathcal{M}$ будем называть *сегментом компактных соответствий* $[X,Y]_c$ объединение всех кратчайших, соединяющих X и Y, порожденных компактными оптимальными соответствиями как в предложении 2.9.

Предложение 3.3. *Пусть $X, Y \in \mathcal{M}$, тогда $[X,Y]_c$ — компакт.*

Доказательство. Для любых X, $Y \in \mathcal{M}$ по каждым $R \in \mathcal{R}^c_{\rm opt}(X,Y)$ и $t \in [0,1]$ строится кратчайшая R_t так, как описано в предложении 2.9. Определим на $\mathcal{R}^c_{\rm opt}(X,Y) \times [0,1]$ метрику $\rho\big((R,t),(R',s)\big) = \max\{d_{GH}(R,R'), |t-s|\}$, где $R, R' \in \mathcal{R}^c_{\rm opt}(X,Y)$, а $t, s \in [0,1]$.

Теперь рассмотрим отображение $\gamma\colon (R,t) \mapsto R_t$ из $\mathcal{R}^c_{\rm opt}(X,Y) \times [0,1]$ в $\mathcal{M}$ и покажем, что это отображение непрерывное. Для этого оценим $d_{GH}\big((R,t),(R',s)\big)$. Так как $R, R' \in \mathcal{R}^c_{\rm opt}(X,Y) \subset X \times Y$, то для пары $\big((R,t),(R',s)\big)$ существует реализация $\big((R,t),(R',s),(X\times Y)\times[0,1]\big)$. Тогда

$$d_{GH}\big((R,t),(R',s)\big) \le d_H\big((R,t),(R',s)\big) = \max\{d_{GH}(R,R'), |t-s|\} = \rho\big((R,t),(R',s)\big).$$

Из полученного неравенства видим, что отображение γ — липшицево и, поэтому, непрерывное. Так как $\mathcal{R}^c_{\rm opt}(X,Y) \times [0,1]$ — компакт, то $[X,Y]_c = \operatorname{im}\gamma$ также является компактом как образ компакта при непрерывном отображении. □

Определение 3.4. Подмножество M метрического пространства назовем *компактно-выпуклым*, если для всяких $X, Y \in M$ сегмент компактных соответствий $[X,Y]_c$ принадлежит M.

Теорема 3. *Шар с центром в одноточечном метрическом пространстве и шар малого радиуса* $0 < r \le \frac{1}{4}\min\{s(M), e(M)\}$ *с центром в пространстве общего положения* M *— компактно-выпуклые.*

Доказательство. Для доказательства будем пользоваться теоремами 1 и 2. В них мы для всяких X, Y из шара выбирали любое соответствие из $\mathcal{R}^c_{\mathrm{opt}}(X,Y)$ и строили кратчайшую R_t, которая, как мы показали, лежит внутри шара. В силу произвольности выбора соответствия, внутри шара лежит и весь сегмент компактных соответствий $[X,Y]_c$. $\square$

4 Список литературы

Список литературы

[1] Edwards D. The Structure of Superspace. In «Studies in Topology». Academic Press, 1975.

[2] Gromov M. Groups of Polynomial growth and Expanding Maps. Publications mathematiques, 53, 1981.

[3] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. Курс метрической геометрии. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[4] Ivanov A.O., Nikolaeva N.K., Tuzhilin A.A. The Gromov-Hausdorff Metric on the Space of Compact Metric Spaces is Strictly Intrinsic. ArXiv e-prints, arXiv:1504.03830, 2015.

[5] Иванов А.О., Тужилин А.А. Геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова-Хаусдорфа: случай компактов. Издательство Попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2017, Москва, ISBN. 978-5-9500628-1-0.

[6] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. Realizations of Gromov-Hausdorff Distance. ArXiv e-prints, arXiv:1603.08850, 2016.

[7] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Local Structure of Gromov-Hausdorff Space near Finite Metric Spaces in General Position. ArXiv e-prints, arXiv:1611.04484, 2016.