

Биллиардные книжки моделируют грубые молекулы, состоящие из атомов без звездочек.

1 Основные понятия

Определение 1. Семейством софокусных квадрик называется множество кривых на плоскости \mathbb{R}^2 с евклидовыми координатами (x, y) , описываемых уравнением

$$x^2 \cdot (b - \lambda) + y^2 \cdot (a - \lambda) = (a - \lambda)(a - \lambda), \quad (1.1)$$

где $a > b > 0$ называются параметрами этого семейства, а число $\lambda \in [-\infty, a]$ – параметром кривой из этого семейства или параметром квадрики.

Параметры семейства a, b будут фиксированы на протяжении всей работы, поэтому в дальнейшем мы будем говорить просто о семействе, не уточняя его параметров.

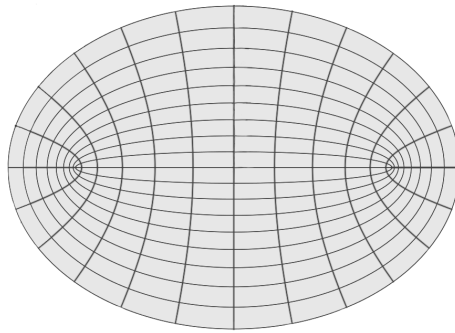


Рис. 1: Эллиптические координаты.

Замечание 1. Кривая из семейства софокусных квадрик является эллипсом при $\lambda \in [-\infty, b)$, гиперболой при $\lambda \in (b, a)$, прямой при $\lambda = a$ и прямой при $\lambda = b$. Эллипсы и гиперболы из этого семейства имеют одни и те же фокусы и пересекаются под прямым углом. Прямая в случае $\lambda = b$ проходит через фокусы, а в случае $\lambda = a$ проходит через середину отрезка, соединяющего фокусы и ортогональна ему.

Кроме того заметим, что с семейством софокусных квадрик естественно связаны *эллиптические координаты* (λ_1, λ_2) , где $\lambda_1 \in (-\infty, b)$, $\lambda_2 \in (b, a)$ (см. рис. 1).

Определение 2. *Бильярдной книжкой* $\Delta B(W, \Sigma, \rho)$ называется динамическая система, описывающая движение материальной точки в двумерном клеточном комплексе $W = X^2 \cup X^1 \cup X^0$, таком что:

1. $\rho : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ является изометрической проекцией, т.ч. $\forall e^2 \in X^2$ $\rho(e^2)$ является ограниченной областью из \mathbb{R}^2 , границей которой являются дуги софокусных квадрик одного семейства с различными параметрами, пересекающихся под углом $\frac{\pi}{2}$, направленным внутрь области;
2. к клеткам размерности 1 (*корешкам книжки*) $e^1 \in X^1$ приписаны циклические перестановки $\Sigma(e^1)$, действующие на клетках размерности 2 (*листах*) и описывающие переход материальной точки с одного листа на другой;
3. $\Sigma(e^1)$ переставляет только те листы, границами которых является корешок e^1 ;
4. Перестановкой $\sigma(\lambda)$, соответствующей параметру λ назовем композицию всех перестановок $\Sigma(e^1)$, т.ч. $\rho(e^1)$ принадлежит квадрике с параметром λ . Тогда для любых двух параметров λ_1, λ_2 должно выполняться условие: $\sigma_{\lambda_1} \circ \sigma_{\lambda_2} = \sigma_{\lambda_2} \circ \sigma_{\lambda_1}$.

Материальная точка движется по прямой внутри листов и, отражаясь о границы листов по закону: «угол падения равен углу отражения», переходит по перестановкам на другие листы. Траектории, которые касаются невыпуклых дуг, к которым приписаны нетождественные перестановки, неопределены.

Замечание 2. Далее нам будет удобно ввести нумерацию на листах $N : X^2 \leftarrow \mathbb{N}$ и рассматривать перестановки уже не на листах, а на их номерах. Поэтому обозначение бильярдной книжки расширим до $\Delta B(W, \Sigma, \rho, N)$.

Замечание 3. Отметим, что в определении бильярдной книжки в пункте 1 говорится, что разрешается брать только листы, у которых дуги имеют различные параметры. Из этого следует, что мы можем взять, например, лист, изображенный на рисунке 2, но не можем взять лист, изображенный на рисунке 3, так как у него есть две эллиптические дуги, отвечающие одной и той же квадрике – верхняя и нижняя. Однако, это ограничение не уменьшает класс бильярдов, которые мы будем рассматривать, потому что вместо листа из рис. 3, мы можем взять два листа и склеить их (см. рис. 4). Это сделано для того, чтобы корректно ввести термин перестановки, отвечающей фиксированному параметру квадрики в пункте 4, и, чтобы по таким перестановкам, можно было однозначно восстановить перестановки на корешках.

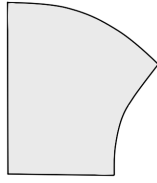


Рис. 2:

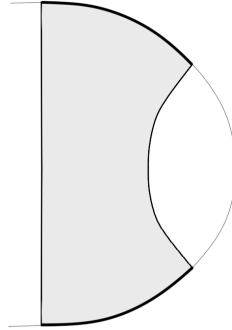


Рис. 3:

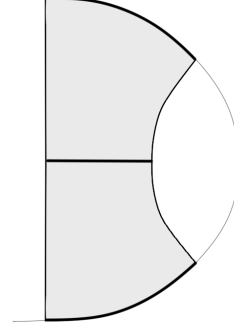


Рис. 4:

Действительно, в силу пунктов 2 и 3 определения бильярдной книжки перестановки из композиции являются циклическими и независимыми. То есть, если в одной из перестановок σ' лист i переходил в лист $j \neq i$, то для всех других перестановок σ'' из композиции верно, что $\sigma''(i) = i, \sigma''(j) = j$. Таким образом, для каждого корешка e^1 с некоторым параметром λ , можно однозначно восстановить перестановку $\Sigma(e^1)$ по перестановке $\sigma(\lambda)$, разложив ее в произведение независимых циклов и выбрав цикл, переставляющий те номера листов, которые граничат с e^1 , а на остальных номерах задать переход номеров в себя. Таким образом, соответствие, описанное выше, на самом деле, взаимно-однозначное.

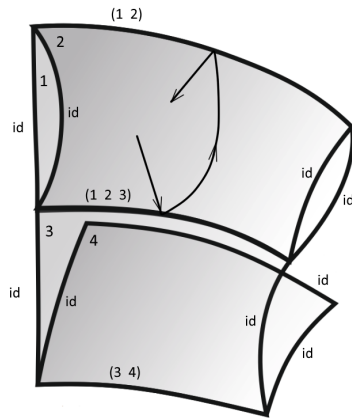


Рис. 5: Пример бильярдной книжки.

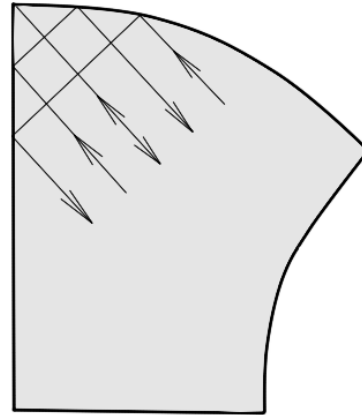


Рис. 6:

Замечание 4. Ограничение 4 на перестановки в определении 2 бильярдной книжки являются естественными. В самом деле, пусть для некоторых параметров λ_1, λ_2 перестановки $\sigma(\lambda_1), \sigma(\lambda_2)$, не коммутируют. То есть существует такой лист i , что $\sigma(\lambda_1) \circ \sigma(\lambda_2)(i) \neq \sigma(\lambda_2) \circ \sigma(\lambda_1)(i)$. Тогда в любой окрестности траектории, идущей по листу i в направлении угла, образованного этими дугами, есть два вида траекторий (см. рис. 6). Это траектории, которые сначала ударяются о первую дугу переходят по перестановке на лист $\sigma(\lambda_1)$, потом ударяются о вторую и переходят на лист $\sigma(\lambda_2) \circ \sigma(\lambda_1)(i)$, продолжая на нем путь. И траектории, которые ударяются сперва о вторую дугу переходят по перестановке на лист $\sigma(\lambda_2)(i)$, а потом ударяются о первую и переходят на лист $\sigma(\lambda_1) \circ \sigma(\lambda_2)(i)$, продолжая на нем путь. Таким образом, в любой окрестности вершины угла есть неблизкие друг к другу траектории, которые продолжают свое движение на разных листах и однозначно определить траекторию, попавшую в вершину угла на i -ом листе мы не можем.

Также стоит отдельно оговорить случаи с углами π и 2π . Аналогично рассуждениям выше, можем получить, что ограничение на перестановки в пункте 4, гарантируют то, что траектории, изображенные на рисунках 7, 8, также будут близкими.

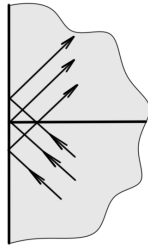


Рис. 7:

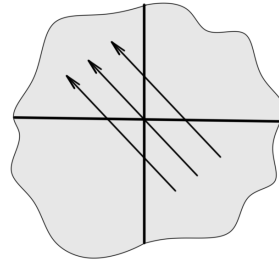


Рис. 8:

Оказывается, в таком бильярде вектор скорости материальной точки на протяжении всей траектории будет направлен по касательной к фиксированной квадрике, софокусной с семейством (см. рис. 9, 10 и работы [1, 2]), [3, гл. 4].

Поэтому эта система имеет два независимых первых интеграла: квадрат модуля вектора скорости и параметр квадрики Λ , которой траектория (или ее продолжение) касается. Это влечет за собой интегрируемость по Лиувиллю описанной выше динамической системы. В частном случае, когда $n = 2$, такие бильярды называются топологическими. Топологические бильярды были полностью классифицированы в работе В.В. Фокичевой [5]. Классификации в общем случае на нынешний момент нет. В классификациях В.В. Фокичевой [5, 6] было обнаружено, что многие известные и важные интегрируемые системы с двумя степенями свободы моделируются

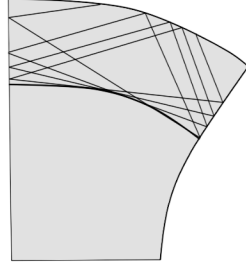


Рис. 9: Траектория всегда касается фиксированного эллипса.

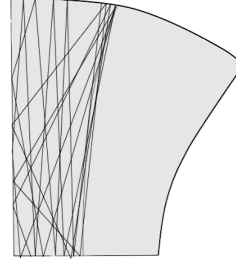


Рис. 10: Траектория всегда касается фиксированной гиперболы.

топологическими бильярдами, то есть их инварианты Фоменко-Цишанга (см. [4]) совпадают. В связи с этим А.Т. Фоменко предложил следующую гипотезу:

- Гипотеза 1 (Фоменко).**
- Гипотеза А (Атомы). Любые бифуркации двумерных торов Лиувилля в изоэнергетическом многообразии любой интегрируемой невырожденной системы с двумя степенями свободы моделируются при помощи интегрируемых бильярдных книжек. Иными словами, любые ориентируемые 3-атомы реализуются подходящими бильярдными книжками.
 - Гипотеза В (Грубые молекулы). Любые грубые молекулы (инварианты Фоменко) моделируются интегрируемыми бильярдными книжками.
 - Гипотеза С (Меченые молекулы). Любые меченые молекулы (инварианты Фоменко-Цишанга) моделируются интегрируемыми бильярдными книжками. Иными словами, все слоения Лиувилля невырожденных (то есть боттовских) интегрируемых систем на изоэнергетических 3-поверхностях лиувиллево эквивалентны соответствующим слоениям некоторой бильярдной книжки.
 - Гипотеза D. Любая трехмерная замкнутая изоэнергетическая поверхность любой интегрируемой невырожденной системы с двумя степенями свободы реализуется при помощи бильярдных книжек. Эту гипотезу можно считать частным случаем гипотезы С. Если гипотеза С верна, то будет справедлива и гипотеза D.

Для удобства последующего изложения введем следующие определения.

Определение 3. Пусть дана бильярдная книжка $\Delta B(W, \Sigma, \rho, N)$. Корешок книжки e^1 (клетка размерности 1) называется *выпуклым относительно листа* e^2 (клетки размерности 2), если $e^1 \subset \partial e^2$ и для каждой точки

$x \in e^1$ существует такая окрестность $U(x)$, что $U(x) \cap e^2$ является выпуклым множеством (см. рис. 11). Аналогично определяется строго невыпуклый корешок книжки относительно листа. Для краткости слово «строго» будем опускать.

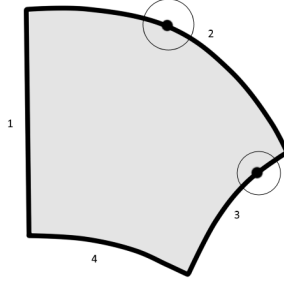


Рис. 11: 1, 2 – выпуклые дуги, 3, 4 - невыпуклые дуги.

2 Описание фазового пространства бильярдной книжки. Интегралы

Опишем точнее движение материальной точки по комплексу и фазовое пространство M^4 бильярдной книжки.

Пусть дана бильярдная книжка $\Delta B(W, \Sigma, \rho, N)$, где клеточный комплекс W имеет вид $W = X^0 \cup X^1 \cup X^2$. Обозначим

$$\overline{X^2} := \bigsqcup_{e^2 \in X^2} \overline{e^2}. \quad (2.1)$$

Это замыкание несколько отличается от обычного замыкания тем, что границу каждой двумерной клетки мы считаем отдельно, то есть, если две двумерной клетки раньше имели в границе общую одномерную клетку, то теперь в этом замыкании будут присутствовать две таких одномерных клетки.

Определим

$$M^4(\Delta B) := \overline{X^2} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) / \sim, \quad (2.2)$$

где отношение эквивалентности описывает отражение о границу материальной точки и переход с листа на лист. Опишем подробнее это отношение эквивалентности. Для этого нам понадобится определение канонической проекции.

Определение 4. *Канонической проекцией* назовем отображение $\pi : \overline{X^2} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \rightarrow W$, которое является композицией проекции $\overline{X^2} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ на $\overline{X^2}$ и отображением $\overline{X^2}$ на W , которое двумерные клетки отображает в себя же, а их границу в соответствующие клетки меньшей размерности.

В этом случае можно говорить о номере листа, на котором находится точка из $\overline{X^2} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, даже если эта точка принадлежит границе. Поэтому можно определить отображение:

$$\tilde{N} : \overline{X^2} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}. \quad (2.3)$$

Кроме того заметим, что умножение на R^2 в (2.2) в точности означает, что мы в каждой точке комплекса рассматриваем еще вектор скорости. А именно, точка на $\overline{X^2} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ - это пара, отвечающая положению материальной точки и ее вектору скорости. Эта пара полностью описывает состояние динамической системы в фиксированный момент времени.

Отношение эквивалентности в (2.2) задается по разному в разных точках. А именно, есть четыре случая.

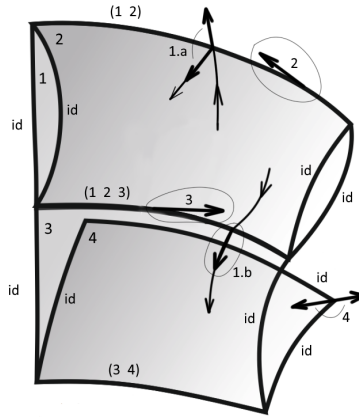


Рис. 12: На рисунке приведены примеры точек на $\overline{X^2} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, которые будут отождествлены. Примерам приписаны номера пунктов отношения эквивалентности.

1. $(x_1, v_1), (x_2, v_2) \in W \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ такие, что $\pi((x_1, v_1)) = \pi((x_2, v_2))$ и $\pi((x_1, v_1)) \in X^1$, то есть каноническая проекция этих точек совпадает и принадлежит корешку книжки (см. рис. 12).

Пусть $e^1 \in X^1$ - та одномерная клетка, на которой находится $\pi((x_1, v_1))$.

Пусть вектор v_1 направлен наружу листа, который соответствует x_1 , а вектор v_2 - внутрь листа, который соответствует x_2 . Иными словами, вектор описывает движение материальной точки из листа с номером $\tilde{N}((x_1, v_1))$ в лист с номером $\tilde{N}((x_2, v_2))$.

Пусть перестановка тоже описывает движение из листа с номером $\tilde{N}((x_1, v_1))$ в лист с номером $\tilde{N}((x_2, v_2))$, то есть $\Sigma(e^1)(\tilde{N}((x_1, v_1))) = \tilde{N}((x_2, v_2))$.

Тут есть два подслучая.

- (а) Корешок e^1 относительно обоих листов, которым принадлежат x_1 и x_2 – одновременно либо выпуклый, либо невыпуклый. Тогда потребуем, чтобы это отношение эквивалентности описывало абсолютно-упругое отражение. В терминах точек $(x_1, v_1), (x_2, v_2)$ из $W \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ это описывается так: $|v_1| = |v_2|$ и $v_1 - v_2 \perp T_{x_1} e^1$.
- (б) Корешок e^1 относительно одного листа (например, относительно листа, соответствующего x_1) – выпуклый, относительно другого листа (соответствующего x_2) – невыпуклый. Тогда хотим, чтобы материальная точка при движении с листа с номером $\tilde{N}((x_1, v_1))$ на лист с номером $\tilde{N}((x_2, v_2))$ продолжала свое движение по прямой. В терминах точек $(x_1, v_1), (x_2, v_2)$ из $W \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ это означает просто равенство векторов $v_1 = v_2$.

Если выполнены вышеперечисленные свойства, то точки (x_1, v_1) и (x_2, v_2) эквивалентны.

2. Пусть, как и в предыдущем случае,

$$(x_1, v_1), (x_2, v_2) \in W \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}), \quad \pi((x_1, v_1)) = \pi((x_2, v_2)), \quad \pi((x_1, v_1)) \in X^1 \\ e^1 \in X^1, \quad \pi((x_1, v_1)) \in e^1.$$

Но теперь векторы v_1 и v_2 равны и являются касательными к e^1 , а для перестановки $\Sigma(e^1)$ выполнено, что после разложения ее в независимые циклы, номера $\tilde{N}((x_1, v_1))$ и $\tilde{N}((x_2, v_2))$ принадлежат одному циклу.

Пусть также корешок e^1 выпуклый либо относительно листа с номером $\tilde{N}((x_1, v_1))$, либо относительно листа с номером $\tilde{N}((x_2, v_2))$.

Если выполнены все вышеперечисленные свойства, то точки (x_1, v_1) и (x_2, v_2) эквивалентны.

3. Здесь опишем случай, который называется случаем невыпуклой склейки. Пусть, как и в предыдущем случае,

$$(x_1, v_1), (x_2, v_2) \in W \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}), \quad \pi((x_1, v_1)) = \pi((x_2, v_2)), \quad \pi((x_1, v_1)) \in X^1 \\ e^1 \in X^1, \quad \pi((x_1, v_1)) \in e^1, \quad v_1 = v_2, \quad v_1 \parallel T_{x_1} e^1.$$

Пусть теперь корешок e^1 невыпуклый относительно обоих листов с номерами $\tilde{N}((x_1, v_1))$ и $\tilde{N}((x_2, v_2))$.

Если $\tilde{N}((x_1, v_1)) \neq \tilde{N}((x_2, v_2))$ и $\Sigma(e^1)(\tilde{N}((x_1, v_1))) = \tilde{N}((x_2, v_2))$, то этот случай особенный. В этом случае мы движение никак не определяем.

Квадрику, которая соответствует e^1 , будем называть интегральной. Пусть у этой квадрики параметр λ_0 . Тогда движение в окрестности этой квадрики будет выглядеть следующим образом. Если траектории лежат на уровне интеграла $\Lambda < \lambda_0$, то они не пересекают корешок e^1 :

при приближении к корешку они достигают интегрального эллипса, касаются его и отдаляются, оставаясь на том же листе. Если траектории лежат на уровне интеграла $b > \lambda > \lambda_0$, то при достижении корешка e^1 они переходят с одного листа на другой. Это движение было описано в предыдущем пункте. Закон отражения в бильярде не даёт ответа на то, как должна выглядеть траектория, лежащая на уровне интеграла $\Lambda = \lambda_0$. На этом уровне интеграла при достижении этой квадрики траектория, с одной стороны, должна остаться на том же листе (как непрерывный предел траекторий, лежащих на уровнях $\lambda < \lambda_0$), а с другой стороны, перейти на другой лист (как непрерывный предел траекторий, лежащих на уровнях $b > \lambda > \lambda_0$) (см. рис. 13).

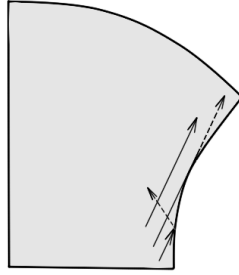


Рис. 13: На рисунке показано, почему невозможно доопределить траекторию, которая касается невыпуклого корешка, к которому приписана нетривиальная перестановка.

Хотя траектории на уровне интеграла $\Lambda = \lambda_0$ не определены, как будет показано в дальнейшем, все остальные неособые слои при $\Lambda \neq \lambda_0$ являются торами, а особые описываются трехмерными атомами.

- Здесь опишем случай, который называется случаем конической точки. Пусть точки $(x_1, v_1), (x_2, v_2) \in W \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ такие, что $\pi((x_1, v_1)) = \pi((x_2, v_2))$ и $\pi((x_1, v_1)) \in X^0$. Пусть клетка $e^0 \in X^0$ такая, что $\pi((x_1, v_1)) \in e^0$. Пусть клетка $e^0 \in \partial e_1^1, e^0 \in \partial e_2^1$, а клетки e_1^1 и e_2^1 являются в свою очередь граничными для обоих листов с номерами $\tilde{N}((x_1, v_1))$ и $\tilde{N}((x_2, v_2))$. То есть имеет место случай, изображенный на рис. 12 с номером 4. Положим $\sigma_1 = \Sigma(e_1^1), \sigma_2 = \Sigma(e_2^1)$. Заметим, что на эти перестановки в определении 2 бильярдной книжки было наложено условие коммутативности: $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$.

В этом случае, как легко понять из соображений непрерывности, закон отражения будет выглядеть так: материальная точка, проходя по листу с номером i , попав в коническую точку, отразится по той же прямой и будет продолжать движение на листе с номером $\sigma_1 \circ \sigma_2(i)$.

Поэтому нужно добавить следующие условия: вектор v_1 направлен

наружу листа с номером $\tilde{N}((x_1, v_1))$, вектор v_2 направлен внутрь листа с номером $\tilde{N}((x_2, v_2))$.

Кроме того, $v_1 = -v_2$ и $\tilde{N}((x_2, v_2)) = \sigma_1 \circ \sigma_2(\tilde{N}((x_1, v_1)))$.

Если описанные выше условия выполняются, то точки (x_1, v_1) и (x_2, v_2) считаем эквивалентными.

Профакторизовав по описанному выше отношению эквивалентности, получаем фазовое пространство M^4 . Траектории в бильярдной книжке будут соответствовать некоторой кривой в M^4 .

Расширим определение 4 канонической проекции. Нетрудно заметить, что в описанном выше отношении эквивалентности мы отождествляли только точки, у которых $\pi((x_1, v_1)) = \pi((x_2, v_2))$. Это означает, что каноническую проекцию можно определить не на произведении $\overline{X^2} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, а на фазовом пространстве M^4 , то есть далее считаем, что:

$$\pi : M^4 \longrightarrow W. \quad (2.4)$$

Явный вид интегралов. Пусть $m \in M^4$. Берем любую точку m' из класса эквивалентности точки m , описанного выше. Это – точка из $\overline{X^2} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. Лист, на котором лежит m' можно изометрично отобразить на плоскость \mathbb{R}^2 так, что он отобразится в область, ограниченную софокусными квадраками (см. опр. 2). Поэтому с $\overline{X^2}$ можно связать координаты в плоскости. А значит, точке m' можно сопоставить координаты (x_1, x_2, v_1, v_2) в пространстве \mathbb{R}^4 (с декартовыми координатами). Тогда интегралы имеют вид:

$$v = v_1^2 + v_2^2 \quad (2.5)$$

$$\Lambda = \frac{(x_1 v_2 - x_2 v_1)^2 + v_1^2 b + v_2^2 a}{v_1^2 + v_2^2} \quad (2.6)$$

Значение обоих интегралов не зависит от выбора представителя m' . Этот факт проверяется явной подстановкой в интегралы точек, которые мы отождествили. Это означает, интегралы корректно определены на всей книжке.

Определение 5. *Изоэнергетической 3-поверхностью* бильярдной книжки назовем $Q^3 := \{m \in M^4 : v(m) = 1\}$, где $v(m)$ является квадратом модуля вектора скорости и задается уравнением (2.5).

Будем изучать топологию Q^3 , расслаивая его на уровни интеграла Λ . Для этого нам понадобится теория, описанная в книге А.В. Болсинова, А.Т. Фоменко [4], а именно: понятия атомов и молекул.

3 Атом. Грубая молекула.

Рассмотрим гладкое многообразие X^2 и на нем гладкую функцию $f : X^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Определение 6. Точка $x \in X^2$ называется *критической* для функции f , если все частные производные равны нулю в этой точке. В противном случае точка называется *регулярной*.

Определение 7. Критическая точка $x \in X^2$ называется *невыврожденной* для функции f , если определитель матрицы вторых частных производных отличен от нуля.

Определение 8. Уровень $(f = c)$ называется критическим, если на этом уровне есть хотя бы одна критическая точка, в противном случае он называется *регулярным*.

Определение 9. Гладкая функция называется *функцией Морса*, если все ее критические точки невырождены.

Далее, пусть f – функция Морса.

Определение 10. Введем на X^2 следующее отношение эквивалентности: на каждом уровне функции f точки x_1 и $x_2 \in X^2$ считаем эквивалентными, если они принадлежат одной компоненте связности. Профакторизуем X^2 по этому отношению эквивалентности. Получим граф (см. рис. 14), который называется *графом Роба* для функции f на топологическом пространстве X^2 .

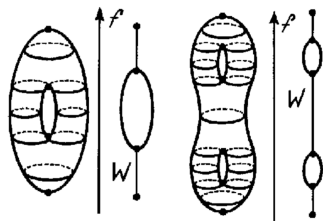


Рис. 14: Граф Роба для функций высоты на торе и сфере с двумя ручками

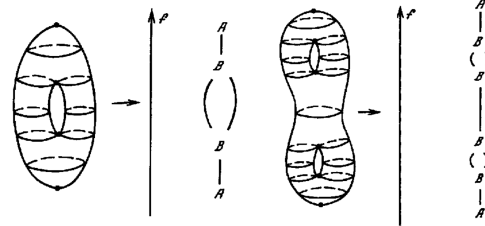


Рис. 15: Грубая молекула для функций высоты на торе и сфере с двумя ручками

Определение 11. Рассмотрим достаточно малую ε – окрестность некоторой точки графа Роба, принадлежащей связной компоненте слоя, где есть критическая точка. Ее прообраз с точностью до послонного диффеоморфизма будем называть *2-атомом*.

Замечание 5. Все 2-атомы сложности не больше трех перечислены и закодированы общепринятыми обозначениями в книге [4] А.В. Болсинова, А.Т. Фоменко. В нашей работе мы будем пользоваться обозначениями этой книги.

Замечание 6. Все вершины графа Рибба лежат на критических слоях. Кроме того, множество критических значений имеет меру нуль, а в прообразе всех регулярных значений лежит окрестность.

Определение 12. Граф Рибба вместе с указанными атомами в соответствующих точках на нем называется *грубой молекулой* для функции f на многообразии X^2 (см. рис. 15).

Теперь перейдем к четырехмерным фазовым многообразиям и определим аналогичным образом граф Рибба, 3-атомы и грубые молекулы. Рассмотрим теперь интегрируемую по Лиувиллю систему с двумя степенями свободы.

Определение 13. Гладкое многообразие M^4 называется *симплектическим*, если на нем задана *симплектическая структура*: невырожденная, замкнутая билинейная кососимметрическая форма ω .

Определение 14. Динамическая система на гладком компактном многообразии M^4 называется *гамильтоновой*, если на M^4 можно задать симплектическую структуру ω и выбрать функцию H так, что динамическая система запишется в виде $v = sgradH (= \omega gradH)$. Функция H называется *гамильтонианом*.

Определение 15. Пусть у гамильтоновой системы v на M^4 есть две функции f и g , которые сохраняются вдоль ее траекторий (то есть первые интегралы). Если для них выполнено равенство $\{f, g\} := \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} = 0$, то говорят, что интегралы *находятся в инволюции*, а система *интегрируема по Лиувиллю*.

Рассмотрим изоэнергетическое многообразие $Q^3 := \{m \in M^4 : f(m) = c\}$, где c – некоторая фиксированная константа, f – интеграл энергии. Вторым интегралом g можно теперь рассмотреть как функцию на Q^3 .

Определим аналогично двумерному случаю граф Рибба, 3-атомы и грубую молекулу для гладкой функции $g : Q^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Согласно известной теореме Лиувилля, которую можно, например, найти в книге А.В. Болсинова, А.Т. Фоменко [4], прообраз регулярных точек функции g состоит из двумерных тороидов, называемых торами Лиувилля. Критические точки в этом случае называют *точками бифуркации*.

Определение 16. *Топологическим слоением* называется четверка (E, B, F, ρ) , где E, B, F – топологические пространства, $\rho : E \rightarrow B$ – отображение, причем почти все точки $b \in B$ обладают такой окрестностью $U(b) \subset B$, что существует гомеоморфизм $\varphi : \rho^{-1}(U(b)) \rightarrow U(b) \times F$, такой, что $\rho \circ \varphi = \rho$, где $p : U(b) \times F \rightarrow U(b)$ – проекция. Причем, E называется *тотальным пространством*, B – *базой*, F – *слоем*.

Определение 17. *Слоением Лиувилля* называется топологическое слоение, отвечающее интегрируемой гамильтоновой системе и порожденное отображением $g : Q^3 \rightarrow \mathbb{R}$. То есть здесь тотальное пространство – это

изоэнергетическая 3-поверхность, база – вещественные числа \mathbb{R} , регулярный слой состоит из двумерных торов Лиувилля, а отображение ρ – интеграл g . Описанная четверка является топологическим слоением согласно теореме Лиувилля.

В нашем случае M^4 – фазовое пространство динамической системы бильярдной книжки (см. 2.2). Оказывается, M^4 является кусочно-гладким многообразием. Его подмножество полной меры является гладким 4-многообразием. В точках гладкости симплектическая структура имеет канонический вид:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Здесь гамильтониан $H = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2}$ и интегралы – квадрат модуля вектора скорости v и параметр квадратики Λ .

Явным вычислением можно проверить, что динамическая система бильярдной книжки является гамильтоновой и интегралы находятся в инволюции.

Однако в некоторых точках M^4 гладкость нарушается. Поэтому мы не можем пользоваться 3-атомами и молекулами, описанными лишь в гладком случае. Поэтому сформулируем нужные нам обобщения 3-атома и грубой молекулы.

Определение 18. Рассмотрим прообраз точки ξ на графе Рибба, построенного для интеграла $\Lambda : Q^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть этот прообраз не является регулярным, то есть не гомеоморфен кусочно-гладкому тору Лиувилля. Прообраз ε – окрестности этой точки ξ , рассматриваемый с точностью до послойного гомеоморфизма назовем *3-атомом*.

Определение 19. Граф Рибба с указанными 3-атомами в соответствующих вершинах назовем *грубой молекулой* для функции Λ на топологическом пространстве Q^3 .

В отличие от гладкого случая здесь нельзя в полном объеме пользоваться теоремой Лиувилля. Поэтому топологию каждого слоя интеграла Λ мы будем определять методом В.В. Фокичевой, описанным в [5]. В каждом случае мы будем явно находить, чему гомеоморфен нужный уровень интеграла.

4 Общий вид 3-атомов.

В разделе ниже, мы кратко опишем нужные нам элементы теории, изложенной в книге А.В. Болсинова, А.Т. Фоменко [4].

Напомним, что 2-атомы описывают перестройку одного набора окружностей в другой, 3-атомы описывают перестройку двумерных торов.

Атомы бывают двух видов: атомы типа А, отвечающие минимуму и максимуму интервала Λ и седловые атомы, отвечающие седловым критическим значениям интеграла Λ .

Минимаксные 2-атомы послойно гомеоморфны двумерному диску D , расслоенному на окружности и точку. Минимаксные 3-атомы послойно гомеоморфны полноторию $D \times S^1$, расслоенному на торы и окружность .

Определение 20. *Крестом* называется прообраз ε -окрестности точки 0 функции $x^2 - y^2$, заданной в некоторой δ -окрестности точки $(0, 0)$ вместе со структурой слоения, необходимой для того, чтобы говорить о послойном гомеоморфизме (см. рис. 16). Здесь уровень 0 – критический.

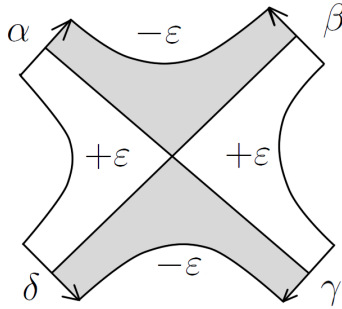


Рис. 16: Крест. Закрашены уровни $c \in (-\varepsilon, 0)$, не закрашены уровни $c \in (0, +\varepsilon)$.

Определение 21. *Ребро креста* – это пересечение креста с границей δ -окрестности точки $(0, 0)$, то есть $(|x^2 - y^2| < \varepsilon) \cap (x^2 + y^2 = \delta)$.

К ребрам креста на рис. 16 приписаны стрелки и буквы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Любой седловой 2-атом P можно склеить из $k \in \mathbb{N}$ крестов вдоль их ребер так, чтобы каждый уровень $(x^2 - y^2 = c)$, $c \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$ на одном кресте склеивался соответствующим уровнем $(x^2 - y^2 = c)$ на другом кресте (см. рис. 17). Число k называется *сложностью атома* P .

Могут получиться, как ориентируемые (как самостоятельное многообразие) 2-атомы, так и неориентируемые. Ориентируемые 2-атомы могут быть погружены в плоскость (см. теорему 2.9 в книге А.В. Болсинова, А.Т. Фоменко [4]).

Естественно связывать с 2-атомом граф Γ , являющийся прообразом критического уровня, вершины которого могут иметь только кратности 0 или 4. 2-атом содержит несколько колец, являющихся прообразом $(-\varepsilon, 0)$ и несколько колец, являющихся прообразом $(0, +\varepsilon)$.

Замечание 7. 3-атомы бывают, как ориентируемыми, так и неориентируемыми. Если на каком-то критическом уровне возникает неориентируемый

№	Атом	Код
Сложность 1 Ориентируемые		
1		A —
2		$\succ B$ —
Неориентируемый		
$\tilde{1}$		$—\tilde{B}$

Сложность 2 Ориентируемые		
1		$—C_1—$
2		$\succ C_2 \prec$
3		$—D_1 \leq$
4		$\succ D_2 \prec$

Рис. 17: Таблица некоторых 2-атомов. Тут можно явно увидеть, как нужно склеивать кресты, чтобы получить атом.

атом, то изоэнергетическое 3-многообразие в целом получается неориентируемым. В теории интегрируемых гамильтоновых систем встречаются только ориентируемые многообразия, поэтому вопрос о представлении неориентируемых 3-атомов мы здесь обсуждать не будем.

Согласно теореме Фоменко, любой ориентируемый 3-атом невырожденной системы является расслоением Зейферта над 2-атомом, причем особые слои этого расслоения могут иметь только тип (1,2) (см., например, [4]).

Иными словами, любой ориентируемый седловой 3-атом может быть получен одним из двух способов:

1. Прямым произведением некоторого ориентируемого седлового 2-атома на окружность S^1 .
2. Второй способ устроен несколько сложнее. Здесь мы опишем *атом со звездочками*. Пусть дан двумерный ориентируемый седловой атом \hat{P} . Для определенности фиксируем на нём функцию \hat{f} , которая задает слоение. Предположим, что на 2-атоме задано гладкое отображение $\tau : \hat{P} \rightarrow \hat{P}$, обладающее следующими свойствами:

(a) $\tau^2 = id$,

(b) τ сохраняет уровни, т.е. $\hat{f}(\tau(x)) = \hat{f}(x)$,

- (с) τ сохраняет ориентацию,
- (d) некоторое конечное число критических точек является неподвижными точками инволюции τ .

Для построения 3-атома рассмотрим цилиндр $P \times [0, 2\pi]$ и склеим его основания по инволюции τ , отождествляя точки $(x, 2\pi)$ и $(\tau(x), 0)$. В результате мы получим ориентируемое 3-многообразие U с краем. Функция \hat{f} естественным образом продолжается на U , поскольку $\hat{f}(\tau(x)) = \hat{f}(x)$, и ее поверхности уровня задают структуру слоения на U с единственным особым слоем. Отметим, что топологически многообразие U является расслоением над окружностью со слоем \hat{P} .

Если профакторизовать \hat{P} по инволюции τ , получим другой 2-атом P . Выделим на нем звездочками точки на критической окружности, которые сохраняются под действием инволюции τ . Полученный 2-атом P с выделенными звездочками называется *атомом со звездочками*, а 2-атом \hat{P} называется *дублем P* .

Иногда после факторизации получается кольцо со звездочками, расслоенное на окружности. В этом случае считаем, что у нас атом A со звездочками.

Ясно, что дубль \hat{P} является разветвленным двулистным накрытием над 2-атомом P , причем точками ветвления являются как раз звездочки атома P .

Следует иметь в виду, что дублей у одного атома со звездочкой может быть несколько и все они задают один и тот же 3-атом. Поэтому многообразие U однозначно определяется атомом со звездочками P .

Свяжем с таким атомом граф Γ , являющийся графом для 2-атома P . Добавим к множеству его вершин звездочки. *Сложность атома со звездочкой* – это число вершин его графа Γ .

Таким образом все ориентируемые 3-атомы можно описать ориентируемыми 2-атомами и ориентируемыми 2-атомами, на которых стоит конечное число звездочек на критическом уровне.

Пример. На рис. 20 приведен пример простого 3-атома A^* . Он устроен несколько сложнее атома В (см. рис. 19), который является прямым произведением восьмерки на окружность. Нужно удалить из полнотория лишь одно тонкое полноторие, но обходящее два раза вдоль оси. Особый слой L получается протаскиванием вдоль окружности вращающейся восьмерки, успевающей повернуться на угол π за один оборот. При прохождении через особый уровень один тор перестраивается в один тор.

5 Моделирование грубых молекул без звездочек. Алгоритм

Ранее в [1] была доказана следующая теорема.

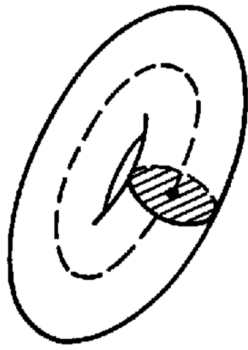


Рис. 18: 3-атом A .

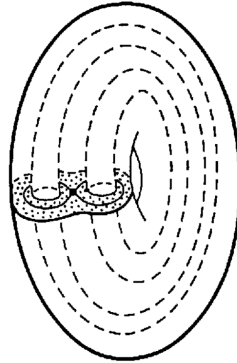


Рис. 19: 3-атом B .

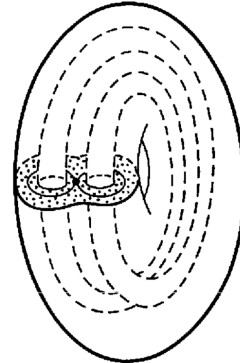


Рис. 20: 3-атом A^* .

Теорема 1 (Ведюшкина-Харчева). *Гипотеза Фоменко A верна, а именно, для любого 3-атома (со звездочками или без) алгоритмически строится бильярдная книжка, такая что в её изоэнергетической поверхности Q^3 слоение Лиувилля прообразов окрестности особого значения интеграла λ , отвечающего траекториям, направленным к или от одного из фокусов, послойно гомеоморфно данному атому.*

В данной работе будут рассматриваться только те грубые молекулы, у которых не встречаются ребра, вдоль которых функция, которая соответствует этой молекуле, не монотонна. В этом разделе будет доказан новый результат:

Теорема 2 (Ведюшкина-Харчева). *Для любой грубой молекулы, в которой нет атомов со звездочками, алгоритмически строится бильярдная книжка, такая что в её изоэнергетической поверхности Q^3 слоение Лиувилля послойно гомеоморфно данной грубой молекуле.*

Опишем сначала алгоритм для молекулы, состоящей из двух седловых атомов без звездочек и минимаксных атомов A (см. рис. 21). Пусть даны два атома P и Q . Реализуем их бильярдами. Хотим склеить эти два атома по выбранному ребру так, чтобы значение интеграла, которому соответствует атом P было больше значения интеграла, которому соответствует атом Q , то есть $\lambda(P) > \lambda(Q)$.

Алгоритм 1 (Склейка двух атомов без звездочек по ребру). По алгоритму из теоремы 1 строим две бильярдные книжки $\Delta B'_P$ и $\Delta B'_Q$ для атомов P и Q соответственно. Все листы таких бильярдных книжек согласно алгоритму теоремы 1 имеют тип A'_0 (в классификации [6] В.В. Фокичевой - это область, ограниченная прямой $\lambda = a$, прямой $\lambda = b$ и софокусными эллипсом и гиперболой (см. 22)). Поскольку теперь мы разрешили нетождественные перестановки, приписанные к невыпуклым корешкам, то рассмотрим две несколько другие бильярдные книжки ΔB_P и ΔB_Q , описанные ниже.

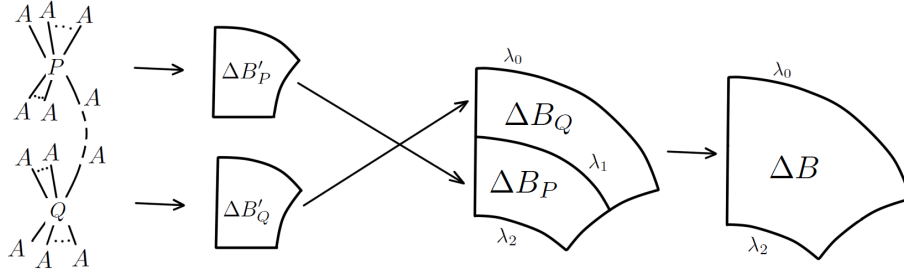


Рис. 21: Схема алгоритма 1.

Рассмотрим область типа A_0 (см. рис. 23), ограниченную прямой $\lambda = a$, гиперболой и двумя софокусными эллипсами (выпуклым и невыпуклым с некоторыми параметрами λ_0 и λ_2 , т.ч. $\lambda_0 < \lambda_2$). Разделим эту область еще одним эллипсом с параметром λ_1 , т.ч. $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$ на две области типа A_0 . У биллиардной книжки ΔB_Q берем вместо листов типа A'_0 листы типа A_0 с параметрами эллипсов λ_0 и λ_1 . У биллиардной книжки ΔB_P берем вместо листов A'_0 листы A_0 с параметрами эллипсов λ_1 и λ_2 . Таким образом, биллиардная книжка ΔB_Q будет находиться выше биллиардной книжки ΔB_P , а атом Q , наоборот, ниже атома P . Ко всем корешкам приписываем те же перестановки, что и были у исходных биллиардных книжек $\Delta B'_P$ и $\Delta B'_Q$. Итак, мы построили две биллиардные книжки ΔB_P и ΔB_Q , изменив $\Delta B'_P$ и $\Delta B'_Q$. Позже докажем, что от такого изменения грубые молекулы, отвечающие этим книжкам, не изменятся, и они также, как и раньше, будут отвечать атомам P и Q .

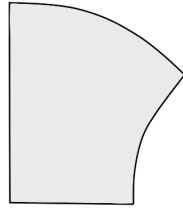


Рис. 22: Область A'_0 .

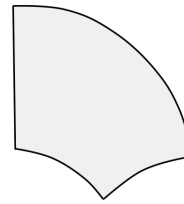


Рис. 23: Область A_0 .

Поскольку мы эти две книжки хотим склеить, то сдвинем нумерацию на одной книжке так, чтобы она не пересекалась нумерацией на другой книжке и изменим соответствующие перестановки согласно этой нумерации. Таким образом, мы определили N .

Итак, даны две книжки $\Delta B_P(W_P, \Sigma_P, \rho_P, N_P)$ и $\Delta B_Q(W_Q, \Sigma_Q, \rho_Q, N_Q)$. Хотим склеить из них одну книжку $\Delta B(W, \Sigma, \rho, N)$, которая будет соответствовать склейке двух атомов P и Q по одному ребру. Рассмотрим перестановки $\sigma_P(\lambda_1)$ и $\sigma_Q(\lambda_1)$ из пункта 4 определения биллиардной книжки,

ответчающие книжкам ΔB_P и ΔB_Q . Мы собираемся построить новую перестановку $\sigma(\lambda_1)$, объединив $\sigma_P(\lambda_1)$ и $\sigma_Q(\lambda_1)$.

Разложим перестановку $\sigma_P(\lambda_1)$ в произведение независимых циклов:

$$\sigma_P(\lambda_1) = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_r, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Каждому нижнему тору атома P будет соответствовать некоторый цикл π_i . Выберем цикл и тем самым выберем нижний тор атома P , который хотим склеить. Без ограничения общности будем считать, что мы выбрали цикл π_1 .

Для того, чтобы фиксировать верхний тор атома Q , нужно разложить композицию $\sigma_Q(\lambda_1) \circ \sigma_Q(\lambda_0)$ в произведение независимых циклов:

$$\sigma_Q(\lambda_1) \circ \sigma_Q(\lambda_0) = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \dots \circ \rho_s, \quad s \in \mathbb{N}$$

и выбрать цикл. Тут также без ограничения общности будем считать, что мы выбрали цикл ρ_1 . Каждому верхнему тору атома Q будет соответствовать некоторый цикл ρ_i . Заметим, что числа в этом цикле показывают, по каким листам траектория на этом торе идёт по направлению вверх (к выпуклому эллиптическому сегменту). Если взять композицию $\sigma_Q(\lambda_0) \circ \sigma_Q(\lambda_1)$, то числа в независимых циклах будут показывать, по каким листам траектория на торе будет идти по направлению вниз (к невыпуклому эллиптическому сегменту).

Фиксируем в цикле ρ_1 произвольный номер k , который он переставляет. Смотрим на перестановку $\sigma_Q(\lambda_1)$. Согласно алгоритму теоремы 1, эта перестановка разлагается в произведение независимых циклов длины два:

$$\sigma_Q(\lambda_1) = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_t, \quad t \in \mathbb{N}.$$

Находим цикл, который переводит число k нетождественно. Пусть без ограничения общности, это цикл τ_1 . Считаем, что число k стоит в цикле τ_i на первом месте (иначе, сдвинем числа по циклу). Конструируем новый цикл χ , «конкатенируя» циклы τ_1 и π_1 : $\chi = \tau_1 \pi_1$. Заметим, что порядок, в котором мы будем «конкатенировать» циклы, неважен, поскольку элементы можно сдвигать по циклу.

Новую перестановку $\sigma(\lambda_1)$ определяем так:

$$\sigma(\lambda_1) := \chi \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_r \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_t, \quad t \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что это разложение является разложением в независимые циклы, поскольку мы ранее сдвинули нумерацию на одной из книжек так, чтобы она не пересекалась с нумерацией на другой книжке.

Каждый независимый цикл в этой перестановке будет описывать переход материальной точки в окрестности дуги l_{λ_1} (см. опр. 2 и замеч. 3) с параметром квадратики λ_1 . Поэтому с помощью этой перестановки мы можем указать отображение Σ на множестве всех одномерных клеток таких, что им соответствует дуга l_{λ_1} . Все остальные перестановки оставляем теми же.

Комплекс W везде, кроме окрестности дуги l_{λ_1} положим $W_P \cup W_Q$. В окрестности дуги l_{λ_1} его определим следующим образом. Разложим в независимые циклы перестановку $\sigma(\lambda_1) = \chi_1 \circ \chi_2 \circ \dots \circ \chi_n$. Для каждого фиксированного цикла χ_i сопоставим корешок $e_i^1 \subset l_{\lambda_1}$. Для каждого номера j , который χ_i переставляет, доопределим окрестность листа $N^{-1}(j)$ так, что $e^1 \subset \partial N^{-1}(j)$. Иными словами, листы, отвечающие одному независимому циклу, «склеиваются».

Таким образом, мы определили отображение Σ и комплекс W . Нумерация N была определена выше. Проекция ρ на объединении комплексов действует как ρ_P на W_P , и как ρ_Q на W_Q . Биллиардная книжка $\Delta B(W, \Sigma, \rho, N)$ будет результатом алгоритма 1.

Замечание 8. Заметим, что в вышеописанном алгоритме есть произвол. Фиксировав независимые циклы π_1 и ρ_1 , мы фиксировали торы, которые хотим склеить. Однако, фиксировать номер k , который цикл ρ_1 переводит не тождественно, вообще говоря, можно произвольно. А именно, случаев будет столько, какова длина цикла ρ_1 . Выбор этого номера может повлиять на то, какую перестановку τ_1 мы выберем, а после на биллиардную книжку в целом.

Докажем, что алгоритм 1 действительно соединяет два атома по ребру. Доказательство будет основано на нескольких леммах.

Лемма 5.1. Пусть дана биллиардная книжка $\Delta B'(W', \Sigma', \rho', N')$, у которой все листы одинаковы (совпадают при проекции ρ) и имеют тип A'_0 . Построим биллиардную книжку $\Delta B(W, \Sigma, \rho, N)$ из $\Delta B'$ заменой всех листов на листы типа A_0 . Тогда грубые молекулы, отвечающие книжкам $\Delta B'$ и ΔB , совпадут.

Доказательство. Обозначим через Q'^3 и Q^3 изоэнергетические многообразия биллиардных книжек $\Delta B'$ и ΔB соответственно. Предъявим явный гомеоморфизм $\varphi : (-\infty, a] \rightarrow (-\infty, a]$, такой, что $\Lambda'^{-1}(\lambda)$ гомеоморфно $\Lambda^{-1}(\varphi(\lambda)) \quad \forall \lambda \in (-\infty, a]$, где Λ' – интеграл, отвечающий параметру квадрики, определенный на Q'^3 , Λ – на Q^3 .

Поскольку все листы одинаковы, фиксируем параметры квадрик из границ областей типа A'_0 и A_0 . Пусть верхняя эллиптическая дуга области A'_0 имеет параметр квадрики λ'_0 . У прямой области A'_0 , отвечающей нижней границе, параметр всегда равен b . Пусть верхняя (выпуклая) и нижняя (невыпуклая) эллиптические дуги области A_0 имеют параметры квадрики λ_0 и λ_1 соответственно. Левые границы обеих областей имеют параметр a . Пусть правые (невыпуклые) границы областей A'_0 и A_0 имеют параметры λ'_2 и λ_2 соответственно. Заметим, что верны неравенства: $\lambda'_0 < b < \lambda'_2 < a$ и $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < a$.

Тогда положим функцию φ так, чтобы она отображала λ'_0 в λ_0 , а b в λ_1 , λ'_2 в λ_2 , а в a . Например, так:

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} \lambda_0 + \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{b - \lambda'_0}(\lambda - \lambda'_0), & \text{если } \lambda \in (-\infty, b]; \\ \lambda_1 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda'_2 - b}(\lambda - b), & \text{если } \lambda \in (b, \lambda'_2]; \\ \lambda_2 + \frac{a - \lambda_2}{a - \lambda'_2}(\lambda - \lambda'_2), & \text{если } \lambda \in (\lambda'_2, a]. \end{cases} \quad (5.1)$$

Покажем, что прообразы при каждом $\lambda \in (-\infty, a]$ гомеоморфны. Пусть $\lambda < \lambda'_0$. Тогда траектория должна касаться эллипса, большего, чем эллипс, отвечающей дуге из верхней границы. Это означает, что траектория находится вне эллипса с параметром λ , а значит, и вне эллипса с параметром λ'_0 . Но область A'_0 находится внутри эллипса с параметром λ'_0 . Значит, таких траекторий нет. То есть $\Lambda'^{-1}(\lambda) = \emptyset$. Аналогичные рассуждения можно провести и для $\Lambda^{-1}(\varphi(\lambda))$. Таким образом, $\Lambda'^{-1}(\lambda) = \Lambda^{-1}(\varphi(\lambda)) = \emptyset, \quad \forall \lambda \in (-\infty, \lambda'_0)$.

Пусть $\lambda \in [\lambda'_0, a]$. Прообраз $\Lambda'^{-1}(\lambda)$ задается парой: точкой x' на комплексе W' и единичным вектором скорости v' , таким что прямая в точке x' с направлением v' будет касаться квадрики с параметром λ . Есть в точности 4 таких вектора: левый-нижний, левый-верхний, правый-верхний, правый-нижний. На границах области они склеиваются по отношению эквивалентности, описанному в разделе 2.

Построим гомеоморфизм $\psi_\lambda : \Lambda'^{-1}(\lambda) \rightarrow \Lambda^{-1}(\varphi(\lambda))$ следующим образом. Пусть точка $(x', v') \in \Lambda'^{-1}(\lambda)$ такая, что x' имеет эллиптические координаты (ξ, η) (имеются ввиду координаты при проекции на плоскость листа, на котором лежит x'). Сопоставим ей точку $(x, v) = \psi_\lambda(x', v')$, такую что x лежит в комплексе W на том же листе, что и x' , но с эллиптическими координатами $(\varphi(\xi), \varphi(\eta))$, а v - направлен так, чтобы прямая в точке x с направлением v касалась квадрики с параметром $\varphi(\lambda)$. Из четырех направлений вектора v , соответствующим этому свойству будем выбирать то же, что и у вектора v' . Заметим, что при построенный гомеоморфизм ψ_λ на комплексе W' действует так, что клетки в комплексе W' переходят в клетки в комплексе W . Это и то, что перестановки не меняются по условию леммы, дает, что отношение эквивалентности, описанное в разделе 2, будет давать одинаковые $\Lambda'^{-1}(\lambda)$ и $\Lambda^{-1}(\lambda)$.

Отдельно стоит оговорить критический уровень $\lambda = b$. Ему соответствуют траектории в книжке $\Delta B'$, которые лежат на прямых, проходящих через фокусы. В том числе есть траектория, которая отвечает движению по прямой, соединяющей два фокуса. Заметим, что при $\lambda = b$ $\varphi(\lambda) = \lambda_1$ и в книжке ΔB этому уровню соответствуют траектории, которые касаются эллипса с параметром λ_1 . Тогда траектория в книжке $\Delta B'$, отвечающая движению по прямой, соединяющей два фокуса, должна перейти в траекторию на эллипсе с параметром λ_1 . Такой траектории не существует и мы ее выкололи в описании отношения эквивалентности в разделе 2 в пункте 3. Этот пункт отвечал случаю невыпуклой склейки. Поэтому критический слой $\Lambda^{-1}(\lambda_0)$ не определен на множестве меры нуль. Но за исключением этого множества гомеоморфизм слоев установлен. Лемма доказана. \square

Определение 22. *Эллиптическим кольцом $R[\lambda_1, \lambda_2]$ области Ω будем называть часть области Ω , которая ограничена сверху эллипсом с параметром квадрики λ_1 , снизу эллипсом с параметром квадрики λ_2 . Иными словами, это множество точек $\Omega \cap \{\lambda_1 < x_1 < \lambda_2\}$, где (x_1, x_2) – координаты точек в эллиптической системе координат.*

Определение 23. *Аналогично гиперболическим кольцом $R[\lambda_1, \lambda_2]$ области Ω будем называть часть области Ω , которая ограничена справа гиперболой с параметром квадрики λ_1 , слева гиперболой с параметром квадрики λ_2 . Иными словами, это множество точек $\Omega \cap \{\lambda_1 < x_2 < \lambda_1\}$, где (x_1, x_2) – координаты точек в эллиптической системе координат.*

В следующих леммах будут использоваться обозначения из алгоритма 1.

Лемма 5.2. *Рассмотрим разложение $\sigma_P(\lambda_1)$ в произведение независимых циклов:*

$$\sigma_P(\lambda_1) = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_r, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Существует взаимно-однозначное соответствие φ между этими независимыми циклами и нижними ребрами атома P в грубой молекуле книжки ΔB_P , причем элементы в фиксированном цикле π_i соответствуют номерам листов, по которым идут траектории, отвечающие ребру $\varphi(\pi_i)$.

Замечание 9. В предыдущей лемме важно, что P – атом без звездочек. Из этого следует, что бильярдная книжка $\Delta B'_P$, построенная по алгоритму теоремы 1, слева будет иметь тождественную перестановку, то есть $\sigma'_P(a) = id$. Значит, и в бильярдной книжке ΔB , перестановка $\sigma_P(a) = id$. В доказательстве будет также учитываться тот факт, что бильярдная книжка ΔB_P справа будет также иметь тождественную перестановку. Это тоже следует из алгоритма теоремы 1.

Доказательство. Изучим прообразы окрестности $U_\varepsilon(\lambda_1)$ уровня интеграла $\Lambda_P = \lambda_1$, где Λ_P – интеграл, отвечающий параметру квадрики, определенный на изоэнергетическом многообразии Q_P^3 бильярдной книжки ΔB_P .

Прообраз $\Lambda_P^{-1}(\lambda)$, где $\lambda < \lambda_1$ – это все такие траектории, которые касаются эллипса с параметром λ . Этот эллипс больше эллипса с параметром λ_1 . А поскольку область находится внутри эллипса с параметром λ_1 , то внутри этой области нет траекторий, которые касались бы эллипса с параметром λ , а значит прообраз $\Lambda_P^{-1}(\lambda)$ пустой.

Другие уровни интеграла будем описывать в терминах точек на фазовом пространстве M_P^4 . Фазовое пространство строилось на основе пар точка-вектор $\overline{X_P^2} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ (см. разд. 2). Ограничим это произведение на уровень интеграла $v = 1$. Будем обозначать это ограничение через $\overline{X_P^2} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cap (v = 1)$. То есть теперь мы рассматриваем только единичные вектора скорости. Заметим, что $M_P^4 \cap (v = 1) = Q_P^3$. На пространстве $\overline{X_P^2} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cap (v = 1)$ также определен интеграл, отвечающий параметру квадрики. Обозначим его через $\hat{\Lambda}_P$. Описав прообраз

$\tilde{\Lambda}_P^{-1}(\lambda) \subset \overline{X_P^2} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cap (v = 1)$ и профакторизовав его по отношению эквивалентности, при помощи которого было получено M_P^4 , получим прообраз $\Lambda_P^{-1}(\lambda)$.

Прообраз $\Lambda_P^{-1}(\lambda_1)$ – это все такие траектории, которые касаются эллипса с параметром λ_1 . Из этого следует, что эти траектории обязаны лежать на эллиптической дуге l_{λ_1} с параметром λ_1 . И поскольку траектория должна касаться этой дуги, то вектор скорости направлен по касательной к ней. В этом случае траектория идет дуге l_{λ_1} , и отталкиваясь о границу, идет в обратном направлении. Таким образом, $\tilde{\Lambda}_P^{-1}(\lambda)$ – это точки на дугах l_{λ_1} и вектора скорости, направленные по касательной. Дуга l_{λ_1} есть на каждом листе, поэтому их столько, сколько листов, то есть n_P . Поскольку вектора, касающиеся этой дуги, единичны и могут быть направлены либо вправо, либо влево по касательной, то прообраз $\tilde{\Lambda}_P^{-1}(\lambda)$ состоит из $2n_P$ дуг. Осталось учесть отношение эквивалентности из раздела 2, которое склеит эти дуги. Пункт 2 отношения эквивалентности отождествит все дуги, которые принадлежат одному циклу в разбиении:

$$\sigma_P(\lambda_1) = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_r, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Получится r пар дуг, каждая из которых склеится в окружность по пункту 4 отношения эквивалентности, поскольку на левой и правой границе тождественные перестановки. Таким образом, $\Lambda_P^{-1}(\lambda_1) = \prod_{i=1}^r S^1$, а каждому циклу в перестановке будет соответствовать некоторая окружность.

Прообраз $\Lambda_P^{-1}(\lambda)$, где $\lambda > \lambda_1$ – это все такие траектории, которые касаются эллипса с параметром λ . Из этого следует, что каноническая проекция π (см. 2.4) отобразит $\Lambda_P^{-1}(\lambda)$ в эллиптическое кольцо $R[\lambda_1, \lambda]$ области A'_0 . Поскольку траектория должна касаться эллипса с параметром λ , то в каждой точке $R[\lambda_1, \lambda] \setminus l_\lambda$ есть 4 вектора, направленных по касательным в этой точке, в точках l_λ эти 4 вектора постепенно склеиваются в 2. Таким образом, $\tilde{\Lambda}_P^{-1}(\lambda)$ – это кольца $R[\lambda_1, \lambda]$ и вектора скорости, соответствующие им. Если зафиксировать лист e^2 и рассматривать прообраз $\tilde{\Lambda}_P^{-1}(\lambda)$ на одном листе (точки $(x, v) \in \tilde{\Lambda}_P^{-1}(\lambda) \subset \overline{X_P^2} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cap (v = 1)$ такие, что $x \in \overline{e^2}$), то получим две пары колец $R[\lambda_1, \lambda]$, склеенных по нижней границе. А поскольку кольца $R[\lambda_1, \lambda]$ есть на каждом листе, то прообраз $\tilde{\Lambda}_P^{-1}(\lambda)$ состоит из $2n_P$ пар колец $R[\lambda_1, \lambda]$, склеенных по нижней границе. Осталось учесть отношение эквивалентности из раздела 2, которое склеит эти пары колец. Пункт 1 отношения эквивалентности склеит все кольца $R[\lambda_1, \lambda]$ по верхней границе по циклам из разбиения:

$$\sigma_P(\lambda_1) = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_r, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Учитывая еще нижнюю склейку пар колец $R[\lambda_1, \lambda]$, получаем r пар $S^1 \times [0, 1]$. Каждая пара $S^1 \times [0, 1]$ склеится в тор по пункту 1 отношения эквивалентности, поскольку на левой и правой границе тождественные перестановки. Таким образом, $\Lambda_P^{-1}(\lambda_1) = \prod_{i=1}^r T^2$, а каждому циклу в перестановке будет соответствовать некоторая окружность.

Таким образом, прообраз $\Lambda_P^{-1}(U_\varepsilon(\lambda_1))$ - это r полноторий, расслоенных на торы и окружность. Торы при приближении уровня интеграла к критическому уровню $\Lambda_P = \lambda_1$ сжимаются на окружность. Каждому полноторию соответствует свой «нижний» атом A , а каждому такому атому – ребро. Более того, в описании прообразов было указано соответствие каждого полнотория с независимым циклом при разложении перестановки $\sigma_P(\lambda_1)$. Иными словами, есть взаимно-однозначное соответствие между независимыми циклами и нижними ребрами атома P в грубой молекуле. \square

Лемма 5.3. *Рассмотрим разложение композиции двух перестановок $\sigma_Q(\lambda_1)$ и $\sigma_Q(\lambda_0)$ в произведение независимых циклов:*

$$\sigma_Q(\lambda_1) \circ \sigma_Q(\lambda_0) = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \dots \circ \rho_s, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Существует взаимно-однозначное соответствие φ между этими независимыми циклами и верхними ребрами атома Q в грубой молекуле книжки ΔB_Q , причем элементы в фиксированном цикле ρ_i соответствуют номерам листов, по которым траектории, отвечающие ребру $\varphi(\rho_i)$, идут вверх.

Доказательство. Изучим прообразы окрестности $U_\varepsilon(a)$ уровня интеграла $\Lambda_Q = a$, где Λ_Q – интеграл, отвечающий параметру квадрики, определенный на изоэнергетическом многообразии Q_Q^3 билиардной книжки ΔB_Q .

Изучать прообразы будем тем же методом, что и в предыдущей лемме. Уровни интеграла будем описывать в терминах точек на фазовом пространстве M_Q^4 . Фазовое пространство строилось на основе пар точка-вектор $\overline{X_Q^2} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ (см. разд. 2). Ограничим это произведение на уровень интеграла $v = 1$. Будем обозначать это ограничение через $\overline{X_Q^2} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cap (v = 1)$. То есть теперь мы рассматриваем только единичные вектора скорости. Заметим, что $M_Q^4 \cap (v = 1) = Q_Q^3$. На пространстве $\overline{X_Q^2} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cap (v = 1)$ также определен интеграл, отвечающий параметру квадрики. Обозначим его через $\tilde{\Lambda}_Q$. Описав прообраз $\tilde{\Lambda}_P^{-1}(\lambda) \subset \overline{X_Q^2} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cap (v = 1)$ и профакторизовав его по отношению эквивалентности, при помощи которого было получено M^4 , получим прообраз $\Lambda_P^{-1}(\lambda)$.

Прообраз $\Lambda_Q^{-1}(a)$ – это все такие траектории, которые идут по вертикальной прямой - кривой семейства с параметром a . Рассмотрим, как идет траектория в этом случае. Пусть она находится на листе с номером i и идет вверх. Тогда, когда она дойдет до верхней границы, она поменяет направление на противоположное и продолжит свое движение по листу с номером $\sigma_Q(\lambda_0)(i)$. Далее двигаясь по листу с номером $\sigma_Q(\lambda_0)(i)$ вниз, она доходит до нижней границы, меняет направление и идет листу с номером $\sigma_Q(\lambda_1)(\sigma_Q(\lambda_0)(i))$. И так далее. В какой-то момент она зацикливается и образует окружность. Таких окружностей – циклов может быть несколько. Если рассмотреть композицию $\sigma_Q(\lambda_1) \circ \sigma_Q(\lambda_0)$, то она будет отображать, по каким листам траектория идет вверх. А именно, рассмотрим траекторию, которая идет вверх по листу с номером i . Тогда следующий лист, на котором эта траектория будет идти вверх имеет номер $\sigma_Q(\lambda_1) \circ \sigma_Q(\lambda_0)(i)$. Это

означает, что если мы рассмотрим разложение композиции $\sigma_Q(\lambda_1) \circ \sigma_Q(\lambda_0)$ в независимые циклы, то независимые циклы будут полностью описывать одну замкнутую траекторию. Номера, которые будут указаны в цикле будут означать номера листов, на которых идет эта траектория наверх. Таким образом, на уровне интеграла $\Lambda_Q^{-1}(a)$ будет s окружностей, где s – это число независимых циклов, и каждая такая траектория будет соответствовать своему циклу.

Прообраз $\Lambda_Q^{-1}(\lambda)$, где $\lambda < a$ – это все такие траектории, которые касаются гиперболы с параметром λ . Все такие траектории находятся в гиперболическом кольце $R[\lambda, a]$. Из этого следует, что каноническая проекция π (см. 2.4) отобразит $\Lambda_Q^{-1}(\lambda)$ в эллиптическое кольцо $R[\lambda, a]$ области A'_0 . Векторы должны быть направлены по касательным в каждой точке кольца $R[\lambda, a]$, поэтому в каждой точке на фиксированном листе $R[\lambda, a] \setminus l_\lambda$ есть 4 вектора, а на гиперболической дуге l_λ – эти 4 вектора попарно («левые» с «правыми») склеиваются и их становится 2. Слева эти векторы также склеиваются в 2 по пункту 1 отношения эквивалентности из раздела 2, поскольку слева тождественная перестановка $\sigma_Q(a)$. Получаем, что $\tilde{\Lambda}_Q^{-1}(\lambda)$ – это кольцо $S^1 \times [0, 1]$ на каждом листе. А склейки по отношению эквивалентности на верхней и нижней границе будут аналогичны склейкам на критическом уровне $\Lambda_Q = a$. Только на критическом уровне склеивались отрезки в s окружностей, а в случае $\Lambda_Q = \lambda$ кольца склеиваются в s торов, причем есть такое же соответствие между разложением композиции $\sigma_Q(\lambda_1) \circ \sigma_Q(\lambda_0)$ в независимые циклы и торами.

Таким образом, прообраз $\Lambda_Q^{-1}(U_\varepsilon(a))$ – это s полноторий, расслоенных на торы и окружность. Торы при приближении уровня интеграла к критическому уровню $\Lambda_Q = a$ сжимаются на окружность. Каждому полноторию соответствует свой «верхний» атом A на критическом уровне $\Lambda_Q = a$, а каждому такому атому – ребро. Более того, в описании прообразов было указано соответствие каждого полнотория с независимым циклом при разложении перестановки $\sigma_P(\lambda_1)$. Иными словами, есть взаимно-однозначное соответствие между независимыми циклами и нижними ребрами атома P в грубой молекуле. \square

Лемма 5.4. *Построенная в алгоритме бильiardная книжка ΔB дает склейку двух атомов P и Q по ребру, причем грубая молекула будет иметь вид, изображенный на рис. 24.*

Доказательство. Посмотрим на прообразы на каждом уровне интеграла Λ .

1. При $\Lambda = \lambda$, где $\lambda < \lambda_1$, траектория должна касаться эллипса большего, чем эллипс с параметром λ_1 . Значит траектории могут находиться только в эллиптическом кольце $R[\lambda_0, \lambda]$. Такие траектории есть только на бильiardной книжке ΔB_Q . Поэтому грубая молекула на этих уровнях совпадает с молекулой для книжки ΔB_Q .
2. При $\Lambda = \lambda_1$ траектория должна касаться эллипса с параметром λ_1 . В книжке ΔB_Q – это критический уровень, соответствующий атому

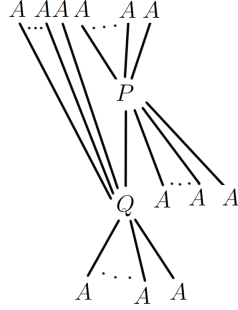


Рис. 24: Объединение атомов P и Q , получающееся в результате работы алгоритма 1.

Q . В книжке ΔB_P – это критический уровень, соответствующий r атомам A , где r – это число независимых циклов в разложении $\sigma_P(\lambda_1)$. Напомним, что из перестановок $\sigma_P(\lambda_1) = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_r$ и $\sigma_Q(\lambda_1) = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_t$ в алгоритме мы построили новую перестановку $\sigma(\lambda_1) := \chi \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_r \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_t$.

В новой перестановке независимые циклы перестановки $\sigma_P(\lambda_1)$ все, кроме одного, остались нетронутыми. Каждый из них соответствовал своему атому A . Поэтому эти атомы A остались.

Раньше циклу π_1 отвечало движение по некоторому корешку. Теперь цикл π_1 стал объединен с циклом τ_1 . Поэтому в бильярдной книжке ΔB этот корешок будет объединен также с листьями из цикла τ_1 (с листьями, имеющими номера, которые переставляет цикл τ_1). На этом корешке появляется невыпуклая склейка и траекторию, отвечающую движению по дуге, мы выкалываем (см. опр. M^4 в разделе 2). С другой стороны, через точки на этом корешке проходят другие траектории, идущие по бильярдной книжке ΔB_Q . Эти траектории образуют атом Q . Поэтому вместо атома A это ребро соединено с атомом Q .

3. При $\Lambda = \lambda$, где $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$, траектория должна касаться эллипса с параметром λ .

Движение по корешкам с параметром λ_1 в книжке ΔB_P , отвечающее циклам $\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_r$ превратилось в движение по кольцу $R[\lambda_1, \lambda]$. Каждый из этих циклов дает тор (см. лемму 5.2).

Движение, соответствующее оставшемуся циклу π_1 устроено несколько сложнее, поскольку он объединен с τ_1 . Это движение происходит по обеим книжкам и находится в эллиптическом кольце $R[\lambda_0, \lambda]$. Покажем, что эти траектории будут давать тор. Поскольку перестановка τ_1 имеет длину два по алгоритму теоремы 1), то положим $\tau_1 = (k_1, k_2)$. Пусть также $\pi_1 = (m_1, m_2, \dots, m_u)$ для некоторого $u \in \mathbb{N}$. Тогда по алгоритму 1 верно $\chi = (k_1, k_2, m_1, m_2, \dots, m_u)$. Раньше в бильярдной

книжке ΔB_Q траектория, двигаясь вниз по листу с номером k_2 , ударялась о границу с параметром λ_1 и переходила на лист с номером k_1 . Теперь в бильярдной книжке ΔB траектория, двигаясь вниз по листу с номером k_2 , не ударяется о границу с параметром λ_1 , а продолжает движение прямо и переходит на лист с номером m_1 . Далее она опускается дальше вниз, касается квадрики с параметром λ , поднимается обратно вверх, оставаясь на том же листе с номером m_1 . Достигнув корешка с параметром λ_1 , траектория ударяется о него, и переходит по перестановке χ на лист m_2 . И так далее. В какой-то момент траектория окажется на листе m_u , и вместо того, чтобы удариться о корешок с параметром λ_1 , она продолжит движение прямо и перейдет на лист с номером k_1 .

С точки зрения многообразия такое расширение отвечает приклейке одного тора к другому по базисным циклам, которая в свою очередь дает также тор. Чтобы это показать, рассмотрим эллиптические координаты. Фиксируем вторую координату и тем самым фиксируем гиперболу Γ . Также фиксируем направление векторов. Рассмотрим только векторы, направленные вправо. Обозначим их через R . Изучим пересечение $\Lambda^{-1}(\lambda) \cap \pi^{-1}(\Gamma) \cap R$, где π - это каноническая проекция (см. 2.4). Раньше циклу ρ_1 соответствовал некоторый тор $T_{\rho_1}^2$ в книжке ΔB_Q . Тогда $T_{\rho_1}^2 \cap \pi^{-1}(\Gamma) \cap R = S_{\rho_1}^1$ в книжке ΔB_Q (об этом можно прочесть, например, в доказательстве теоремы 1). Аналогично в книжке ΔB_P верно $T_{\pi_1}^2 \cap \pi^{-1}(\Gamma) \cap R = S_{\pi_1}^1$. В новой книжке ΔB перестановка изменилась. Это означает, что $S_{\rho_1}^1$ и $S_{\pi_1}^1$ мы разрезали и склеили друг с другом. Действительно, в книжке ΔB_P склейка векторов, отвечающих переходу с листа k_2 на лист k_1 отменилась. То есть пары точка-вектор (x_1, v_1) и (x_2, v_2) такие, что $x_1 = x_2$ и принадлежат корешку с параметром λ_1 , точка x_1 лежит на листе с номером k_1 , точка x_2 лежит на листе с номером k_2 , вектор v_1 направлен вверх, вектор v_2 направлен вниз, $v_1 + v_2$ направлен по касательной к корешку, перестали быть эквивалентными. На окружности $S_{\rho_1}^1$ это была ровно одна точка. Таким образом, окружность после отмены склейки стала отрезком. То же самое верно и для $S_{\pi_1}^1$. Но вместо этих пар склеились пары точка-вектор, отвечающие переходу с листа k_2 на лист m_1 , то есть (x_1, v_1) и (x_2, v_2) такие, что $x_1 = x_2$ и принадлежат корешку с параметром λ_1 , точка x_1 лежит на листе с номером k_2 , точка x_2 лежит на листе с номером m_1 , векторы $v_1 = v_2$. А также склеились пары точка-вектор, отвечающие переходу с листа m_u на лист k_2 , которые определяются аналогично. Это дает склейку двух отрезков в окружность. Вышеописанное верно также для левых векторов и для любой гиперболы. Поэтому получаем, что в новой книжке ΔB два тора $T_{\rho_1}^2$ и $T_{\pi_1}^2$ склеиваются в один.

Также нужно проверить, что мы приклеили именно тор, соответствующий циклу ρ_1 , к тору, соответствующему циклу π_1 . Номера в цикле ρ_1 отвечают номерам листов, по которым траектории на этом торе

идут вверх. Значит, по построению перестановки χ номер k_1 – это номер листа, по которому траектории идут вверх. Поскольку в описанном выше движении это так, то тор в книжке ΔB_Q , соответствующий циклу ρ_1 , который мы расширили, выбран правильно. Номера в цикле π_1 отвечают номерам листов, по которым происходит движение. Поскольку описанное выше движение происходит в листах m_1, m_2, \dots, m_u (рассматриваются только листы, принадлежащие книжке ΔB_P), то тор в книжке ΔB_P , который мы приклеили, выбран правильно.

Рассмотрим теперь траектории в книжке ΔB_Q , которые не идут по листу с номером k_2 вниз. Такие траектории не попадут на книжку ΔB_P . Поэтому этим траекториям в книжке ΔB будут соответствовать те же компоненты связности, что и в книжке ΔB_Q . А в книжке ΔB_Q им соответствовали торы, отвечающие циклам $\rho_2, \rho_3, \dots, \rho_s$. Заметим, что эти траектории будут давать те же компоненты связности не только при $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$, но при $\lambda \in (\lambda_1, b)$. При $\lambda = b$ эти траектории превращаются в движение по вертикальному отрезку - левой границе области и соответствуют $s - 1$ -му атому A , поскольку эти траектории все также не затрагивают книжку ΔB_P . Поэтому при изучении последующих уровней интеграла этот случай отдельно оговаривать не будем.

4. Рассмотрим теперь критический уровень $\Lambda = \lambda_2$. Траектории на этом уровне должны касаться квадрики с параметром λ_2 .

Для траекторий, отвечающим циклам $\rho_2, \rho_3, \dots, \rho_s$, связные компоненты были описаны в предыдущем пункте. Все оставшиеся траектории, за исключением тех, которые идут по листу m_1 вниз, проходят только по книжке ΔB_P . Ранее в книжке ΔB_P все эти траектории давали критический уровень атома P . Покажем, что в бильярдной книжке ΔB эта компонента связности будет также давать критический уровень атома P . Действительно, теперь вместо удара о верхнюю границу на листе с номером m_u , траектория перейдет на книжку ΔB_Q . Здесь также, как и в предыдущем пункте, происходит замена одной склейки на другую. Покажем это. Как в предыдущем случае зафиксируем гиперболу Γ и направление R и рассмотрим пересечение $\Lambda^{-1}(\lambda) \cap \pi^{-1}(\Gamma) \cap R$. Тогда в книжке ΔB_P пересечение $P \cap \pi^{-1}(\Gamma) \cap R$ – это трансверсальное сечение критического уровня атома P , которое в случае седлового атома совпадает с критическим уровнем 2-атома P . В свою очередь в книжке ΔB_Q был тор $T_{\rho_1}^2$, отвечающий циклу ρ_1 . Как и в предыдущем случае, верно $T_{\rho_1}^2 \cap \pi^{-1}(\Gamma) \cap R = S_{\rho_1}^1$. Склейка отменяется в одной точке в каждом из случаев, и критический уровень 2-атома P разрезается в одной точке, а окружность превращается в отрезок. Аналогично предыдущему случаю можно показать, что этот отрезок приклеивается к разрезанному критическому уровню 2-атома P так, что получается снова критический уровень 2-атома P . Вышеописанное верно также для левых векторов и для любой гиперболы. Поэтому по-

лучаем, что в новой книжке ΔB тор $T_{\rho_1}^2$ и критический уровень атома P склеивается в критический уровень атома P .

5. Рассмотрим уровень $\Lambda = \lambda$, где $\lambda \in (\lambda_0, b)$. Этот уровень состоит из торов, которые были описаны в пункте 3 доказательства, и торов, которые появляются после перехода через атом P в книжке ΔB_P . На одном из этих торов траектории вместо удара о границу с параметром λ_1 в новой книжке ΔB обойдут книжку ΔB_Q . Это, как и раньше, будет означать склейку двух торов в один. Таким образом, верхние ребра атома P остались теми же после изменения перестановки.

В ε -окрестности уровня $\Lambda = b$ движение по гиперболическому кольцу $R[b - \varepsilon, b]$ превращается в движение по вертикальной прямой, соответствующей квадрике с параметром b . Вместе с тем все торы «сжимаются» на окружность.

Таким образом, объединив полученные результаты на каждом слое получаем грубую молекулу изображенную на рис. 24. Эта грубая молекула отвечает биллиардной книжке ΔB , а значит, лемма доказана. \square

Доказательство теоремы 2. Для того, чтобы убедиться в справедливости утверждения теоремы 2 остается только заметить, что алгоритм 1 позволяет не только склеивать одно ребро с другим. Его небольшие изменения позволяют склеивать произвольное количество атомов без звездочек вдоль произвольного количества ребер. А именно:

- Если мы хотим приклеить два атома P и Q по w ребрам, то достаточно вместо одной пары циклов π_1 и ρ_1 , выбрать w пар циклов так, что каждый цикл будет соответствовать ребру, которое мы хотим соединить. А после применить часть алгоритма 1, описывающую объединение циклов, ко всем w парам.
- Если грубая молекула имеет n седловых атомов без звездочек, то по алгоритму теоремы 1 строим n биллиардных книжек, которые моделируют эти атомы, и выполняем объединение по соответствующим ребрам по алгоритму 1.

Все это в комбинации позволяет строить любую грубую молекулу из атомов без звездочек с точностью до изменения уровней интеграла, на которых находятся атомы. \square

Список литературы

- [1] Jacobi C. G. J. *Vorlesungen uber dynamik.* – 1884 (Перевод на русский язык: Якоби К. *Лекции по динамике* М.; Л.: ОНТИ, 1936)
- [2] Дж. Д. Биркгоф, *Динамические системы*, Издательский дом «Удмуртский университет», 1999
- [3] В.В. Козлов, Д.В. Трещёв, *Генетическое введение в динамику систем с ударами*, М.: Изд-во МГУ, 1991
- [4] *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация.* // А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко - том 1. Ижевск НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика" 1999
- [5] *Топологическая классификация бильярдов в локально-плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик* / Фокичева В. В. // Математический сборник. — 2015. — Т. 206, № 10. С. 127–176.
- [6] *Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами и гиперболами* / В.В. Фокичева // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. -2014. - Т. 4.