

УДК 517.938.5

Е. Е. Каргинова

Биллиардная задача в областях, ограниченных дугами софокусных квадрик на плоскости Минковского.

В статье рассмотрена биллиардная задача в плоских компактных областях на плоскости минковского, граница которых состоит из дуг софокусных квадрик, угол излома которых не превышает $\frac{\pi}{2}$. Доказана теорема классификации таких областей, называемых простыми. Описаны первые интегралы и траектории движения в простых областях. Подсчитаны инварианты Фоменко-Цишанга для каждой простой области и тем самым доказана теорема о том, что существует всего три возможных слоения Лиувилля для биллиарда в таких областях.

Библиография: 7 названий.

Ключевые слова: интегрируемая система, биллиард, плоскость Минковского, лиувиллева эквивалентность, молекула Фоменко-Цишанга.

§ 1. Введение

1.1. История вопроса. Математический биллиард - движение материальной точки в плоской области, ограниченной кусочно-гладкой кривой. Вопросам об интегрируемости такой системы в зависимости от вида его границы посвящено множество работ. Интегрируемость биллиарда в эллипсе на евклидовой плоскости была доказана в работе Дж. Д. Биркгофа [1]. В случае, когда граница биллиарда является кусочно-гладкой и состоит из частей софокусных квадрик, таких, что углы излома не превышают $\frac{3\pi}{2}$ (то есть, равны $\frac{\pi}{2}$, поскольку софокусные квадрики пересекаются под прямым углом), биллиардное движение так же интегрируемо. В книге [4] В.В. Козлов, Д. В. Трещев отметили, что в этих системах существует дополнительный независимый первый интеграл, что значит, что они вполне интегрируемы по Лиувиллю. В. В. Фокичева в работе [5] полностью классифицировала такие области, называемые простыми, а также области, полученные путем склейки простых областей, и описала топологию возникающих изоэнергетических многообразий в терминах теории инвариантов Фоменко-Цишанга.

Задача о биллиарде в эллипсе на плоскости Минковского была рассмотрена В. Драгович и М. Раднович в работе [3]. Были описаны траектории и построена меченая молекула - инвариант Фоменко-Цишанга слоения Лиувилля биллиардной задачи.

1.2. Необходимые сведения о плоскости Минковского.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.1. *Плоскостью Минковского называется \mathbf{R}^2 со скалярным произведением*

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

Расстояние между 2 точками считается по формуле

$$dist(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

Поскольку скалярное произведение может принимать отрицательные значения, все векторы разделяются на 3 непересекающихся множества. Вектор v называется

- *пространственноподобным*, если его длина вещественная (то есть $\langle v, v \rangle > 0$)
- *временноподобным*, если его длина чисто мнимая (то есть $\langle v, v \rangle < 0$)
- *светоподобным*, если его длина нулевая ($\langle v, v \rangle = 0$)

Два вектора называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю. Отметим, что светоподобные вектора ортогональны сами себе.

Покажем на примере точки 0, как располагаются вектора каждого из 3 типов на плоскости Минковского (рис. 1). Светоподобные вектора располагаются на 2 прямых, и эти прямые (называемые изотропными) разбивают плоскость на 4 части. В верхней и нижней частях расположены вектора мнимой длины, а в правой и левой частях - вектора вещественной длины.

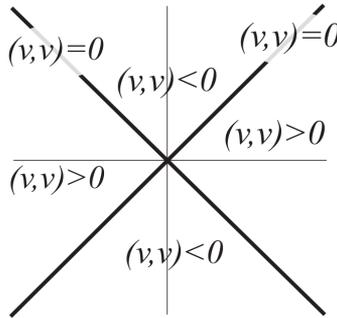


Рис. 1. Расположение векторов на плоскости Минковского в зависимости от их типа.

1.3. Семейство софокусных коник на плоскости Минковского. Рассмотрим на плоскости Минковского эллипс \mathcal{E} , задаваемый следующим соотношением

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$$

Здесь $a > b > 0$ - вещественные числа. Софокусное семейство квадрик \mathcal{C}_λ задается уравнением

$$\mathcal{C}_\lambda: \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} = 1 \quad (1)$$

Данное семейство изображено на рис. 2.

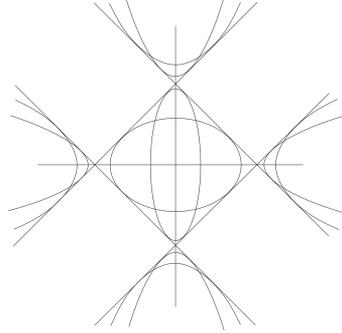


Рис. 2. Семейство софокусных квадрик \mathcal{C}_λ на плоскости Минковского.

В зависимости от значения λ квадрика может быть прямой, эллипсом или гиперболой, а именно:

- при $\lambda \in (-\infty, -b)$ квадрика является гиперболой с действительной осью x
- при $\lambda \in (a, \infty)$ квадрика является гиперболой с действительной осью y
- при $\lambda \in (-b, a)$ квадрика является эллипсом

Значениям $\lambda = a, -b, \infty$ соответствуют вырожденные квадрики $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_{-b}$ и \mathcal{C}_∞ , являющиеся осью y , осью x и прямой на бесконечности соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.1. Все невырожденные квадрики семейства (1) имеют 4 общих касательных - прямые $x \pm y = \sqrt{a \pm b}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A_\lambda = \text{diag} \left\{ \frac{1}{a-\lambda}, \frac{1}{b+\lambda} \right\}$, а \circ обозначает евклидово скалярное произведение. Тогда уравнение прямой, имеющей пересечение с квадриками семейства (1) имеет вид

$$A_\lambda(x + tv) \circ (x + tv) = 1$$

В силу линейности скалярного произведения имеем

$$A(x, x) + 2tA(x, v) + t^2A(v, v) = 1$$

Чтобы прямая лишь касалась квадрики, дискриминант этого уравнения должен быть равен 0, то есть

$$\frac{D}{4} = A^2(x, v) - A(v, v)(A(x, x) - 1) = 0$$

или, что равносильно

$$\left(\frac{xv_1}{a-\lambda} + \frac{v_2y}{b+\lambda}\right)^2 - \left(\frac{v_1^2}{a-\lambda} + \frac{v_2^2}{b+\lambda}\right) \left(\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} - 1\right) = 0$$

раскрывая скобки, имеем

$$\frac{2xyv_1v_2}{(a-\lambda)(b+\lambda)} - \frac{(xv_2)^2}{(a-\lambda)(b+\lambda)} - \frac{(yv_1)^2}{(a-\lambda)(b+\lambda)} + \frac{v_1^2}{a-\lambda} + \frac{v_2^2}{b+\lambda} = 0$$

$$\frac{v_1^2b + \lambda v_1^2 + av_2^2 - v_2^2\lambda - ((xv_2)^2 - 2xyv_1v_2 + (yv_1)^2)}{(a-\lambda)(b+\lambda)} = 0$$

$$\lambda(v_1^2 - v_2^2) = -v_1^2b - av_2^2 + (xv_2 - yv_1)^2 \quad (2)$$

Чтобы это равенство выполнялось при всех λ , нужно положить $|v_1| = |v_2|$. Тогда

$$-v_1^2(b+a) + v_1^2(x \pm y)^2 = -v_1^2(b+a - (x \pm y)^2) = 0$$

Откуда имеем уравнения для общих касательных

$$x + y = \pm\sqrt{a+b} \quad x - y = \pm\sqrt{a+b} \quad (3)$$

Отметим, что все 4 касательных имеют светоподобные направляющие вектора.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.2. Семейство (1) имеет 4 фокуса - $F_1 = (-\sqrt{a+b}, 0)$, $F_2 = (\sqrt{a+b}, 0)$, $G_1 = (0, -\sqrt{a+b})$, $G_2 = (0, \sqrt{a+b})$. Для эллипса с параметром λ сумма расстояний от фокусов F_1, F_2 до любой точки вещественной части эллипса равно $2\sqrt{a-\lambda}$, а от G_1, G_2 до любой точки мнимой части эллипса равно $2i\sqrt{b+\lambda}$. Кроме того, для гиперболы с параметром λ разность расстояний от фокусов F_1, F_2 до любой вещественной точки гиперболы равно $2\sqrt{a-\lambda}$, а от G_1, G_2 до любой точки мнимой части гиперболы равно $2i\sqrt{b+\lambda}$. Здесь вещественной частью эллипса (гиперболы) называется та часть, касательные векторы к которой вещественны, мнимой - та часть, касательные векторы к которой мнимые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим справедливость данного утверждения для эллипса. Для гипербол доказательство аналогично.

Пусть λ_1 - параметр эллипса. Параметризуем эллипс следующим образом: $x = \sqrt{a-\lambda} \cos(t)$, $y = \sqrt{b+\lambda} \sin(t)$, где $t \in [0, 2\pi]$. Тогда расстояние от F_1 и F_2 до произвольной точки $A = (x, y)$ эллипса равно

$$|AF_1| = \sqrt{(\sqrt{a-\lambda} \cos(t) + \sqrt{a+b})^2 - (\sqrt{b+\lambda} \sin(t))^2} = |\sqrt{a+b} \cos(t) + \sqrt{a-\lambda}|$$

$$|AF_2| = \sqrt{(\sqrt{a-\lambda} \cos(t) - \sqrt{a+b})^2 - (\sqrt{b+\lambda} \sin(t))^2} = |\sqrt{a+b} \cos(t) - \sqrt{a-\lambda}|$$

Таким образом, если $-\frac{\sqrt{a-\lambda}}{\sqrt{a+b}} < \cos(t) < \frac{\sqrt{a-\lambda}}{\sqrt{a+b}}$ (или $|x| < \frac{a-\lambda}{\sqrt{a+b}}$, $\frac{b+\lambda}{\sqrt{a+b}} < |y| < \sqrt{b+\lambda}$, то есть точка A принадлежит вещественным сегментам эллипса), то сумма расстояний от фокусов F_1, F_2 до произвольной точки вещественного сегмента эллипса равна $|F_1A| + |F_2A| = 2\sqrt{a-\lambda}$.

Аналогично, получаем, что при $\frac{a-\lambda}{\sqrt{a+b}} < |x| < \sqrt{a-\lambda}$, $|y| < \frac{b+\lambda}{\sqrt{a+b}}$ (то есть точка принадлежит мнимым сегментам эллипса) сумма расстояний от произвольной точки мнимого сегмента эллипса A до фокусов G_1, G_2 равна $2i\sqrt{b+\lambda}$.

На рис.3 отмечено, как расположены общие касательные и фокусы относительно семейства квадрик.

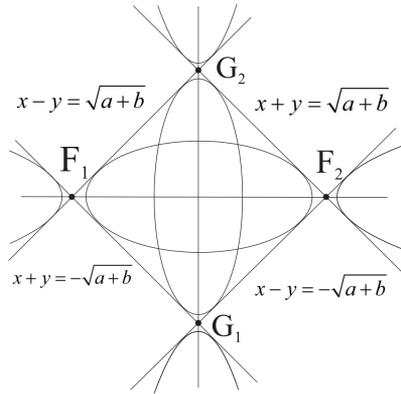


Рис. 3. Расположение общих касательных и фокусов относительно семейства квадрик.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.3. Если 2 квадрики семейства пересекаются в некоторой точке A , то касательные векторы к квадратикам в этой точке ортогональны друг другу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть 2 квадрики с параметрами λ_1 и λ_2 пересекаются. Найдем точки пересечения. Поскольку семейство симметрично относительно координатных осей, далее считаем x и y положительными.

Итак, запишем уравнения квадрик с параметрами λ_1 и λ_2 и разрешим их относительно (x, y) - точки пересечения.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a-\lambda_1} + \frac{y^2}{b+\lambda_1} = 1 \\ \frac{x^2}{a-\lambda_2} + \frac{y^2}{b+\lambda_2} = 1. \end{cases}$$

Введем для упрощения вычисления следующие обозначения $a-\lambda_1 = a'$, $b+\lambda_1 = b'$ и $\lambda_1-\lambda_2 = \lambda'$. Тогда система переписывается в виде

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a'} + \frac{y^2}{b'} = 1 \\ \frac{x^2}{a'-\lambda'} + \frac{y^2}{b'+\lambda'} = 1. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения x^2

$$x^2 = \left(1 - \frac{y^2}{b'}\right) a'$$

Подставим во второе уравнение и выразим y

$$\begin{aligned} \frac{a'}{a' - \lambda'} \left(1 - \frac{y^2}{b'}\right) + \frac{y^2}{b' + \lambda'} &= 1 \\ (b' + \lambda') \left(a' - \frac{a'}{b'}y^2\right) + y^2(a' - \lambda') &= (a' - \lambda')(b' + \lambda') \\ y^2 \left(\frac{a'}{b'} + 1\right) &= (b' + \lambda') \\ y &= \sqrt{\frac{b'}{a' + b'}(b' + \lambda')} \end{aligned}$$

И, подставляя в 1 уравнение системы, находим x

$$x = \sqrt{\frac{a'}{a' + b'}(a' - \lambda')}$$

Дифференцируя уравнение квадратики, находим, что в 1 четверти координатной плоскости

$$u_2 = \frac{\frac{b'}{a'}xu_1}{\sqrt{b' - \frac{b'x^2}{a'}}} \quad v_2 = \frac{\frac{b'+\lambda'}{a'-\lambda'}xv_1}{\sqrt{(b'+\lambda')\left(1 - \frac{x^2}{a'-\lambda'}\right)}}$$

Подставляя координаты точки пересечения, находим

$$u_2 = \sqrt{\frac{(a' - \lambda')b'}{(b' + \lambda')a'}}u_1 \quad v_2 = \sqrt{\frac{(b' + \lambda')a'}{(a' - \lambda')b'}}v_1$$

Или

$$u_2 = k_1u_1 \quad v_2 = k_2v_1$$

Нетрудно заметить, что

$$(v, u) = v_1u_1 - v_2u_2 = v_1u_1 - k_1k_2v_1u_1 = v_1u_1(1 - k_1k_2) = 0$$

откуда следует утверждение об ортогональности касательных векторов.

1.4. Биллиардный закон на плоскости Минковского.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.1. Пусть v - вектор, ℓ - некоторая прямая. Представим вектор в виде $v = v_n + v_\ell$, где v_n нормальная составляющая вектора скорости, а v_ℓ принадлежит ℓ . Тогда *биллиардным отражением вектора* вектора v от прямой ℓ назовем вектор $v' = -v_n + v_\ell$.

В случае, когда v_ℓ светоподобен, отражение не определено.

При таком определении отражения сохраняется скалярное произведение вектора на себя, откуда следует что тип вектора не меняется.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.2. Прямую ℓ' назовем *биллиардным отражением прямой* ℓ от гладкой кривой S , если

- точка пересечения этих прямых A лежит на кривой \mathcal{S}
- направляющие вектора этих прямых являются бильярдными отражениями друг друга относительно касательной e к кривой \mathcal{S} в точке A .

Если направляющий вектор e светоподобен, то бильярдное отражение вектора и прямой не определено.

Отметим, что такое определение обладает свойством симметричности.

1.5. Бильярдное движение в простых областях. Первые интегралы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5.1. *Простой областью* Ψ назовем двумерное, связное, плоское, компактное многообразие с кусочно-гладким краем, состоящим из таких сегментов квадрат семейства (1), которые попарно пересекаются под углами, не превосходящими π .

Тогда в точках, где касательная к области светоподобна, бильярдное отображение вектора можно доопределить по непрерывности, а именно - при попадании в такую точку вектор отражается в противоположный по направлению. Такие точки - точки касания одной из прямых $x \pm y = \sqrt{a \pm b}$, которые являются общими для всего семейства (1).

Определим фазовое пространство бильярда внутри области Ψ следующим образом.

Пусть множество точек внутри и на границе области Ψ это M^2 . Тогда фазовое пространство бильярда это четырехмерное многообразие M^4 , такое что

$$M^4 = \{(x, y, v_1, v_2) | (x, y) \in M^2, (v_1, v_2) \in T_x R^2\} / \sim$$

Отношение эквивалентности задается следующим образом:

$(x_1, y_1, v_1, w_1) \sim (x_2, y_2, v_2, w_2)$ если

- $x_1 = x_2, y_1 = y_2$, точка (x_1, y_1) лежит на границе области Ψ
- $(v_1, w_1) \in l_1, (v_2, w_2) \in l_2$, при этом l_1 является бильярдным отражением прямой l_2
- $v_1^2 + w_1^2 = v_2^2 + w_2^2$

Итак, пусть гамильтонианом в данной задаче является функция $v_E = v_1^2 + v_2^2$. В самом деле, при таком отношении эквивалентности сохраняется именно евклидова длина вектора скорости, а длина минковского меняется.

В качестве дополнительного первого интеграла возьмем λ - параметр кастрики к траектории. Выражение λ через координаты M^4 нетрудно получить из соотношения (2). Тогда

$$\lambda = \frac{-v_1^2 b - a v_2^2 + (x v_2 - y v_1)^2}{v_1^2 - v_2^2}$$

При отражении λ сохраняется (в этом можно убедиться подстановкой в выражение для λ координат вектора до и после отражения).

В силу функциональной независимости v_e и λ , бильярд в простой области интегрируем по Лиувиллю.

Ограничивая систему на поверхность уровня первого интеграла $v_1^2 + v_2^2$, получим трёхмерное многообразие, называемое изоэнергетической поверхностью

Q^3 . В зависимости от изменения λ оно расслаивается на двумерные поверхности.

ТЕОРЕМА 1.1. (*Е. Гуткин, [6]*) *Изоэнергетическая поверхность Q^3 бильярда в любой плоской односвязной области Ω , ограниченной гладкой или кусочно-гладкой кривой, углы излома которой составляют $\frac{\pi}{2}$, гомеоморфна сфере S^3 .*

Итак, для бильярда в любой простой области изоэнергетическая поверхность Q^3 гомеоморфна сфере S^3 .

В этой работе мы классифицируем все простые области, ограниченные дугами семейства софокусных квадрик семейства (1), и изучим топологию их слоения Лиувилля в терминах инвариантов Фоменко-Цишанга, построив для каждой области меченую молекулу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5.2. Пусть $(M_1^4, \omega_1, f_1, g_1)$ и $(M_2^4, \omega_2, f_2, g_2)$ - две интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы, рассмотренные на симплектических многообразиях (M_1^4, ω_1) и (M_2^4, ω_2) и обладающие первыми интегралами f_1, g_1 и f_2, g_2 . Рассмотрим их изоэнергетические многообразия $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$ и $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$. Интегрируемые гамильтоновы системы называют *лиувиллево эквивалентными*, если существует послойный диффеоморфизм $Q_1^3 \rightarrow Q_2^3$, сохраняющий ориентацию 3-многообразий Q_1^3 и Q_2^3 и ориентацию всех критических окружностей.

ТЕОРЕМА 1.2. (*А. Т. Фоменко, Х. Цишанг*) *Две невырожденные интегрируемые гамильтоновы системы на изоэнергетических поверхностях $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$ и $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$ лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.*

1.6. Бильярд в эллипсе. Траектории. Покажем, как при изменении параметра каустики λ меняются траектории на примере бильярда в эллипсе \mathcal{E} .

При $\lambda \in (-\infty, -b)$ касательные к траекториям являются касательные к гиперболом с действительной осью x семейства (1). Тогда все траектории являются времениподобными и полностью закрывают внутренность эллипса \mathcal{E} . Аналогично, при $\lambda \in (a, \infty)$ каустиками будет гиперболы с действительной осью y , траектории времениподобны и также закрывают всю внутренность эллипса.

При $\lambda = \infty$ каустикой является прямая на бесконечности. При стремлении λ к ∞ сверху и снизу псевдоевклидова длина вектора скорости может лишь только уменьшаться. Поэтому при предельном переходе получим траектории, направляющий вектор которых светоподобен. Проекция тора лиувилля для этого значения λ - вся внутренность области.

При $\lambda \in (-b, 0)$ траектории касаются софокусного эллипса. Торы Лиувилля проектируются на 2 части эллипса (они выделены темным на рис.4, а.). Такие траектории являются времениподобными.

При $\lambda \in (0, a)$ траектории также касаются софокусного эллипса, и проекции торов лиувилля также 2 части эллипса - выделены темным на рис. 4, б.. Эти траектории времениподобны.

Все вышеописанные значения λ (а так же траектории, соответствующие эти значениям интеграла) называются неособыми.

Остальные уровни интеграла называются особыми (более точное определение особых и неособых уровней интеграла для произвольной простой области дано в 3.1). Опишем траектории, лежащие на особых уровнях интеграла.

- $\lambda = a$, тогда касательной к траектории будет ось y . Множество траекторий (которые будут времениподобными) состоит из одной периодической траектории, расположенной вдоль оси y , и 2 непересекающихся множеств гомоклиных траекторий, касательные к которым проходят через пары фокусов, расположенных на оси y .
- $\lambda = -b$, тогда касательной к траектории является ось x . Множество траекторий (которые будут пространственноподобными) состоит из периодической траектории, расположенной вдоль оси x , и двух непересекающихся множеств гомоклиных траекторий, касательные к которым проходят через пару фокусов, лежащих на оси x .
- $\lambda = -0, +0$. Каустикой является эллипс. В первом случае траектории пространственноподобные и движение происходит вдоль сегментов, отмеченных на рис.4, *c*, а во втором - времениподобные и движение происходит вдоль сегментов, отмеченных на рис. 4, *d*. Иных траекторий при таких λ нет, поскольку сегменты являются выпуклыми относительно внутренности эллипса, значит, не могут отражаться от границы каким-либо другим способом.

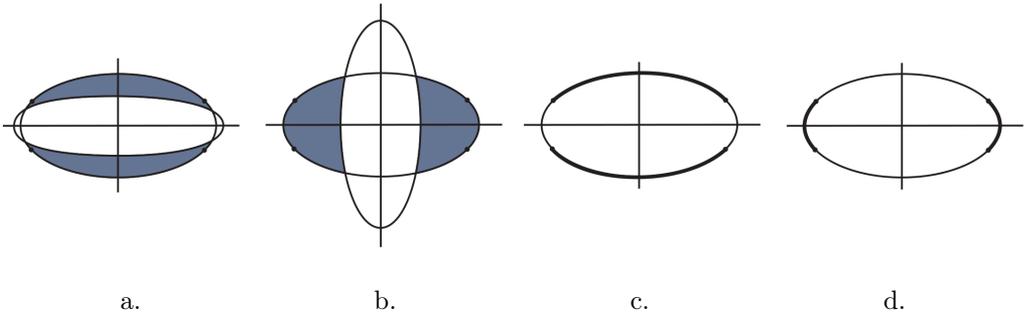


Рис. 4. Области возможного движения при различных значениях λ

§ 2. Классификация простых областей

2.1. Отношение эквивалентности простых областей. Определение простой области было дано в пункте 1.5.

Общие касательные семейства софокусных квадрик делят плоскость на несколько частей, и в пяти из них могут располагаться софокусные эллипсы или гиперболы. Назовем их I, II, III, IV и V так, как показано на рис. 5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.1. Назовем простую область *эллиптической*, если ее граница состоит из дуг софокусных эллипсов и, возможно, частей координатных

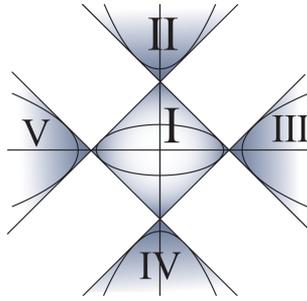


Рис. 5. Области I, II, III, IV и V на плоскости.

осей, а *гиперболической*, если ее граница состоит из дуг софокусных гипербол и, возможно, частей координатных осей.

Отметим, что в данной ситуации не существует простой области, границы которой состоят из дуг как эллипсов, так и гипербол, так как они расположены в частях различных частях плоскости (эллипсы располагаются только в I, а гиперболы - в II, III, IV, V)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.2. Две простых области Ψ и Ψ' называем *эквивалентными друг другу* если

- они могут быть получены одна из другой отражением относительно оси x или оси y
- изменением параметра λ сегмента границы, (исключая λ , соответствующие значениям a и $-b$) так, чтобы в процессе их изменения λ не принимал значений a , $-b$ и ∞

2.2. Классификация эллиптических областей.

ТЕОРЕМА 2.1. Любая простая эллиптическая область эквивалентна одной из областей, представленных на рис. 7 на стр. 12.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пересечем между собой 4 эллипса, соответствующих параметрам $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и λ_4 , таких что $a > \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > -b$. Будем рассматривать далее внутренность эллипса, соответствующего параметру λ_3 , назовем ее Ω . Разрежем Ω вдоль дуг эллипсов с параметрами λ_1, λ_2 и λ_4 , получим 24 области, которые пронумеруем так, как показано на рис.6 Попробуем путем склейки по границе несколько частей Ω_i получить максимальное число простых неэквивалентных областей. Отметим, что углы между сегментами не должны становиться $\frac{3\pi}{2}$.

Начиная с Ω_1 (которую назовем Ψ'_1), приклеиваем по границе разреза Ω_2 (полученную простую область назовем Ψ_1), к Ψ_1 приклеим Ω_5 (получим простую область Ψ_2) и далее - в соответствии с рис.7

Далее проделываем аналогичную операцию, начиная с области Ω_2 , с Ω_3 и с Ω_4 . Получим области, показанные на рис. 7

Эллипс обозначим Ψ_0 .

Обозначаем за Ψ_i и Ψ^i ($i > 0$) области, которые получаются друг из друга поворотом на $\frac{\pi}{2}$. Области Ψ_i делятся на три группы

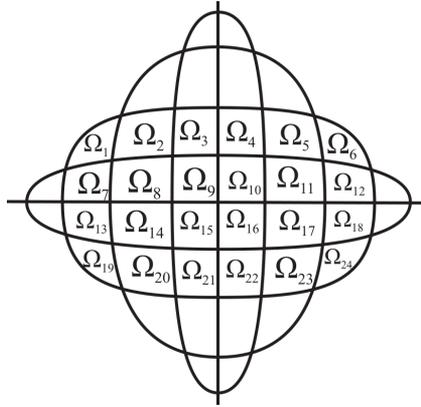


Рис. 6. Пронумерованные области Ω_i в эллипсе с параметром λ_3 .

- области, которые касаются оси y ($i = 1, 7$)
- области, пересекает ось y и, быть может, пересекают ось x лишь по границе ($i = 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11$)
- области, симметричные относительно оси y , внутренность которых пересекает оси x и y ($i = 6, 12$).

Те области, которые при повороте на $\frac{\pi}{2}$ перейдут в эквивалентную себе область, обозначаем Ψ'_i .

Отметим, что начиная с любой другой Ω_i , получим области, эквивалентные уже полученным ранее.

В процессе некоторые полученные области будут эквивалентны полученным ранее (к примеру, область, полученная склейкой Ω_1 и Ω_2 , эквивалентна Ω_1)

Также отметим, что такого перебора достаточно - разрезая внутренность эллипса с параметром λ_3 по дугам 5 софокусных эллипсов, и склеивая части друг с другом, следуя вышеописанному алгоритму, не получим новых неэквивалентных простых областей.

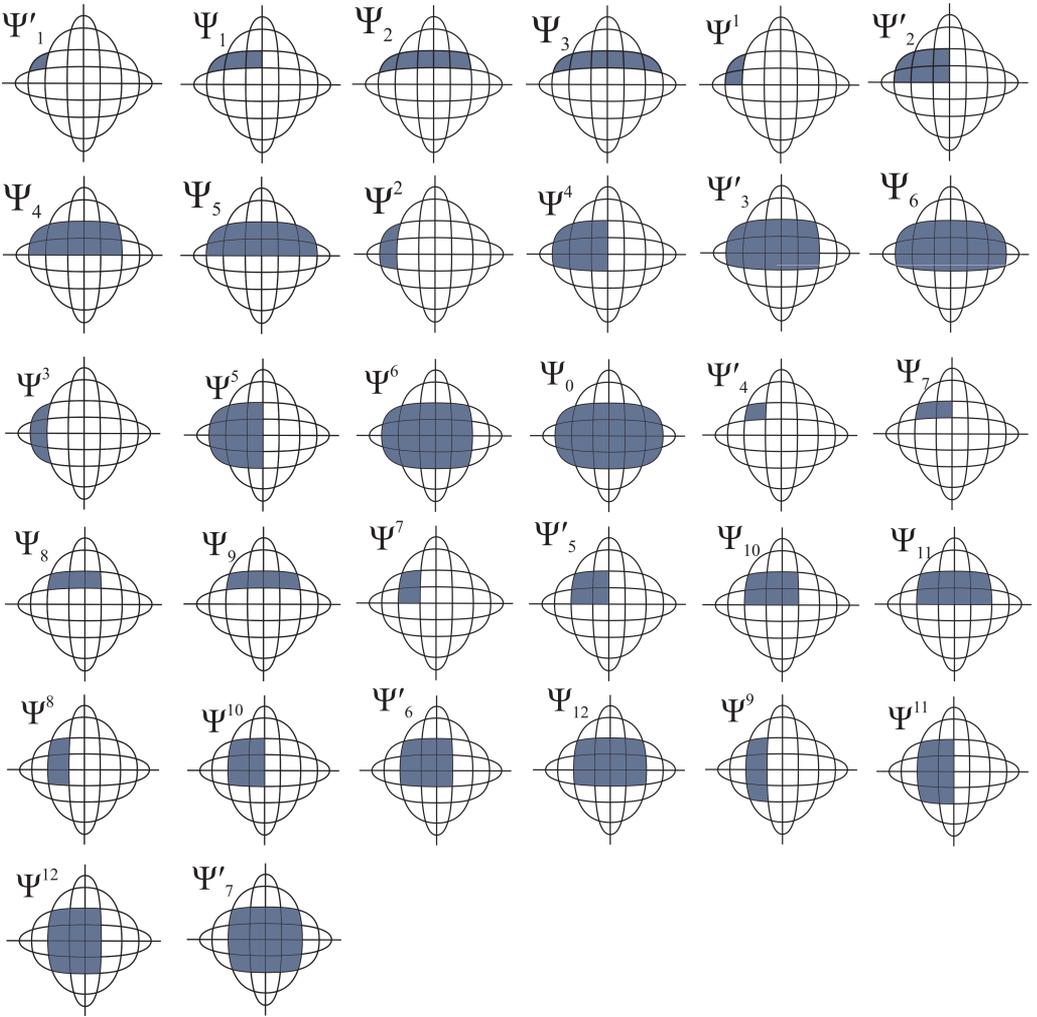


Рис. 7. Классификация эллиптических областей.

2.3. Классификация гиперболических областей.

ТЕОРЕМА 2.2. *Любая простая гиперболическая область эквивалентна одной из 16 областей, представленных на рис. 8.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично пункту 2.2, с разницей лишь в том, что пересекаем 4 дуги гиперболы в области IV с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и λ_4 , таких, что $-b > \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > -\infty$ (либо в области III с параметрами $a < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < \infty$), рассматриваем компактную область, образованную пересечением гипербол с параметрами λ_3 и λ_4 . Разрезав область Ω по дугам софокусных гипербол, получим 6 областей Ω_i , и далее путем последовательного склеивания друг с другом различных Ω_i получим области, изображенные на рис.8.

Для остальных областей плоскости (II и V) доказательство аналогично.

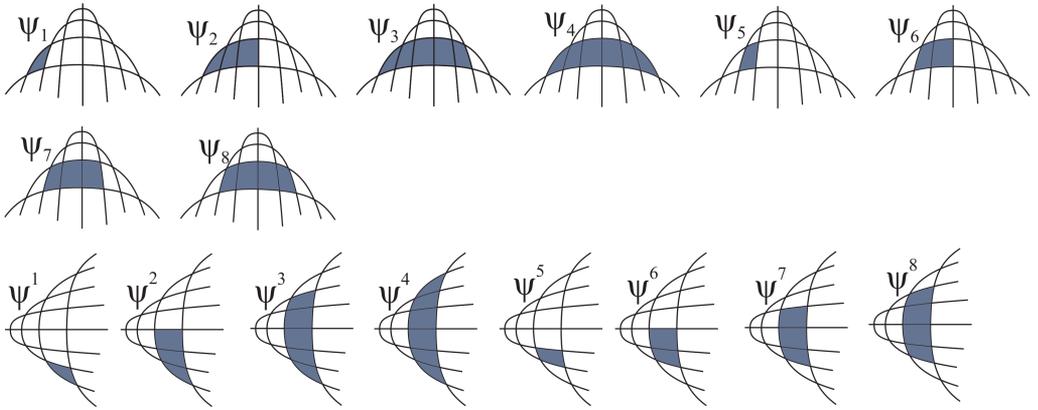


Рис. 8. Классификация гиперболических областей.

§ 3. Вычисление грубых инвариантов Фоменко-Цишанга

3.1. Особые и граничные уровни интеграла. Рассмотрим биллиардное движение в некоторой простой области Ψ (эллиптической или гиперболической). Фиксируем значение v_E . Исследуем, как выглядит сечение Q^3 при различных значениях интеграла λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.1. Граница области Ψ состоит из нескольких дуг квадрик. Рассмотрим те из них, что являются выпуклыми по отношению к внутренности области Ω . Те значения $\lambda = bord$, что им соответствуют, будем называть граничными.

Если внутренность области пересекает ось x или y , выделим также значение λ , равное $-b$ или a соответственно, и будем далее называть его седловыми.

Будем называть особыми седловые и граничные значения интеграла λ . Все остальные его значения называем неособыми.

Траектории, лежащие на уровнях $\lambda = bord, a$ и $-b$ (граничных и седловых), будем называть особыми траекториями. Все остальные - неособые.

Особые траектории при седловых значениях интеграла такие же, как и в случае эллипса (подробное описание можно найти в 1.6).

Отметим фокальное свойство особых седловых траекторий: в любой момент времени траектория лежит на прямой, проходящей поочередно через один из фокусов, лежащих на прямой y (в случае, если $\lambda = a$) или x (в случае, если $\lambda = -b$). Смена фокуса происходит при отражении траектории от границы.

Опишем особые граничные траектории.

При таком движении каустикой является квадрика, часть границы которой принадлежит границе области Ψ . По определению, такая дуга выпукла по отношению к внутренности области Ω , поэтому траектории не могут отражаться от границы и движение происходит по дуге квадрики.

В точках границы, где нарушается гладкость (точки пересечения дуг эллипсов, которые составляют границу), вектор отождествляется с противоположным ему по направлению и равным по длине в евклидовом смысле.

Кроме того, в точках касания границы области с общими касательными (3), вектор также отождествляется с противоположным по направлению и равным по евклидовой длине (по определению отношения эквивалентности в простой области).

Итак, особыми траекториями в случае граничного значения интеграла являются движения по дуге границы, отвечающего значению $\lambda = bord$. В многообразии Q^3 таким траекториям соответствуют одна либо две окружности.

В некоторых случаях помимо особых траекторий на граничном уровне интеграла могут лежать и неособые - пример показан на рис. 9. Пунктиром выделена квадрика, соответствующая $\lambda = bord$, заштрихована область, внутри которой происходит движение помимо сегмента границы.

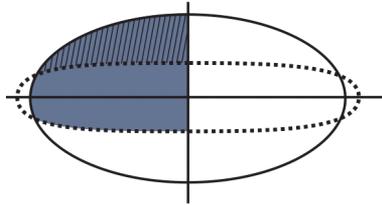


Рис. 9. Пример области, где при граничном значении λ движение происходит не только по сегменту

3.2. Теорема Лиувилля. Эллиптические области.

3.2.1. *Случай, когда каустикой является гипербола или прямая на бесконечности.* Покажем далее, что все неособые поверхности уровня интеграла λ гомеоморфны объединению торов (одного или двух).

ЛЕММА 3.2.1. Пусть область Ω - эллиптическая. При $\lambda \in [\infty, -b) \cup (a, \infty]$ поверхность уровня интеграла λ расслаивается в изоэнергетической поверхности Q^3 на торы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.1. Назовем торы пространственноподобными или вещественными, если они соответствуют тем уровням интеграла, на которых лежат пространственноподобные траектории. Аналогично, торы будем называть *временноподобными* или мнимыми, если траектории временноподобны, и *светоподобными*, если траектории светоподобны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем значение λ , принадлежащее указанному интервалу.

Рассмотрим часть области, в которую проектируются точки, лежащие на уровне интеграла λ . Поскольку квадрики, соответствующие значениям λ из указанного интервала, являются гиперболами или прямой на бесконечности, то на плоскости Минковского они не пересекаются с эллипсами. Поэтому проекция поверхности уровня таких значений интеграла будет в точности область Ω .

Каждой точке области (x, y) соответствуют 4 вектора скорости v_i так, что точка (x, y, v_i) лежит на соответствующем уровне интеграла. Вектора скорости будем различать по направлению (на рис. 10 показаны 4 вида различных векторов). Получим 4 экземпляра области Ω , оснащенные одним из 4 векторов скорости. Обозначим их (Ω, v_i) , где i принимает значения 1,2,3,4.

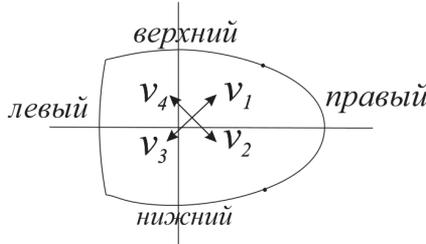


Рис. 10. Названия сегментов границы области Ω . Направление векторов скорости v_1, v_2, v_3, v_4 в области Ω .

Посмотрим, как отождествляются вектора на границе области.

На границе каждой области есть 4 точки, при попадании в которые вектор продолжает движение в строго противоположном направлении. Это либо точка нарушения гладкости (пересечение граничных квадрик), либо точка касания границы с одной из общих касательных (3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.2. Такие точки делят границу на 4 части, которые будем называть верхним, нижним, левым и правым сегментами в зависимости от их расположения относительно этих точек (как показано на рис. 10).

На нижних и верхних сегментах отождествляем v_1 с v_2 , а v_3 с v_4 . На левых и правых сегментах отождествляем v_1 с v_4 , а v_2 с v_3 . Поэтому области (Ω, v_i) склеиваем друг с другом следующим образом: по нижним и верхним сегментам склеиваем (Ω, v_1) с (Ω, v_2) , а (Ω, v_3) с (Ω, v_4) , а по левым и правым сегментам склеиваем (Ω, v_1) с (Ω, v_4) , а (Ω, v_2) с (Ω, v_3) (так, как показано на рис. 11, пунктиром соединены отождествленные векторы). Тогда уровень интеграла гомеоморфен 4 четырехугольникам, склеенным между собой по вышеописанному правилу. Легко видеть, что он представляет собой тор.

3.2.2. Случай, когда каустикой является эллипс.

ЛЕММА 3.2.2. При $\lambda \in (-b, a)$, не являющихся граничными, поверхность уровня интеграла λ расслаивается в изоэнергетической поверхности Q^3 на объединение одного или двух торов..

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем значение λ , принадлежащее указанному интервалу.

Естественная проекция интеграла λ на область Ω распадается на несколько простых областей и, в некоторых случаях, сегментов квадрик. Отбросив ту часть области, в которую не проецируются точки, лежащие на уровне интеграла, обозначим полученное несвязное объединение некоторого количества

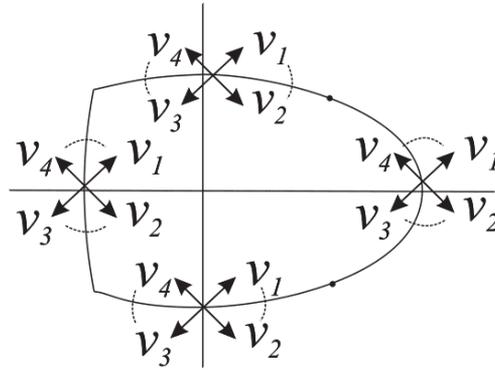


Рис. 11. Отождествление векторов v_1, v_2, v_3, v_4 на границе области Ω .

простых областей и сегментов квадрик за Ω' . Каждой связной компоненте присвоим номер i и обозначим ее Ω'_i .

Если Ω'_i представляет собой простую область, то по вышеописанному алгоритму она склеивается в тор.

Оценивая количество таких Ω'_i для различных значений λ и различных областей, имеем следующий результат.

Очевидно что в случае, когда область не пересекает координатных осей, либо пересекает их не более чем по границе, Ω'_i будет равно одно. Граничных значений λ может быть четыре ($-b \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 \leq a$) либо три ($-b \leq \lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4 \leq a$). Тогда при $\lambda \in (-b, \lambda_2)$ тор будет пространственноподобным, при $\lambda = -\lambda_2$ возникает вещественная окружность, при $\lambda \in (\lambda_3, a)$ - времениподобный тор, при $\lambda = +\lambda_3$ - мнимая окружность.

Рассмотрим случай пересечения внутренности области одной координатной оси. Пусть эта координатная ось - y . Граничных значений λ может быть четыре ($-b \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < a$), три ($-b \leq \lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4 < a$ или $-b \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 = \lambda_4 < a$ - симметричная область) либо два ($-b \leq \lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 < a$). При возрастании λ от значения $-b$ до значения λ_2 в прообразе имеем один пространственноподобный тор, при $\lambda = -\lambda_2$ возникает вещественная окружность, при $\lambda \in (\lambda_4, a)$ в прообразе будут 2 времениподобных тора. В случае, если $\lambda_3 \neq \lambda_4$, при $\lambda \in (\lambda_3, \lambda_4)$ возникает один времениподобный тор, а при $\lambda = +\lambda_4$ один времениподобный тор и времениподобная окружность. Если же $\lambda_3 = \lambda_4$ два тора возникают при $\lambda \in (\lambda_3, \lambda_4)$, и при $\lambda = +\lambda_4$ - две времениподобные окружности.

Если пересечение области происходило с координатной осью x , доказательство идентично, но времениподобные торы заменяются пространственноподобными и наоборот.

Рассмотри случай пересечения внутренности области обеих координатных осей. Граничных значений может быть четыре ($-b < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < a$), три ($-b < \lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4 < a$, и две области полученные друг из друга поворотом - $-b < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 = \lambda_4 < a$ и $-b < \lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < a$). Рассмотрим лишь первую из них, для второй доказательство аналогично), два

($-b < \lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3 = \lambda_4 < a$, и области полученные друг из друга поворотом - $-b < \lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 < a$ и $-b < \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4 < a$, аналогично, рассматриваем лишь первую) и одно (все λ_i равны).

Тогда, при $\lambda \in (-b, \lambda_1)$ имеем в прообразе два пространственноподобных тора, далее имеем два случая - $\lambda_1 = \lambda_2$ (тогда при $\lambda = -\lambda_1$ возникают две вещественные окружности) и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Во втором случае при $\lambda = -\lambda_1$ имеем окружность и вещественный тор, при $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ возникает один пространственноподобный тор, и при $\lambda = -\lambda_2$ - пространственноподобная окружность. Далее, при $\lambda \in (\lambda_4, a)$ - два времениподобных тора. Если $\lambda_3 = \lambda_4$, то при $\lambda = +\lambda_4$ имеем две времениподобные окружности, иначе - окружность и времениподобный тор, и при уменьшении λ от λ_4 до λ_4 - один времениподобный тор, и при $\lambda = +\lambda_3$ - одна времениподобная окружность.

3.2.3. Особые уровни интеграла.

ЛЕММА 3.2.3. *При граничных значениях λ поверхность уровня интеграла λ в изоэнергетической поверхности представляет собой либо окружность, либо две окружности, либо окружность и тор.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что при доказательстве леммы 3.2.2 мы полностью описали всевозможные прообразы значений λ из указанного промежутка и тем самым доказали лемму.

ЛЕММА 3.2.4. *Прообраз малой окрестности седловых значений интеграла λ в многообразии Q^3 гомеоморфен атому B .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda = -b$.

По условию, λ принимает одно из седловых значений. По предположению, это $-b$, значит, рассматриваемая область Ω пересекает ось x не по границе.

Рассмотрим пересечение оси x и области Ω и обозначим этот отрезок $[f_1, f_2]$.

Траектории соответствующие этому уровню интеграла распадаются на 3 непересекающихся семейства : траектория, представляющая собой периодическое движение по $[f_1, f_2]$, и 2 семейства траекторий в частях области Ω , расположенных выше и ниже оси x , касательные к которым поочередно проходят через фокусы F_1 и F_2 (фокус меняется на противоположный при отражении от границы области).

Всю область расслаиваем на дуги софокусных эллипсов с параметрами $\lambda \in (\lambda_3, a)$ (здесь λ_3 - то же значение, что и в доказательстве 3.2.2. Выделим одну дугу эллипса, обозначим за s ту ее часть что лежит в Ω .

Оснастим каждую точку $x_0 \in [f_1, f_2]$ 2 единичными векторами скорости, направленными по оси x к правому и левому фокусам. Среди всех дуг s выделим ту, что пересекает ось x в точке x_0 , фиксируем вектор скорости в точке x_0 и оснастим каждую точку в соответствии с фиксированным направлением следующим образом : если фиксирован вектор к фокусу F_2 , то оснастим точку, принадлежащую s векторами v_1 (направим его из фокуса F_1) и v_2 (направим его к фокусу F_2), далее полученные дуги эллипса называем правыми, если же фиксирован вектор к фокусу F_1 , то оснастим точку, принадлежащую s векторами v_4 (направим его из фокуса F_2) и v_3 (направим его к фокусу F_1), далее полученные дуги эллипса называем левыми.

На границе области по закону отражения отождествляем $(x, v_1) \sim (x, v_2)$, и $(x, v_3) \sim (x, v_4)$. На отрезке $[f_1, f_2]$ два вектора склеиваются в один таким же образом, то есть $(x, v_1) \sim (x, v_2)$, и $(x, v_3) \sim (x, v_4)$. На границе области (случай, когда s лежит на границе области), отождествляем $(x, v_1) \sim (x, v_4)$, и $(x, v_2) \sim (x, v_3)$. Таким образом правые дуги склеены с левыми дугами.

Итак, получили, что прообраз $\lambda = -b$ гомеоморфен прямому произведению окружности (прообраз отрезка $[f_1, f_2]$) на восьмерку.

Теперь рассмотрим уровни интеграла, лежащие в промежутке $[-b - \varepsilon, -b + \varepsilon]$ (здесь ε считаем настолько малым, чтобы значения λ , попадающие в этот отрезок, не являлись граничными). Посмотрим, как в Q^3 выглядят прообразы таких оснащенных векторами дуг. Как легко видеть из закона отражения от границы области и доказательства 3.2.2, при $\lambda = -b + \varepsilon$ прообраз оснащенных дуг - две окружности, а при $\lambda = -b - \varepsilon$ - одна окружность.

Итак, при оснащении векторами дуг эллипсов, лежащих внутри области, так, чтобы прообразы всех точек этих дуг лежали в малой окрестности $\lambda = -b$, такие точки представляют собой плоский атом B .

В случае $\lambda = a$ доказательство аналогично.

3.3. Теорема Лиувилля. Гиперболические области.

3.3.1. Случай, когда каустикой является эллипс.

ЛЕММА 3.3.1. *При $\lambda \in (-b, a)$ поверхность уровня интеграла λ расслаивается в изоэнергетической поверхности Q^3 на торы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем значение λ , принадлежащее указанному интервалу. Рассмотрим часть области, в которую проектируются точки, лежащие на уровне интеграла λ . Поскольку квадрики, соответствующие значениям λ из указанного интервала, являются эллипсами, то на плоскости Минковского они не пересекаются с гиперболическими областями. Поэтому проекция поверхности уровня таких значений интеграла будет в точности область Ω .

Следуя алгоритму из пункта 3.2.1 можно показать что поверхность уровня интеграла λ , лежащее в указанном интервале, в многообразии Q^3 гомеоморфна тору.

3.3.2. Случай, когда каустикой является гипербола или прямая на бесконечности.

ЛЕММА 3.3.2. *При $\lambda \in [-\infty, -b) \cup (a, \infty]$, не являющиеся граничными, поверхность уровня интеграла λ расслаивается в изоэнергетической поверхности Q^3 на торы (один или два).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем что область Ω лежит в IV.

Фиксируем значение λ , принадлежащее указанному интервалу.

Естественная проекция интеграла λ на область Ω распадается на несколько простых областей и, в некоторых случаях, сегментов квадрик. Отбросив ту часть области, в которую не проецируются точки, лежащие на уровне интеграла, обозначим полученное несвязное объединение некоторого количества простых областей и сегментов квадрик за Ω' . Каждой связной компоненте присвоим номер i и обозначим ее Ω'_i .

Аналогично случаю эллиптических областей, считаем количество связных компонент в Ω' и склеиваем их в торы по алгоритму, описанному в разделе 3.2.1.

Опишем прообразы различных значений интеграла λ в Q^3 .

Пусть область не пересекает координатных осей. Тогда граничных значений λ может быть четыре ($a \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < \infty$) либо три ($a \leq \lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4 < \infty$).

Тогда при $\lambda \in (a, \lambda_2)$ в прообразе имеем один мнимый тор. Тогда легко видеть, что при $\lambda = -\lambda_2$ возникает мнимая окружность. Далее, при $\lambda \in (\lambda_3, \infty)$ имеем один вещественный тор, и при $\lambda = +\lambda_3$ - вещественная окружность. В предельном случае, когда $\lambda = \infty$, имеем один светоподобный тор.

Рассмотрим случай, когда внутренность области пересекает координатную ось y . Различных граничных значений λ может быть четыре ($a < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < \infty$), три ($a < \lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4 < \infty$ или $a < \lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < \infty$ - симметричная относительно оси y область) или два ($a < \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4 < \infty$).

Тогда при $\lambda \in (a, \lambda_1)$ имеем два мнимых тора. В случае $\lambda_1 = \lambda_2$ имеем две мнимые окружности при $\lambda = -\lambda_1$, иначе - одна мнимая окружность и один мнимый тор, при уменьшении λ до значения λ_3 - мнимый тор и при $\lambda = +\lambda_3$ - мнимая окружность. Далее, при уменьшении λ от λ_3 до ∞ - один вещественный тор, и как предельный случай имеем один светоподобный тор при $\lambda = \infty$. Нетрудно видеть, что при $\lambda = +\lambda_3$ в прообразе будет одна вещественная окружность.

Для остальных простых областей, лежащих в II, III и V, доказательство аналогично.

3.3.3. Особые уровни интеграла.

ЛЕММА 3.3.3. *При граничных λ , соответствующих выпуклым сегментам, поверхность уровня интеграла в изоэнергетическом многообразии Q^3 может быть гомеоморфна окружностям (одной или двум) или несвязному объединению тора и окружности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данный факт был доказан в лемме 3.3.2 при подробном описании прообразов различных значений λ в изоэнергетическом многообразии Q^3 .

ЛЕММА 3.3.4. *Прообраз малой окрестности седловых значений интеграла λ в многообразии Q^3 гомеоморфен атому B*

Доказательство полностью аналогично доказательству из пункта 3.2.3 за тем исключением, что область расслаивается дуги софокусных гипербола.

3.4. Грубые инварианты Фоменко-Цишанга для простых областей.

Итак, выше мы описали, как в изоэнергетическом многообразии Q^3 выглядят расслоения поверхности уровня всех возможных значений интеграла λ для различных типов простых областей, и тем самым доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.1. *Существует 3 различных грубых инварианта Фоменко-Цишанга для описания бильярдного движения в простой области в метрике Минковского. Они показаны на рис.12*

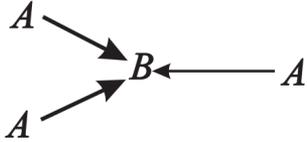
$\begin{matrix} \Psi'_3 & \Psi'_6 & \Psi'_7 \\ \Psi^3 & \Psi^{12} & \\ \Psi_0 & \Psi_6 & \Psi_{12} \end{matrix}$	
$\begin{matrix} \Psi^2 & \Psi^3 & \Psi^4 & \Psi^5 & \Psi^8 & \Psi^9 & \Psi^{10} & \Psi^{11} \\ \Psi_2 & \Psi_3 & \Psi_4 & \Psi_5 & \Psi_8 & \Psi_9 & \Psi_{10} & \Psi_{11} \\ \Psi^3 & \Psi^4 & \Psi^7 & \Psi^8 & \Psi_3 & \Psi_4 & \Psi_7 & \Psi_8 \end{matrix}$	
$\begin{matrix} \Psi'_1 & \Psi'_2 & \Psi'_4 & \Psi'_5 \\ \Psi^1 & \Psi^7 & & \\ \Psi_1 & \Psi_7 & & \\ \Psi^1 & \Psi^2 & \Psi^5 & \Psi^6 & \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_5 & \Psi_6 \end{matrix}$	

Рис. 12. Грубые инварианты Фоменко-Цишанга для разных видов областей.

§ 4. Вычисление инвариантов Фоменко-Цишанга

4.1. Молекула Фоменко-Цишанга - полный инвариант Лиувилле-вой эквивалентности. Для полного описания топологии строения Лиувилля необходимо указать, как склеены между собой регулярные окрестности особых слоев. Необходимо выбрать пару допустимых базисов на граничных торах и указать матрицы перехода от одного базиса к другому. Структура атома задает правило выбора допустимых базисов.

Напомним, на граничном торе атома A в качестве цикла λ выбираем меридиан полнотория, то есть так, чтобы этот цикл стягивался в точку внутри полнотория, а цикл μ должен дополнять его до базиса. В этот случае удобно считать цикл μ слоем расслоения Зейферта. Слои расслоения Зейферта имеют естественную ориентацию, задаваемую гамильтоновым векторным полем. Более точно, один из этих слоев является траекторией рассматриваемого векторного поля, а именно - критическая окружность дополнительного интеграла λ , ось полнотория. Ориентация этого слоя позволяет точно определить ориентацию на цикле μ

В случае седлового атома B этот 3-атом U имеет структуру тривиального S^1 -расслоения на двумерном торе P . В качестве цикла λ_i на каждом из граничных торов T_i возьмем слой этого расслоения. Дополнительные циклы μ_i выберем следующим образом. Рассмотрим произвольное сечение $P \in U$. Оно высекает на каждом граничном торе T_i некоторый цикл μ_i , который и берем в качестве второго базисного цикла на T_i . Ориентация, как и в предыдущем случае, выбирается однозначно.

Итак, в каждой точке ребра есть 2 базиса, которые определяются согласованно с атомами, которые соединяют выбранное ребро. Матрица перехода от одного базиса к другому называется матрицей склейки. Так как допустимые

базисы выбираются не совсем однозначно, то матрица склейки может меняться при замене базиса. Однако по матрице склейки можно определить ряд так называемых чисел-меток, которые не будут меняться при переходе от одного базиса к другому. Опишем правила подсчета этих чисел.

Пусть для выбранного ребра с номером i одна из матриц склейки имеет вид $C_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}$. Сопоставим выбранному ребру следующие метки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.1. Числовой рациональной меткой r_i на ребре i молекулы называется:

$$r_i = \begin{cases} \frac{\alpha_i}{\beta_i} \bmod 1 \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}, & \text{если } \beta_i \neq 0, \\ \infty, & \text{если } \beta_i = 0. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.2. Числовой рациональной меткой ε_i на ребре i молекулы называется:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \text{sign } \beta_i, & \text{если } \beta_i \neq 0, \\ \text{sign } \alpha_i, & \text{если } \beta_i = 0. \end{cases}$$

Назовем бесконечным ребро молекулы с меткой r_i равной ∞ . Остальные ребра будем называть конечными. Разрежем молекулу по всем конечным ребрам. В результате молекула распадается на некоторое число связанных кусков.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.3. Семейей называется кусок молекулы, который не содержит атомов A после разреза молекулы по всем конечным ребрам.

В каждой семье ребра можно разделить на 3 класса : входящие, выходящие и внутренние.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.4. Сопоставим каждому из этих ребер e_i число Θ_i по следующему правилу:

$$\Theta_i = \begin{cases} \lceil \frac{\alpha_i}{\beta_i} \rceil, & \text{если } e_i \text{ - выходящее ребро,} \\ \lfloor -\frac{\delta_i}{\beta_i} \rfloor, & \text{если } e_i \text{ - входящее ребро,} \\ \lfloor -\frac{\gamma_i}{\alpha_i} \rfloor, & \text{если } e_i \text{ - внутреннее ребро.} \end{cases}$$

Тогда для каждой семьи определена целочисленная метка n , определенная по следующему правилу

$$n = \sum \Theta_i$$

где сумма берется по всем ребрам данной семьи.

Числовые метки r, ε, n инварианты относительно допустимых замен базисов на граничных торах (см. леммы 4.5 и 4.6 книги [2])

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.5. Молекула, снабженная метками r, ε, n , называется меченой молекулой или инвариантом Фоменко-Цишанга.

ТЕОРЕМА 4.1. (*А. Т. Фоменко, Х. Цишанг*) Две невырожденные интегрируемые гамильтоновы системы на изоэнергетических поверхностях $Q_1^3 = \{x \in M_1^2 : f_1(x) = c_1\}$ и $Q_2^3 = \{x \in M_2^2 : f_2(x) = c_2\}$ Лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1.1. *А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко.*[2]

1. Молекула $A-A$ всегда задает 3-многообразие, склеенное из двух полноторий. Каждое из этих полноторий стандартным образом расслоено на 2-торы, что и задает слоение всего 3-многообразия на торы Лиувилля. Это слоение имеет ровно 2 особых слоя - окружности, являющиеся осями полноторий.
2. Молекула $A-A$ с меткой $r = 0$ задает трехмерную сферу S^3 .
3. Молекула $A-A$ с меткой $r = \frac{1}{2}$ задает трехмерное проективное пространство $\mathbf{R}P^3$.
4. Молекула $A-A$ с меткой $r = \infty$ задает прямое произведение $S^1 \times S^2$.
5. Молекула $A-A$ с меткой $r = \frac{q}{p}$, где $q < p$ и $p > 3$, задает линзовое пространство $L_{p,q}$.

4.2. Вычисление меток бильярда в простых эллиптических и гиперболических областях.

ЛЕММА 4.2.1. Для каждой из простых областей Ω на рис. 13. приведена ее меченая молекула (называемая инвариантом Фоменко-Цишанга). Она полностью описывает топологию слоения Лиувилля изоэнергетического многообразия Q^3 для бильярдного движения в простой области Ω .

$\Psi'_3 \Psi'_6 \Psi'_7$ $\Psi^6 \Psi^{12}$ $\Psi_0 \Psi_6 \Psi_{12}$	
$\Psi^2 \Psi^3 \Psi^4 \Psi^5 \Psi^8 \Psi^9 \Psi^{10} \Psi^{11}$ $\Psi_2 \Psi_3 \Psi_4 \Psi_5 \Psi_8 \Psi_9 \Psi_{10} \Psi_{11}$ $\Psi^3 \Psi^4 \Psi^7 \Psi^8 \Psi_3 \Psi_4 \Psi_7 \Psi_8$	
$\Psi'_1 \Psi'_2 \Psi'_4 \Psi'_5$ $\Psi^1 \Psi^7$ $\Psi_1 \Psi_7$ $\Psi^1 \Psi^2 \Psi^5 \Psi^6 \Psi_1 \Psi_2 \Psi_5 \Psi_6$	

Рис. 13. Инварианты Фоменко-Цишанга для разных видов областей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай, когда грубый инвариант Фоменко-Цишанга для некоторой области Ω это $A-A$ (напомним, что это все области, внутренность которых не пересекает осей x и y). Как было доказано в пункте 1.5, Q^3 для бильярдного движения в простой области - это сфера S^3 . Тогда, по предложению Фоменко-Болсинова, метка $r = 0$.

Тогда матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \delta \end{pmatrix}$, либо $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \delta \end{pmatrix}$. Метка ε может быть как 1, так и -1 . Однако, в данном случае при смене ориентации ребра метка ε сменит знак. Фиксируем ориентацию так, чтобы метка было 1. Меченая молекула для всех простых областей, внутренность которых не пересекает координатные оси, представлена на рис.13 в 3 строчке.

Для вычисления остальных меток необходимо выбрать циклы на граничных торах в атомах, образующих молекулу. Выбор будем осуществлять следующим образом: предъявим кривую в простой области Ω , которая лежит в проекции данного тора Лиувилля. Поднимая ее до кривой на торе в многообразии Q^3 , покажем, какими векторами скорости мы оснащаем каждую ее точку.

Циклы будем выбрать следующим образом. На торах атома A цикл μ выбирается так, чтобы он стягивался на критическую окружность этого атома, и его ориентация должна быть согласована с ориентацией критической окружности, а цикл λ должен дополнять его до базиса и стягиваться в точку. На торах атома B цикл λ стягивается на критическую окружность этого атома и его ориентация должна быть согласована с ориентацией этой окружности. Цикл μ выберем следующим образом. Рассмотрим отрезок, образованный пересечением внутренности области Ω и одной из координатных прямых (пусть, для определенности, эта прямая - ось x). После оснащения его векторами, направленные либо к правому фокусу, либо от левого, он образует восьмерку, которая является критическим слоем атома B . Для каждого вектора оснащения рассмотрим его окрестность. Получим плоский атом B - сечение трехмерного атома. Это сечение высекает две и одну окружности на торах, расположенных по разные стороны от критической восьмерки. Эти окружности выберем в качестве циклов μ на граничных торах атома B . Ориентация этих циклов должна быть согласована с условием существования глобального сечения

Итак, рассмотрим сначала область Ω , внутренность которой пересекает обе координатные оси. Грубая молекула такой области показана на рис.12 в первой строчке.

Ориентируем ребра так, как показано на рис. 13. Ориентация показывает, от какого базиса к какому осуществляется переход.

Рассмотрим область Ψ_0 . Напомним, особыми уровнями интеграла λ являются $\pm 0, -b, a$.

Сначала рассмотрим 2 ребра, соответствующие уровням интеграла $\lambda \in (-b, 0)$.

На торе атома A в качестве цикла λ выберем отрезок координатной оси y (в самом деле, при стремлении интеграла к -0 он стянется в точку), а в качестве цикла μ - дугу интегрального эллипса. Поскольку этот цикл стягивается на критическую окружность, выберем на нем ориентацию, которая будет согласована с ориентацией критической окружности.

На торе атома B цикл λ выберем как дугу интегрального эллипса, который стянется на особую окружность, соответствующую уровню интеграла $-b$, и ориентацию на нем согласуем с ориентацией особой окружности. В качестве цикла μ возьмем отрезок координатной оси y . В самом деле, окрестность критического слоя атома B высекает два таких цикла на торах с параметром $\lambda \in (-b, 0)$ и один цикл на торе с параметром $\lambda \in (-\infty, -b) \cup (a, \infty) \cup \{\infty\}$,

который является пересечением внутренности области и оси y . Тогда матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Отметим, что при написании матрицы склейки ориентация на цикле μ на торе B и на цикле λ на атоме A фиксировалась так, чтобы определитель матрицы был -1 . Все циклы с ориентацией показаны на рис.14, а. Итак, метки на этих ребрах $r = 0, \varepsilon = 1$.

Рассмотрим ребра, соответствующие значениям интеграла $\lambda \in (0, a)$.

Циклы выбраны, исходя из тех же соображений, что и выше, и показаны на рис.14, б. Поэтому матрица склейки такая же, как и в предыдущем случае, и метки на этих ребрах $r = 0, \varepsilon = 1$.

Теперь рассмотрим ребро, отвечающее значениям интеграла $\lambda \in (-\infty, -b) \cup (a, \infty) \cup \{\infty\}$. Сначала выберем циклы на атоме B , отвечающем значению $-b$. Поскольку цикл μ и его ориентация уже фиксирована выше, осталось выбрать цикл λ , который дополнит его до базиса и стянется на особую окружность атома B . В качестве цикла λ возьмем отрезок координатной прямой x , и согласуем ориентацию с ориентацией особой окружности. Аналогично поступим и с циклами на торе атома B , отвечающего значению интеграла a . На рис.14, с. показаны эти циклы. Матрица склейки $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, и метки будут $r = 0, \varepsilon = -1$.

Метки n вычисляются следующим образом. Для атома B , отвечающего значению $-b$, это будет $n = -\frac{0}{1} - \frac{0}{1} + \frac{0}{-1} = 0$ (поскольку имеем 2 входящих ребра и одно выходящее) Для атома B , отвечающего значению a , это будет $n = -\frac{0}{1} - \frac{0}{1} + \frac{0}{-1} = 0$ (поскольку все ребра входящие).

Итак, инвариант Фоменко-Цишанга для области Ψ_0 показан на рис.13 в первой строчке. Отметим, что для всех простых областей, внутренность которых пересекает обе координатные оси x и y , метки будут одинаковыми, поскольку выбор циклов зависит лишь только от расположения внутренности области относительно осей координат (а не от количества углов или симметричности области). Это же правило действует и в остальных случаях, то есть, достаточно рассмотреть одну область, внутренность которой расположена определенным образом относительно координатных осей.

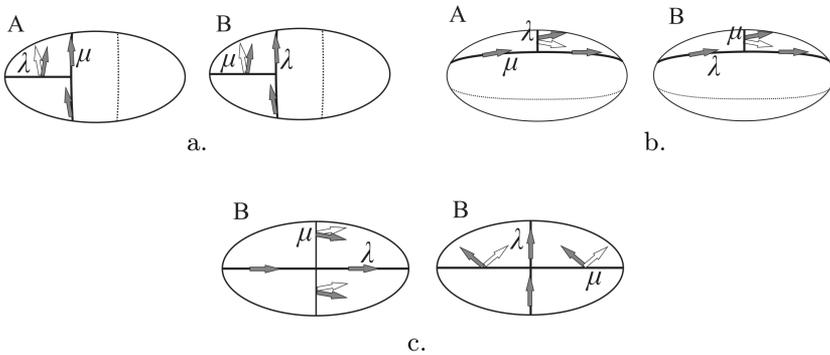


Рис. 14. Выбор циклов на торах области Ψ_0 .

Теперь посчитаем метки для случая, когда внутренность области Ω пересекает только одну координатную ось. Покажем далее, что и для эллиптической, и для гиперболической области они одинаковы.

Как пример эллиптической области возьмем область Ψ_4 (грубая молекула показана на рис. 12 во второй строчке, особыми уровнями интеграла являются $\pm 0, a$).

Сначала рассмотрим ребра, отвечающие значениям интеграла $\lambda \in (0, a)$. Циклы выбираются из тех же соображений, что описаны выше и показаны на рис.15, а. Тогда аналогично, матрица склейки $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а метки $r = 0, \varepsilon = 1$.

Теперь рассмотрим ребро, отвечающее значениям параметра $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (a, \infty) \cup \{\infty\}$. Выберем циклы на торе атома A . Цикл λ - отрезок координатной прямой y , а цикл μ - дуга интегрального эллипса с ориентацией, согласованной с ориентацией особой окружности атома A . Выберем циклы на торе атома B . Цикл μ уже выбран и его ориентация фиксирована (это было проделано в предыдущем пункте). Как цикл λ возьмем пересечение внутренности области и координатной прямой y , и ориентацию этого цикла согласуем с ориентацией особой окружности атома B . Эти циклы показаны на рис.15, б. Матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, а метки $r = \infty, \varepsilon = 1$.

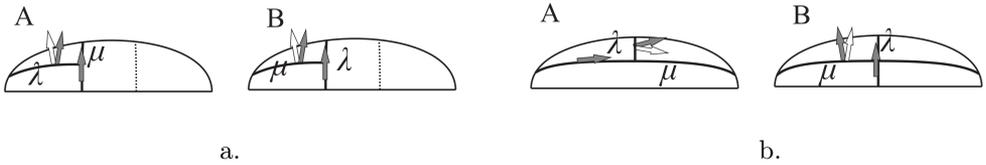


Рис. 15. Выбор циклов на торах области Ψ_4 .

Теперь рассмотрим случай гиперболической области. Покажем, как считаются метки на примере области ψ_4 . Особыми уровнями являются $\pm \lambda_1, a$, где λ_1 - параметр граничной квадрики, выпуклой относительно внутренности области, а λ_2 - параметр граничной квадрики, вогнутой относительно внутренности области. Грубая молекула показана на рис. 12 во второй строчке.

Итак, рассмотрим ребра, соответствующие значениям интеграла $\lambda \in (a, \lambda_1)$. На торе атома A в качестве цикла λ выберем пересечение проекции поверхности уровня интеграла и дуги гиперболы с параметром $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$. Цикл μ выберем как дугу интегральной гиперболы, оснащенная векторами в соответствии с особой окружностью атома A . Поскольку этот же цикл при стремлении интеграла к седловому значению в пределе переходит в особую окружность атома B , то в соответствующем торе его возьмем за цикл λ (ориентируя его в соответствии с особой окружностью атома B), а в качестве цикла μ выберем пересечение проекции поверхности уровня интеграла и дуги гиперболы с параметром $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$. В самом деле, окрестность критического слоя атома B высекает два таких цикла на торах с параметром $\lambda \in (a, \lambda_1)$ и один цикл на торе с параметром $\lambda \in (-\infty, -b) \cup (a, \infty) \cup \{\infty\}$ (который является пересечением

внутренности области и дуги гиперболы с параметром $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$. Эти циклы показаны на рис. 16, а. Тогда матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а метки $r = 0, \varepsilon = 1$. Отметим, что на данном этапе фиксируем ориентацию на цикле μ на торе B и на цикле λ на атоме A так, чтобы определитель матрицы был -1 .

Рассмотрим ребро, соответствующее значениям интеграла $\lambda \in (-\infty, a) \cup (\lambda_1, \infty)$. Цикл μ на торе атома B фиксирован выше вместе с его ориентацией, тогда выберем цикл λ - это будет пересечение внутренности области и координатной прямой y . Поскольку этот цикл стянется на особую окружность атома B , то согласуем ориентацию на нем с ориентацией этой особой окружности. Заметим что этот же цикл при стремлении интеграла к граничному значению стянется в точку, значит, его же выберем в качестве цикла λ на торе атома A (ориентацию выберем позже), а в качестве цикла μ на торе атома A выберем дугу интегральной гиперболы (поскольку он стянется на особую окружность атома A) и ориентируем его в соответствии с ориентацией этой особой окружности. Эти циклы показаны на рис. 16, б.

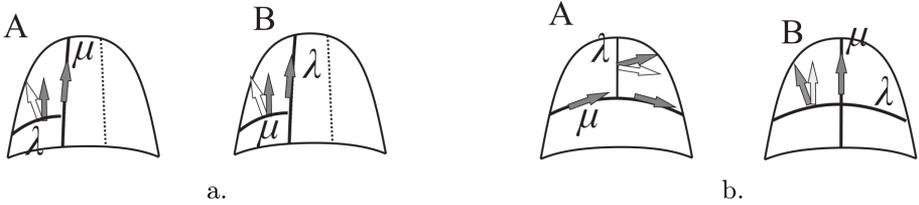


Рис. 16. Выбор циклов на торах области ψ_4 .

Тогда матрица склейки $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, а метки $r = \infty, \varepsilon = 1$.

Итак, для простой области (как эллиптической, так и гиперболической), внутренность которой пересекает только одну из координатных осей, меченая молекула представлена на рис.13 во 2 строчке.

§ 5. Классификация слоений Лиувилля для бильярдного движения в простых областях.

Итак, показано, что для описания бильярдного движения в различных простых областях на плоскости Минковского используются лишь 3 грубые молекулы. Для каждой из таких областей подсчитаны метки и тем самым найдены инварианты Фоменко-Цишанга для всех типов простых областей. Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.1. *Существует 3 различных слоения Лиувилля для плоских бильярдных движений в простых областях в метрике Минковского. Классифицируем их молекулами Фоменко-Цишанга, представленными на рис. 17.*

СЛЕДСТВИЕ 5.0.1.

1. Бильярды в областях, внутренность которых пересекает обе координатные оси, лиувиллево эквивалентны, и слоение лиувилля описывается меченой молекулой а).
2. Бильярды в областях, внутренность которых пересекает одну координатную ось, лиувиллево эквивалентны, и их слоение лиувилля описывается меченой молекулой б).
3. Бильярды в областях, внутренность которых не пересекает осей координат, лиувиллево эквивалентны, и их слоение лиувилля описывается меченой молекулой в).
4. Бильярд в области Ψ_4 (и, соответственно, во всех остальных областях из пункта 2) моделирует случай Жуковского(8) динамики твердого тела [7].
5. Бильярд в области Ψ_1 (и, соответственно, во всех остальных областях из пункта 3) моделирует случаи Эйлера(1) и Лагранжа(1) динамики твердого тела [2].

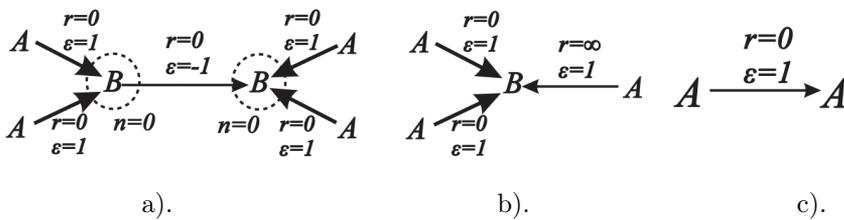


РИС. 17. Инварианты Фоменко-Цишанга для разных видов областей.

Список литературы

- [1] Дж. Д. Биркгоф, *Динамические системы*, Издательский дом «Удмуртский университет», Ижевск, 1999.
- [2] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, **1,2**, НИИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевск, 1999.
- [3] В. Драгович, М. Раднович, “Топологические инварианты эллиптических бильярдov и геодезических потоков на эллипсоиде”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **20**, № 3, 2015, 51–64.
- [4] В. В. Козлов, Д. В. Трещёв, *Генетическое введение в динамику систем с ударами*, Изд-во МГУ, М., 1991.
- [5] В. В. Фокичева, “Топологическая классификация бильярдov в локально-плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик”, *Математический Сборник*, **206**, № 10, 2015, 127–176.
- [6] E. Gutkin, “Billiard dynamics: a survey with the emphasis on open problems”, *Regul. and Chaotic Dyn.*, **8**, № 1, 2003, 1–13.
- [7] А. А. Oshemkov, А. Т. Fomenko, “Invariants of the Main Integrable Cases of the Rigid Body Motion Equations”, *Advances in Soviet Mathematics*, AMS, **6**, 1991, 67–146.

Е. Е. Каргинова (E. E. Karginova)

каф. дифференциальной геометрии и приложений
мех.-мат. ф-та МГУ

E-mail: karginov13@gmail.com