Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

КЛАССИФИКАЦИЯ ВЫСОТНЫХ ЧАСТИЧНО СИММЕТРИЧНЫХ АТОМОВ
CLASSIFICATION OF PARTIALLY SYMMETRIC HEIGHT ATOMS

Курсовая работа

студентки 4–го курса
Трифоновой Виктории Александровны.
Научные руководители –
академик РАН, зав. кафедрой Фоменко А.Т.,
к.физ.-мат.н., доцент Никонов И.М.

Москва 2018

1. Введение

Понятие атома, появившееся в задачах качественного анализа и классификации динамических систем, находит применение в самых разных разделах современной комбинаторики и маломерной топологии, теории узлов [1–4]. Понятие атома для целей гамильтоновой и симплектической геометрии и топологии было введено А.Т. Фоменко [3] и использовалось для лиувиллевой классификации интегрируемых гамильтоновых систем в работе [4].

Симметрии атомов отражают дискретные симметрии соответствующих динамических систем, так что для анализа важной является задача описания классов атомов, обладающих заданной группой симметрии. Так, в работах [5,6] получен ряд классификационных результатов максимально симметричных атомов, имеющих максимально возможный набор симметрий. В работе [7] приведена полная классификация высотных атомов с транзитивной на вершинах группой симметрий. Задача классификации максимально симметричных атомов является довольно сложной и может быть решена только для отдельных семейств атомов (атомы малой сложности, атомы малого рода) либо атомов, обладающих некоторым специальным свойством. Так, в работе [8] полностью описаны максимально симметричные высотные атомы. С дальнейшим развитием теории симметрий атомов можно ознакомиться в работах [9 – 16].

В настоящей работе рассматривается важный частный случай высотных атомов – высотные атомы с группой симметрий, транзитивной на кольцах одного цвета. Для таких атомов удалось получить полное описание: предъявлена 21 бесконечная серия. Основные определения следуют [1,2,5].

2. Необходимые понятия и определения.

Пусть M^2 – гладкое компактное двумерное многообразие, $f\colon M^2 \to \mathbb{R}$ – функция Морса на M^2 и $\{x \in M^2 : f(x) = k\}$, где $k \in \mathbb{R}$, – ее особый уровень. Тогда существует $\varepsilon > 0$, такое, что $f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon])$ не содержит особых точек, кроме лежащих на особом уровне ($\{f = k\}$).

Определение 1. *Атомом* называется пара $(f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon]), f^{-1}(k))$ с указанием вложения графа $f^{-1}(k)$ в поверхность $f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon])$. Атом называется *ориентируемым*, если эта поверхность ориентируема. Граф $f^{-1}(k)$ называется остовом атома. Два атома называются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм пар, который переводит поверхность в поверхность (сохраняя ориентацию, если поверхность ориентирована), остов в остов, а функцию переводит в функцию(см. [1]). Будем говорить, что атом $(f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon]), f^{-1}(k))$ порожден функцией f. *Сложностью* атома называется количество особых точек функции f на особом слое.

Определение 2. Назовем атом, порожденный функцией f, *высотным*, если существует такое вложение $g\colon M^2 \to \mathbb{R}^3$, что $f(p) = z(g(p))$ для каждой точки $p \in M^2$, где z – стандартная координата в пространстве $\mathbb{R}^3$, т.е. z – функция высоты на $g(M^2)$.

Все высотные атомы являются ориентируемыми (см. [2]). Так как мы будем рассматривать только высотные атомы, то всюду ниже все атомы ориентируемые.

Пусть дан атом $X = (f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon]), f^{-1}(k))$. Ясно, что $f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon])$ является некоторым многообразием P^2 с краем, причем его край – это набор окружностей. *Родом* атома X называется род многообразия без края, полученного из P^2 с помощью заклеивания всех связных компонент границы дисками. Атомы рода 0 назовем *плоскими* атомами.

Также стоит дать второе эквивалентное определение атома.

Определение 3. *Атомом* назовем пару (P^2, K), где P^2 – компактная ориентированная поверхность с краем, K – непустой конечный связный граф, вложенный в P^2 и имеющий вершины степени 4, причем множество $P^2 \setminus K$ является несвязным объединением колец $S^1 \times (0,1]$, $(S^1, 1) \subset \partial P^2$. Множество колец и их граничных окружностей разбито на два подмножества (белые и черные кольца) таким образом, что к каждому ребру графа K примыкают ровно одно белое кольцо и ровно одно черное кольцо. Указанное разбиение колец и соответствующих окружностей на белые и черные называется *оснащением* пары (P^2, K). Два атома считаются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм оснащенных пар, сохраняющий ориентацию поверхностей и раскраску колец.

Атом, который получается заменой белых колец на черные, а черных колец на белые, называется *двойственным* атомом к исходному атому.

Атом может быть определен также как f-граф (см. [1]), что в свою очередь дает нам возможность работать с атомами как с комбинаторными объектами.

Определение 4. Конечный связный граф G, некоторые ребра которого ориентированы, называется *ориентированным f-графом*, если все его вершины имеют степень 3, причем к каждой его вершине примыкают ровно два ориентированных полуребра, из которых одно входит в вершину, а другое выходит из нее. Отметим, что вершина может быть началом и концом одного и того же ориентированного полуребра.

Соответствующий f-граф строится по атому (P^2, K) следующим образом: в качестве неориентированного ребра берется отрезок(сепаратриса), проходящий через вершину графа K и соединяющий границы противоположных белых колец (см. рис. 1), а в качестве вершин – соответствующие концы отрезка. В роли ориентированных ребер выступают примыкающие к вершинам дуги белых колец с соответствующей ориентацией.

Определение 5. Назовем f-граф *ориентированно вложимым в плоскость*, если его можно вложить в плоскость так, что окружности, соединенные одним ребром, лежат одна в другой тогда и только тогда, когда они имеют противоположную ориентацию. Соответствующее вложение также будем называть *ориентированным.*

Определение 6. *Симметрией атома* $X = (P^2, K)$ называется сохраняющий ориентацию и оснащение гомеоморфизм оснащенной пары (P^2, K) на себя, рассматриваемый с точностью до изотопии, т.е. класс эквивалентности изотопных гомеоморфизмов оснащенной пары (P^2, K) на себя. Отметим, что при таком определении группа (X) симметрий атома $X = (P^2, K)$ дискретна (см. [1]).

Определение 7. Назовем *симметрией f-графа* G изоморфизм графа G на себя, переводящий ориентированные ребра в ориентированные с сохранением их ориентации. Обозначим группу всех таких симметрий f-графа G через (G).

Определение 8. Атом $X = (P^2, K)$ с заданным оснащением является *атомом с группой симметрий, транзитивной на кольцах белого(черного) цвета*, если для любых двух колец белого(черного) цвета u, v указанного оснащения найдется симметрия атома $\phi \in (X)$, такая, что $\phi(u) = v$.

Определение 9. Будем говорить, что атом $X = (P^2, K)$ является *атомом с транзитивной на вершинах группой симметрий*, если для любых двух вершин u, v графа K найдется симметрия атома $\phi \in (X)$, такая, что $\phi(u) = v$.

Определение 10. Атом $X = (P^2, K)$ является *максимально симметричным* тогда и только тогда, когда группа его симметрий (X) транзитивно действует на множестве ребер атома X.

Нам понадобится следующий результат из книги А.В.Болсинова, А.Т.Фоменко [1].

Теорема 1. *Пусть $X = (P^2, K)$ — некоторый атом, рассматриваемый как оснащенная пара, а G - соответствующий ему f-граф. Тогда группа (G) изоморфна группе (X).*

Отсюда следует, что атом $X = (P^2, K)$ является максимально симметричным тогда и только тогда, когда группа симметрий его f-графа (G) транзитивно действует на вершинах f-графа.

3. Высотные атомы с группой симметрий, транзитивной на кольцах одного цвета

Переформулируем теперь в терминах f-графа условие, что группа симметрий атома действует транзитивно на кольцах белого цвета. Когда будем иметь дело с f-графом какого-либо атома, примем, что f-граф соответствует белым кольцам этого атома, если не оговорено уточнение. Тогда в любом таком f-графе ориентированные циклы соответствуют белым кольцам. А ориентированные циклы f-графа атома, двойственного к исходному, будут соответствовать чёрным кольцам исходного атома.

Определение 11. *Гранью* ориентированного вложения f-графа назовем часть плоскости, ограниченную ориентированными и неориентированными ребрами. Запрещаем, чтобы грань ограничивалась только ориентированными ребрами. Заметим, что грань не может ограничиваться только неориентированными ребрами(из определения f-графа).

Заметим, что если нам дано плоское вложение f-графа атома, то ориентированные циклы будут соответствовать белым кольцам, а грани - чёрным.

Утверждение 1. *Пусть $X = (P^2, K)$- атом с группой симметрий $Sym(X)$, а G- соответствующий ему f-граф. Тогда $Sym(X)$ транзитивно действует на кольцах белого цвета тогда и только тогда, когда $Sym(G)$ транзитивно действует на ориентированных циклах.*

Доказательство. Утверждение вытекает из конструкции построения f-графа по атому : ориентированные циклы ставятся в соответствие каждому белому кольцу атома. Заметим, если, кроме этого, G_1-f-граф двойственного к исходному атома и $Sym(G_1)$ транзитивно действует на ориентированных циклах G_1, то группа симметрий как исходного атома, так и двойственного, транзитивно действут на кольцах обоих цветов.□

В дальнейшей работе нам понадобятся утверждения, взятые из статьи И.М.Никонова[6].

Утверждение 2. *Пусть $X = (P^2, K)$ − атом с группой симметрий $Sym(X)$, а G − соответствующий ему f-граф. Тогда $Sym(X)$ транзитивно действует на вершинах атома в том и только в том случае, когда группа $Sym(G)$ транзитивно действует на неориентированных рёбрах f-графа.*

Утверждение 3. *Атом является высотным тогда и только тогда, когда f-граф ориентированно вложим в плоскость.*

Определение 12. Будем называть неориентированное ребро произвольного f-графа *внутренним*, если оба конца этого ребра лежат в одном ориентированном цикле, и *внешним*, если его концы лежат в разных ориентированных циклах.

Определение 13. Будем говорить, что внешнее ребро соединяет пару ориентированных циклов, если один конец ребра лежит на одном ориентированном цикле, другой − на другом.

Утверждение 4. *Если группа симметрий $Sym(X)$ атома $X = (P^2, K)$ транзитивно действует на кольцах белого цвета, то у соответствующего f-графа G все ориентированные циклы содержат одинаковое количество вершин.*

Доказательство. По утверждению 1 группа симметрий $Sym(G)$ f-графа G транзитивно действует на ориентированных циклах. Значит, все ориентированные циклы содержат одинаковое количество вершин внутренних рёбер и вершин внешних рёбер, таким образом все ориентированные циклы содержат одинаковое количество вершин.□

Утверждение 5. *Группа симметрий максимально симметричных атомов транзитивно действует на кольцах обоих цветов.*

Доказательство. Пусть атом $X = (P^2, K)$ (с группой симметрий $Sym(X)$) является максимально симметричным. Так как к каждому ребру графа примыкает ровно одно белое и одно чёрное кольцо, и группа симметрий $Sym(X)$ транзитивно действует на рёбрах графа , поэтому $Sym(X)$ транзитивно действует на кольцах обоих цветов. □

В частности, если атом $X = (P^2, K)$ (с группой симметрий $Sym(X)$) является максимально симметричным и высотным, то $Sym(X)$ транзитивно действует на кольцах обоих цветов. Классификация максимально симметричных высотных атомов была получена в работе Волчанецкого Н.В. и Никонова И.М.[2]. Она включает в себя атом A_2(см. рис. 1), две бесконечные серии атомов $D_n, (n \geq 1), C_n, (n \geq 1)$, (рис. 2) и пять атомов P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 соответствующих правильным многогранникам (Рис. 3). Заметим, что $C_2 = D_2$. □

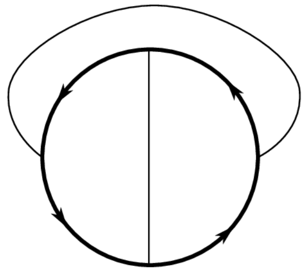
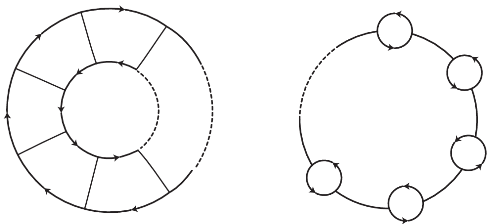


Рис. 1. f-граф атома A_2



C_n D_n

Рис. 2. f-графы атомов C_n, D_n

Теперь рассмотрим Архимедовы тела, бесконечную серию призм и антипризм, и построим по ним соответствующие атомы так:

f-граф каждого из конструируемых атомов получается в результате замены каждой вершины одномерного остова соответствующего многогранника на ориентированный цикл (см. Рис. 4) (Здесь мы пользуемся тем, что сеть каждого из рассматриваемых многогранников вложима в плоскость). При этом циклический порядок примыкающих к циклу ребер должен повторять порядок ребер, примыкающих к вершине.

Определение 14. Подгруппа группы движений евклидового пространства называется *точечной* группой, а её элементы - точечными преобразованиями(точечными симметриями), если существует точка, которая остаётся на месте при всех преобразованиях этой подгруппы.

Утверждение 6. *Группы симметрий сети Архимедовых и Платоновых тел, а также правильных призм и антипризм, сохраняющие циклический порядок рёбер, примыкающих к вершине, есть конечные подгруппы группы* $SO(3, \mathbb{R})$.

*Доказательство.*Сеть Архимедовых и Платоновых тел, а также правильных призм и антипризм есть граф, ребра которого совпадают с ребрами соответствующего многогранника, а вершины с вершинами. Группа симметрий такого графа – это

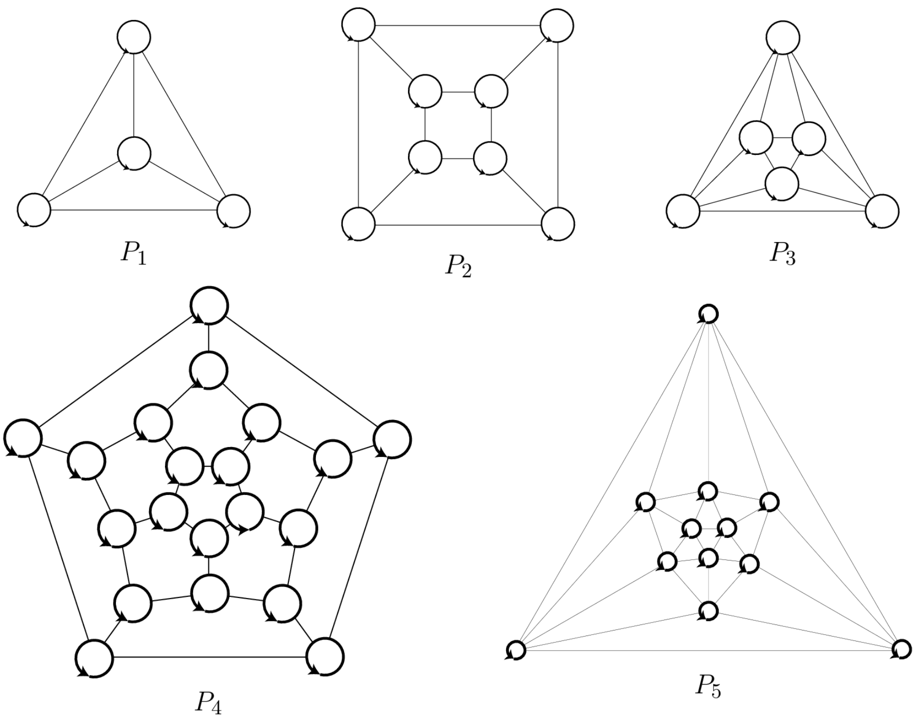


Рис. 3. f-графы атомов, соответствующих правильным многогранникам

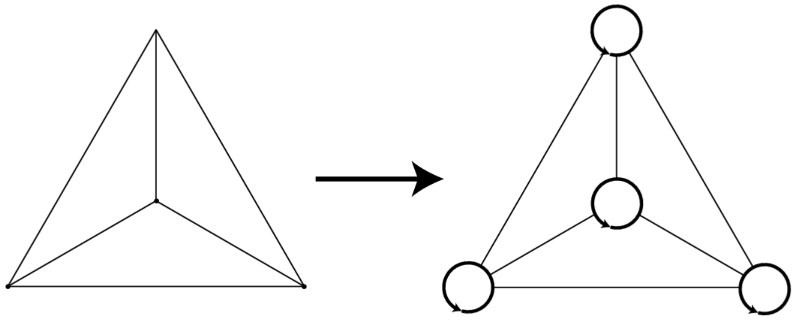


Рис. 4. Построение f-графа по остову многогранника

переименование его вершин с сохранением свойства смежности. Любое такое переименование задаёт перестановку на множестве вершин и задает некоторую симметрию соответствующего многогранника. Так что вопрос о группе симметрий сети сведем к вопросу о группе симметрий соответствующего многогранника.

Группы симметрий Архимедовых и Платоновых тел, а также правильных призм и антипризм уже известны(см.[15,16]). Каждая такая группа симметрий являются точечной. При этом любое точечное преобразование симметрии представимо в виде композиции преобразований двух типов: вращений и/или отражений в плоскости. Для примера рассмотрим тетраэдр. Выберем в группе его симметрий те симметрии, которые сохраняют циклический порядок рёбер, примыкающих к каждой вершине. Симметрии, образующие группу вращений тетраэдра, подходят. Эта группа состоит из тождественного преобразования, 8 вращений, на углы $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$, вокруг 4 осей, соединяющих вершины с центрами противоположных граней, 3 вращений, на угол π, вокруг 3 осей, соединяющих середины скрещивающихся ребер. Остальные симметрии тетраэдра образованы отражением(или композицие вращения и отражения) относительно плоскостей, проходящих через рёбра. Любые такие отражения не сохраняют циклический порядок ребёр, примыкающих к отражаемым вершинам. Итак, подходит только группа вращений. Очевидно, эта группа конечна. Для остальных рассматриваемых многогранников рассуждения аналогичны.□

По утверждению 6 группа симметрий многогранника, сохраняющая циклический порядок рёбер, примыкающих к вершине, есть группа его вращений(то есть симметрий, сохраняющих ориентацию пространства). Поэтому в следующем утверждении под группой симметрий каждого из рассматриваемых многогранников будем понимать группу его вращений. Группы вращений Архимедовых и Платоновых тел известны, см. статьи в Википедии[8, 9].

Утверждение 7. *Атомы, соответствующие архимедовым телам (исключая усеченный кубооктаэдр и ромбоусеченный икосододекаэдр)* $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10}, R_{11}$*, а также бесконечной серии призм* $R_n^1, (n \geq 3, n \neq 4)$ *и антипризм* $R_n^2, (n \geq 4)$ *(см. рис. 2, 3), являются высотными, и их группа симметрий транзитивно действует на кольцах белого цвета.*

Доказательство. Группа симметрий построенного f-графа совпадает с группой симметрий исходного многогранника, сохраняющей циклический порядок ребер. Так как симметрии полуправильного многогранника транзитивно действуют на его вершинах, то группа симметрий f-графа будет транзитивной на ориентированных циклах f-графа, а значит, группа симметрий соответствующего атома будет транзитивной на кольцах белого цвета. Стоит отметить, что группа симметрий атомов, отвечающих архимедовым телам (исключая усеченный кубооктаэдр и ромбоусеченный икосододекаэдр), не будет транзитивна на кольцах обоих цветов, поскольку у соответствующего плоского вложения f-графа не все грани имеют одинаковое число сторон. Поэтому на гранях группа симметрий плоского вложения f-графа не может образовывать одну орбиту.

Аналогичны рассуждения в случае бесконечной серии призм и антипризм. Заметим, что призма с 4-угольным основанием есть куб, а антипризма с 3-угольным основание есть октаедр. Так, кубу соответствует f-граф атома P_2, а октаэдру – P_3. Поэтому в условиях утверждения не указаны R_4^1 и R_3^2.

На рис. 5,6 представлены f-графы атомов $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10}, R_{11}$, которые отвечают усеченному тетраэдру, кубооктаэдру, усеченному кубу, усеченному октаэдру, ромбокубооктаэдру, плосконосому кубу, икосододекаэдру, усеченному додекаэдру, усеченному икосаэдру, ромбоикосододекаэдру и плосконосому додекаэдру соответственно. На рис. 6 также представлены f-графы атомов $R_n^1, (n \geq 3, n \neq 4)$, (соответствующих призмам), и $R_n^2, (n \geq 4)$, (соответствующих антипризмам). В таблице 1 представлены группы симметрий атомов $P_1 - P_5, R_1 - R_{11}$. Утверждение доказано.□

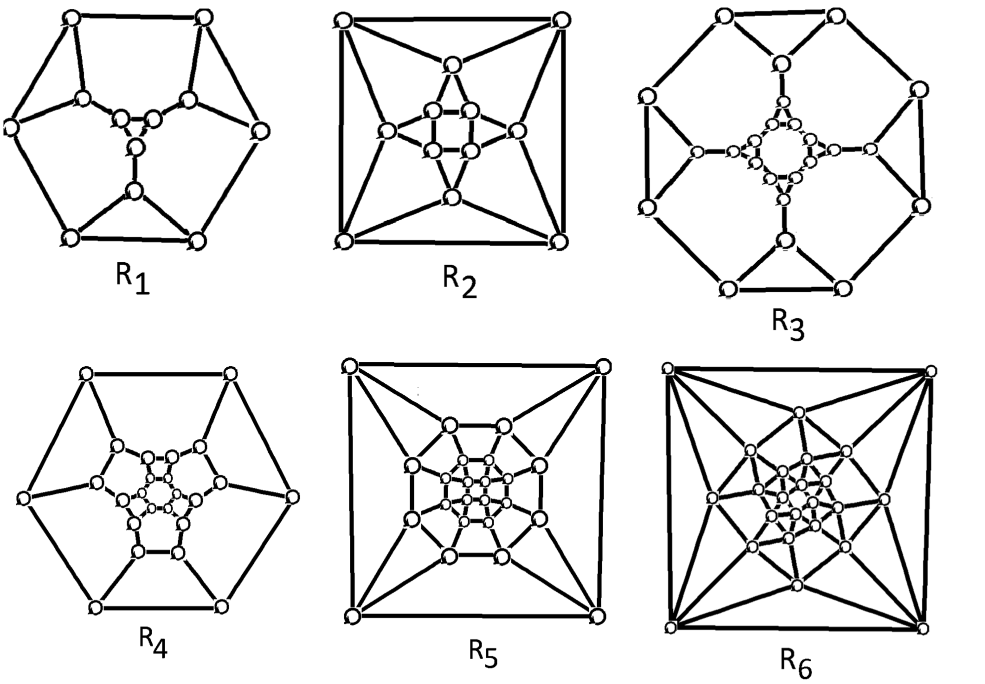


Рис. 5. f-графы атомов $R_1 - R_6$

Замечание. Вернёмся к исходному многограннику. Из того что любая симметрия многогранника есть переименование его вершин с сохранением свойства смежности вершин и сохранением циклического порядка рёбер, примыкающих к одной вершине, вытекает, что никакая симметрия многогранника не переводит грань с одним числом сторон в грань с другим числом сторон. Иначе получили бы противоречие с сохранностью циклического порядка рёбер под действием симметрии. Однако в общем случае неверно, что у каждого из рассматриваемых здесь многогранников существует симметрия, переводящая грань с одним числом сторон в грань с тем же числом сторон. Например у курносого куба треугольные грани делятся на две группы: 8 из них окружены только другими треугольными, остальные 24 — квадратной и двумя треугольными. И если предполагать, что существует симметрия, переводящая треугольную грань из одной группы в другую, и зафиксируем любую вершину переводимой грани и два смежных с ней ребра, то получим, что какая-то грань одного типа, смежная с вершиной и одним ребром, перейдёт в грань другого типа, что невозможно.

Рассмотрим случай, когда у атома есть ровно одно белое кольцо, то есть у соответствующего f-графа имеется ровно один ориентированный цикл.

Определение 15. Атомами $FL_n, (n \geq 1)$ назовём атомы, чьи f-графы представляют собой один цикл с $v_1, \ldots, v_{4n+2}$ вершинами, занумерованными в порядке обхода

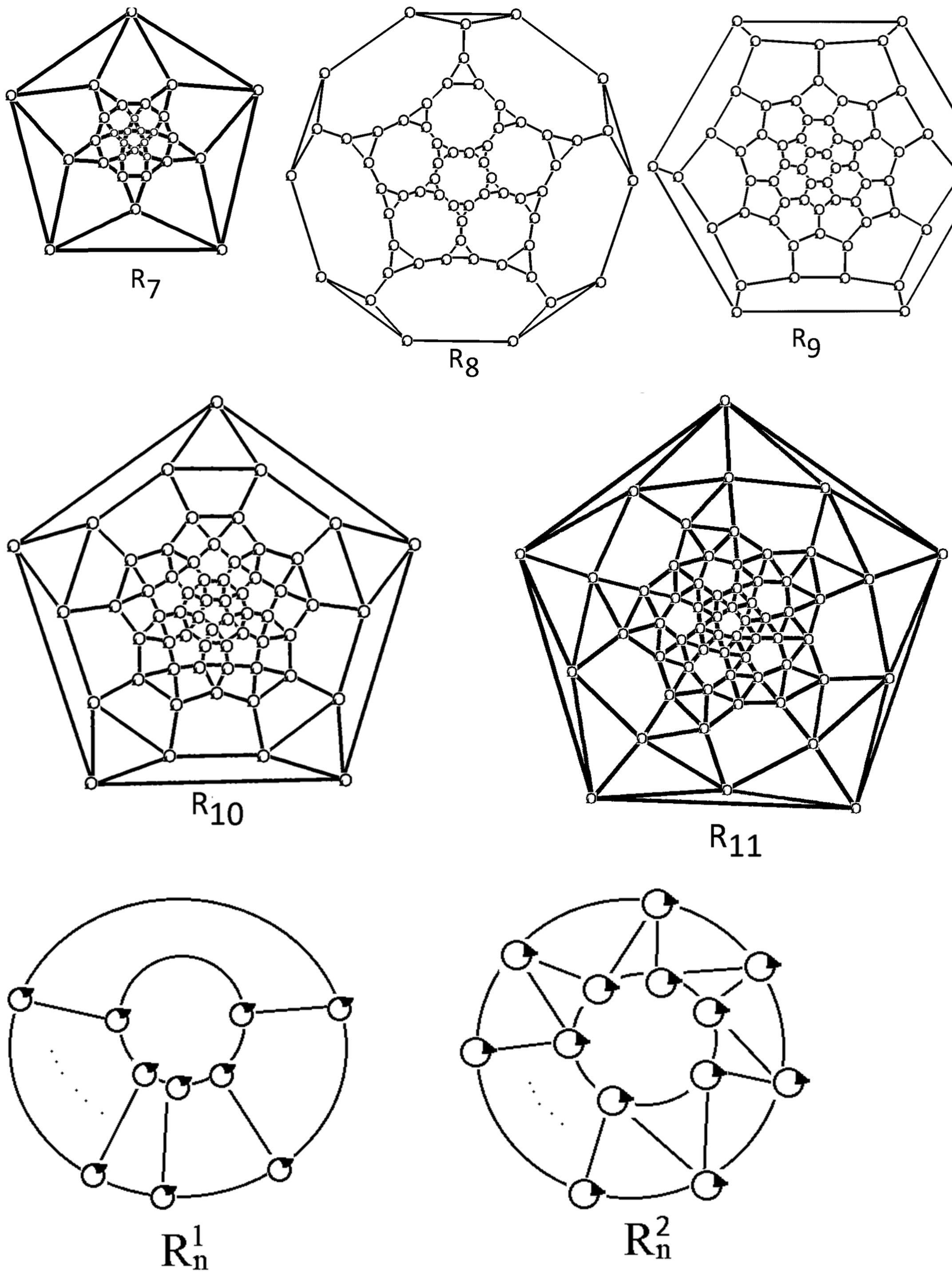


Рис. 6. f-графы атомов $R_7 - R_{11}$, $R^1_n, (n \geq 3, n \neq 4)$, $R^2_n, (n \geq 4)$

ориентированного цикла, и с хордами $(v_{4i-3}, v_{4i}), 1 \leq i \leq n, (v_{4i-1}, v_{4i+2}), 1 \leq i \leq n$, и (v_{4n-1}, v_2).

Таблица 1. атомы $P_1 - P_5$ $R_1 - R_{11}$, R^1_n, $(n \geq 3, n \neq 4)$, $R^2_n, (n \geq 4)$ и их группы симметрий.

Атом	Группа симметрий	Атом	Группа симметрий
P_1	$\mathcal{A}_4$	P_2	$\mathcal{S}_4$
P_3	$\mathcal{S}_4$	P_4	$\mathcal{A}_5$
P_5	$\mathcal{A}_5$	R_1	$\mathcal{A}_4$
R_2	$\mathcal{S}_4$	R_3	$\mathcal{S}_4$
R_4	$\mathcal{S}_4$	R_5	$\mathcal{S}_4$
R_6	$\mathcal{S}_4$	R_7	$\mathcal{A}_5$
R_8	$\mathcal{A}_5$	R_9	$\mathcal{A}_5$
R_{10}	$\mathcal{A}_5$	R_{11}	$\mathcal{A}_5$
$R^1_n(n \geq 3)$, $(n \neq 4)$	$\mathcal{D}_n$	$R^2_n, (n \geq 4)$	$\mathcal{D}_n$

Определение 16. Внутреннее ребро произвольного f-графа будем называть *зацепленным* с другим внутренним ребром этого f-графа, если вершины рёбер лежат на одном ориентированном цикле и чередуются в порядке обхода этого цикла.

Определение 17. *Графом сцеплений* будем называть граф, построенный по внутренним рёбрам с концами из одного ориентированного цикла произвольного f-графа атома так: заменяем каждое внутреннее ребро вершиной, и каждые 2 вершины соединяем ребром, если внутренние рёбра, соответствующие этим вершинам были зацепленны.

Утверждение 8. *Любой атом, имеющий одно белое кольцо, является высотным тогда и только тогда, когда его f-граф не содержит в себе f-графа атома $FL_n, (n \geq 1)$.*

Доказательство. Докажем в одну сторону. Дан f-граф высотного атома, имеющего одно белое кольцо. Зафиксируем ориентированное вложение f-графа в плоскость.

Будем говорить, что внутреннее неориентированное ребро является ребром типа A, если в ориентированном вложении f-графа ребро будет находится внутри ориентированного цикла, и типа B, если вне. Пример см. на рис. 7.

Отметим, что в данном ориентированном вложении каждое ребро, зацепленное с ребром типа A, будет ребром типа B. А каждое ребро, зацепленное с ребром типа B, будет ребром типа A. И рёбра одного типа не зацепленны между собой. Теперь по совокупности внутренних рёбер исходного f-графа высотного атома построим граф сцеплений T. Тогда вершины получившегося графа T, соответствующие рёбрам типа A будем называть вершинами класса A, а вершины, соответствующие рёбрам типа B будем называть вершинами класса B. Заметим, что по построению каждое ребро графа T соединяет какую-то вершину из одного класса с какой-то вершиной другого класса. Тогда граф T двудольный по определению, а значит не содержит циклов нечётной длины.

Но граф сцеплений, построенный по внутренним рёбрам f-графа атома $FL_n, (n \geq 1)$, не будет двудольным так как будет являться одним циклом нечётной длины, по-

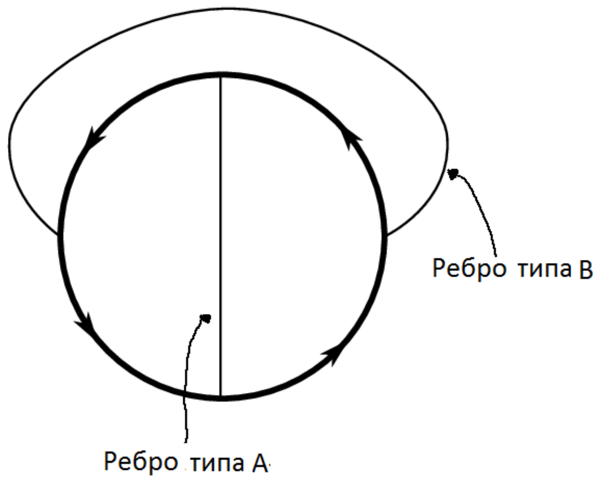


Рис. 7. Наглядное расположение рёбер типа А и типа В в ориентированно вложенном f-графе атома A_2

этому если атом, имеющий одно белое кольцо, является высотным, то его f-граф не содержит в себе f-графа атома $FL_n, (n \geq 1)$.

Теперь докажем утверждение в другую сторону. Рассмотрим f-граф атома, имеющего одно белое кольцо, не содержащего f-графа атома $FL_n, (n \geq 1)$. Проверим, что для этого f-графа есть ориентированное вложение в плоскость.

Построим по внутренним рёбрам этого f-графа граф сцеплений. Так как исходный атом , имеющего одно белое кольцо, не содержит f-графа атома $FL_n, (n \geq 1)$. То получившийся граф сцеплений не содержит циклов нечётной длины. А значит является двудольным и мы можем разделить все вершины графа сцеплений на два класса C и D так, чтобы каждое ребро графа сцеплений соединяло какую-то вершину из одного класса с какой-то вершиной друго класса. Теперь делаем обратный переход от графа сцеплений к внутренним рёбрам исходного f-графа. Тогда любые 2 внутренних ребра, соответствующие вершинам из одного класса графа сцеплений, не будут зацепленны. И мы можем ориентированно вложить этот f-граф в плоскость так, что ребра класса C попадут внутрь ориентированного цикла, а рёбра класса D окажутся вне. $\square$

Определение 18. Серия атомов $A_k^1, (k \geq 1)$ называется серия высотных атомов, имеющим одно белое кольцо. Где k соответствует числу неориентированных рёбер f-графа этого атома. Тогда f-граф атомов этой серии не содержит f-графа атома $FL_n, (n \geq 1)$.

По утверждению 7 f-граф атомов этой серии не содержит f-графа атома $FL_n, (n \geq$

1). Количество этих атомов счётное число, но для каждого фиксированного k их число ограничено. Причём, если зафиксировать какое-либо ориентированное вложение f-графа атома A_k^1, мы получим ещё одну характеристику этого атома: числа n_1 и m_1. Здесь n_1 означает число рёбер типа A, m_1 - число рёбер типа B относительно фиксированного вложения f-графа в плоскость. Группой симметрий атома A_k^1 при фиксированном k будет $\mathbb{Z}_n, (1 \leq n \leq 2k)$, где n зависит от расположения внутренних рёбер на ориентированном цикле. Рассмотрим плоское вложение f-графа атома A_k^1 при фиксированном k, такое что при поворотах на угол $\frac{2\pi}{t}$ t раз (для определённости по обходу цикла) для некоторого натурального t повернутый f-граф и исходный полностью совпадут. Очевидно, t не может быть больше удвоенного числа внутренних рёбер. Теперь ищем максимальное t среди всех таких вложений. Оно и будет порядком группы симметрий атома A_k^1.

Замечание 2. Порядок группы симметрий f-графа атома A_k^1 равен порядку орбиты внутреннего ребра под действием этой группы тогда и только тогда, когда стабилизатор этого ребра тривиальный.

Доказательство. Действительно, воспользуемся теоремой Чашкина А.В.[17]:

Теорема 2. *Пусть конечная группа G действует на конечном множестве D. Тогда для любого d из D*

$| Or(d) | \cdot | St(d) |=| G |$

Тогда, если принять, что G −− группа симметрий f-графа атома A_k^1, а D −− множество внутренних рёбер, получим требуемое.

Заметим также, что порядок стабилизатора внутреннего ребра может быть 1(то есть стабилизатор тривиальный) или 2. Если стабилизатор внутренннего ребра имеет два элемента, то порядок орбиты этого внутреннего ребра равен половине порядка группы симметрий.

Примеры серии $A_k^1, (k \geq 1)$ приведены на Рис. 8. Так, например, рассмотрим атом E_n. Тогда $E_n = A_n^1$, число $n_1 = n$, $m_1 = 0$.

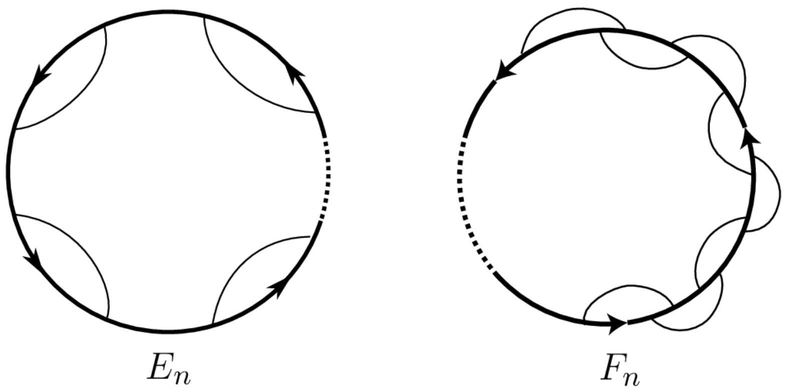


Рис. 8. Примеры f-графов атомов с одним ориентированным циклом

Теперь рассмотрим случай, когда у атома есть ровно два белых кольца, то есть у соответствующего f-графа имеется ровно два ориентированных цикла. Определим распределение внутренних неориентированных рёбер f-графа по классам: внутреннее ребро будет входить в класс A_1, если его вершины чередуются с вершинами внешних рёбер в порядке обхода цикла. Внутренние рёбра, каждое из которых зацеплено с ребром класса A_1, определим в класс B_1. Внутренние рёбра, не попавшие ни в один класс, и каждое из которых зацеплено с ребром класса B_1, определим в класс A_1. Продолжаем такое распределение по классам, пока ещё остались внутренние рёбра, не попавшие ни в один класс, и каждое из которых зацепленно с ребром класса A_1 или B_1. Распределение внутренних рёбер по классам A_1 и B_1 закончится, так как рёбер конечное число. Остальные внутренние рёбра, не попавшие в класс A_1 или B_1, будут рёбрами класса C_1. Теперь рассмотрим внешние, соединяющие 2 цикла рёбра. Фиксируем один ориентированный цикл и некоторое внешнее ребро. Далее нумеруем внешние ребра числами от 1 до n в том порядке, в каком концы этих ребер встречаются при обходе по заданному ориентированному циклу, начиная с заданного внешнего ребра. Тогда при обходе другого ориентированного цикла концы уже занумерованных внешних ребер будут встречаться в некотором циклическом порядке $(i_1, \ldots, i_n)$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение 9.(критерий высотности атома, имеющего ровно два белых кольца) Атом, имеющий два белых кольца, является высотным тогда и только тогда, когда цикл $(i_1, \ldots, i_n)$ совпадает с циклом $(n, n-1, \ldots, 1)$, ребра класса A_1(соответственно B_1) попарно не зацепленны и для каждого ориентированного цикла f-графа атома верно, что совокупность рёбер класса C_1 с концами на одном ориентированном цикле вместе с этим циклом не содержит f-графа атома $FL_n, (n \geq 1)$.

Замечание. В. О. Мантуров [3] доказал следующий критерий высотности.

Теорема. Атом является высотным тогда и только тогда, когда его остов может быть вложен в плоскость так, что в каждой вершине исходный циклический порядок остова и циклический порядок, порожденный вложением в плоскость, совпадают.

На практике проверка высотности атома является довольно сложной, поэтому вышеизложенный критерий утверждения 8 упрощает задачу проверки высотности атома, имеющего 2 белых кольца.

Доказательство.

Докажем в одну сторону. Если цикл $(i_1, i_2 \ldots i_n)$ не совпадает с циклом $(n, n-1, \ldots, 1)$, то мы имеем пересечения внешних неориентированных рёбер, и в этом случае атом не будет высотным. Если же f-граф атома допускает ориентированное вложение S в плоскость, то, в этом вложении, исходя из процесса обозначения всех внутренних рёбер f-графа, рёбра классаA_1 будут лежать внутри(если в S ориентированные циклы не лежат один в другом, и вне, если циклы лежат один в другом) соответствующего ориентированного цикла, а рёбра класса B_1-вне(если рёбра A_1 внутри, и внутри, если рёбра A_1-вне) соответствующего ориентированного цикла. Очевидно, рёбра классов A_1(соответственно B_1) попарно не зацепленны. Причём рёбра классов A_1 и B_1 не зацепленны ни с какими рёбрами класса C_1, иначе это противоречило бы определению рёбер класса C_1 (если какое-то ребро c_1 класса C_1 зацепленно с ребром класса A_1, то ребро c_1, исходя из процесса обозначения внутренних рёбер, есть ребро класса B_1, противоречие, аналогично объясняется, почему ребро класса C_1 не может быть зацепленно с ребром класса B_1). И, по утверждению 7 заключаем, что каждый ориентированный цикл f-графа с совокупностью рёбер класса C_1 с концами на этом ориентированном цикле не содержит f-графа атома $FL_n, (n \geq 1)$.

Докажем в другую сторону. Рассмотрим f-граф G атома, имеющего 2 белых кольца, с условием, что цикл $(i_1, \ldots, i_n)$ совпадает с циклом $(n, n-1, \ldots, 1)$, рёбра класса A_1(соответственно B_1) попарно не зацепленны и для каждого ориентированного цикла f-графа G верно, что совокупность рёбер класса C_1 с концами на одном ориентированном цикле вместе с этим циклом не содержит f-графа атома $FL_n, (n \geq 1)$. Проверим, что f-граф G допускает ориентированное вложение в плоскость. Действительно, так как цикл $(i_1, \ldots, i_n)$ совпадает с циклом $(n, n-1, ..., 1)$, то мы можем зафиксировать вложение двух ориентированных циклов и внешних рёбер f-графа G так, что оба цикла не лежат один в другом и ориентированы одинаково. Фиксируем это вложение. Далее, вложим совокупность рёбер класса C_1(так как по утверждению 7 каждый ориентированный цикл f-графа с совокупностью рёбер класса C_1 с концами на этом ориентированном цикле допускает вложение в плоскость). Условие того, что рёбра класса A_1(соответственно B_1) попарно не зацепленны, позволяет нам погрузить рёбра A_1(соответственно B_1) внуть (соответственно вне) ориентированного цикла так, чтобы никакие 2 ребра из класса A_1(соответственно B_1) не пересекались, и никакое ребро класса A_1(соответственно B_1) не пересекалось с ребром класса C_1 (иначе ребро класса A_1(соответственно B_1) было бы зацепленно с ребром класса C_1, что противоречит условиям обозначения внутренних рёбер f-графа). Сделаем вышеописанное погружение рёбер класса A_1(соответственно B_1) с дополнительными условиями: без самопересечений, без пересечений внешних рёбер. Получили ориентированное вложение f-графа в плоскость.□

Рассмотрим ориентированное вложение G f-графа атома $X = (P^2, K)$, имеющего два белых кольца, в плоскость. Когда группа симметрий $Sym(X)$ атома транзитивно действует на ориентированных циклах G? Оказывается, когда расположения внутренних рёбер на одном ориентированном цикле однозначно определяют расположения внутренних рёбер на другом ориентированном цикле. А также ориентированный цикл должен переходить в себя при поворотах, определяемых $Sym(G)$. Пример показан на Рис. 8.

Если есть симметрия ориентированно вложенного f-графа высотного атома(имеющего

2 белых кольца), переводящая выделенную красным вершину 1(на рисунке 8) в вершину 2, то внутреннее ребро, между концами которого есть только вершина 1, этой же симметрией переведётся в ребро, между концами которого есть только вершина 2. Этот пример иллюстрирует, что ориентированный цикл должен переходить в себя при поворотах, определяемых $Sym(G)$.

Далее, для краткости, когда пишем, что атом частично симметричный, будем иметь в виду, что группа симметрий атома транзитивно действует на кольцах белого цвета.

Определение 19. Серия атомов $C_n\{p\}, (n \geq 1)$ называется серия высотных частично симметричных атомов, имеющих два белых кольца. Здесь число p соответствует количеству внутренних рёбер на каждом ориентированном цикле f-графа этого атома, n - число внешних рёбер, соединяющих два ориентированных цикла.

Каждый атом из этой серии должен удовлетворять критерию высотности из утверждения 9. При каждом фиксированном n группа симметрий атома $C_n\{p\}, (n \geq 1)$ определяет некоторую симметрию ориентированных циклов его f-графа. Достаточно рассмотреть один цикл(оставляя вершины-концы внешних рёбер), так как расположение внутренних рёбер на втором определяется однозначно. Группа симметрий ориентированного цикла с оставленными вершинами-концами изоморфна циклической группе $\mathbb{Z}_u$ порядка u, где $u \in 1, \dots n$. Тогда для $u = n$, например, получим максимальную по порядку группу симметрий атома $C_n\{p\}, (n \geq 1)$, поскольку цикл переходит в себя при максимальном числе поворотов. В этом случае группа симметрий атома $C_n\{p\}, (n \geq 1)$ изоморфна группе диэдра $\mathcal{D}_n$, где n симметрий индуцируутся поворотами одного ориентированного цикла, и для каждого такого поворота есть симметрия, переводящая один цикл в другой. Итого $2n$ симметрий. Так на рис.9 группа симметрий атома $C_3\{3\}$ изоморфна $\mathcal{D}_3$. В общем случае при каждом фиксированном k группа симметрий атома $C_n\{p\}, (n \geq 1)$ изоморфна $\mathcal{D}_t$, где $t \in 1, \dots n$, а группа симметрий ориентированных циклов f-графа этого атома изоморфна $\mathbb{Z}_t$.

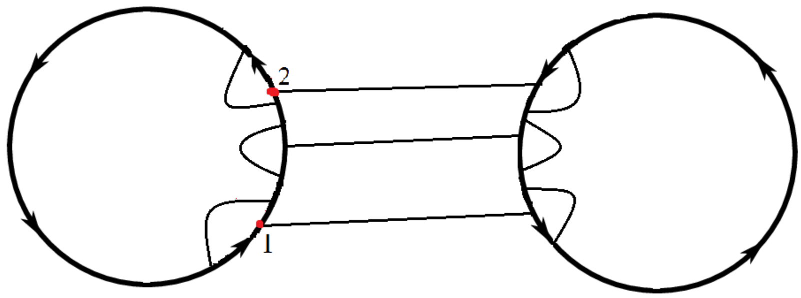


Рис. 9. f-граф атома $C_3\{3\}$

Рассмотрим теперь атомы, f-граф которых получается из графа, состоящего только из цикла с n вершинами (если $n \geq 3$), путем замены вершин на ориентированные циклы, добавлением кратных ребер и внутренних неориентированных ребер(хорд).

Опишем конструкцию. Итак, рассмотрим граф, состоящий только из цикла с n вершинами (если $n \geq 3$). Такой граф изоморфен сети правильного n-угольника. А группа симметрий графа совпадает с группой симметрий правильного n-угольника и изоморфна D_n(см. работу Н.Вавилова[10]).Причем независимо от того, рассматриваем ли мы вложение правильного n-угольника в $\mathbb{R}^2$ или в $\mathbb{R}^3$ (см. статью Википедии [14]). Для определенности рассмотрим правильный n-угольник, вложенный в $\mathbb{R}^3$. Все симметрии правильного n-угольника являются либо вращениями относительно оси, проходящей через центр грани, либо вращениями относительно осей, проходящих через две противоположные вершины или середины противоположных сторон (если n четно), либо через какую-то вершину и середину противоположной стороны (если n нечетно). Композиция двух вращений относительно осей, несовпадающих с осью, проходящей через центр грани, является вращением относительно оси, проходящей через центр грани. Поскольку каждая вершина правильного n-угольника инцидентна ровно двум ребрам, то, очевидно, циклический порядок ребер, примыкающей к вершине, сохраняется при любой симметрии правильного n-угольника. Заменим теперь каждую вершину сети правильного n-угольника на ориентированный цикл. При этом циклический порядок примыкающих к циклу ребер должен повторять порядок ребер, примыкающих к вершине. Получим f-граф атома D_n, группа симметрий которого совпадает с группой симметрий правильного n-угольника и изоморфна D_n.

Заметим, что под действием группы симметрий f-графа D_n возникает только одна орбита, образованная внешними неориентированными ребрами. Зафиксируем n и рассмотрим все подгруппы группы D_n. Нас интересуют подгруппы, действующие транзитивно на ориентированных циклах f-графа D_n. При этом мы хотим посмотреть, сколько орбит, образованных внешними неориентированными ребрами, возникает. Очевидно, порядок искомых подгрупп должен быть не меньше числа n(количества ориентированных циклов) и делиться на $2n$. Тогда порядок подгрупп либо n, либо $2n$. При нечетных n возникает одна подгруппа Z_n порядка n. Это циклическая подгруппа, действие которой образует лишь одну орбиту ребер. Для четных n, помимо циклических и самой группы D_n, возникает подгруппа $D_{\frac{n}{2}}$ порядка n. Под действием этой подгруппы образуется две орбиты внешних неориентируемых ребер. Причем каждому ориентированному циклу инцидентны ребра из разных орбит. Пример f-графов атомов D_3, D_4, D_6 показан на рис.10. Цвета указывают на то, какой орбите принадлежат ребра. Один цвет – одна орбита. Разные цвета – разные орбиты.

Для каждого фиксированного ($n \geq 3$) рассмотрим ориентированное вложение G_n f-графа атома D_n в плоскость, в котором все ориентированные циклы имеют одинаковую ориентацию, а все внешние неориентированные ребра являются отрезками. Далее рассмотрим семейство ориентированных вложений GR_n f-графов, в котором каждое вложение получено из G_n путем добавления кратных внешних неориентированных ребер, причем все внешние ребра, инцидентные одной паре цик-

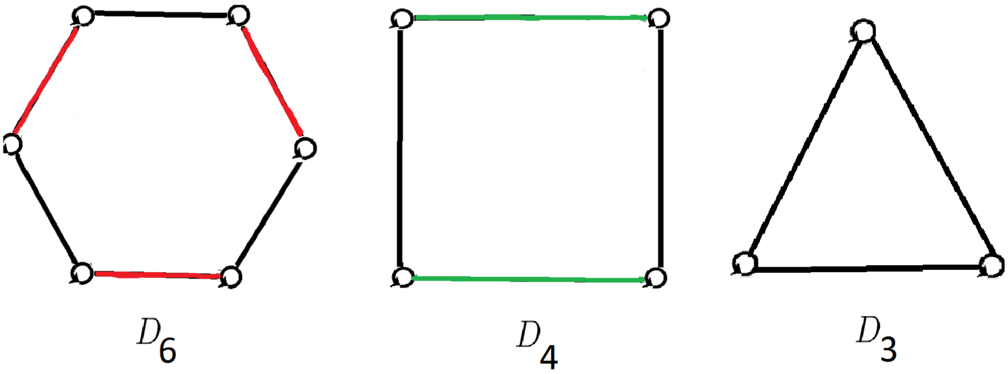


Рис. 10. f-графы атомов D_3, D_4, D_6 с раскрашенными ребрами

лов, являются параллельными друг другу отрезками (см. рис 11). При нечетных n количество кратных ребер, инцидентных одной паре циклов, совпадает с количеством кратных ребер, инцидентных любой другой паре циклов. Группа симметрий полученного f-графа будет D_n. А при четных n к ребрам из одной орбиты f-графа G_n под действием группы $D_{\frac{n}{2}}$ добавляется одно и то же количество кратных ребер. Число добавляемых кратных ребер к ребрам из разных орбит может и как совпадать, так и нет. Если совпадает, то полученный f-граф имеет группу симметрий D_n, если не совпадает, то $D_{\frac{n}{2}}$.

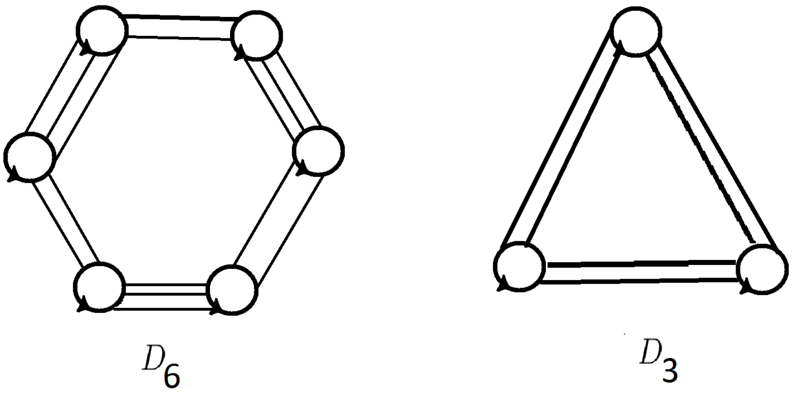


Рис. 11. f-графы атомов D_3, D_6 с кратными ребрами

Иными словами, если группа симметрий $GR_n - D_n$, то какую бы мы пару ориентированных циклов ни взяли, количество кратных ребер, инцидентных этой паре, не изменится. В этом случае будем говорить, что все возможные пары ориентированных циклов, Однако, если группа симметрий $GR_n - D_{\frac{n}{2}}$, то пары ориентированных циклов можно разделить на два множества(условно A и B). Для каждоого множества верно: количество кратных ребер, инцидентных одной паре циклов, совпадает с количеством кратных ребер, инцидентных любой другой паре циклов. Однако, взяв одну пару из одного множества, другую из другой, то совпадения количества кратных ребер не будет. Для определенности будем считать, что во множество А попадают те пары ориентированных циклов, что количество кратных ребер одной из них будет меньше количества кратных ребер любой пары циклов из другого множества.

Определение 20. Семейством $D_n\{k,l\},(n \geq 3)$ назовем серию атомов, f-графы которых получаются при каждом фиксированном n из G_n указанным способом. Если группа симметрий такого атома $-$ $D_{\frac{n}{2}}$, тогда определены множества А и В. В этом случае $k \geq 1$ $(l \geq 1)$ $-$ количество внешних ребер, инцидентных какой-либо паре ориентированных циклов группы А(соответственно В). Заметим, что в этом случае $k \neq l$. Если группа симметрий атома $-$ D_n, тогда k $-$ количество кратных ребер произвольно взятой пары ориентированных циклов. При этом считаем, что $k = l$ и пишем $D_n\{k,k\}$.

По построению все атомы серии $D_n\{k,l\},(n \geq 3)$ являются высотными частично симметричными. Также для f-графа любого атома серии $D_n\{k,l\},(k \neq l)$ будет верно следующее. Для любых двух пар ориентированных циклов из одного множества существует симметрия f-графа, переводящая одну пару в другую. Это легко понять, если у каждой пары циклов во множествах А и В убрать все кратные ребра, оставив только одно внешнее ребро, их соединяющее. При этом каждое ребро, соединяющее пару циклов из множеста А покрасим в красный цвет, из множества В $-$ в черный. Получим f-граф атома D_n, группа симметрий которого образует две орбиты ребер. В одну войдут все красные, в другую $-$ черные.

Рассмотрим произвольный f-граф атома, имеющий несколько ориентированных циклов и дадим для некоторых его параметров ряд определений.

Определение 21. *Степенью* окружности(ориентированного цикла) будем называть количество вершин(концов) внешних неориентированных ребер на этой окружности.

Определение 22. Ориентированные циклы назовем *соседними*, если существует хотя бы одно внешнее ребро, их соединяющее.

Построим для f-графа граф Gl смежности окружностей: выкидываем все внутренние неориентированный рёбра(хорды), каждую ориентированную окружность стянем в точку, тем самым получим граф без ориентированных ребер.

Определение 23. *Вершинной связностью* f-графа называется называется наименьшее число вершин графа Gl, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу(одной вершине). Вершинная связность f-графа F обозначается $k(F)$. f-Граф F называется k-связным, если $k(F) = k$.

Определение 24. *Цепью* f-графа назовем последовательность различных вершин $v_0, \ldots, v_n$, в которой любые две соседние вершины соединены ребром. При этом $v_0 \neq v_n$ и все ребра $\{v_i, v_{i+1}\}, i = 0, 1, \ldots, n-1$ различны. В цепи $v_0, \ldots, v_n$ вершины v_0 и v_n называются концами цепи, а ребра $\{v_i, v_{i+1}\}, i = 0, 1, \ldots, n-1$ называются ребрами цепи. Говорят, что цепь $v_0, \ldots, v_n$ соединяет пару ориентированных циклов, если один конец цепи лежит на одном ор. цикле, а другой конец $-$ на другом. При этом данная пара циклов не содержит ни одну вершину $v_1, \ldots, v_{n-1}$ цепи.

Определение 25.Цепи, имеющие хотя бы одну общую вершину, назовем *пересекающимися.*

Мы знаем, что степень каждой вершины f-графа равна трем. Отсюда заметим, что если цепи, соединяющие некоторую пару циклов, имеют общую вершину, то они имеют и некоторое общее ребро, образовнное двумя вершинами, одна из которых – общая.

Определение 26. *Дугой* пары ориентированных циклов f-графа будем называть внешнее ребро, один конец которого совпадает с вершиной v_0, а другой конец – с v_n некоторой цепи, соединяющей данную пару циклов. Заметим, что одна и та же дуга может быть образована несколькими пересекающимися цепями. Дуги, образованные непересекающимися цепями, соединяющими пару циклов, будем называть правильными.

Определение 27. *Под-f-графом* f-графа F назовем f-граф G, окружности и внутренние ребра которого являются подмножеством окружностей и внутренних ребер F, и для каждой пары циклов верно, что их внешние ребра являются правильными дугами. При этом цепи, образующие правильные дуги одной пары циклов, не пересекаются с цепями, образующими правильные дуги другой пары циклов. И никакие вершины таких цепей, кроме концевых, не лежат на окружностях G. Пример под-f-графа некоторого f-графа F показан на рис.13 Под-f-граф выделен салатовым цветом(он состоит из двух ориентированных циклов и трех внешних ребер).

Определение 28. Ранее мы показали, как разделять пары ориентированных циклов GR_n с группой симметрий $\mathcal{D}_{\frac{n}{2}}$ на множества A и B. Аналогичную процедуру разделения на множества пар циклов можно провести и для произвольного f-графа с несколькими ориентированными циклами. Причем для каждого такого множества верно: количество кратных ребер, инцидентных одной паре циклов, совпадает с количеством кратных ребер, инцидентных любой другой паре циклов. А также, взяв одну пару из одного множества, другую из другого множества, то совпадения количества кратных ребер не будет. Иными словами, множества не пересекаются. Такие множества будем называть *разделимыми* множествами пар ориентированных циклов f-графа.

Условимся, что когда будем говорить о количестве кратных ребер такого множества, будем иметь в виду количество всех внешних ребер, соединяющих произвольную пару циклов во множестве.

Определение 29. *Характеристикой* пар ориентированных циклов f-графа произвольного атома F называется число, равное максимальному количеству множеств, на которые указанным образом можно разделить f-граф. Обозначается $l(F)$.

При любом фиксированном $(n \geq 3)$ верно:

Утверждение 10. *Высотный частично симметричный атом Z, полученный из D_n добавлением кратных ребер изоморфен одному из атомов серии $D_n\{k,l\}, (n \geq 3)$.*

Доказательство.

Определение 30. Фиксируем ориентированное вложение f-графа атома Z в плоскость. Окружность(ориентированный цикл) из образа f-графа атома Z назовём разделяющей, если после ее удаления граф распадается на несколько компонент связности.

Легко заметить, что f-граф, имеющий хотя бы одну разделяющую окружность, является 1-связным.

В статье И.М.Никонова и Н.В.Волчанецкого[2] было доказано, что у максимально симметричных атомов все окружности неразделяющие. Каждый атом серии D_n является высотным максимально симметричным атомом, а при добавление кратных ребер, очевидно, все окружности остаются неразделяющими. Тогда существует ориентированное вложение GZ f-графа атома Z в плоскость, что все окружности лежат вне друг друга и имеют одинаковую ориентацию. В этом вложении все кратные ребра, соединяющие какую-либо одну пару ориентированных циклов, не пересекаются между собой и не пересекают кратные ребра, соединяющие другую пару. Для каждой пары циклов и кратных ребер, их соединяющих, также верно условие утверждения 8.

Тогда либо в GZ кратные ребра расположены так же, как и у атомов серии $D_n\{k, l\}, (n \geq 3)$, либо верно хотя бы одно из следующих предположений:

1) Предположим, что в GZ есть два соседних ориентированных цикла и существует их соединяющие два внешних ребра и две непересекающиеся цепи(с количеством вершин более двух). Причем на каждом ориентированном цикле вершины внешних ребер чередуются с вершинами цепей в порядке обхода цикла. Пример такого f-графа показан на рис. Перехода от GZ к графу смежности, удалим вершины, соответствующие этим ориентированным циклам. Получим по крайней мере две компоненты связности. Однако, мы знаем, что если на любом цикле(простом или с кратными ребрами) удалить две соседние вершины, то получится всего одна компонента связности. Поэтому наше предположение неверно и в GZ нет такой пары ор. циклов с описанным свойством.

Определение 31.Атомом X назовем такой атом, f-граф которого имеет два ориентированных цикла и три внешних ребра. Пронумируем числами от 1 до 3 внешние ребра в том порядке, в каком концы этих ребер встречаются при обходе по заданному ориентированному циклу, начиная с заданного внешнего ребра. Тогда при обходе другого ориентированного цикла концы уже занумерованных внешних ребер будут встречаться в циклическом порядке $(1, 2, 3)$. f-Граф атома X показан на рис.

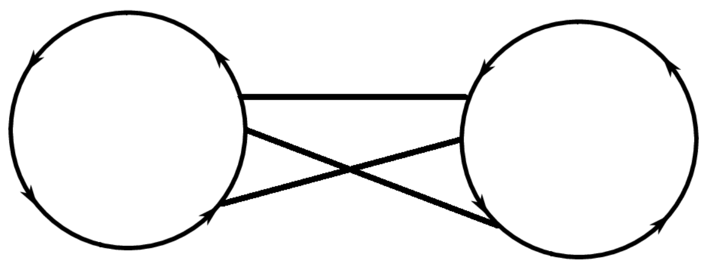


Рис. 12. f-граф атома X

2)Предположим, что в GZ есть два ориентированных цикла и существует их соединяющие два внешних ребра и одна цепь (с количеством вершин более двух). Причем выполнено следующее:

Пронумеруем внешние ребра и цепь числами от 1 до 3 в том порядке, в каком концы этих ребер и конечная вершина цепи встречаются при обходе по заданному ориентированному циклу, начиная с заданного внешнего ребра. Тогда при обходе другого ориентированного цикла концы уже занумерованных внешних ребер будут встречаться в циклическом порядке (i_1, i_2, i_3), совпадающим с циклом $(1, 2, 3)$. То есть два ориентированных цикла вместе с двумя внешними ребрами и дугой, образованной данной цепью, составляют f-граф атома X.

Однако, атом X высотным не является, поскольку не удовлетворяет условию необходимости утверждения 9. То есть f-граф атома X не может быть ориентированно вложим в плоскость. А поскольку f-граф атома X есть под-f-граф GZ, то и GZ не имеет ориентированного вложения в плоскость. Получим противоречие с ориентированной вложимостью GZ. На рис.13 показан пример f-графа частично симметричного атома, не являющегося высотным. Салатовым цветом обозначен под-f-граф, соответствующий атому X. Заметим, что каждый под-f-граф (образованный двумя соседними ориентированными циклами и внешними ребрами, их соединяющими) образует атом, удовлетворяющий утверждению 9.

Итак, в GZ кратные ребра расположены так же, как и у атомов серии $D_n\{k, l\}, (n \geq 3)$.

Так как группа симметрий GZ транзитивно действует на ориентированных циклах, а каждый цикл соединен ребрами с двумя другими, то характеристика пар ориентированных циклов GZ равна одному или двум. Если характеристика равна двум, то GZ изоморфен f-графу атома серии $D_n\{k, l\}, (n \geq 3)$, если одному – $D_n\{k, k\}, (n \geq 3)$. Утверждение доказано.□

Рассмотрим теперь множество атомов, полученных из $D_n\{k, l\}$ путем добавления внутренних неориентированных ребер(хорд). Выделим в этом множестве класс f-графов высотных частично симметричных атомов и дадим характеристику расположения хорд на ориентированных циклах таких атомов.

Определение 32. Серия атомов $D_n\{k, l, p\}, (n \geq 3)$ называется серия высотных частично симметричных атомов, полученных из $D_n\{k, l\}$ путем добавления внутренних неориентированных ребер(хорд). Где p – параметр количества внутренних неориентированных ребер на каком-либо ориентированном цикле. Из-за частичной симметричности атома, все циклы имеют одинаковое количество хорд. Поэтому выбор ориентированного цикла произвольный.

Опишем конструкцию таких атомов. Для каждого такого f-графа достаточно описать расположение хорд на одном ориентированном цикле, поскольку расположение хорд на других циклах естественным образом определяется действием группы симметрий.

Рассмотрим f-граф некоторого высотного атома с несколькими ориентированными циклами.

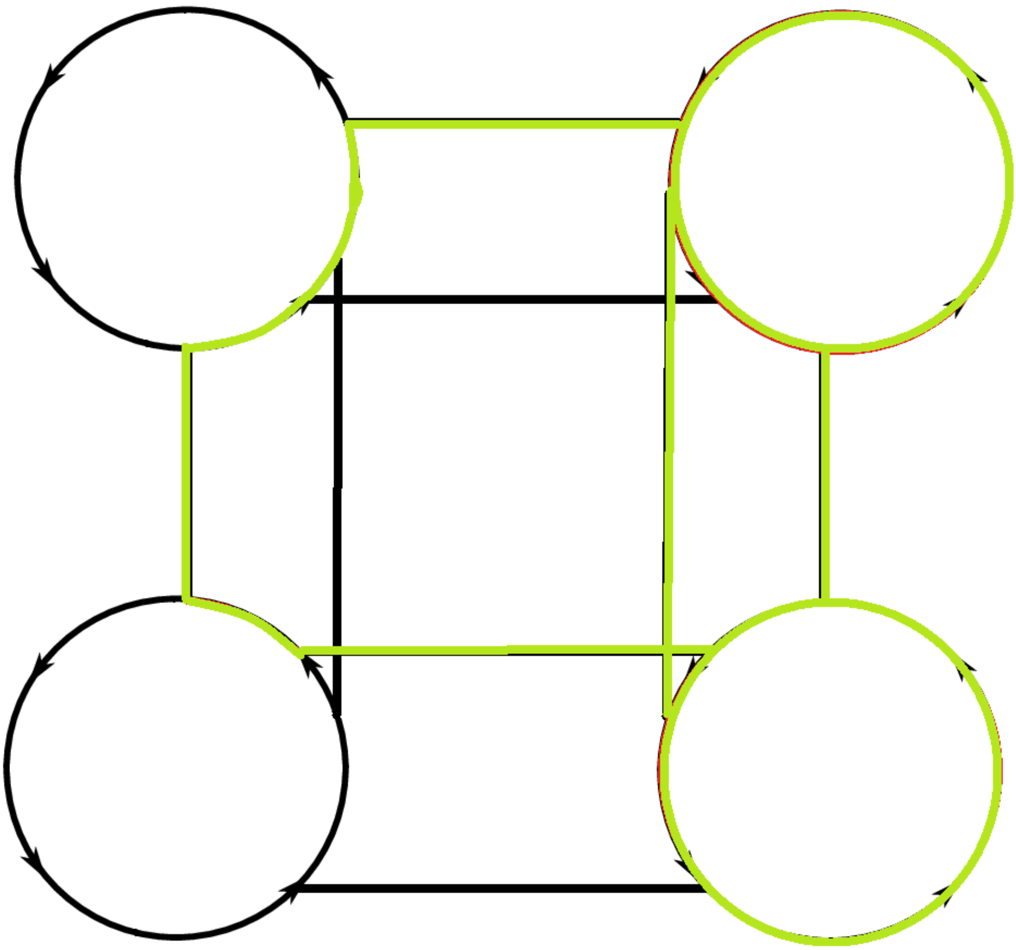


Рис. 13. f-граф частично симметричного, но не высотного атома

Выберем ориентированный цикл и определим распределение внутренних неориентированных рёбер по классам: внутреннее ребро будет входить в класс A_1, если его вершины чередуются с вершинами внешних рёбер по обходу цикла(это значит, что существует хотя бы два внешних ребра, выделенные концы которых вместе с выделенными концами внутреннего ребра образуют чередование по обходу цикла, то есть начиная с какой-либо вершины внутреннего ребра, следующая выделенная вершина по обходу цикла будет вершиной одного внешнего ребра, следующая – другая вершина внутреннего ребра, следующая – вершина другого внешнего ребра). Внутренние рёбра, каждое из которых зацеплено с ребром класса A_1, определим в класс B_1. Внутренние рёбра, не попавшие ни в один класс, и каждое из которых зацеплено с ребром класса B_1, определим в класс A_1. Продолжаем такое распределение по классам, пока ещё остались внутренние рёбра, не попавшие ни в один класс, и каждое из которых зацепленно с ребром класса A_1 или B_1. Распределение внутренних рёбер по классам A_1 и B_1 закончится, так как рёбер конечное число.

Остальные внутренние рёбра, не попавшие в класс A_1 или B_1, будут рёбрами класса C_1.

Тогда справедливо следующее.

Утверждение 11. *Пусть f-граф F соответствует некоторому высотному атому, не имеет внутренних ребер(хорд) и все окружности которого неразделяющие. Тогда любой f-граф GH, полученный из F путем добавления внутренних ребер(хорд) ориентируемо вложим в плоскость, тогда и только тогда, когда для каждого ориентированного цикла графа GH верно: ребра класса A_1(соответственно B_1) попарно не зацепленны, а совокупность рёбер класса C_1 с концами на ориентированном цикле вместе с этим циклом не содержит f-графа атома $FL_n, (n \geq 1)$.*

Доказательство. Докажем в одну сторону. Так как все окружности f-графа F неразделяющие, то с точностью до инверсии относительно одной из окружности в ориентированном вложении графа F(а значит и GH) все окружности имеют одинаковую ориентацию.

Тогда, исходя из процесса обозначения всех внутренних рёбер f-графа, рёбра класса A_1 будут лежать внутри соответствующего ориентированного цикла, а рёбра класса B_1-вне. Очевидно, рёбра классов A_1(соответственно B_1) попарно не зацепленны. Причём рёбра классов A_1 и B_1 не зацепленны ни с какими рёбрами класса C_1, иначе это противоречило бы определению рёбер класса C_1 (если какое-то ребро c_1 класса C_1 зацепленно с ребром класса A_1, то ребро c_1, исходя из процесса обозначения внутренних рёбер, есть ребро класса B_1, противоречие, аналогично объясняется, почему ребро класса C_1 не может быть зацепленно с ребром класса B_1). И, по утверждению 8 заключаем, что каждый ориентированный цикл f-графа GH с совокупностью рёбер класса C_1 с концами на этом ориентированном цикле не содержит f-графа атома $FL_n, (n \geq 1)$.

Докажем в другую сторону. Проверим, что f-граф GH допускает ориентированное вложение в плоскость. Действительно, зафиксируем ориентированное вложение F, чтобы все окружности имели бы одинаковую ориентацию. Далее для каждого ориентированного цикла проведем следующую процедуру. Вложим совокупность рёбер класса C_1(так как по утверждению 8 каждый ориентированный цикл f-графа с совокупностью рёбер класса C_1 с концами на этом ориентированном цикле допускает вложение в плоскость). Условие того, что рёбра класса A_1(соответственно B_1) попарно не зацепленны, позволяет нам погрузить рёбра A_1(соответственно B_1) внуть (соответственно вне) ориентированного цикла так, чтобы никакие 2 ребра из класса A_1(соответственно B_1) не пересекались, и никакое ребро класса A_1(соответственно B_1) не пересекалось с ребром класса C_1 (иначе ребро класса A_1(соответственно B_1) было бы зацеплено с ребром класса C_1, что противоречит условиям обозначения внутренних рёбер f-графа). Сделаем вышеописанное погружение рёбер класса A_1(соответственно B_1) с дополнительными условиями: без самопересечений, без пересечений внешних рёбер.

В итоге получили ориентированное вложение f-графа GH в плоскость.$\square$

Таблица 2. Параметры атомов серии $D_n\{k,l,p\},(n\geq 3)$

Атом	Группа симметрий	Гр.симм. ор. цикла	Характеристика пар ор.циклов
$D_n\{k,l,p\},(n\geq 3)$	$\mathcal{D}_n,(k=l)$ $\mathbb{Z}_n,(k=l)$ $\mathcal{D}_{\frac{n}{2}},(k\neq l)$	$\mathbb{Z}_2,(k=l)$, $\mathbb{Z}_1,(k=l)$ $\mathbb{Z}_1,(k\neq l)$	1 1 2

Вернемся к описанию серии $D_n\{k,l,p\}$. Добавление хорд к $D_n\{k,l\}$ не меняет вершинную связность f-графа. Поэтому f-граф F произвольно взятого атома серии $D_n\{k,l,p\}$ останется 2-связным(то есть без разделяющих окружностей). Отсюда f-граф любого атома серии $D_n\{k,l,p\}$ удовлетворяет критерию ориентируемой вложимости утверждения 11.

Также добавление хорд к $D_n\{k,l\}$ не увеличивает количество симметрий. Поэтому группа симметрий F будет подгруппой группы симметрий D_n. При этом такая подгруппа имеет транзитивное действие на ориентированных циклах F, а также определяет поворот произвольно выбранного ориентированного цикла. То есть группа симметрий F определяет группу симметрий ориентированного цикла. При этом, очевидно, вершины, соответствующие внешним ребрам (соединяющим данный цикл с одним циклом), могут переходить себя или в вершины, соответствующие внешним ребрам(соединяющим данный цикл с другим циклом).

Утверждение 12. В таблице 2 представлены группы симметрий атомов $D_n\{k,l,p\}$, группы симметрий ориентированных циклов, соответствующих f-графам этих атомов. Также определены характеристики пар ориентированных циклов f-графов.

Доказательство.

Если $k=l$, то характеристика пар ориентированных циклов f-графа любого атома серии $D_n\{k,k,p\}$ равна одному. Если при этом хорды на произвольном ориентированном цикле f-графа атома этой серии имеют группу симметрий $\mathbb{Z}_1$, то есть не допускают поворота. Значит группа атома, соответствующая такому f-графу циклическая $\mathbb{Z}_n$. Если поворот возможен, то группа симметрий $-\ \mathcal{D}_n$.

Случай $k\neq l$ возможен только если n четно. В этом случай также определены множеста A и B. По определению k (l) – количество кратных ребер множества A (соответственно B). И поворот ориентированного цикла f-графа любого атома серии $D_n\{k,l,p\}$ невозможен, поскольку этот цикл соединяется k ребрами с одним циклом и l ребрами с другим. $\square$

4. Основная теорема.

Прежде чем сформулировать основную теорему, рассмотрим еще серию примеров высотных атомов с группой симметрий, транзитивной на кольцах белого цвета. А именно атомы, полученные из f-графов атомов $P_1 - P_5$, $R_1 - R_11$, $R_n^1\{k,l\},(n \geq 4)$, $R_n^2\{k,l,m\},(n \geq 3, n \neq 4)$ путем добавления кратных внешних неориентрированных ребер и внутренних неориентированных ребер(хорд). Перейдем к описанию конструкции таких атомов.

Рассмотрим f-графы атомов $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10}$, R_{11}, $R_n^1\{k,l\},(n \geq 4)$, $R_n^2\{k,l,m\},(n \geq 3, n \neq 4)$. Зафиксируем вложение каждого из f-графов в плоскость, где все неориентированные ребра представлены в виде отрезков прямых, а все ориентированные циклы ориентированы одинаково(см рис. 5,6). Далее, будем рассматривать подгруппы каждой группы симметрий данных f-графов и смотреть, сколько орбит ребер возникает. Причем нас будут интересовать подгруппы, действующие транзитивно на оринтированных циклах соответствующего f-графа.

Утверждение 13. В таблице 3 представлены группы симметрий f-графов атомов $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10}, R_{11}, R_n^1\{k,l\},(n \geq 4), R_n^2\{k, l,m\},(n \geq 3, n \neq 4)$ и их подгруппы, транзитивно действующие на ориентированных циклах соответствующего f-графа. Для каждой группы и подгруппы определен ее порядок, также определено количество возникающих орбит, образованных внешними неориентированными ребрами.

Доказательство. Чтобы найти подгруппы групп симметрий атомов из таблицы 2 воспользуемся теоремой, взятой в работе Н.Вавилова[10]:

Теорема Гесселя. Следующими группами исчерпываются все конечные подгруппы в $SO(3,\mathbb{R})$: $\mathbb{Z}_n, D_n, T^+, O^+, I^+$. Где $\mathbb{Z}_n$ – циклическая группа порядка n, известная также как группа вращений правильного n-угольника. D_n – Группа диэдра, а также группа симметрий правильного n-угольника, вложенного в трехмерное пространство. T^+, O^+, I^+ – Группа вращений тетраэдра, октаэдра и икосаэдра соответственно.

Полное описание рассматриваемых групп, включая описание порождающих осей симметрий и изоморфизм групп(T^+ изом. $\mathcal{A}_4$, O^+ изом. $\mathcal{S}_4$, I^+ изом. $\mathcal{A}_5$) можно найти в работах Н.Вавилова[10], Н.А. Поклонского[9].

Итак, у каждой группы симметрий f-графов в таблице 2, подгруппы лежат в списке из теоремы Гесселя. Каждый f-граф атома из таблицы 2, имеет одну из следующих группу симметрий: T^+, O^+, I^+ (поскольку эту же группу симметрий имеет соответствующий многогранник). Полный список подгрупп каждой из трех групп есть в статьях Википедии[11,12,13]. Нас интересуют только те подгруппы, действие которых транзитивно на ориентированных циклах f-графа (и на вершинах соответствующего многогранника). Поэтому, чтобы выбрать из известного списка подгрупп нужные нам, следует для начала воспользоваться теоремой 2 А.В.Чашкина. Где группой G будет группа вращений многогранника, транзитивно действующая на его вершинах. D - множество вершин многогранника. Тогда длина орбиты любой вершины из D будет равна числу вершин многогранника. А значит порядок группы G будет делиться на число вершин многогранника.

Таблица 3. Параметры атомов $P_1 - P_5$, $R_1 - R_{11}$, R_n^1, R_n^2

Атом	Группа симметрий/подгруппа	порядок группы	количество орбит ребер
P_1	$\mathcal{A}_4$ $\mathcal{D}_2$	12 4	1 3
P_2	$\mathcal{S}_4$ $\mathcal{D}_4$	24 8	1 2
P_3	$\mathcal{S}_4$ $\mathcal{A}_4$ $\mathcal{D}_3$	24 12 6	1 1 3
P_4	$\mathcal{A}_5$	60	1
P_5	$\mathcal{A}_5$ $\mathcal{A}_4$	60 12	1 3
R_1	$\mathcal{A}_4$	12	2
R_2	$\mathcal{S}_4$ $\mathcal{A}_4$	24 12	1 2
R_3	$\mathcal{S}_4$	24	2
R_4	$\mathcal{S}_4$	24	2
R_5	$\mathcal{S}_4$	24	2
R_6	$\mathcal{S}_4$	24	3
R_7	$\mathcal{A}_5$	60	1
R_8	$\mathcal{A}_5$	60	2
R_9	$\mathcal{A}_5$	60	2
R_{10}	$\mathcal{A}_5$	60	2
R_{11}	$\mathcal{A}_5$	60	3
$R_n^1(n \geq 3)$, $(n \neq 4)$	$\mathcal{D}_n$	$2n$	2
$R_n^2, (n \geq 4)$	$\mathcal{D}_n$	$2n$	3

Таким образом, для f-графа каждого атома $R_1 - R_{11}$ отбираем только те подгруппы группы его симметрий, порядок которых делится на число ориентированных циклов f-графа (число вершин соответствующего многогранника). Среди таких подгрупп оставляем те, действие которых транзитивно на вершинах соответствующего многогранника.

Осталось выписать порядок каждой подгруппы и количество орбит, образованных неориентированными ребрами. Для поиска орбит будем пользоваться *леммой Бернсайда*(см. работу Чашкина А.В.[17]):

Пусть группа G действует на конечном множестве D. Тогда для N — числа классов эквивалентности, порождаемых на множестве D действием группы G, справедливо равенство

$N = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\psi(g)$

где $\psi(g)$ — число элементов d множества D таких, что $gd = d$.

Покажем на примере атома R_2. f-Графу этого атома соответствует кубооктаэдр. Число его вершин равно 12. Группа его симметрий – O^+(изом. $\mathcal{S}_4$) порядка 24. Выпишем все подгруппы группы O^+: T^+, $\mathcal{D}_4, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_2$, $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_1$. Порядок T^+ равен 12, делится на число вершин. Порядок остальных групп меньше числа вершин, значит они не подходят. Подгруппа T^+ в кубооктаэдре состоит из тождественного вращения, 8 вращений, на углы $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$, вокруг 4 осей, соединяющих центры противоположных треугольных граней, 3 вращений, на угол π, вокруг 3 осей, соединяющих центры противоположных четырехугольных граней. Отсюда легко видеть, что только тождественный элемент в группе T^+ оставляет произвольно взятое ребро кубооктаэдра на месте. Количество ребер 24. Порядок группы T^+ 12. Тогда, по лемме Бернсайда для $G = T^+$ и D – множества всех ребер, количество орбит ребер равно 2. Действие группы вершиннотранзитивно, так как любую вершину можно перевести в любую другую путем композиций поворотов вокруг осей, соединяющих центры противоположных треугольных граней.

Утверждение доказано.$\square$

Далее выбираем ту группу симметрий для каждого f-графа атома таблицы 2, действие которой образует максимальное количество орбит ребер. Красим ребра f-графа по правилу: один цвет - одна орбита, разные цвета - разные орбиты ребер.

На рис.14 показаны ориентированные вложения f-графов атомов таблицы 2 с раскрашенными по правилу ребрами. Тогда из конструкции каждого из раскрашенных f-графов выбранная группа симметрий будет транзитивно действовать на ориентированных циклах, также транзитивное действие будет и на ребрах с одним цветом. И никакие 2 ребра с разными цветами друг в друга не переходят.

Для каждого вложения рис. 14 введем параметры $k, l, m \geq 1$. Количество параметров равно количеству разных цветов во вложении. Будем говорить, что пары ориентированных циклов соответствуют ребрам одного цвета, если ребра, соединяющие пары имеют одинаковый цвет.

Для каждого вложения будем добавлять кратные ребра таким образом, что все ребра, инцидентные одной паре циклов параллельны друг другу и не пересекаются с ребрами, инцидентными другой паре. Не допускаются также пересечения с ориентированными ребрами (расположение кратных ребер такое же, как на рис. 11). То есть f-граф с добавленными кратными ребрами остается ориентированно вложим в плоскость. Цвет ребер используем, чтобы добавить к ребрам с одним цветом одно и то же количество кратных ребер. Причем количество кратных ребер, добавленных к ребрам с разными цветами может и различаться, и совпадать. Рассматривая f-граф с уже добавленными ребрами, разделим множество пар ориентированных циклов на разделимые множества. Тогда по определению разделимых множеств и построению f-графа, не может возникнуть ситуации, когда в разных множествах есть пары циклов, соответствующих ребрам одного цвета. Если множеств получилось три, то число k характеризует наименьшее количество кратных ребер полученных множеств. Число l характеризует следующее по возрастанию количество кратных ребер полученных множеств. Число m — следующее. Аналогичное значения имеют параметры k, l(только k), если число разделимых множеств совпадает с количеством различных цветов внешних ребер соответствующего вложения и равно двум(соответственно одному).

Если цветов было три(два), а разделимых множеств получилось два(соответственно одно), то $k = l$, если в разделимом множестве с количеством кратных ребер k есть пары циклов, соответствующих ребрам разных цветов. Аналогично (если цветов было три) определяется, когда $l = m$. Если цветов было три, а разделимое множество получилось одно, то $k = l = m$.

Определение 33.Назовем $P_1\{k,l\}$, $P_2\{k,l\}$, $P_3\{k,l,m\}$, $P_4\{k\}$, $P_5\{k,l\ ,m\}$, $R_1\{k,l\}$, $R_2\{k,l\}$, $R_3\{k,l\}$, $R_4\{k,l\}$, $R_5\{k,l\}$, $R_6\{k,l\}$, $R_7\{k\}$, $R_8\{k,l\}$, $R_9\{k,l\}$, $R_{10}\{k,l\}$, $R_{11}\{k, l,m\}$, $R^1_n\{k,l\},(n \geq 3, n \neq 4)$, $R^2_n\{k,l,m\},(n \geq 4)$, где $(k,l,m \geq 1)$ серии атомов, f-граф которых указанным образом получается из f-графов соответствующих атомов P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, $R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10}$, R_{11}, $R^1_n,(n \geq 4)$, $R^2_n,(n \geq 3, n \neq 4)$.

По построению все серии атомов включают в себя все частично симметричные атомы, полученные из $P_1 - P_5$, $R_1 - R_{11}$, $R^1_n,(n \geq 4)$, $R^2_n,(n \geq 3, n \neq 4)$ добавлением кратных ребер указанным способом. А группа симметрий каждого полученного атома совпадает с некоторой подгруппой соответствующего атома, выписаной в таблице 2.

Утверждение 14. Все атомы серий $P_1\{k,l\}$, $P_2\{k,l\}$, $P_3\{k,l,m\}$, $P_4\{k\}, P_5\{k, l,m\}$, $R_1\{k,l\}$, $R_2\{k,l\}$, $R_3\{k,l\}$, $R_4\{k,l\}$, $R_5\{k,\ l\}$, $R_6\{k,l\}$, $R_7\{k\}$, $R_8\{k,l\}$, $R_9\{k,l\}$, $R_{10}\{k,\ l\}$, $R_{11}\{k,l,m\}$, $R^1_n\{k,l\},(n \geq 3, n \neq 4)$, $R^2_n\{k,l,m\},(n \geq 4)$, где $(k,l,m \geq 1)$ являются высотными, группа симметрий которых транзитивно действует на кольцах белого цвета.

Доказательство. Высотность указанных атомов очевидна из-за ориентированной вложимости их f-графов в плоскость.

А транзитивность на кольцах белого цвета следует из конструкции добавления кратных ребер к f-графам. □

Утверждение 15. Все выписанные подгруппы любого атома таблицы 3, кроме атома P_3, являются группами симметрий атомов соответствующей полученой серии. Причем в серии нет ни одного атома, имеющего группу симметрий, отличную от выписанных подгрупп.

Доказательство. Действительно, рассмотрим все подгруппы группы симметрий атома P_1: $\mathcal{A}_4, \mathcal{D}_2$. Тогда, по построению, серия атомов $P_1 k, k$ имеет группу симметрий $\mathcal{A}_4$, а серия $P_1 k, l$(где $k \neq l$) $-$ $\mathcal{D}_2$.

Серия $P_2 k, l$ имеет группу симметрий $\mathcal{D}_4$, $P_2 k, k$ $-$ $\mathcal{S}_4$;

$P_4\{k\}$ $-$ $\mathcal{A}_5$; $P_5\{k,k,k\}$ $-$ $\mathcal{A}_5$, $P_5\{k,l,m\}$ $-$ $\mathcal{A}_4$ (причем k может равняться l или l равняться m);

$R_1\{k,l\}$ $-$ $\mathcal{A}_4$ (k может равняться l);

$R_2\{k,k\}$ $-$ $\mathcal{S}_4$, $R_2\{k,l\}$ $-$ $\mathcal{A}_4$ ($k \neq l$);

Далее допускаются все значения параметров $k, l, m \geq 1$:

$R_3\{k,l\} - R_6\{k,l,m\}$ $-$ $\mathcal{S}_4$;

$R_7 k - R_1 1k, l, m$ $-$ $\mathcal{A}_5$;

$R^1_n\{k,l\}, (n \geq 3, n \neq 4)$, $R^2_n\{k,l,m\}, (n \geq 4)$ $-$ $\mathcal{D}_n$. $\square$

Рассмотрим теперь подгруппы атома P_3: $\mathcal{S}_4, \mathcal{A}_4, \mathcal{D}_3$. По построению серия атомов $P_3\{k,k,k\}$ имеет группу симметрий $\mathcal{S}_4$, а серия атомов $P_3\{k,l,m\}$ $-$ $\mathcal{D}_3$(допускается равенство двух параметров). Группу симметрий $\mathcal{A}_4$ ни один атом серии $P_3\{k,l,m\}$ не имеет. Однако, эта группа будет транзитивно действовать на ориентированных циклах f-графа каждого атома серии $P_3\{k,k,k\}$.

Утверждение 16. Высотный частично симметричный атом Z, полученный из из любого атома таблицы 2 добавлением кратных ребер, изоморфен одному из соответствующей серии атомов определения 33. (Например, если Z получен из атома P_5, то утверждается, что Z изоморфен одному из атомов серии $P_5\{k,l,m\}$). Также все окружности f-графа атома Z неразделяющие.

Доказательство.

Будем доказывать по аналогии с доказательством утверждения 10.

Добавление кратных ребер к f-графу любого атома из $P_1 - P_{11}$, $R^1_n, (n \geq 3, n \neq 4)$, $R^2_n, (n \geq 4)$ не меняет вершинную связность f-графа. При этом все эти атомы(кроме R^1_3) имеют вершинную связность больше двух.(Поскольку удаление любых двух вершин на сети соответствующих многогранников не приводит к несвязному или тривиальному графу.) А R^1_3 имеет вершинную связность, равную двум. Однако, при удалении любых двух соседних вершин в сети призмы с треугольным основанием получается только одна компонента связности.

Отсюда делаем вывод, что все окружности f-графа атома Z являются неразделяющими, поэтому существует ориентированное вложение GZ f-графа атома Z в плоскость, что все окружности лежат вне друг друга и имеют одинаковую ориентацию. Также условие предположения 1 в утверждении 10 для GZ не верно. Для ориентированных вложений f-графов любых высотных атомов не выполняется условие предположения 2.

Поэтому кратные ребра GZ добавлены так же, как и у соответствующей серии атомов.

Определение 34. Будем говорить, что кратные ребра на ориентированном цикле принадлежат одному *типу*, если все они соединяют этот цикл с каким-то другим. Разным типам соответствуют ребра, соединяющие ор. цикл с разными ор. циклами.

Так, например, пусть GZ получен из f-графа атома P_1 добавлением кратных ребер. Тогда, в силу транзитивности группы симметрий на циклах и в силу того, что на каждом ориентированном цикле кратные ребра принадлежат трем типам, характеристика пар ориентированных циклов равна одному, двум или трем. Если она равно одному, то есть все ор. циклы соединяются одним и тем же количеством кратных ребер, то GZ изоморфен f-графу некоторого атома серии P_1k, k, k. Если характеристика равна двум, то это случай $k = l$ или $l = m$. Легко понять, что $k = l$, если на ориентированном цикле количество кратных ребер одного типа, совпадает с количеством кратных ребер другого типа и меньше количества кратных ребер третьего типа. Тогда GZ изоморфен f-графу некоторого атома серии P_1k, k, m. Случай $l = m$ возможен, если совпадает два типа максимальных по количеству кратных ребер. Тогда GZ изоморфен f-графу некоторого атома серии P_1k, l, l. Если характеристика равна трем, тогда количество кратных ребер на любом ор. цикле GZ принадлежащих разным типам, различно. Значит, GZ изоморфен некоторому атому серии P_1k, l, m.

Аналогично получаем справедливость утверждения 11, если GZ получен из остальных f-графов атомов таблицы 3. $\square$

Теперь рассмотрим серии атомов из определения 33 с добавленными ребрами(хордами).

Определение 35.Серии атомов $P_1\{k, l, p\}$, $P_2\{k, l, p\}$, $P_3\{k, l, m, p\}$, $P_4\{k, p\}$, $P_5\{k, l, m, p\}$, $R_1\{k, l, p\}$, $R_2\{k, l, p\}$, $R_3\{k, l, p\}$, $R_4\{k, l, p\}$, $R_5\{k, l, p\}$, $R_6\{k, l, p\}$, $R_7\{k, p\}$, $R_8\{k, l, p\}$, $R_9\{k, l, p\}$, $R_{10}\{k, l, p\}$, $R_{11}\{k, l, m, p\}$, $R^1_n\{k, l, p\}, (n \geq 3)$, $R^2_n\{k, l, m, p\}, (n \geq 3)$, где $k, l, m \geq 1; p \in \mathbb{Z}_+$ назовем серии высотных частично симметричных атомов, полученных из атомов определения 33 путем добавления внутренних неориентированных ребер(хорд). Здесь число p соответствует количеству внутренних рёбер на каком-либо ориентированном цикле f-графа атома. Из-за частичной симметричности каждого атома этих серий, все циклы его f-графа имеют одинаковое количество хорд. Поэтому выбор ориентированного цикла произвольный.

Опишем, каким образом могут располагаться хорды f-графов атомов из определения 35.

Все окружности любого атома Z из $P_1\{k, l, p\}$, $P_2\{k, l, p\}$, $P_3\{k, l, m, p\}$, $P_4\{k, p\}$, $P_5\{k, l, m, p\}$, $R_1\{k, l, p\}$, $R_2\{k, l, p\}$, $R_3\{k, l, p\}$, $R_4\{k, l, p\}$, $R_5\{k, l, p\}$, $R_6\{k, l, p\}$, $R_7\{k, p\}$, $R_8\{k, l, p\}$, $R_9\{k, l, p\}$, $R_{10}\{k, l, p\}$, $R_{11}\{k, l, m, p\}$, $R^1_n\{k, l, p\}, (n \geq 3)$, $R^2_n\{k, l, m, p\}, (n \geq 3)$ неразделяющие. Тогда расположение хорд атома Z удовлетворяет условию необходимости утверждения 11 (если за GH принять f-граф атома Z). Причем, выполнение условий утверждения 11 для хорд любого f-графа, полученного из f-графов атомов определения 33 добавлением хорд, будет достаточно, чтобы этот f-граф имел ориентированное вложение в плоскость.

Группа симметрий f-графа каждого атома из списка определения 33 определяет поворот произвольно выбранного ориентированного цикла. То есть группа симметрий f-графа определяет группу симметрий ориентированного цикла. При этом, очевидно, вершины на цикле, соответствующие кратным ребрам одного типа, не могут переходить в вершины, соответствующие кратным ребрам разных типов. Отсюда, очевидно, порядок группы симметрий цикла должен быть делителем количества разных типов кратных ребер на этом ориентированном цикле.

Утверждение 17. В таблице 4 представлены группы симметрий атомов $P_1\{k, l, m, p\}$, $P_2\{k, l, p\}$, $P_3\{k, l, m, p\}$, $P_4\{k, p\}$, $P_5\{k, l, m, p\}$, $R_1\{k, l, p\}$, $R_2\{k, l, p\}$, $R_3\{k, l, p\}$, $R_4\{k, l, p\}$, $R_5\{k, l, p\}$, $R_6\{k, l, p\}$, $R_7\{k, p\}$, $R_8\{k, l, p\}$, $R_9\{k, l, p\}$, $R_{10}\{k, l, p\}$, $R_{11}\{k, l, m, p\}$, $R_n^1\{k, l, p\}, (n \geq 3)$, $R_n^2\{k, l, m, p\}, (n \geq 3)$, группы симметрий ориентированных циклов соответствующих f-графов.

Доказательство.

Разберем, для примера, серию атомов $P_3\{k, l, m, p\}$. Количество различных типов кратных ребер на ориентированном цикле f-графа каждого атома этой серии равно четырем (каждый ориентированный цикл соединен с четырьмя другими). Значит, группа симметрий ориентированного цикла f-графа каждого атома этой серии одна из следующих: $\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4$. Далее, как мы выяснили, $P_3\{k, k, k\}$ имеет группу симметрий $\mathcal{S}_4$, а $P_3\{k, l, m\}$ – $\mathcal{D}_3$. Группа $\mathcal{A}_4$ будет транзитивно действовать на ориентированных циклах f-графа каждого атома серии $P_3\{k, k, k\}$. Эта группа симметрий каждого атома серии $P_3\{k, k, k\}$ определяет группу симметрий ориентированного цикла соответствующего f-графа (при любом $k \geq 1$) равную $\mathbb{Z}_2$. Группы симметрий атомов серии $P_3\{k, l, m\}$, отличные от $\mathcal{A}_4$, действуют так, что группа симметрий ор. цикла либо $\mathbb{Z}_1$, либо $\mathbb{Z}_4$. Так, в случае $\mathbb{Z}_4$ – это $\mathcal{S}_4$. В случае $\mathbb{Z}_1$ – это $\mathcal{D}_3$

Это значит, что если у атомов серии $P_3\{k, k, k, p\}$ хорды расположены так, что группа симметрий цикла равна $\mathbb{Z}_2$, то атомы этой серии имеют группу симметрий $\mathcal{A}_4$.

Группе симметрий ориентированного цикла $\mathbb{Z}_1$ будут соответствовать f-графы всех атомов $P_3\{k, l, m, p\}$ с группой симметрий $\mathbb{D}_3$. В этом случае параметры k, l, m могут и совпадать.

Группе симметрий ориентированного цикла $\mathbb{Z}_4$ будут соответствовать f-графы всех атомов $P_3\{k, k, k, p\}$ с группой симметрий $\mathbb{S}_4$.

Остальной разбор серий атомов делается аналогично.

Однако у f-графа каждого атома серий $P_4\{k, p\}$ и $R_7\{k, p\}$ группа симметрий ориентированного цикла не может равняться $\mathbb{Z}_1$. Иначе получился бы f-граф, соответствующий не частично симметричному атому. □

Таблица 4.

Атом	Группа симметрий	Гр.симм. ор. цикла
$P_1\{k,l,m,p\}$	$\mathcal{D}_2$, $\mathcal{A}_4(k=l=m)$	$\mathbb{Z}_1$, $\mathbb{Z}_3(k=l=m)$
$P_2\{k,l,p\}$	$\mathcal{D}_4$, $\mathcal{S}_4(k=l)$	$\mathbb{Z}_1$, $\mathbb{Z}_3(k=l)$
$P_3\{k,l,m,p\}$	$\mathcal{S}_4(k=l=m)$, $\mathcal{A}_4(k=l=m)$, $\mathcal{D}_3$	$\mathbb{Z}_4(k=l=m)$, $\mathbb{Z}_2(k=l=m)$, $\mathbb{Z}_1$
$P_4\{k,p\}$	$\mathcal{A}_5$	$\mathbb{Z}_3$
$P_5\{k,l,m,p\}$	$\mathcal{A}_5(k=l=m)$, $\mathcal{A}_4$	$\mathbb{Z}_5(k=l=m)$, $\mathbb{Z}_1$
$R_1\{k,l,p\}$	$\mathcal{A}_4$	$\mathbb{Z}_1$
$R_2\{k,l,p\}$	$\mathcal{A}_4$, $\mathcal{S}_4(k=l)$	$\mathbb{Z}_1$, $\mathbb{Z}_2(k=l)$
$R_3\{k,l,p\}$	$\mathcal{S}_4$	$\mathbb{Z}_1$
$R_4\{k,l,p\}$	$\mathcal{S}_4$	$\mathbb{Z}_1$
$R_5\{k,l,p\}$	$\mathcal{S}_4$	$\mathbb{Z}_1$
$R_6\{k,l,m,p\}$	$\mathcal{S}_4$	$\mathbb{Z}_1$
$R_7\{k,p\}$	$\mathcal{A}_5$	$\mathbb{Z}_2$
$R_8\{k,l,p\}$	$\mathcal{A}_5$	$\mathbb{Z}_1$
$R_9\{k,l,p\}$	$\mathcal{A}_5$	$\mathbb{Z}_1$
$R_{10}\{k,l,p\}$	$\mathcal{A}_5$	$\mathbb{Z}_1$
$R_{11}\{k,l,m,p\}$	$\mathcal{A}_5$	$\mathbb{Z}_1$
$R_n^1\{k,l,p\},(n\geq 3),\ (n\neq 4)$	$\mathcal{D}_n$	$\mathbb{Z}_1$
$R_n^2\{k,l,m,p\},(n\geq 4)$	$\mathcal{D}_n$	$\mathbb{Z}_1$

Теперь мы можем сформулировать основную теорему.

Теорема 3.(Трифонова В.А.)Высотный атом, группа симметрий которого транзитивно действует на кольцах одного цвета (белого), изоморфен одному из атомов следующего списка: $A_n^1, (n \geq 1)$,$D_n\{k,l,p\}$, $(n \geq 3)$, $C_n\{p\}, (n \geq 1)$,$P_1\{k,l,p\}$, $P_2\{k,l,p\}$, $P_3\{k,l,m,p\}$, $P_4\{k,p\}$, $P_5\{k,l,m,p\}$, $R_1\{k,l,p\}$, $R_2\{k,l,p\}$, $R_3\{k,l,p\}$, $R_4\{k, l,p\}$, $R_5\{k,l,p\}$, $R_6\{k,l,p\}$, $R_7\{k,p\}$, $R_8\{k,l,p\}$, $R_9\{k,l,p\}$, $R_{10}\{k,l,p\}$, $R_{11}\{k,l,m,p\}$, $R_n^1\{k, l\}, (n \geq 4)$, $R_n^2\{k,l,m\}, (n \geq 3, n \neq 4)$, где $k,l,m \geq 1; p \in \mathbb{Z}_+$.

Доказательство. Пусть Z – высотный атом с группой симметрий, транзитивной на кольцах белого цвета, G – его f-граф. Убирая все внутренние ребра(хорды) из G, получим f-граф GZ.

Утверждение 18.В ориентированно вложенном f-графе атома с группой симметрий, транзитивной на кольцах белого цвета, все окружности неразделяющие.

*Доказательство.*Построим для f-графа граф Gl смежности окружностей: выкидываем все внутренние неориентированный рёбра(хорды), каждую ориентированную окружность стянем в точку, тем самым получим граф без ориентированных ребер.

Назовём вершину графа *разделяющей*, если после ее удаления граф распадается на несколько непустых компонент связности.Легко заметить, что если окружность в f-графе была разделяющей, то и вершина, полученная стягиванием окружности, будет разделяющей.

Если в графе Gl одна вершина, то, очевидно, она неразделяющая. В статье И.М.Ни-конова [6] показано, что в графе смежности с несколькими вершинами есть хотя бы одна неразделяющая вершина. Симметрии f-графа $Sym(f)$ индуцируют симметрии графа Gl и действуют транзитивно на вершинах графа. Учитывая связность графа и транзитивность на вершинах, заключаем, что все вершины неразделяющие. □

Рассмотрим ориентированное вложение GZ в плоскость. Так как нет разделяющих окружностей, значит, с точностью до инверсии относительно одной из окружностей, все окружности лежат вне друг друга, и имеют одинаковую ориентацию. Если стянуть каждую ориентированную окружность GZ в точку, мы получим граф смежности Gl, который по построению будет плоским. Симметрии f-графа индуцируют симметрии графа Gl, сохраняющие циклический порядок ребёр. Опишем, какой может быть конструкция такого графа.

Нам понадобится теорема, взятая из статьи Г.Флайшнера и В. Имриха[18].

Теорема 4. Связными, простыми, планарными вершинно-транзитивными графами являются: одна вершина, одно ребро, простой цикл, а также сети правильных призм и антипризм, Платоновых и Архимедовых тел.

Итак, если в графе Gl отождествить все кратные ребра, то получится граф $Gl1$, который по построению окажется плоским, связным, простым(без кратных ребер и петель), вершинно-транзитивным. Тогда граф $Gl1$ изоморфен одному из графов в списке теоремы 3.

Если граф $Gl1$ изоморфен вершине, то f-граф G имеет один ориентированный цикл с внутренними ребрами, тогда атом Z изоморфен одному из атомов серии

$A_n^1, (n \geq 1)$.

Если граф $Gl1$ изоморфен ребру, то f-граф G соответствует одному из атомов серии $C_n\{p\}, (n \geq 1)$.

Рассмотрим случай, когда граф $Gl1$ изоморфен простому циклу. Тогда GZ получен из f-графа некоторого атома D_n добавление кратных ребер. Тогда по утверждению 10 GZ соответствует атому, изоморфному одному из атомов серии $D_n\{k, l\}, (n \geq 3)$. Следовательно атом Z изоморфен одному из атомов серии $D_n\{k, l, p\}, (n \geq 3)$.

Рассмотрим, когда $Gl1$ изоморфен одной из сетей призм, антипризм, Платоновых и Архимедовых тел. Тогда GZ получается добавлением кратных ребер к f-графу одного атома из следующих:

$P_1 - P_5, R_1 - R_{11}, R_n^1, R_n^2$. Тогда по утверждению 17 GZ соответствует атому, изоморфному одному из атомов серий $P_1\{k, l\}$, $P_2\{k, l\}$, $P_3\{k, l, m\}$, $P_4\{k\}, P_5\{k, l, m\}$, $R_1\{k, l\}$, $R_2\{k, l\}$, $R_3\{k, l\}$, $R_4\{k, l\}$, $R_5\{k, l\}$, $R_6\{k, l\}$, $R_7\{k\}$, $R_8\{k, l\}$, $R_9\{k, l\}$, $R_{10}\{k, l\}$, $R_{11}\{k, l, m\}$, $R_n^1\{k, l\}, (n \geq 3, n \neq 4)$, $R_n^2\{k, l, m\}, (n \geq 4)$. Тогда Z изоморфен одному из атомов следующего списка:

$P_1\{k, l, p\}$, $P_2\{k, l, p\}$, $P_3\{k, l, m, p\}$, $P_4\{k, p\}, P_5\{k, l, m, p\}$, $R_1\{k, l, p\}$, $R_2\{k, l, p\}$, $R_3\{k, l, p\}$, $R_4\{k, l, p\}, R_5\{k, l, p\}$, $R_6\{k, l, p\}$, $R_7\{k, p\}, R_8\{k, l, p\}$, $R_9\{k, l, p\}$, $R_{10}\{k, l, p\}$, $R_{11}\{k, l, m, p\}$, $R_n^1\{k, l\}, (n \geq 4)$, $R_n^2\{k, l, m\}, (n \geq 3, n \neq 4)$, где $k, l, m \geq 1; p \in \mathbb{Z}_+$.

Теорема доказана.□

Следствие 1. *Высотный атом, группа симметрий которого транзитивно действует на кольцах черного цвета, изоморфен одному из двойственных атомов списка теоремы 3.*

Доказательство. Действительно, все атомы списка теоремы 3 являются высотными частично транзитивными. Заменяя белые кольца атомов на черные, а черные на белые, получим список высотных атомов, группа симметрий которых транзитивно действует на кольцах черного цвета. Тогда по теореме 3 высотный атом, группа симметрий которого транзитивно действует на кольцах черного цвета, изоморфен одному из атомов полученного списка. Следствие доказано.□

Следствие 2. *Высотными атомами, группа симметрий которых транзитивно действует на кольцах обоих цветов, являются только максимально симметричные высотные атомы.*

Доказательство.

Рассмотрим список ориентированных вложений f-графов атомов $A_n^1, (n \geq 1)$,$D_n\{k, l, p\}, (n \geq 3)$, $C_n\{p\}, (n \geq 1)$ $P_1\{k, l, p\}$, $P_2\{k, l, p\}$, $P_3\{k, l, m, p\}$, $P_4\{k, p\}$, $P_5\{k, l, m, p\}$, $R_1\{k, l, p\}$, $R_2\{k, l, p\}$, $R_3\{k, l, p\}$, $R_4\{k, l, p\}$, $R_5\{k, l, p\}$, $R_6\{k, l, p\}$, $R_7\{k, p\}$, $R_8\{k, l, p\}$, $R_9\{k, l, p\}$, $R_{10}\{k, l, p\}$, $R_{11}\{k, l, m, p\}$, $R_n^1\{k, l\}, (n \geq 4)$, $R_n^2\{k, l, m\}, (n \geq 3, n \neq 4)$, где $k, l, m \geq 1; p \in \mathbb{Z}_+$..

Выберем среди них те f-графы, группа симметрий которых транзитивно действует на гранях. Очевидно, $R_1\{k, l, p\}$, $R_2\{k, l, p\}$, $R_3\{k, l, p\}$, $R_4\{k, l, p\}$, $R_5\{k, l, p\}$, $R_6\{k, l, p\}$, $R_7\{k, p\}$, $R_8\{k, l, p\}$, $R_9\{k, l, p\}$, $R_{10}\{k, l, p\}$, $R_{11}\{k, l, m, p\}$, $R_n^1\{k, l\}, (n \geq 4)$, $R_n^2\{k, l, m\}, (n \geq 3, n \neq 4)$ не подходят, так как соответствующие им многогранники полуправильные и имеют грани нескольких типов.

$A^1_n, (n \geq 1)$,$D_n\{k,l,p\}$, $(n \geq 3)$, $C_n\{p\}, (n \geq 1)$

Добавление кратных ребер к $D_n, P_1 - P_5$ увеличивает количество типов граней(появляются грани, ограниченные двумя ориентированными ребрами и двумя неориентированными). Остается рассмотреть серии $A^1_n, (n \geq 1), C_n\ \{p\}, (n \geq 1)$.

Добавление хорд к C_n также увеличивает количество типов граней(появляется грань, ограниченная одним ориентированным реброи и одной хордой, при этом до добавления хорд все грани ограничивались двумя ориентированными ребрами и двумя(одним ребром в случае $n = 1$) неориентированными). Аналогично, добавление хорд к D_n увеличивает количество типов граней.

Серия атомов A^1_n имеет одно белое кольцо. Рассмотрим f-графы атомов, двойственных к A^1_n. Выберем среди них те, группа симметрий которых транзитивно действует на ориентированных циклах. Ориентированные вложения искомых f-графов этом должны иметь одну грань и соответствовать некоторым атомам списка теоремы 3. Под эти условия подходят только f-графы атомов C_1 и A_2.

Таким образом, подошли все максимально симметричные высотные атомы.

Следствие доказано.□

ИСТОЧНИКИ И ЛИТЕРАТУРА

[1] Болсинов А. В., Фоменко А. Т., Интегрируемые гамильтоновы системы, т. 1, // Ижевск: Изд. дом "Удмуртский университет 444 с., (1999).

[2] Волчанецкий Н. В., Никонов И. М. Максимально симметричные высотные атомы // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2013. №2. 3–6.

[3] Мантуров В.О. Бифуркации, атомы и узлы // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2000. №1. 3–8.

[4] Кудрявцева Е. А., Никонов И. М., Фоменко А. Т. Симметричные и неприводимые абстрактные многогранники // Изд-во Московского университета, в сборн. "Соврем. пробл. матем. и механ."под ред. А. Т. Фоменко, сс. 58–97 (2009).

[5] Кудрявцева Е. А., Никонов И. М., Фоменко А. Т., Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия // Матем. сборник, 199 (9), сс. 3–96 (2008).

[6] И. М. Никонов, “Высотные атомы с транзитивной на вершинах группой симметрий” //в печати

[7] Фоменко А. Т., Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Известия А.Н. СССР. Серия матем. 1986, т.50, No.6, с. 1276–1307

[8] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степеняи свободы // Известия АН СССР. 1990, т.54, №3, с. 546–575.

[9] Н.А. Поклонский, Точечные группы симметрий, Минск БГУ, 2003

[10] Н.Вавилов, Конкретная теория групп, http://mathscinet.ru/files/VavilovN.pdf

[11] Wikipedia, Octahedral symmetry
https://en.wikipedia.org/wiki/$Octahedral\_symmetry$

[12] Wikipedia, Tetrahedral symmetry
https://en.wikipedia.org/wiki/$Tetrahedral\_symmetry$

[13] Wikipedia, Icosahedral symmetry
https://en.wikipedia.org/wiki/$Icosahedral\_symmetry$

[14] Wikipedia, Dihedral group
https://en.wikipedia.org/wiki/$Dihedral\_group$

[15] https://ru.wikipedia.org/wiki/Правильный_многогранник

[16] https://ru.wikipedia.org/wiki/Архимедово_тело

[17] А.В.Чашкин, Дискретная математика, Академия, 2012

[18] Herbert Fleischner, Wilfried Inrih, Transitive planar graphs, Mathematica slovaca, 1979, Vol.29

[19] Е.А.Кудрявцева, А.Т.Фоменко. "Группы симметрий правильных функций Морса на поверхностях". - Доклады РАН, серия: математика, 2012, том 446, № 6, с.615-617

[20] A.T.Fomenko, A.Yu.Konyaev. "New approach to symmetries and singularities in integrable Hamiltonian systems". - Topology and its applications, 2012, vol.159, pp.1964-1975.

[21] A.T.Fomenko, A.Yu.Konyaev. "Algebra and Geometry Through Hamiltonian Systems". - In: "Continuous and Distributed Systems. Theory and Applications". Series "Solid Mechanics and Its Applications". Vol.211, pp.3-21. Editors: V.Z.Zgurovsky, V.A.Sadovnichiy. Springer. 2014.

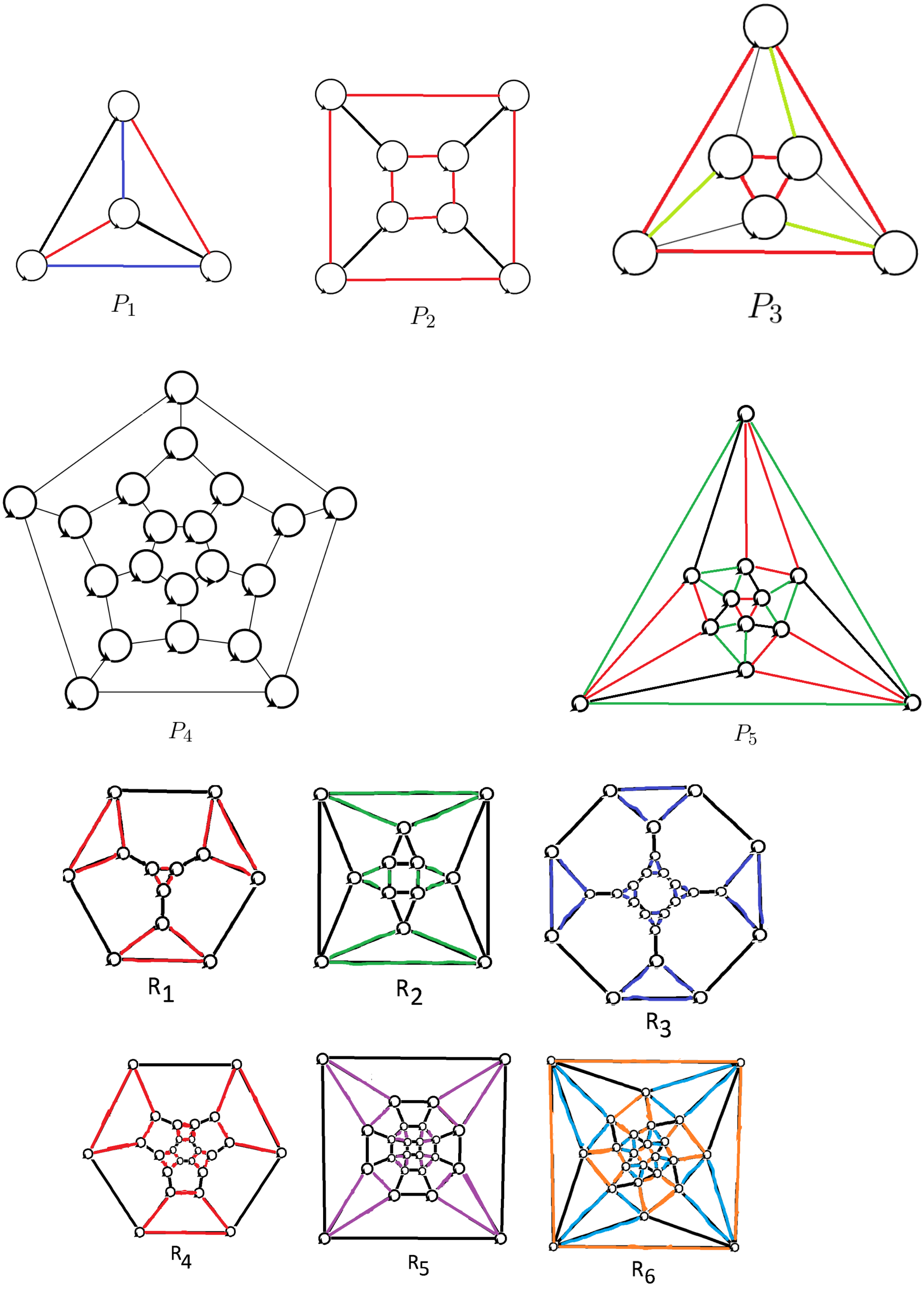


Рис. 14. f-графы атомов $P_1 - P_5$, $R_1 - R_6$ с раскрашенными ребрами

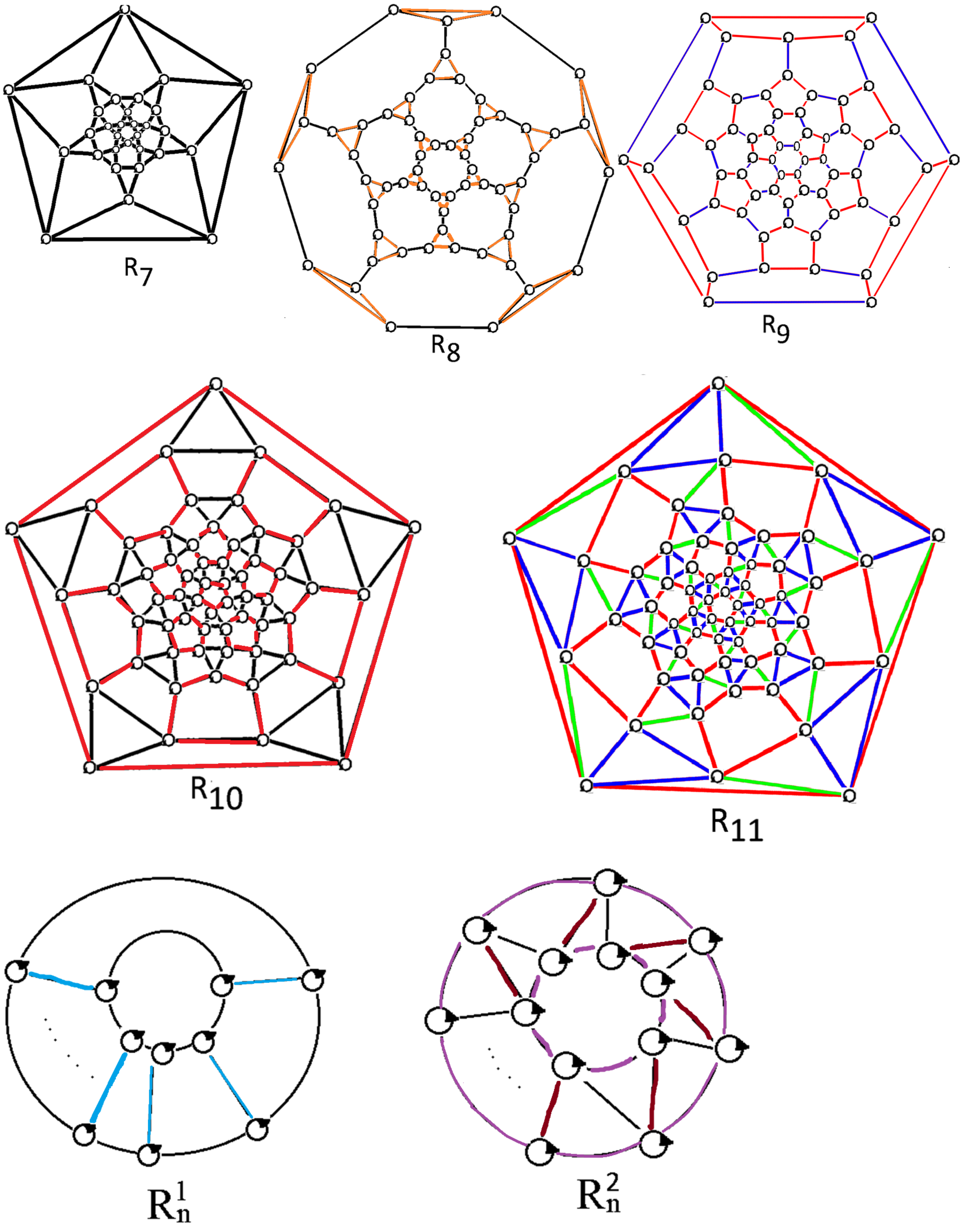


Рис. 15. f-графы атомов $R_7 - R_{11}$, R_n^1, R_n^2 с раскрашенными ребрами