

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет
Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

Москвин Виктор Александрович

КУРСОВАЯ РАБОТА

Исследование топологии слоений
Лиувилля бильярдов с невыпуклыми
углами на границе области

Научные руководители:

А. Т. Фоменко

В. В. Ведюшкина

Москва, 2018 г.

1 Введение.

Биллиардная задача (биллиард) — динамическая система, описывающая движение материальной точки внутри области с естественным абсолютно упругим отражением на границе (угол падения равен углу отражения). В книге С.Л. Табачникова [1] дан обзор современных исследований биллиардов. Топология совместных поверхностей уровня интегралов описывается с помощью теории А.Т. Фоменко [2], которая в случае полных потоков изложена в книге Болсинова–Фоменко [2]. В настоящей работе исследуются биллиарды, потоки в которых не являются полными. Это означает, что совместные поверхности уровня интегралов не являются торами. Рассмотрены невыпуклые плоские области двух типов: ограниченные дугами взаимно-перпендикулярных прямых и ограниченные дугами софокусных квадрик. В случае таких биллиардов показано, что совместные 2-уровни интегралов гомеоморфны сферам с ручками и проколами. Интегрируемость биллиардов второго типа была замечена В.В. Козловым и Д.В. Трещевым в [1]. В работах [3–5] построены инварианты Фоменко–Цишанга для выпуклых биллиардов, ограниченных дугами софокусных квадрик.

2 Определение биллиарда.

Рассмотрим плоскую область Ω , ограниченную кусочно-гладкой кривой. Потребуем, чтобы углы излома в точках не гладкости границы составляли $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$.

Рассмотрим динамическую систему, описывающую движение (материальной) точки внутри области Ω с естественным отражением на границе $P = \partial\Omega$. Эту систему назовем биллиардом в области. Траектории, попавшие в прямые углы, мы доопределим, как обычно, по непрерывности (попадая в вершину прямого угла, точка отражается по той же траектории). Легко видеть, что поступить так же с траекториями, попавшими в вершину угла $3\pi/2$, сохраняя при этом непрерывность системы, невозможно. (рис. 1) Обозначим вершины тупых углов через x_k . Следовательно, некомпактным фазовым пространством данного биллиарда является многообразие

$$M^4 := \{(x, v) | x \in \Omega, x \neq x_k \forall k, v \in T_x^2\mathbb{R}, |v| > 0 / \sim\},$$

где отношение эквивалентности задается так:

$$(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \in P, |v_1| = |v_2|, v_1 - v_2 \perp T_{x_1}P.$$

Здесь через T_xP обозначена касательная прямая к области Ω в точке x , а через $|v|$ евклидова длина вектора v . Это отношение эквивалентности иногда будем называть биллиардным законом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Сложностью биллиарда назовем число k — число углов излома граничной кривой, равных $\frac{3\pi}{2}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Кусочно-гладкое (некомпактное) 3-многообразие $Q^3 = \{x \in M^4 : |v(x)| = \text{const}\}$ назовем изоэнергетической 3-поверхностью данного биллиарда.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовем естественной проекцией P многообразия Q^3 на биллиардную область Ω гладкое отображение, действующее по правилу $(x, v) \rightarrow x$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Назовем особыми точками области (биллиарда) вершины углов $3\pi/2$, а особыми точками многообразия Q^3 — прообразы при естественной проекции P особых точек области.

3 Биллиардная задача в областях, ограниченных взаимно-перпендикулярными прямыми.

Рассмотрим простейший билиард в прямоугольной области, в частности в квадрате. Требование абсолютной упругости удара дает нам первый интеграл: в любом таком билиарде сохраняется квадрат длины вектора скорости, а вторым интегралом будет являться угол между направлением траектории и осью OX . Следовательно, такие билиарды являются интегрируемыми и можно понять, что все неособые поверхности уровня второго интеграла гомеоморфны торами. Рассмотрим обобщение этой задачи — билиард в области, ограниченной взаимно перпендикулярными прямыми. Без ограничения общности будем считать, что прямые параллельны координатным линиям. Требование абсолютной упругости удара по-прежнему дает нам первый интеграл: в любом таком билиарде сохраняется квадрат длины вектора скорости. Второй интеграл λ системы по-прежнему равен углу между направлением траектории и осью OX . Из-за отсутствия гладкости системы и неполноты потоков теорема Лиувилля [2] неприменима и, более того, совместные слои интегралов не будут гомеоморфны несвязному объединению торов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть W_s^k — билиард, ограниченный многоугольником с k невыпуклыми углами, из которого вырезаны s многоугольников с s_j невыпуклыми углами на границах, где $k, s, j \in [0, N], N \in \mathbb{N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Особыми значениями интеграла λ билиарда W_s^k назовем значения 0 и $\frac{\pi}{2}$. Все другие значения назовем неособыми.

Теорема 1. Для всех неособых значений интеграла λ поверхность уровня интеграла $\lambda = \alpha$ в изоэнергетической поверхности Q^3 билиарда W_s^k гомеоморфна сфере с

$$g = (k + \sum_{j=1}^s s_j + 1)$$

ручками и

$$(k + \sum_{j=1}^s s_j)$$

выколотыми точками, являющимися прообразами углов, равных $\frac{3\pi}{2}$.

Доказательство. Обозначим через W внешнюю границу билиарда. Фиксируем произвольное неособое значение интеграла $\lambda = \alpha$.

Лемма 1. В многоугольнике с границей из взаимно-перпендикулярных прямых выполняется соотношение: $k' = e' + 2$, где k' — число углов $\pi/2$, а e' — число вертикальных сторон.

Доказательство. Докажем это утверждение индукцией по числу вертикальных сторон.

База индукции. Для прямоугольника утверждение верно.

Шаг индукции. Заметим, что все такие многоугольники можно рассматривать как склейки некоторого количества прямоугольников. (например, продолжив все стороны многоугольника) Предположим, что утверждение верно для числа вертикальных сторон $e' = t$. Заметим, что увеличение e' — это в точности приклейка прямоугольников к сторонам многоугольника. Приклеим один прямоугольник. Если сторона приклеенного прямоугольника совпала с одной из вертикальных сторон многоугольника, то и k' , и e' увеличиваются на 1. Если же прямоугольник приклеился с появлением двух новых вертикальных сторон, то k' и e' увеличиваются на 2. Пользуясь индукцией, завершаем доказательство леммы. \square

Заполним W вертикальными прямыми l_β , обозначим отрезки этих прямых, имеющие непустое пересечение с областью за l_{β_i} , где параметр β — это координата по оси OX , а i — порядковый номер отрезка по вертикали (см. рис 1). Каждую точку x отрезка l_{β_i} оснастим единичными векторами скорости v_j , где $j = 1, \dots, 4$ так, чтобы пара (x, v_j) лежала на уровне интеграла $\lambda = \alpha$ и номер вектора j означал номер координатной четверти, куда вектор направлен. Заметим, что искомое многообразие склеено из двух одинаковых кусков: правого R , состоящего из точек вида (x, v_j) , где $j = 1, 2$, и левого L из (x, v_j) , где $j = 3, 4$. Обозначим оснащенные векторами отрезки через l'_{β_i} .

Назовем прямую l_β особой, если она проходит через вертикальные сегменты границы биллиарда. Заметим, что прообраз каждого l'_{β_i} при естественной проекции уровня интеграла $\lambda = \alpha$ на область — окружность (возможно, с особыми точками, если l'_{β_i} лежит на особой прямой).

Лемма 2. *Выполняется соотношение*

$$g = \sum_{j=0}^s (e_j) + 2s - 1,$$

где e_j — число вертикальных сторон j -ого многоугольника, e_0 — число вертикальных сторон внешнего многоугольника.

Доказательство. Рассмотрим прямые, оснащенные векторами, направленными вправо, и обозначим их отрезки через l'_{β_i} . Рассмотрим многообразие R и его расслоение на $P^{-1}(l'_{\beta_i})$, уточним, что прообраз l'_{β_i} при отображении — окружность s , возможно, особыми точками на ней. (так как на границах действует биллиардный закон и вектора скорости склеиваются) Каждый из s выколотых из области многоугольников порождает дырку в многообразии R , так как в нем не определено биллиардное движение. Будем постепенно увеличивать параметр β . Пусть прямая l_β — неособая, тогда, если прямая $l_{\beta+\varepsilon}$ тоже неособая, то в этом случае каждый прообраз отрезка $P^{-1}(l_{\beta_i})$ тождественно склеится с прообразом отрезка $P^{-1}(l_{\beta+\varepsilon_i})$, и часть многообразия R , лежащая между $P^{-1}(l_{\beta_i})$ и $P^{-1}(l_{\beta+\varepsilon_i})$, будет гомеоморфна несвязному объединению цилиндров.

Пусть теперь $l_{\beta+\varepsilon}$ оказалась особой. Тогда если прямая l_{β_i} разбивалась на h отрезков, то прямая $l_{\beta+2*\varepsilon}$ будет разбиваться уже на $h \pm e$ отрезков, где e — количество вертикальных сторон на прямой $l_{\beta+\varepsilon}$. На каждой вертикальной стороне, по закону отражения, происходит склейка прообразов правых оснащенных отрезков с левыми, и в следствие этого, происходит e склеек многообразий R и L по прообразам вертикальных сторон (окружностям с особыми точками). Таким образом, прообразом участка многообразия, лежащего между $P^{-1}(l_{\beta_i})$ и $P^{-1}(l_{\beta+\varepsilon_i})$, будет объединение окружностей к e из которых будут приклеено L , а к остальным — цилиндры.

Суммируя вышесказанное, построим многообразие M . R представляет собой сферу с s дырками, на границах которых происходит склейка с многообразием L по окружностям. Склеиваем R и L , чтобы получить M , тогда g равно сумме: числа вертикальных сторон и удвоенному числу s без единицы, так как одна ручка делает M связным. \square

Утверждение теоремы получаем, применяя лемму 1 и лемму 2. Заметим, что углы в $\pi/2$ для вырезанных многоугольников — это углы в $3\pi/2$ для биллиардной области.

$$g = \sum_{j=0}^s e_j + 2s - 1 = \sum_{j=1}^s (s_j - 2) + 2s + k + 2 - 1 = k + \sum_{j=1}^s s_j + 1$$

Вторая часть теоремы очевидна, так как каждой вершине угла в $3\pi/2$ соответствует ровно одна выколота точка в многообразии M . \square

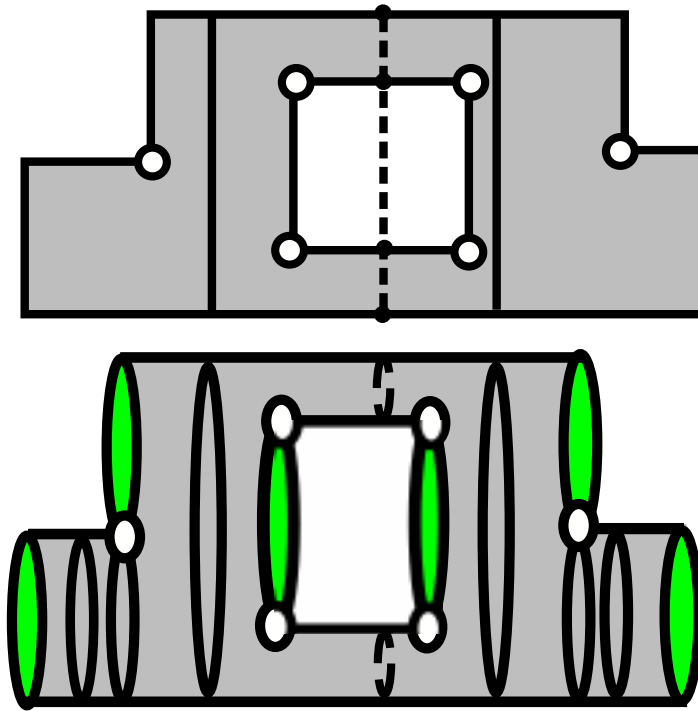


Рис. 1: Схема естественной проекции P многообразия R на область. Зеленым цветом обозначена склейка с многообразием L .

4 Биллиардная задача в областях, ограниченных дугами софокусных квадрик.

Определение 4. Фиксируем систему координат на плоскости (x, y) . Софокусные квадрики семейства определим следующим образом:

$$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (a - \lambda)(b - \lambda), \lambda \leq a.$$

Здесь $\infty > a > b > 0$ — фиксированная пара чисел (определяющая семейство софокусных квадрик), λ — параметр семейства (определяющий квадрику семейства). При $\lambda \in (0, a)$, где $\lambda \neq b$, — это эллипсы или гиперболы. При $\lambda = b$ — это объединение вырожденной гиперболы (образованной двумя горизонтальными лучами из фокусов) и вырожденного эллипса (отрезка между фокусами). Вертикальную прямую, соответствующую параметру $\lambda = a$, мы будем называть гиперболой (а не вырожденной гиперболой).

Определение 7. Элементарным биллиардом Ω сложности k назовем односвязное подмножество плоскости с кусочно-гладким краем, причем его граница состоит из сегментов софокусных квадрик семейства, ровно k углов между которыми превышают π .

В плоском двумерном случае из теоремы Якоби–Шаля [1] следует, что касательные в любой точке биллиардной траектории внутри области Ω являются касательными к эллипсу или гиперболе, софокусным с семейством квадрик, образующих границу P области Ω . Относительно стандартной симплектической структуры на плоскости функция $|v|$ — модуль вектора скорости и функция λ — параметр софокусной квадрики — коммутируют. Так как они сохраняются вдоль траекторий биллиарда, то в пределе они коммутируют и

на границе области (исключая особые точки). Таким образом, данный биллиард обладает двумя независимыми интегралами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Элементарный биллиард Ω , ограниченный дугами квадрик из софокусного семейства, называется эквивалентным другому элементарному биллиарду Ω_0 , ограниченному дугами квадрик из того же семейства, если Ω_0 получается из Ω композицией следующих преобразований:

- 1) непрерывным изменением границы в классе софокусных квадрик, таким, что квадрика, на которой лежит изменяемый сегмент, являлась невырожденной во время деформации;
- 2) симметрией относительно оси семейства.

Теорема 2. Любой элементарный биллиард сложности 1 эквивалентен одному из 14 биллиардов и принадлежит одной из следующих двух серий:

1) элементарные биллиарды серии S , содержащие отрезок фокальной прямой между фокусами. (внутри области или на ее границе). Существует ровно 7 таких типов. Все такие биллиарды изображены на рис. 2;

2) элементарные биллиарды серии L , которые не содержат отрезок фокальной прямой между фокусами. Такие биллиарды имеют вид шестиугольника, ограниченного дугами эллипсов и гипербол (внутри области или на ее границе). Все такие биллиарды изображены на рис. 2.

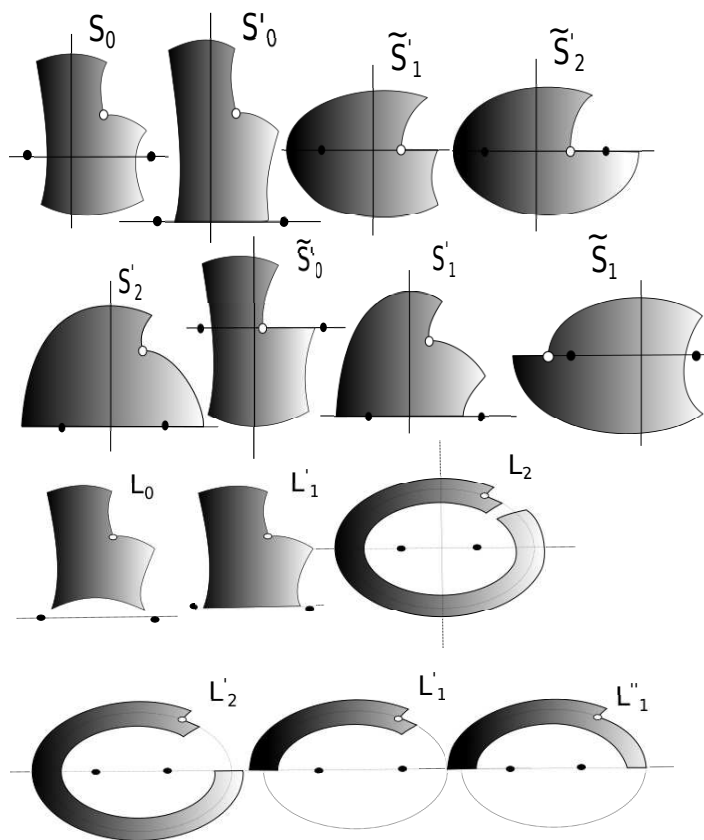


Рис. 2: Области сложности 1.

Ранее описание регулярных слоев элементарных биллиардов сложности 1 возникало в работах В. Драгович и М. Раднович [4-6], эти работы базируются на анализе динамики

интегральных траекторий. Результат, представленный в настоящей работе основан на классификации уровней бифуркации дополнительного интеграла λ и доказан независимо в [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Фиксируем элементарный биллиард Ω . Граница области Ω образована сегментами эллипсов и гипербол семейства. Рассмотрим те сегменты границы, которые лежат на невырожденных эллипсах и гиперболах и являются выпуклыми по отношению к области Ω . Если эти сегменты границы не содержат особых точек, то обозначим через \min_i и \max_j значения параметра λ , которым соответствуют выпуклые эллиптические и гиперболические сегменты границы области Ω такого типа. Если область Ω имеет непустое пересечение с прямой Oy , то дополним набор \max_j значением a . Значение параметра λ выпуклых сегментов границы, на которых лежат особые точки, обозначим через res_k .

Назовем особыми следующие значения интеграла λ :

- 1) (локально) минимальные значения интеграла $\lambda = \min_i$;
- 2) седловое значение интеграла $\lambda = b$;
- 3) (локально) максимальные значения интеграла $\lambda = \max_j$;
- 4) значения $\lambda = \text{res}_i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Траектории биллиардного движения в (элементарном) биллиарде Ω , целиком лежащие на дугах квадрик с параметрами \min_i и \max_j , траектории, лежащие на седловом уровне интеграла $\lambda = b$, и траектории, лежащие на уровнях $\lambda = \text{res}_k$, назовем особыми.

Теорема 3. Для всех неособых значений интеграла поверхность уровня интеграла λ в изоэнергетической поверхности Q^3 элементарного биллиарда Ω гомеоморфна объединению сфер с $(k+1)$ ручкой и k выколотыми точками, где k — количество особых точек внутри интегрального эллипса, если $\lambda < b$, или интегральной гиперболы, если $\lambda > b$.

Рассмотрим особый уровень интеграла $\lambda = b$. Из оптического свойства квадрик следует, что траектории, соответствующие особому уровню интеграла, лежат на прямых, проходящих через фокусы. То есть каждую точку области, кроме фокусов, можно оснастить четырьмя векторами скорости, направленными к фокусам и от фокусов. Метод, реализованный ниже, был использован в работе В.В. Фокичевой для вычисления седловых атомов выпуклых биллиардов, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол [3].

Теорема 4. Прообраз $\lambda = b$ в изоэнергетической поверхности Q^3 для элементарного биллиарда Ω гомеоморфен следующим многообразиям:

- 1) атому $B + B$ для области S_0, L_2, L'_2 (рис. 3);
- 2) атому $B + T^2 \times I$ для области \tilde{S}'_0 (рис. 3);
- 3) произведению сферы с двумя ручками без точки на отрезок для $L_0, L'_0, L'_1, S'_0, L''_1, S'_2, S'_1$;
- 4) атому $A^* + T^2 \times I$ для областей $\tilde{S}'_1, \tilde{S}'_2, \tilde{S}_1$ (рис. 4).

Доказательство. 1. Рассмотрим область S_0 . Интервал (f_1, f_2) фокальной прямой расположен между фокусами f_1 и f_2 . Пусть $s = [s_1, s_2] \in (f_1, f_2)$ — отрезок, такой, что гипербола, принадлежащая софокусному семейству и проходящая через точку $x_0 \in s$, имеет непустое пересечение с областью Ω . Оснастим каждую точку $x_0 \in s$ двумя единичными векторами скорости w , направленными горизонтально к правому и левому фокусам. Рассмотрим дугу h'_λ гиперболы h_λ семейства, проходящую через эту точку. Зафиксируем вектор скорости в точке $x_0 \in s$ и оснастим дугу гиперболы сонаправлено этому вектору. А именно если этот вектор был направлен вправо, то оснастим точки гиперболы векторами v_1 и v_2 , направленными соответственно к правому фокусу и от левого фокуса

(такие гиперболы назовем правыми). Если же вектор был направлен влево, то оснастим гиперболу векторами v_3 и v_4 , направленными от правого фокуса и к левому фокусу соответственно (такие гиперболы назовем левыми). На граничных дугах эллипсов области Ω по закону отражения имеем $(x, v_1) \sim (x, v_2)$ (соответственно $(x, v_3) \sim (x, v_4)$). Если же точка $x_0 \in s$ лежит на гиперболическом сегменте границы области, то по закону отражения она может быть оснащена одним вектором скорости (или двумя эквивалентными друг другу векторами). В этом случае векторы, которые направлены вправо и влево и которыми оснащается гипербола h_λ , проходящая через такую точку x_0 (в этом случае дуга гиперболы h_λ совпадает с сегментом границы области), склеиваются друг с другом по закону отражения: $(x, v_1) \sim (x, v_4)$ и $(x, v_2) \sim (x, v_3)$. Таким образом, правые дуги гиперболы склеиваются с левыми дугами.

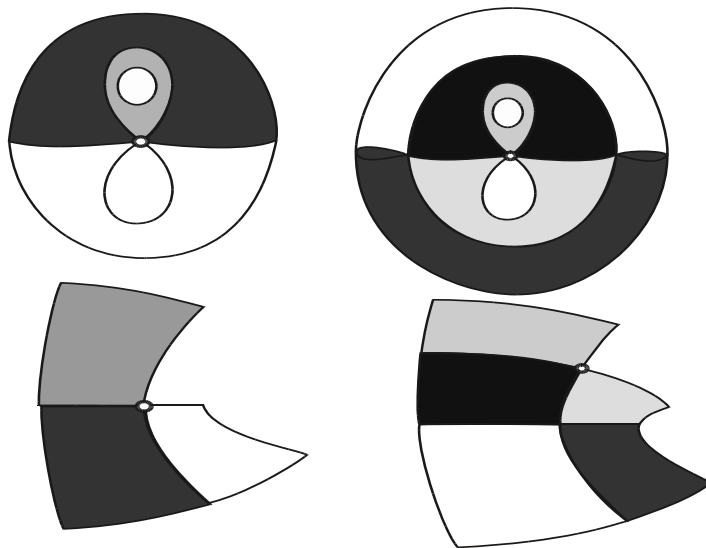
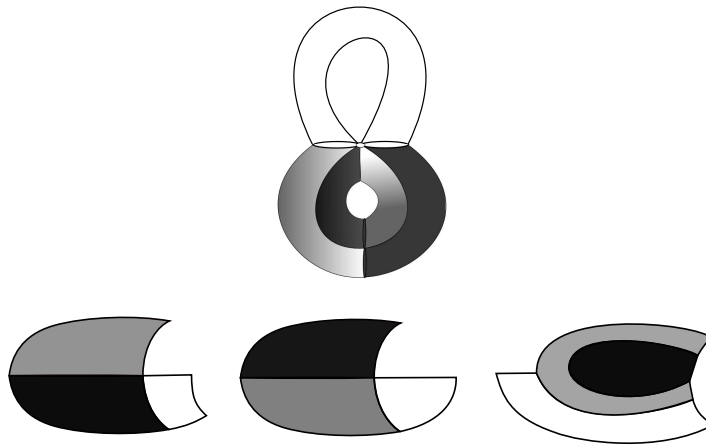
Рассмотрим гиперболический сегмент границы, на котором лежит особая точка. Назовем гиперболу h_λ , проходящую через этот сегмент, правой особой или левой особой гиперболой в зависимости от ее оснащения векторами скорости. Обозначим параметр особой гиперболы через λ_0 , остальные гиперболы назовем неособыми. На верхней (выше эллипса с параметром $\lambda = \text{ges}_1$) части дуги особой гиперболы (прообраз особой гиперболы выделен на рис. 4 черным цветом) происходит склейка по закону отражения. На нижней части в каждой точке (кроме эллиптического сегмента границы и точек фокальной прямой) определены два вектора скорости. Прообраз всех дуг гипербол, кроме особой, при естественной проекции слоя интеграла на область – это восьмерка. Прообраз дуг особой гиперболы – три окружности (так как в особой точке векторы скорости не определены). Верхняя часть дуги правой особой гиперболы склеивается с верхней частью дуги левой особой гиперболы, а нижняя часть правой дуги особой гиперболы – с неособыми гиперболой семейства, соответствующими большему параметру $\lambda > \lambda_0$. Нижняя часть левой дуги особой гиперболы склеивается с неособыми дугами гипербол большего параметра. Правые и левые дуги неособых гипербол параметра $\lambda > \lambda_0$ склеиваются на гиперболическом сегменте границы. Для областей L_2 и L'_2 заменим гиперболы на эллипсы, оснащенные векторами скорости, направленными от фокусов и к фокусам. Дальнейшие рассуждения аналогичны.

2. Для области S'_0 доказательство аналогично.

3. Рассмотрим области L_0, L'_1, L''_0, L''_1 . Также рассмотрим расслоение области на дуги софокусных гипербол. Прообраз всех гипербол, кроме граничной, – окружность (так как в каждой точке определены два вектора скорости). Прообраз особой гиперболы – восьмерка. Гиперболы меньшего параметра приклеиваются к восьмерке с одной стороны, большего – с другой. Получается сфера с двумя ручками и выколотой точкой.

4. Рассмотрим S'_1 и S'_2 . Дуги h'_λ софокусных гипербол h_λ , принадлежащие семейству и попавшие в область, не пересекаются, а их объединение при $\lambda < b$ заполняет область Ω без горизонтального отрезка $[f_2, e]$. В [3] показано, что прообраз дуг оснащенных гипербол h_λ для $\lambda < \lambda_0$ (также и для $\lambda > \lambda_0$ в случае области S'_2) гомеоморфен прямому произведению окружности на отрезок. Склеивая цилиндры, соответствующие параметру $\lambda > \lambda_0$ и $\lambda < \lambda_0$, по прообразу особой гиперболы, получим сферу с двумя ручками.

5. Рассмотрим области \tilde{S}'_1 и \tilde{S}'_2 . В [3] показано, что прообраз объединения дуг оснащенных гипербол h'_λ для $\lambda < \lambda_0$ гомеоморфен прямому произведению восьмерки на отрезок (см. рис. 3). Прообразом объединения дуг оснащенных гипербол параметра $\lambda > \lambda_0$ будет цилиндр. При склейке по особой окружности получим $A^* + T^2 \times I$. В случае \tilde{S}'_1 проводятся аналогичные рассуждения для оснащенных эллипсов. \square

Рис. 3: Атом $B + B$ и атом $B + T^2 \times I$.Рис. 4: Атом $A^* + T^2 \times I$.

5 Вычисление молекулы Фоменко для билиардов сложности 1.

Рассмотрим слой второго интеграла $\lambda = \text{res}$. Поверхности уровня второго интеграла $\lambda = \text{res} - \epsilon$ и $\lambda = \text{res} + \epsilon$ имеют разный род, так как из области возможного движения либо пропадает особая точка и тогда род многообразия уменьшается, либо род многообразия увеличивается, когда особая точка появляется в области возможного движения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Обозначим через Γ_1^2 прообраз значения интеграла $\lambda = \text{res} \neq b$, если при увеличении параметра интегральной квадрики количество особых точек в интегральной области увеличится, и через Γ_2^1 в обратном случае.

Теорема 5. Двумерные комплексы Γ_i^j , где $i \neq j$ и $i, j = 1, 2$, гомеоморфны несвязному объединению торов, к одному из которых приклеена окружность по особой точке.

Доказательство. При $\lambda = \text{res}$ интегральная область есть одна или несколько выпуклых областей, ограниченных дугами софокусных квадрик и одной области, содержащей

сегмент границы, соответствующий интегральной квадратике $\lambda = res$. Если в области нет сегмента границы, то это — выпуклая область, ограниченная квадратиками семейства, и ее прообразом при естественной проекции $\pi : Q^3 \rightarrow \Omega$ будет тор. Если же сегмент границ присутствует, то прообразом при естественной проекции будет тор с приклеенной окружностью. Так как в каждой точке граничного сегмента определены два вектора скорости, а в особой точке векторы скорости не определены, то прообраз сегмента границы, соответствующего интегральной квадратике $\lambda = res$, — окружность. \square

Построим аналог грубой молекулы Фоменко для билиардов, ограниченных дугами софокусных квадратик для билиардов сложности 1. Заметим, что в данном случае молекула является лишь удобным способом описания топологии многообразия Q^3 , так как теорема Фоменко[2] для неполных потоков пока не доказана. Все неособые слои билиардов описываются теоремой 3, особые описываются теоремами 4, 5. Перечеркнутым линиям на молекулах рис.5 соответствуют слои, гомеоморфные сферам с ручкой, причем количество черточек указывает на количество ручек многообразия; указанные атомы описаны в теореме 4.

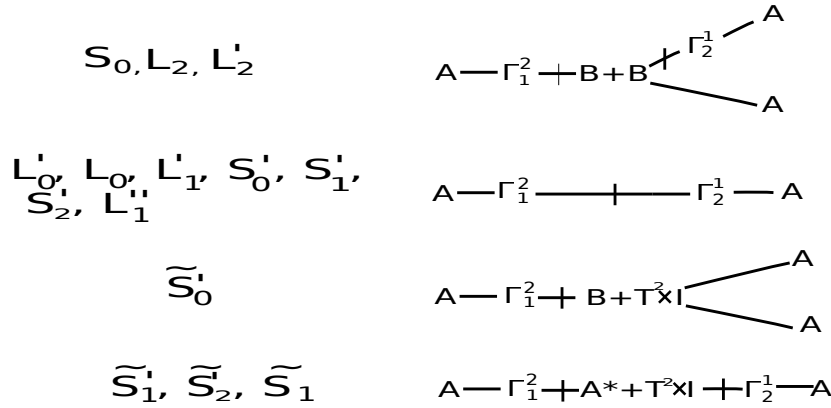


Рис. 5: Молекулы Фоменко для областей сложности 1.

6 Простые атомы перестройки рода.

Особый интерес при исследовании билиардов, ограниченных дугами квадратик с невыпуклыми углами на границе, представляют атомы, которые осуществляют перестройку сфер с ручками в сферы с ручками на уровне интеграла $\lambda \neq b$ — особые слои уровня интеграла λ , для которых близкие слои имеют разный род. Для случая $k = 1$ они имели структуру торов с приклеенными окружностями, которые "раздувались" в ручки при увеличении интеграла λ . Исследуем атомы перестройки для билиардов большей сложности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Назовем атомом перестройки рода двумерный комплекс, являющийся прообразом значения $\lambda = res_i$ при естественной проекции $P : Q^3 \rightarrow \Omega$.

Будем рассматривать особый слой интеграла $\lambda = res_i$. Предположим, что в области возможного движения при увеличении интеграла λ появится r новых вершин углов в $3\pi/2$, то есть в прообразе $\lambda = res_i + \varepsilon$ появилось r новых ручек и r выколотых точек. ($r \neq 1$)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Назовем атомом перестройки рода простым, если квадратика с параметром $\lambda = res_i$ является невырожденной.

Теорема 6. Любому такому коду соответствует клеточный комплекс описывающий перестройки слоев(сфер с ручками) интегрируемых бильярдов в областях, ограниченных софокусными квадратами.

КОД:

1. Рассматриваем квадратик с параметром res_i . Пронумеруем все особые точки на квадратике, поставим черные точки в вершинах углов в $\pi/2$.

2. На сегментах квадрата между особыми точками и вершинами углов в $\pi/2$ ставим $+$ или $-$ по следующему правилу: между двумя черными точками не ставится ничего, если ε -шар в точке квадрата, находящейся между особыми точками и вершинами углов в $\pi/2$, целиком лежит в области, то пишем $+$, иначе $-$ пишем $-$.

3. Будем двигаться по квадратике и последовательно выписывать в строчку номера особых точек, $+$, $-$ и \cdot (на месте вершин углов в $\pi/2$). Получившаяся строчка — код многообразия.

ПРОЦЕСС ПОСТРОЕНИЯ МНОГООБРАЗИЯ ПО КОДУ:

Клеточный комплекс представляет собой n сфер с ручками, где n — количество плюсов в коде, склеенных между собой отрезками прямых, вершинами которых являются особые точки, более подробно:

1. Каждый $+$ соответствует многообразию рода $k'_i + 1$, где k'_i — количество особых точек в той связной части проекции слоя $\lambda = res_i - \varepsilon$ на область, граница которой находится в ε близости от соответствующего плюсу сегмента. Особые точки области соответствуют особым точкам на многообразиях рода $k'_i + 1$: они лежат на многообразии, которое находится между ними в коде.

2. Если $-$ стоит между двумя особыми точками (в том числе, если он стоит между первой и последней), то он соответствует двум отрезкам, границы которых — эти особые точки. Если $-$ стоит между особой точкой и вершиной угла в $\pi/2$, то он соответствует окружности, приклеенной к этой особой точке.

Доказательство. При $\lambda = res_i$ интегральная область есть одна или несколько областей, ограниченных дугами софокусных квадратов, некоторые из которых содержат сегмент границы, соответствующий интегральной квадратике $\lambda = res_i$. Подробнее рассмотрим этап построения многообразия по коду:

1. Соответствия $+$ и многообразий рода $k'_i + 1$ очевидно из определения чисел k'_i . (так как движение в областях такое же, как и на слое $\lambda = res_i - \varepsilon$)

2. Минусам в коде соответствуют движения по сегментам квадрата $\lambda = res_i$. Если сегмент границы, по которому происходит движение, лежит между двумя особыми точками, то в совместной поверхности уровня интеграла ему соответствуют два отрезка: траектория из первой особой точки во вторую и из второй в первую. Если $-$ стоит между особой точкой и вершиной угла в $\pi/2$, то ему соответствует окружность: траектория выходит из особой точки, отражается от вершины угла и возвращается в ту же особую точку.

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Назовем полученный код кодом перестройки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Обозначим атомы перестройки рода через nD_i^j , если в коде перестройки нет \cdot , здесь i — род совместной поверхности уровня интеграла $\lambda = res_i - \varepsilon$, j — род совместной поверхности уровня интеграла $\lambda = res_i + \varepsilon$, а n — количество $+$ в коде перестройки.

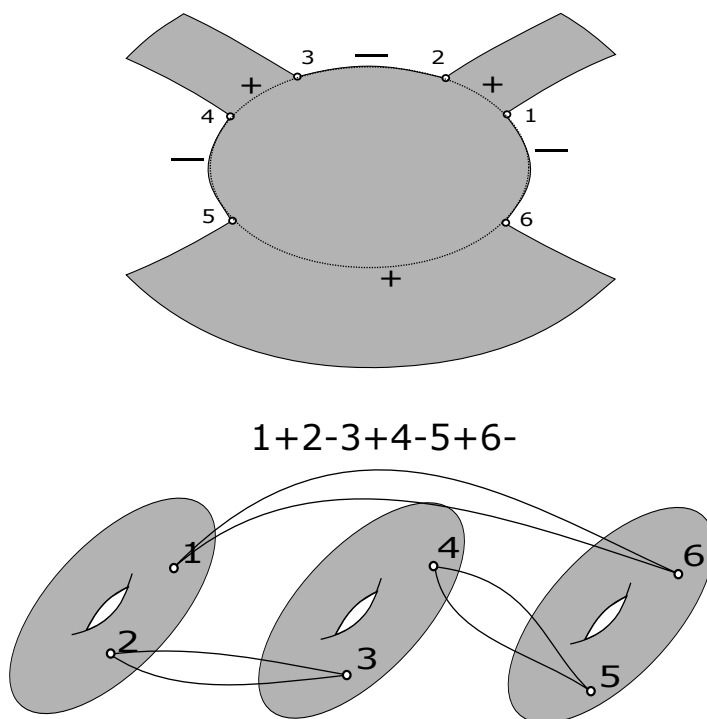


Рис. 6: Пример построения атома перестройки рода по коду. Атом $3D_1^3$.

7 Исследование топологии бильярда в "неполном кольце".

Рассмотрим область G , изображённую на рис. 8. Исследуем бильярд в такой области и построим молекулу Фоменко для него. Для данного бильярда $k = 2$. Напомним, что в бильярде в "кольце" (области, ограниченный двумя эллипсами) возникает атом C_2 [3]. Для удобства будем считать, что особые точки лежат на одной гиперболе.

Теорема 7. Топология многообразия Q^3 бильярда в области G описывается следующей грубой молекулой Фоменко. (см. рис 10)

Доказательство. 1. Сначала исследуем неособые слои интеграла λ . Для описания гиперболических уровней интеграла ($\lambda < b$) достаточно воспользоваться теоремой 2. Для эллиптических слоев интеграла теорема будет неприменима, так как движение происходит в неодносвязной области. Доказательство для этого случая проводится аналогично теореме 1 (вместо заполнения области прямыми нужно заполнить область гиперболами семейства).

2. Для описания атомов перестройки рода воспользуемся алгоритмом, представленным в теореме [6].

3. Теперь опишем перестройку на уровне $\lambda = b$. Рассмотрим расслоение области на дуги софокусных эллипсов. Оснастим эллипсы векторами скорости, направленными от фокусов, аналогично теореме 3. Обозначим их через e_λ^α , где параметр α — это параметр квадрики. Будем искать прообразы дуг оснащенных эллипсов e_λ^α в зависимости от параметра α . Обозначим параметр особого эллипса оснащения через res (см. рис 8).

1. $\alpha < res$. Для таких оснащенных эллипсов прообраз будет совпадать с особым слоем атома C_2 , так как векторы скорости, направленные к правому фокусу и от левого фокуса, будут склеиваться на фокальной прямой.

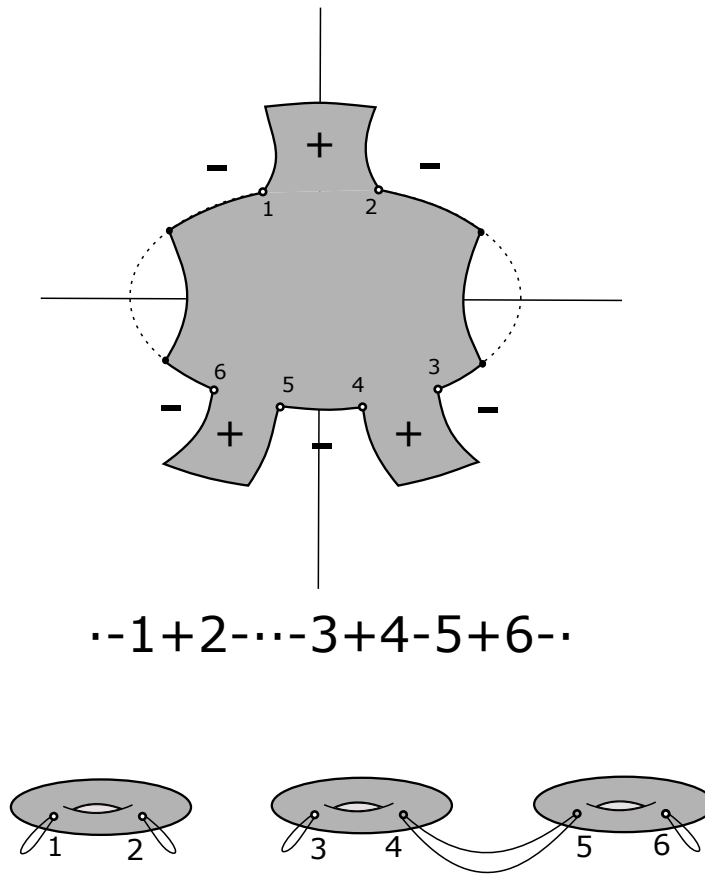


Рис. 7: Пример построения атома перестройки рода по коду.

2. $\alpha = res$. Прообраз особого эллипса изображен на рис. 8. Векторы скорости склеятся четыре раза: дважды в особых точках и дважды на фокальной прямой.

3. $\alpha > res$. В этом случае прообраз оснащенного эллипса будет восьмеркой, так как векторы скорости склеиваются только один раз на фокальной прямой.

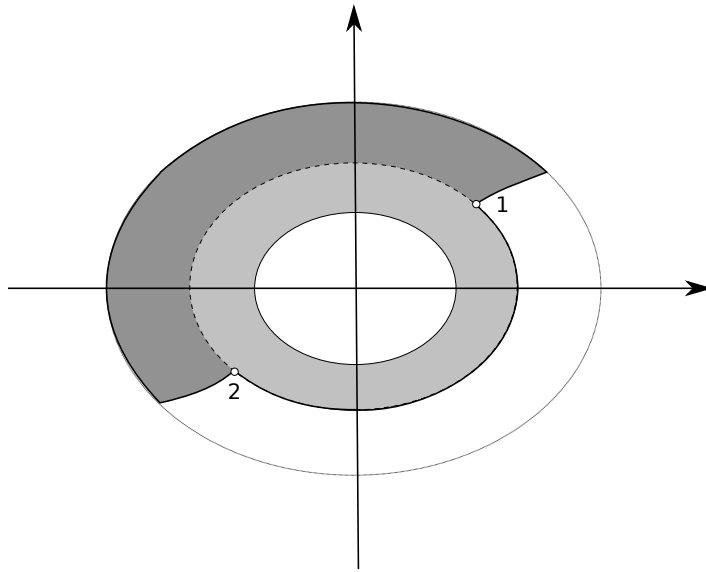
Склеим атом $C_2 + B$ из прообразов $\pi^{-1}(e_\lambda^{\alpha})$:

А. Возьмем атом C_2 , соответствующий прообразам оснащенных эллипсов с параметрами $\alpha < res$. Разрежем его по особому слою, соответствующему полному прообразу e_λ^{res} (с векторами от фокусов и к фокусам). Заменим обычный особый слой атома C_2 на два склеенных между собой экземпляра $\pi^{-1}(e_\lambda^{res})$ (с векторами от и к фокусам), изображенный в центре на рис. 9.

Б. Заклеим пунктирную восьмерку $\pi^{-1}(e_\lambda^{res})$ атомом B , разрезанным по особому слою (соответствующему прообразу оснащенных эллипсов с параметрами $\alpha > res$).

□

Замечание 1. Можно заметить, что если часть атома B в атоме $C_2 + B$ соответствует перестройке в дополнении к кольцу. А перестройке в кольце отвечает часть атома C_2 .

Рис. 8: Область G .

8 Список литературы.

1. Табачников С. Л. Геометрия и бильярды. М.: Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2011.

2. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т. 1. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 1999.

3. Фокичева В. В. Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик // матем. сб. 2015. **206**, №10. 127–176.

4. Dragovic V., Radnovic M. Pseudo-integrable billiards and arithmetic dynamics // Journal of Modern Dynamics, 2014. **8**, №1, 109-132.

5. Dragovic V., Radnovic M. Pseudo-integrable billiards and double-reflection nets // Russian Math. Surveys, 2015. **70**, №1, 1-31.

6. Dragovic V., Radnovic M. Periods of pseudo-integrable billiards // Arnold Mathematical Journal, 2015. **1**, №1, 69-73.

7. Москвин В. Топология слоений Лиувилля интегрируемого бильярда в невыпуклых областях, Статья, Вестник МГУ, 2018.

Москвин Виктор Александрович, студент Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, г. Москва.

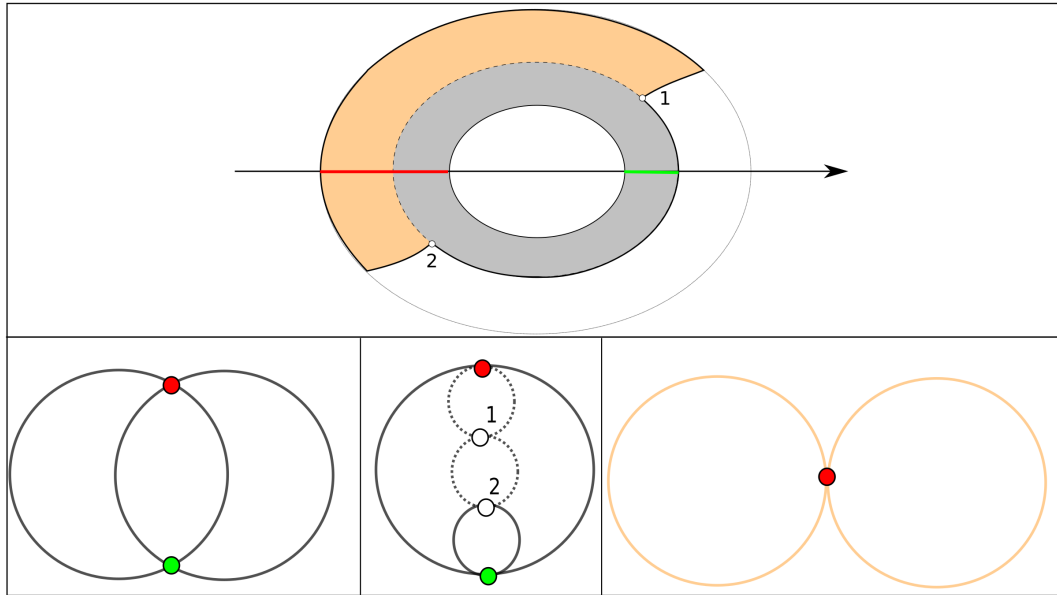


Рис. 9: Преобразы оснащенных эллипсов. Справа налево: преобраз оснащенного эллипса при $\alpha < res$, преобраз особого эллипса, преобраз при $\alpha > res$.

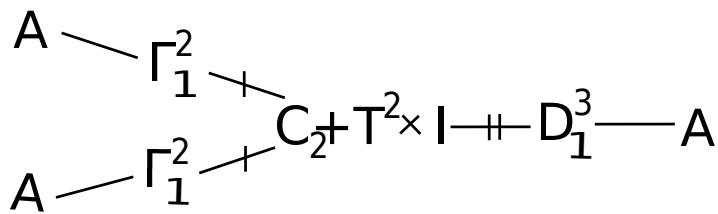


Рис. 10: Молекула Фоменко для билиарды в G .